

# El potencial gravitatorio

---

Manuel Berrocoso Domínguez  
José Manuel Enríquez de Salamanca García



**UCA**

Universidad  
de Cádiz

Servicio de Publicaciones

# EL POTENCIAL GRAVITATORIO



# EL POTENCIAL GRAVITATORIO

Manuel Berrocoso Domínguez  
José Manuel Enríquez de Salamanca García

2006



Servicio de Publicaciones

© Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz  
Manuel Berrocoso Domínguez, José Manuel Enríquez de Salamanca García

Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz  
C/ Doctor Marañón, nº 3. 11002 Cádiz (España)  
[www.uca.es/publicaciones](http://www.uca.es/publicaciones)

ISBN-13: 978-84-9828-044-9

ISBN-10: 84-9828-044-3

Depósito Legal: CA-361/06

# Indice

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. Considerandos</b>  | <b>1</b> |
| 1.1. Notación y definiciones básicas . . . . .                               | 1        |
| 1.2. Operaciones principales de la teoría de campo . . . . .                 | 4        |
| 1.2.1. Formas diferenciales de primer orden . . . . .                        | 4        |
| 1.2.2. Coordenadas curvilíneas ortogonales . . . . .                         | 5        |
| 1.2.3. Gradiente de un campo escalar . . . . .                               | 6        |
| 1.2.4. Divergencia de un campo vectorial . . . . .                           | 8        |
| 1.2.5. Laplaciano de un campo escalar . . . . .                              | 11       |
| 1.3. Integración . . . . .   | 13       |
| 1.3.1. Integración paramétrica . . . . .                                     | 13       |
| 1.3.2. Integrales impropias . . . . .  | 14       |
| 1.3.3. Teoremas integrales clásicos del análisis vectorial . . . . .         | 19       |
| 1.4. Funciones esféricas . . . . .   | 25       |
| 1.4.1. Problemas de valores propios . . . . .                                | 25       |
| 1.4.2. Desarrollo del inverso de la distancia . . . . .                      | 29       |
| 1.4.3. Propiedades de los polinomios de Legendre . . . . .                   | 32       |
| 1.4.4. Ecuación de Legendre . . . . .  | 36       |
| 1.4.5. Ortogonalidad y norma de los polinomios de Legendre . . . . .         | 38       |
| 1.4.6. Completitud de los polinomios de Legendre . . . . .                   | 39       |
| 1.4.7. Funciones adjuntas de Legendre . . . . .                              | 40       |
| 1.4.8. Ortogonalidad y norma de las funciones adjuntas de Legendre . . . . . | 42       |
| 1.5. Ecuación de Laplace . . . . .   | 43       |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 1.5.1.    | Resolución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas                         | 43        |
| 1.5.2.    | Comportamiento de los armónicos esféricos . . . . .                                   | 47        |
| 1.5.3.    | Ortogonalidad del sistema de funciones esféricas. . . . .                             | 47        |
| 1.5.4.    | Otro desarrollo para el inverso de la distancia . . . . .                             | 51        |
| <b>2.</b> | <b>Teoría del potencial gravitatorio</b>  | <b>53</b> |
| 2.1.      | De las masas puntuales al continuo . . . . .  | 53        |
| 2.2.      | Convergencia, continuidad y derivabilidad del potencial y campo gravitatorio. . . . . | 58        |
| 2.3.      | Fórmulas integrales y potencial gravitatorio . . . . .                                | 69        |
| 2.4.      | Comportamiento del potencial gravitatorio en el infinito . . . . .                    | 70        |
| 2.5.      | Flujo del campo gravitatorio . . . . .  | 71        |
| 2.5.1.    | Revisión del concepto de ángulo sólido . . . . .                                      | 71        |
| 2.5.2.    | Flujo del campo gravitatorio generado por distintas distribuciones de masa . . . . .  | 73        |
| <b>3.</b> | <b>Casos particulares de distribuciones de masas activas</b>                          | <b>77</b> |
| 3.1.      | Potencial de capa simple . . . . .  | 78        |
| 3.1.1.    | Convergencia y continuidad del potencial de capa simple . . . . .                     | 78        |
| 3.2.      | Potencial de capa doble . . . . .   | 82        |
| 3.2.1.    | Convergencia y continuidad del potencial de capa doble . . . . .                      | 84        |
| 3.2.2.    | Derivabilidad del potencial de capa simple . . . . .                                  | 88        |
| 3.3.      | Campo producido por una capa esférica . . . . .                                       | 91        |
| 3.4.      | Potencial y fuerza gravitatoria en diversas distribuciones . . . . .                  | 92        |
| 3.4.1.    | Campo generado por una distribución esférica radial . . . . .                         | 92        |
| 3.4.2.    | Campo producido por una capa esférica de espesor finito . . . . .                     | 98        |
| 3.4.3.    | Campo producido por una esfera preñada . . . . .                                      | 101       |
| 3.4.4.    | Potencial gravitatorio generado por un prisma. . . . .                                | 109       |
| 3.4.5.    | Potencial generado por un cilindro . . . . .  | 115       |
| 3.4.6.    | Potencial generado por un cono . . . . .  | 119       |

# Prólogo

La teoría del potencial gravitatorio es ya todo un clásico entre los problemas de la física matemática, aunque aún no se encuentra, con suficiente frecuencia, un tratamiento exhaustivo y formal en la diversa bibliografía existente sobre este tema.

El estudio de este problema, así como el de otros muchos de la física matemática, condujo a una clasificación de los diversos planteamientos y a un desarrollo de las herramientas matemáticas utilizadas: cálculo vectorial, variable compleja, ecuaciones en derivadas parciales, así como integración impropia de funciones con ciertas singularidades, entre otras.

La complejidad de las leyes elaboradas por Kepler, a partir de las observaciones realizadas por Tycho Brahe, sobre el movimiento de los planetas, llevará, más adelante, a Newton a la formalización de estas leyes empíricas en la *Ley de Gravitación Universal*, que expuso en su obra monumental "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*", publicada en 1687 y comúnmente conocida como "Principia".

Esta ley permitió extender los dominios de la razón a todos los rincones del Sistema Solar, siendo capaz de explicar, entre otras cosas, las mareas, como atracción luni-solar; las órbitas de los cometas; las perturbaciones entre los planetas; el achatamiento del globo terrestre; la precesión de los equinoccios por la atracción del Sol sobre el abultamiento ecuatorial terrestre, etc.

Desde la publicación de la Ley Gravitacional hasta comienzos de este siglo, esta teoría permaneció inalterada y sin desafío alguno. No es hasta comienzos del siglo pasado cuando la evidencia experimental de ciertos fenómenos físicos entran en conflicto con las teorías newtonianas. Así, por ejemplo, la teoría gravitacional falla en los cálculos realizados a escala atómica y galáctica. Ello produjo una profunda crisis en la Física hasta que Bohr y Einstein crearon nuevos conceptos y paradigmas con los que desarrollaron las teorías que compiten con la física de Newton: las teorías no newtonianas de la Mecánica Cuántica y de la Relatividad General.

Fue Laplace quien sugerirá sustituir la formulación explícita de las fuerzas atractivas entre dos cuerpos por la ecuación diferencial que verifica un campo escalar asociado a este campo vectorial: el potencial gravitatorio. La introducción de este potencial sustituye el problema de interacción entre dos cuerpos reales por la “interacción a corta distancia” entre puntos vecinos del espacio en el que suponemos definido, artificialmente, un campo escalar.

Al margen del planteamiento laplaciano, en este texto se realiza una revisión y un estudio clásico del potencial gravitatorio basado, casi exclusivamente, en el estudio de las propiedades de su expresión integral.

En el capítulo 1, el estudio teórico de la teoría de campos, de integración paramétrica e impropia y de un tipo especial de funciones ortogonales, las funciones esféricas, tiene como objetivo principal formar un compendio de matemáticas apropiado a la disciplina a tratar en este trabajo.

El capítulo 2 es una revisión histórica sobre el tratamiento de la teoría del potencial gravitatorio antes del planteamiento laplaciano de realizar el estudio de las propiedades de este campo teniendo en cuenta que viene caracterizado por una función que, fuera de las masas atrayentes, es armónica y, fuera, verifica la ecuación de Poisson. En él se define el potencial volumétrico y se estudian sus propiedades de continuidad y diferenciabilidad en todo el espacio, llegándose a la conclusión de que esta función verifica muy buenas propiedades, incluso en aquellos puntos de  $\mathbb{R}^3$  en los que la densidad es discontinua. Se hace, también, una revisión del concepto de ángulo sólido y su relación, desde un punto de vista matemático, con el concepto de flujo gravitatorio.

El capítulo 3 se estudia un tipo de distribuciones teóricas de gran importancia y aplicabilidad: los potenciales de superficie. A diferencia de las distribuciones volumétricas, en esta ocasión, las propiedades analíticas de la función potencial no son tan buenas. Así pues, veremos que el potencial de capa doble es discontinuo en los puntos de la superficie en la que se concentran las masas, mientras que, en el caso del potencial de capa simple, las discontinuidades se presentan en sus derivadas normales. Abordaremos, también, el problema directo del potencial gravitatorio, consistente en determinar el campo generado por una determinada distribución de masas. Se estudian los campos generados por un prisma, un cilindro, un cono y otros cuerpos de simetría esférica como la “esfera preñada” y una particularización de ésta: la capa esférica de espesor finito.

# Capítulo 1

## Considerandos

En este capítulo se presentan las nociones y los resultados básicos para un buen desarrollo y comprensión de la teoría del potencial gravitatorio. Comenzaremos con un breve repaso de cálculo vectorial, presentando las expresiones en coordenadas curvilíneas de las principales operaciones de la teoría del campo vectorial. A continuación, una sección dedicada a la integración paramétrica e impropia nos permitirá, en el siguiente capítulo, justificar la convergencia y otras propiedades analíticas de la función potencial. Por último, la geometría esferoidal de los principales planteamientos prácticos de la teoría del potencial aconseja la utilización de un determinado tipo de funciones: las funciones esféricas, utilizadas en la resolución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. La búsqueda de una solución a esta ecuación está justificada, en este capítulo, por dos motivos; además de su belleza, introduce de manera natural este tipo de funciones que serán empleadas, en el último capítulo, para la determinación del potencial generado por varias distribuciones geométricas con simetría esférica.

### 1.1. Notación y definiciones básicas

Consideremos el espacio euclídeo  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , definido por:

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \in \mathbb{R}, -\infty < x_k < \infty, 1 \leq k \leq n\}.$$

**Definición 1.1.** *Dados dos puntos  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , decimos que  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  si  $x_k = y_k$  para cada  $1 \leq k \leq n$ .*

**Teorema 1.1.** *Dadas las leyes de composición:*

- *ley de composición interna,  $+$  :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , definida para cada  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in$*

$\mathbb{R}^n$  por  $+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$  y denotada como  $+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ ,

- ley de composición externa,  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por  $\cdot(\alpha, \mathbf{x}) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$  y denotada  $\cdot(\alpha, \mathbf{x}) = \alpha \cdot \mathbf{x}$ , para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,

se tiene que  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ .

**Definición 1.2.** Dados  $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $\Gamma = \{E\}$  una familia de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , definimos:

- I.  $\bigcup_{E \in \Gamma} E = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E \text{ para algún } E \in \Gamma\}$ .
- II.  $\bigcap_{E \in \Gamma} E = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E \text{ para cada } E \in \Gamma\}$ .
- III.  $CE_1 = E_1^c = \mathbb{R}^n - E_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{x} \notin E_1\}$  y lo llamamos **complementario** de  $E_1$ .
- IV.  $E_1 - E_2 = E_1 \cap E_2^c$  y lo llamamos **diferencia** de  $E_1$  y  $E_2$  o el **complemento relativo** de  $E_2$  en  $E_1$ .

**Definición 1.3.** Dados  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , se define el **producto escalar** entre ambos como:

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Es fácil probar que:

- I.  $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{x}$  para cada  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .
- II.  $\alpha \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \bullet \mathbf{y})$  para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .
- III.  $\mathbf{x} \bullet (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} + \mathbf{x} \bullet \mathbf{z}$  para cada  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ .

Como además,  $\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} \geq 0$  para cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , podemos definir la **longitud** de  $\mathbf{x}$ , **norma euclídea** o **módulo** como:  $\|\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x} \bullet \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ .

**Teorema 1.2.** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Dados  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  se verifica que:

$$|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2.$$

**Definición 1.4.** Dados  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , se define la distancia euclídea entre ambos como:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Teorema 1.3.**  $(\mathbb{R}^n, d)$  verifica las características de un espacio métrico:

- I.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  para cada  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .
- II.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$  y  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  para cada  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .
- III.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$  para cada  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  (desigualdad triangular).

**Definición 1.5.** Si  $\{\mathbf{x}_k\}_k$  es una sucesión de puntos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces decimos que  $\{\mathbf{x}_k\}_k$  converge a  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , o que  $\mathbf{x}$  es el límite de la sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}_k$ , si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  de modo que para todo  $k \geq N$  se verifica que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_2 < \varepsilon$ . Lo denotaremos  $\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_k$ .

**Definición 1.6.** Una sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}_k$  es de **Cauchy** si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  de modo que para cada par de naturales  $n, m \geq N$ , es  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_2 < \varepsilon$ .

**Definición 1.7.** Un espacio métrico es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente a un elemento del espacio.

**Teorema 1.4.**  $(\mathbb{R}^n, d)$  es un espacio métrico completo.

**Definición 1.8.** Si  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , definimos el **diámetro** de  $E$  como:

$$\delta(E) = \text{diam}(E) = \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E\}.$$

Si el diámetro es finito, decimos que  $E$  es **acotado**.

**Definición 1.9.** En  $\mathbb{R}^n$  se definen:

- I. La **bola cerrada** de centro  $\mathbf{x}$  y radio  $R$ :  $S(\mathbf{x}; R) = S_R(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq R\}$ .
- II. La **frontera** de  $S_R(\mathbf{x})$ :  $\partial S(\mathbf{x}; R) = \partial S_R(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R\}$ .
- III. La **bola abierta** de centro  $\mathbf{x}$  y radio  $R$ :  $B(\mathbf{x}; R) = B_R(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < R\}$ .

Es evidente que  $S_R(\mathbf{x}) = B_R(\mathbf{x}) \cup \partial S_R(\mathbf{x})$ .

## 1.2. Operaciones principales de la teoría de campo

### 1.2.1. Formas diferenciales de primer orden

Sea  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$  y  $\|\cdot\|_2$  la norma euclídea definida anteriormente. Para cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  será  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$ , y escribiremos  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Sea  $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la  $i$ -ésima proyección canónica definida para cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  por  $\pi_i(\mathbf{x}) = x_i$ . Es claro que  $\pi_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , es decir, es una forma lineal y, por tanto, será diferenciable para cada  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  siendo  $d\pi_i(\mathbf{x}^0) = dx_i = \pi_i$  para cada  $1 \leq i \leq n$ ,  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ . Se ha denotado  $d\pi_i(\mathbf{x}^0) = dx_i$  al ser la diferencial independiente del punto  $\mathbf{x}^0$  considerado. Es fácil ver, además, que  $\{dx_i\}_i$  es base de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .

Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $\mathbf{x}^0 \in U$ . Se verifica que  $df(\mathbf{x}^0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  existiendo  $\{a_j\}_j \subset \mathbb{R}$  de modo que  $df(\mathbf{x}^0) = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ . Evaluando en cada elemento de la base considerada en un principio, es  $df(\mathbf{x}^0)(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_i dx_i(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j$ , donde  $df(\mathbf{x}^0)(\mathbf{e}_j)$  coincide con la derivada direccional de  $f$  según la dirección  $\mathbf{e}_j$  y que será denotada por  $df(\mathbf{x}^0)(\mathbf{e}_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0)$ . De este modo,  $df(\mathbf{x}^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) dx_i$ .

Consideremos en  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , la norma definida por:

$$\|u\|_2 = \sup\left\{\frac{|u(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|_2} : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{0\}\right\} = \sup\{|u(\mathbf{x})| : \forall \mathbf{x} \in \partial S(0; 1)\}$$

para cada  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .

Es fácil ver que los dos espacios normados  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$  y  $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$  son canónicamente isomorfos e isométricos. Basta considerar  $T : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  de modo que para cada  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , si  $a_i = u(\mathbf{e}_i)$  para  $1 \leq i \leq n$ ,  $T(u) = \mathbf{a}_u = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . De igual modo, si  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $T^{-1}(\mathbf{a}) = u_{\mathbf{a}}$  estará definido, para cada  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ , por  $u_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ .

Si  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es un abierto y  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $\mathbf{x}^0 \in U$ , entonces podemos asociar a  $df(\mathbf{x}^0)$ , por el isomorfismo anterior,  $T(df(\mathbf{x}^0)) = \mathbf{a}_{df(\mathbf{x}^0)} \in \mathbb{R}^n$ , siendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{df(\mathbf{x}^0)} &= (df(\mathbf{x}^0)(\mathbf{e}_1), df(\mathbf{x}^0)(\mathbf{e}_2), \dots, df(\mathbf{x}^0)(\mathbf{e}_n)) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0)\right) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

### 1.2.2. Coordenadas curvilíneas ortogonales

Sea  $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  un sistema de referencia cartesiano ortogonal tal que para cada  $P \in \mathbb{R}^3$  existen  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , únicos, de modo que  $\mathbf{r}_{OP} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ , siendo  $\mathbf{r}_{OP}$  el vector con origen  $O$  y extremo  $P$ . Supongamos que todo punto  $P \in \mathbb{R}^3$  lo expresamos en función de tres nuevas variables  $u = (u_1, u_2, u_3)$  existiendo una relación funcional suprayectiva  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $\phi(u) = (x(u), y(u), z(u))$  diferenciable con continuidad en el abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  y tal que el determinante jacobiano:

$$J_\phi(\mathbf{x}^0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}_{\mathbf{x}^0} \neq 0,$$

para cada  $\mathbf{x}^0 \in U \subseteq \mathbb{R}^3$ .

El teorema de la función inversa nos garantiza que  $\phi$  es un homeomorfismo, pudiendo escribir:

$$u = (u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), u_3(x, y, z)) = \phi^{-1}(x, y, z).$$

En estas condiciones, diremos que  $(\phi, U)$  define un sistema de coordenadas curvilíneas.

**Definición 1.10.** Sea  $P^0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0) \in \mathbb{R}^3$ . Llamamos superficie coordenada asociada al punto  $P^0$  a cada superficie

$$S_i = \{(x, y, z) : u_i(x, y, z) = u_i^0\},$$

para  $1 \leq i \leq 3$ , y línea coordenada asociada al punto  $P^0$  a cada línea intersección, dos a dos, de las superficies anteriores:

$$\Gamma_i = \{(x, y, z) : u_j(x, y, z) = u_j^0, u_k(x, y, z) = u_k^0\} = S_j \cap S_k,$$

con  $1 \leq i, j, k \leq 3$ ;  $i \neq j, k$ ;  $j \neq k$ .

La terminología de coordenadas curvilíneas queda justificada si tenemos en cuenta que, en general, las líneas coordenadas no serán rectas. Consideremos, para cada  $P^0 \in \mathbb{R}^3$ , la terna de vectores unitarios  $\{\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0\}$  definidos por  $h_i \mathbf{e}_i^0 = \frac{\partial \phi}{\partial u_i}(P^0)$ , con  $h_i = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u_i}(P^0) \right\|_2$ , para  $1 \leq i \leq 3$ .

**Definición 1.11.** Decimos que un sistema curvilíneo,  $(\phi, U)$ , es **ortogonal** si los vectores  $\{\mathbf{e}_i^0\}_i$  son ortogonales para cada  $P^0 \in \mathbb{R}^3$ , es decir,  $\mathbf{e}_i^0 \bullet \mathbf{e}_j^0 = \delta_{ij}$ , para  $1 \leq i, j \leq 3$ .

**Definición 1.12.** Llamamos **factores de escala** a las constantes  $\{h_i\}_i$ .

**Teorema 1.5.** Los vectores  $\{\mathbf{e}_i^0\}_i$  son unitarios y tangentes a las líneas coordenadas  $\{\Gamma_i\}_i$  para cada  $P^0 \in U$ .

Finalmente, al ser  $\phi$  diferenciable en cada punto  $P^0 \in U$ , será:

$$\begin{aligned} d\phi(P^0) &= \frac{\partial\phi}{\partial u_1}(P^0)du_1 + \frac{\partial\phi}{\partial u_2}(P^0)du_2 + \frac{\partial\phi}{\partial u_3}(P^0)du_3 \\ &= h_1du_1\mathbf{e}_1^0 + h_2du_2\mathbf{e}_2^0 + h_3du_3\mathbf{e}_3^0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

### 1.2.3. Gradiente de un campo escalar

Si  $V$  es un dominio arbitrario en el espacio, entonces se dice que en dicho dominio hay dado un **campo escalar** si a todo punto  $P \in V$  se le asigna, según una ley conocida, cierto escalar  $\Psi(P)$ .

Basta notar que el concepto de campo escalar y el de una función definida en el dominio  $V$  coinciden, de manera que, por regla general, se considera que un campo escalar se define con ayuda de una función  $\Psi = \Psi(P)$ .

Por todo esto, la diferenciabilidad de un campo escalar puede entenderse como diferenciabilidad de la función que define dicho campo.

**Definición 1.13.** Sea  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  un abierto y  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar diferenciable en  $V$ . Se define el vector **gradiente** de  $\Psi$  en  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in V$  como:

$$\nabla\Psi(\mathbf{x}^0) = T(d\Psi(\mathbf{x}^0)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Psi}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n,$$

siendo  $T$  el isomorfismo canónico entre  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  y  $\mathbb{R}^n$ .

Veamos ahora el significado geométrico del vector gradiente.

**Teorema 1.6.** Sea  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  abierto,  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}$  campo escalar diferenciable en  $V$ . Para cada  $\mathbf{x}^0 \in V$  y para cada  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$  es:

$$|d\psi(\mathbf{x}^0)(\mathbf{h})| \leq \|\nabla\Psi(\mathbf{x}^0)\|_2\|\mathbf{h}\|_2.$$

Demostración. Si  $\mathbf{h} = 0$  es  $d\psi(\mathbf{x}^0)(0) = 0$  y la desigualdad es evidente. Por el contrario, si  $\mathbf{h} \neq 0$ , teniendo en cuenta la desigualdad de Cauchy-Schwarz, teorema 1.2:

$$|d\psi(\mathbf{x}^0)(\mathbf{h})| = \left| \sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \right| \leq \left( \sum_{i=1}^3 h_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi^2}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}^0) \right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{h}\|_2 \|\nabla \Psi(\mathbf{x}^0)\|_2.$$

Teniendo en cuenta el resultado anterior, las derivadas direccionales, según la dirección  $\mathbf{h} \in \partial S(0; 1)$ , estarán acotadas superiormente por  $\|\nabla \Psi(\mathbf{x}^0)\|_2$ , siendo esta cota alcanzable para  $\mathbf{h}_0 = \nabla \Psi(\mathbf{x}^0) / \|\nabla \Psi(\mathbf{x}^0)\|_2$ , si  $\nabla \Psi(\mathbf{x}^0) \neq 0$ . El significado geométrico de este resultado es que  $\mathbf{h}_0$  determina la dirección y el sentido en el que las derivadas direccionales sobre  $\Psi$  son máximas, mientras que  $-\mathbf{h}_0$  determina la dirección y sentido en el que se minimiza la derivada direccional.

**Teorema 1.7.** Sea  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  abierto y  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar diferenciable en  $V$ . Para cada  $\mathbf{x}^0 \in V$ ,  $\nabla \Psi(\mathbf{x}^0)$  es perpendicular a la superficie de nivel  $\Psi_{\mathbf{x}^0} = \Psi^{-1}(\Psi(\mathbf{x}^0)) \cap V$ .

Demostración. Sea  $\mathbf{h} \in T_{\Psi}(\mathbf{x}^0)$ , siendo  $T_{\Psi}(\mathbf{x}^0)$  el plano tangente a la superficie de nivel  $\Psi_{\mathbf{x}^0}$  en  $\mathbf{x}^0$ . Existirán  $\{\mathbf{x}^n\}_n \subset \Psi_{\mathbf{x}^0} - \{\mathbf{x}^0\}$  y  $\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{R}$  de modo que:

- I.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}^n = \mathbf{x}^0$ .
- II.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0) = \mathbf{h}$ .

Por definición de diferencial,  $\Psi(\mathbf{x}^n) - \Psi(\mathbf{x}^0) - d\Psi(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0) = o(\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0\|_2)$ , y existirá  $\{\alpha_n\}_n \subset \mathbb{R}$  convergente a cero de modo que, al ser  $\Psi(\mathbf{x}^n) = \Psi(\mathbf{x}^0)$ ,  $-d\Psi(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0) = \alpha_n \|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0\|_2$ .

Por la linealidad y continuidad del operador diferencial, la continuidad de la norma y teniendo en cuenta el isomorfismo entre  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  y  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \nabla \Psi(\mathbf{x}^0) \bullet \mathbf{h} &= d\Psi(\mathbf{x}^0)(\mathbf{h}) = d\Psi(\mathbf{x}^0) \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n d\Psi(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \lambda_n \|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0\|_2 \\ &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \text{signo}(\lambda_n) \|\lambda_n(\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0)\|_2 = -\|\mathbf{h}\|_2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \text{signo}(\lambda_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

siendo:

$$\text{signo}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Consideremos  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $\phi(u) = (x(u), y(u), z(u))$ , y  $U$  abierto en  $\mathbb{R}^3$ , definiendo un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales y sea  $\Psi^* = \Psi \circ \phi$ , diferenciable en  $U$ . Para cada  $P^0 \in U$  sea  $\{\mathbf{e}_i^0\}_i$  la base ortonormal asociada al punto  $P^0$  por el homeomorfismo  $\phi$ .

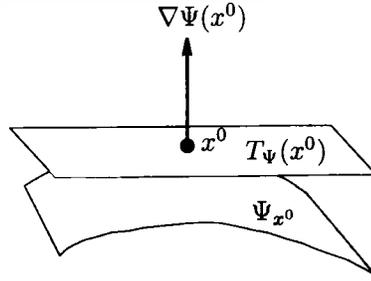


Figura 1.1: Ortogonalidad del vector gradiente en cada punto de la superficie de nivel  $\Psi = \Psi(x^0)$ .

Tendremos que existen  $\{\Psi_i\}_i \subset \mathbb{R}$  de modo que  $\nabla\Psi^*(P^0) = \sum_{i=1}^3 \Psi_i \mathbf{e}_i^0$ . Aplicando la regla de la cadena, teniendo en cuenta que  $\{\mathbf{e}_1^0\}_i$  es un sistema ortonormal y la expresión (1.1):

$$d\Psi^*(P^0) = d\Psi(\phi(P^0)) \circ d\phi(P^0) = \left( \sum_{i=1}^3 \Psi_i \mathbf{e}_i^0 \right) \bullet \left( \sum_{i=1}^3 h_i du_i \mathbf{e}_i^0 \right) = \sum_{i=1}^3 \Psi_i h_i du_i.$$

Por otro lado, debe ser  $d\Psi^*(P^0) = \sum_{i=1}^3 \partial\Psi^*/\partial u_i(P^0) du_i$ , de modo que igualando las dos expresiones anteriores y teniendo en cuenta que  $\{du_i\}$  es base de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , obtenemos el gradiente de un campo escalar en coordenadas curvilíneas:

$$\nabla\Psi^*(P^0) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial\Psi^*}{\partial u_i}(P^0) \mathbf{e}_i^0. \quad (1.2)$$

#### 1.2.4. Divergencia de un campo vectorial

El concepto de campo vectorial se introduce por analogía completa con el de campo escalar; así, si a todo punto  $P$  de un cierto dominio  $V$  se le asigna, según una ley conocida, cierto vector  $\mathbf{F}$ , suele decirse que en el dominio  $V$  viene dado un **campo vectorial**. En este caso, diremos que un campo vectorial se define con ayuda de una función vectorial  $\mathbf{F}(P)$ .

**Definición 1.14.** Sea  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  abierto y  $F \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^3)$ ,  $F = (F_1, F_2, F_3)$ . Se define la **divergencia** de  $F$  como:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F) : V \subseteq \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x^0 &\longrightarrow \operatorname{div}(F)(x^0) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x^0). \end{aligned}$$

Es fácil demostrar la linealidad del operador  $div : C^1(V, \mathbb{R}^3) \rightarrow C(V, \mathbb{R}^3)$ .

**Teorema 1.8.** *Sea  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  abierto,  $f \in C^1(V, \mathbb{R})$  y  $F \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$ . Entonces:*

$$div(fF) = \nabla f \bullet F + f div(F).$$

Demostración. Por definición, si  $F = (F_1, F_2, F_3)$ , aplicando la regla de derivación de un producto para cada  $\mathbf{x}^0 \in V$ :

$$\begin{aligned} div(fF)(\mathbf{x}^0) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(fF_i)}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) F_i(\mathbf{x}^0) + f(\mathbf{x}^0) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \\ &= \nabla f(\mathbf{x}^0) \bullet F(\mathbf{x}^0) + f(\mathbf{x}^0) div(F)(\mathbf{x}^0). \end{aligned}$$

■

Si denotamos por  $\times$  el producto vectorial de dos vectores y si  $F, G : V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  son dos campos vectoriales, podemos definir un nuevo campo como:

$$F \times G : \begin{array}{l} V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x^0 \rightarrow (F \times G)(x^0) = F(x^0) \times G(x^0) \end{array}$$

De igual modo, si  $\nabla$  es el operador gradiente, también llamado de Hamilton, y si  $\{\mathbf{e}_i\}_i$  es la base euclídea, entonces se puede definir un nuevo campo vectorial  $\nabla \times F : V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que para cada  $\mathbf{x}^0 \in V$  sea:

$$\nabla \times F(\mathbf{x}^0) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}_{\mathbf{x}^0},$$

donde la expresión del último miembro debe entenderse como una regla mnemotécnica para poder obtener, desde un punto de vista operacional, el campo vectorial anterior por medio del determinante. Con la notación que acabamos de introducir, es fácil demostrar los siguientes resultados.

**Teorema 1.9.** *Si  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  abierto y  $F, G \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$ , entonces:*

$$div(F \times G) = G \bullet (\nabla \times F) - F \bullet (\nabla \times G).$$

**Teorema 1.10.** *Si  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  abierto y  $\Psi \in C^2(V, \mathbb{R})$ , entonces  $\nabla \times \nabla \Psi = 0$ .*

Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  abierto y  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  definiendo un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales. Podemos asociar a  $\phi$  tres campos vectoriales  $\phi_i : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definidos par cada  $P^0 \in U$  como  $\phi_i(P^0) = \mathbf{e}_i^0$ .

Si consideramos las funciones escalares  $\Psi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas como  $\Psi_i(\mathbf{u}) = u_i$  para  $1 \leq i \leq 3$ , según (1.2), su gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales, para  $P^0 \in U$ , viene dado por  $\nabla \Psi_i(P^0) = 1/h_i \cdot \mathbf{e}_i^0 = \phi_i(P^0)/h_i$ , donde  $h_i = \|\partial\phi/\partial u_i(P^0)\|_2$  es el factor de escala asociado a la coordenada curvilínea  $u_i$ . De este modo, al definir  $\{\mathbf{e}_i^0\}$  un sistema directo en cada punto, debe ser:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_2 \times \phi_3 = h_2 h_3 (\nabla \Psi_2 \times \nabla \Psi_3), \\ \phi_2 &= \phi_3 \times \phi_1 = h_3 h_1 (\nabla \Psi_3 \times \nabla \Psi_1), \\ \phi_3 &= \phi_1 \times \phi_2 = h_1 h_2 (\nabla \Psi_1 \times \nabla \Psi_2).\end{aligned}\tag{1.3}$$

Sea  $F \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^3)$  campo vectorial de modo que  $\phi(U) \subseteq V$ . Definamos un nuevo campo vectorial,  $F^* = F \circ \phi$ . Pretendemos determinar  $\text{div}(F^*)$  en este nuevo sistema de coordenadas. Para cada  $P^0 \in U$  debe ser:

$$F^*(P^0) = \sum_{i=1}^3 F_i^* \mathbf{e}_i^0 = \sum_{i=1}^3 F_i^* \phi_i(P^0)$$

y, por la linealidad de la divergencia:

$$\text{div}(F^*)(P^0) = \sum_{i=1}^3 \text{div}(F_i^* \phi_i)(P^0).$$

Si tenemos en cuenta (1.3):

$$\begin{aligned}\text{div}(F^*) &= \text{div}(F_1^* h_2 h_3 (\nabla \Psi_2 \times \nabla \Psi_3)) + \text{div}(F_2^* h_3 h_1 (\nabla \Psi_3 \times \nabla \Psi_1)) + \\ &\quad + \text{div}(F_3^* h_1 h_2 (\nabla \Psi_1 \times \nabla \Psi_2)),\end{aligned}$$

y consideramos el teorema 1.8, particularizado para  $i = 1$ , tendremos que:

$$\text{div}(F_1^* h_2 h_3 (\nabla \Psi_2 \times \nabla \Psi_3)) = \nabla(F_1^* h_2 h_3) \bullet [\nabla \Psi_2 \times \nabla \Psi_3] + F_1^* h_2 h_3 \text{div}(\nabla \Psi_2 \times \nabla \Psi_3).$$

Teniendo en cuenta los teoremas 1.9 y 1.10 y razonando de manera análoga para  $i \in \{2, 3\}$  se llega a:

$$\text{div}(F^*) = \nabla(F_1^* h_2 h_3) \bullet \frac{1}{h_2 h_3} \phi_1 + \nabla(F_2^* h_1 h_3) \bullet \frac{1}{h_1 h_3} \phi_2 + \nabla(F_3^* h_1 h_2) \bullet \frac{1}{h_1 h_2} \phi_3.$$

Si consideramos, ahora, la expresión (1.2) del gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales:

$$\nabla(F_1^* h_2 h_3) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(F_1^* h_2 h_3)}{\partial u_1} \mathbf{e}_1^0 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial(F_1^* h_2 h_3)}{\partial u_2} \mathbf{e}_2^0 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial(F_1^* h_2 h_3)}{\partial u_3} \mathbf{e}_3^0,$$

$$\nabla(F_2^* h_1 h_3) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(F_2^* h_1 h_3)}{\partial u_1} \mathbf{e}_1^0 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial(F_2^* h_1 h_3)}{\partial u_2} \mathbf{e}_2^0 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial(F_2^* h_1 h_3)}{\partial u_3} \mathbf{e}_3^0,$$

$$\nabla(F_3^* h_1 h_2) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(F_3^* h_1 h_2)}{\partial u_1} \mathbf{e}_1^0 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial(F_3^* h_1 h_2)}{\partial u_2} \mathbf{e}_2^0 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial(F_3^* h_1 h_2)}{\partial u_3} \mathbf{e}_3^0,$$

y al ser  $\{\mathbf{e}_i^0\}$  ortonormales en cada punto, entonces la divergencia de un campo vectorial  $F^* \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$  en coordenadas curvilíneas ortogonales  $(u_1, u_2, u_3)$  es, para cada  $P^0 \in U$ :

$$\operatorname{div}(F^*)(P^0) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial(F_1^* h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(F_2^* h_1 h_3)}{\partial u_2} + \frac{\partial(F_3^* h_1 h_2)}{\partial u_3} \right)_{P^0}. \quad (1.4)$$

### 1.2.5. Laplaciano de un campo escalar

**Definición 1.15.** Sea  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  abierto,  $\Psi \in \mathcal{C}^2(V, \mathbb{R})$ . Se define el laplaciano de  $\Psi$  como:

$$\Delta \Psi(\mathbf{x}^0) = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}^0) \quad \text{para cada } \mathbf{x}^0 \in V.$$

Teniendo en cuenta la definición de gradiente y divergencia, se tiene que:

$$\Delta \Psi(\mathbf{x}^0) = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right) (\mathbf{x}^0) = \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} (\mathbf{x}^0) \mathbf{e}_i \right) (\mathbf{x}^0) = \operatorname{div}(\nabla \Psi)(\mathbf{x}^0).$$

Sea pues  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $\phi(u) = (x(u), y(u), z(u))$  y  $U$  abierto en  $\mathbb{R}^3$ , definiendo un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales y sea  $\Psi^* = \Psi \circ \phi$ , diferenciable en  $U$ . Para cada  $P^0 \in U$  sea  $\{\mathbf{e}_i^0\}_i$  la base ortonormal asociada al punto  $P^0$  por medio del homeomorfismo  $\phi$ . El laplaciano será, según (1.2) y (1.4):

$$\Delta \Psi^*(P^0) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Psi^*}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \Psi^*}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Psi^*}{\partial u_3} \right) \right]_{P^0}. \quad (1.5)$$

Particularizamos, a continuación, esta expresión para el caso de las coordenadas esféricas. Para ello, consideremos las coordenadas:  $u_1 = r$  (radio vector),  $u_2 = \theta$  (distancia polar o colatitud) y  $u_3 = \lambda$  (longitud geocéntrica).

Las coordenadas esféricas están relacionadas con las rectangulares  $x, y, z$  por

medio de las expresiones:

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\lambda) \\ y = r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\lambda) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} .$$

Consideremos  $\phi(r, \theta, \lambda) = (r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\lambda), r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\lambda), r \cos(\theta))$ , definida para  $0 \leq r < +\infty$ ,  $0 \leq \lambda < 2\pi$  y  $0 \leq \theta \leq \pi$ .<sup>1</sup> Es evidente que las líneas coordenadas  $\Gamma_r$  representan unos rayos que salen del origen de coordenadas; las líneas coordenadas  $\Gamma_\theta$  son semicircunferencias cuyos centros se disponen en el origen de coordenadas y cuyos planos pasan por el eje  $Z$  y que las líneas coordenadas  $\Gamma_\lambda$  son circunferencias con centros en el eje  $Z$  cuyos planos son paralelos al plano  $XY$ .

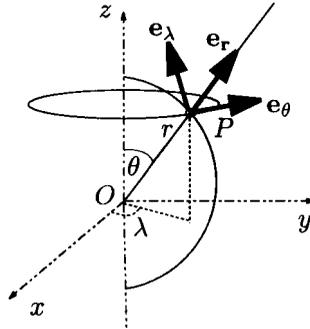


Figura 1.2: Líneas coordenadas para el sistema de coordenadas esféricas.

Hallemos los vectores  $\{\mathbf{e}_i^0\}$  en cada punto  $P^0(r_0, \theta_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^3$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} h_r \mathbf{e}_r^0 &= (\operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\lambda_0), \operatorname{sen}(\theta_0) \operatorname{sen}(\lambda_0), \cos(\theta_0)), \\ h_\theta \mathbf{e}_\theta^0 &= (r_0 \cos(\theta_0) \cos(\lambda_0), r_0 \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\lambda_0), -r_0 \operatorname{sen}(\theta_0)), \\ h_\lambda \mathbf{e}_\lambda^0 &= (-r_0 \operatorname{sen}(\theta_0) \operatorname{sen}(\lambda_0), r_0 \operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\lambda_0), 0). \end{aligned}$$

Inmediatamente, y por comprobación directa, se puede demostrar que  $\{\mathbf{e}_i^0\}$  determina una base ortonormal en cada punto del espacio. Los factores de escala

<sup>1</sup>Aunque la función  $\phi$  así definida no es un homeomorfismo, podemos recubrir todo el espacio con homeomorfismos compatibles definidos sobre abiertos.

serán:

$$\begin{aligned} h_r &= \sqrt{(\operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\lambda_0))^2 + (\operatorname{sen}(\theta_0) \operatorname{sen}(\lambda_0))^2 + \cos^2(\theta_0)} = 1, \\ h_\theta &= \sqrt{(r_0 \cos(\theta_0) \cos(\lambda_0))^2 + (r_0 \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\lambda_0))^2 + (-r_0 \operatorname{sen}(\theta_0))^2} = r_0, \\ h_\lambda &= \sqrt{(-r_0 \operatorname{sen}(\theta_0) \operatorname{sen}(\lambda_0))^2 + (r_0 \operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\lambda_0))^2} = r_0 \operatorname{sen}(\theta_0). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Sustituyendo en (1.5), efectuando las derivaciones e igualando a cero, la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas resulta:

$$\Delta_{r,\theta,\lambda} \Psi^* = \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \theta^2} + \frac{\cot(\theta)}{r^2} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (1.7)$$

Una expresión alternativa se obtiene al multiplicar ambos miembros de la ecuación anterior por  $r^2$ :

$$\Delta_{r,\theta,\lambda} \Psi^* = r^2 \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \Psi^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \theta^2} + \cot(\theta) \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (1.8)$$

Esta forma será más conveniente para desarrollos posteriores.

## 1.3. Integración

### 1.3.1. Integración paramétrica

Sean  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ . Denotaremos por  $\Omega \times D$  al subconjunto del espacio  $(n+m)$  dimensional  $\mathbb{R}^{n+m}$  definido como  $\Omega \times D = \{(P, Q) : P \in \Omega, Q \in D\}$ .

**Teorema 1.11.** *Dados  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  se verifica que  $\overline{\Omega \times D} = \overline{\Omega} \times \overline{D}$ , donde hemos denotado por  $\overline{\Omega}$ ,  $\overline{D}$  y  $\overline{\Omega \times D}$  las clausuras de  $\Omega$ ,  $D$  y  $\Omega \times D$  respectivamente.*

**Definición 1.16.** *Sea  $F = F(P, P_0)$  una función definida en  $\Omega \times D \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  con la particularidad de que para todo  $P_0 \in D$  la función  $F_{P_0}(P) = F(P, P_0)$  es integrable en  $\Omega$ . Entonces, la función:*

$$\begin{aligned} I : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P_0 &\longrightarrow I(P_0) = \int \cdots \int_{\Omega} F(P, P_0) dv_P, \end{aligned}$$

definida en el dominio  $D$ , se llamará **integral dependiente del parámetro  $P_0$** .

**Teorema 1.12.** *Sean  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $F$  una función definida y continua con relación a la totalidad de argumentos en el dominio cerrado  $\overline{\Omega} \times \overline{D}$  y  $\rho(P)$*

acotada e integrable en  $\bar{\Omega}$ . Entonces, la función  $V = V(P)$  definida mediante la relación:

$$\begin{aligned} V : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P_0 &\longrightarrow V(P_0) = \int_{\Omega} \cdots \int \rho(P) F(P, P_0) d\nu_P, \end{aligned}$$

será continua en cada punto  $P_0 \in D$ .

**Teorema 1.13.** Sean  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\rho(P)$  acotada e integrable en  $\bar{\Omega}$  y  $F = F(P, P_0)$  tal que  $F$  y sus derivadas parciales de primer orden respecto de los argumentos de  $P_0$  son continuas en  $\bar{\Omega} \times \bar{D}$ . Entonces, la función  $V = V(P)$  definido como:

$$\begin{aligned} V : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P_0 &\longrightarrow V(P_0) = \int_{\Omega} \cdots \int \rho(P) F(P, P_0) d\nu_P, \end{aligned}$$

tiene en el dominio  $D$  una derivada parcial de primer orden continua respecto de sus argumentos y:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}(P_0) = \int_{\Omega} \cdots \int \rho(P) \frac{\partial F(P, P_0)}{\partial x_k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

La demostración de estos dos teoremas puede verse en [8], página 315.

### 1.3.2. Integrales impropias

Los potenciales y componentes de la fuerza de atracción, generados por una distribución continua de masas en un punto, se representan mediante integrales cuyos integrandos pueden hacerse infinitos si consideramos sus valores en puntos que se encuentren en la región de integración. En estos casos no podemos definir la integral como límite de una suma integral ya que el sumando correspondiente al elemento de volumen en el que se encuentre la singularidad puede hacerse arbitrariamente grande en función del punto intermedio que consideremos. Las integrales de estas funciones se definirán como **integrales impropias**.

Supongamos dada una función  $F = F(x, y, z)$  definida en una determinada región  $\Omega$  del espacio y haciéndose infinita en un punto  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ . Sea  $\{\xi_n\}_n \subset \mathbb{R}^+$  una sucesión arbitraria de números reales positivos convergente a cero. Para cada valor  $\xi_n$  de la sucesión consideremos un entorno de  $P_0$  con diámetro no mayor que  $\xi_n$ ,  $E_{\xi_n}(P_0)$ . Si  $\Omega_n = \Omega - E_{\xi_n}(P_0)$ , consideremos la sucesión

de integrales:

$$I_n = \iiint_{\Omega_n} F dv.$$

**Definición 1.17.** Si existe  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ , independientemente de la elección de las regiones  $\Omega_n$ , entonces a este límite lo llamamos **integral impropia** de la función  $F(x, y, z)$  en la región  $\Omega$  y la denotaremos:

$$I = \iiint_{\Omega} F dv.$$

Es evidente que podremos aplicar esta definición cuando la función  $F = F(x, y, z)$  tenga una cantidad discreta de singularidades aunque, en lo que sigue, estudiaremos integrales impropias que tengan singularidad en un punto aislado de la región considerada.

**Definición 1.18.** Si existe, al menos, una sucesión  $\{\tilde{\Omega}_n\}_n$  tal que existe  $\tilde{I} = \lim_n \tilde{I}_n = \lim_n \iiint_{\tilde{\Omega}_n} F dv$ , y para otras sucesiones  $\{\Omega_n\}$  este límite no existe o

toma otros valores, al límite  $\tilde{I}$  lo llamamos **integral impropia que converge en forma condicional**.

**Lema 1.1.** Sea  $F = F(x, y, z)$  una función no negativa definida en una región  $\Omega$  y  $P_0 \in \Omega$  una singularidad aislada de la función  $F$ . Sea  $\{\xi_n\}_n$  una sucesión arbitraria de reales positivos convergente a cero y  $\Omega_n = \Omega - S(P_0, \xi_n)$ , con  $S(P_0, \xi_n)$  la esfera de centro  $P_0$  y radio  $\xi_n$ . Supongamos definidas las integrales :

$$I_n = \iiint_{\Omega_n} F dv,$$

convergentes a un cierto valor  $I = \lim_n I_n$ . Entonces, está definida la integral impropia:

$$I = \iiint_{\Omega} F dv,$$

coincidente con el límite de la sucesión anterior.

**Demostración.** Sea  $\{\xi_n\}_n \subseteq \mathbb{R}^+$  y  $E_{\xi_n}(P_0)$  una región que contiene al punto  $P_0$  en su interior con diámetro menor o igual que  $\xi_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Denotemos  $\Omega_n = \Omega - E_{\xi_n}(P_0)$ . Es claro que existen  $\xi_n^1 \leq \xi_n \leq \xi_n^2$  de modo que

$$S_{\xi_n^1}(P_0) \subseteq E_{\xi_n}(P_0) \subseteq S_{\xi_n^2}(P_0),$$

verificándose, además que  $\lim_n \xi_n^1 = \lim_n \xi_n^2 = \lim_n \xi_n = 0$ . Al ser  $F$  una función no negativa:

$$\iiint_{\Omega - S_{\xi_n^2}} F dv \leq \iiint_{\Omega_n} F dv \leq \iiint_{\Omega - S_{\xi_n^1}} F dv.$$

De aquí se aprecia que:

$$\lim_n \iiint_{\Omega_n} F dv = \lim_n \iiint_{\Omega - S_{\xi_n^1}} F dv = \lim_n \iiint_{\Omega - S_{\xi_n^2}} F dv = I,$$

puesto que los límites de las integrales de los extremos existen y son iguales a este número. ■

**Teorema 1.14.** *La integral impropia*

$$\iiint_{\Omega} \frac{C}{r_{PP_0}^\alpha} dv_P,$$

con  $C$  y  $\alpha > 0$  constantes,  $r_{PP_0} = d(P, P_0)$  y  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$  fijo, existe si  $\alpha < 3$  y no existe si  $\alpha \geq 3$ .

**Demostración.** Supongamos, sin pérdida de generalidad por el lema 1.1, que  $\Omega$  es una esfera de centro  $P_0$  y radio  $R$ . Para cada  $n \geq 0$ , sea  $\{\xi_n\}_n \subseteq \mathbb{R}^+$ , tal que  $\lim_n \xi_n = 0$  y  $E_{\xi_n}(P_0) = S(P_0, \xi_n)$  la esfera de centro  $P_0$  y radio  $\xi_n$ . Si  $\Omega_n = \Omega - E_{\xi_n}(P_0)$ , estudiamos la convergencia de la sucesión:

$$I_n(\alpha) = \iiint_{\Omega_n} \frac{C}{r^\alpha} dv.$$

Es:

$$\begin{aligned} I_n(\alpha) &= \iiint_{\Omega_n} \frac{C}{r^\alpha} dv \\ &= \int_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=\xi_n}^{r=R} \frac{C}{r^\alpha} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\lambda \\ &= 4\pi C \begin{cases} \left[ \frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha} \right]_{\xi_n}^R, & \text{si } r \neq 3 \\ \left[ \ln \right]_{\xi_n}^R, & \text{si } r = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir,  $\lim_n I_n(\alpha) = \frac{4\pi C}{3-\alpha} R^{3-\alpha}$  si  $\alpha < 3$  y diverge para  $\alpha \geq 3$ . ■

Para el estudio de la **convergencia** de las integrales impropias es de gran utilidad el siguiente resultado.

**Teorema 1.15.** *(Criterio de la mayorante)* Sea  $\Omega$  una región del espacio y  $F = F(x, y, z)$ ,  $\bar{F} = \bar{F}(x, y, z)$  dos funciones definidas en  $\Omega$ . Supongamos, además, que se verifican las siguientes condiciones:

- I.  $F$  presenta una singularidad en  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ .
- II.  $|F(x, y, z)| \leq \bar{F}(x, y, z)$  para cada  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- III.  $\iiint_{\Omega} \bar{F} dv$  está definida.

Entonces, la integral impropia  $\iiint_{\Omega} F dv$  está definida.

Demostración. Sea  $\{\xi_n\}_n \subset \mathbb{R}^+$  verificando que  $\lim_n \xi_n = 0$  y  $\{E_{\xi_n}(P_0)\}_n$  una sucesión arbitraria de entornos del punto  $P_0$ , con  $\delta(\{E_{\xi_n}(P_0)\}) < \xi_n$ . Denotemos  $\Omega_n = \Omega - E_{\xi_n}(P_0)$ . Como la integral impropia  $\bar{I} = \iiint_{\Omega} \bar{F} dv$  está definida, la sucesión  $\bar{I}_n = \iiint_{\Omega_n} \bar{F} dv$  es una sucesión convergente a la integral impropia  $\bar{I} = \iiint_{\Omega} \bar{F} dv$ . Así pues, fijado  $\varepsilon > 0$ , existe un número natural  $N(\varepsilon)$  de modo que para cada  $n, m \geq N(\varepsilon)$  naturales es, al ser  $\bar{F}$  no negativa:

$$|\bar{I}_n - \bar{I}_m| = \left| \iiint_{E_{\xi_n} - E_{\xi_m}} \bar{F} dv \right| = \iiint_{E_{\xi_n} - E_{\xi_m}} \bar{F} dv < \varepsilon.$$

Por otro lado,  $\bar{F}$  es mayorante de  $F$ , pudiendo escribir:

$$|I_n - I_m| = \left| \iiint_{E_{\xi_n} - E_{\xi_m}} F dv \right| \leq \iiint_{E_{\xi_n} - E_{\xi_m}} |F| dv \leq \iiint_{E_{\xi_n} - E_{\xi_m}} \bar{F} dv < \varepsilon.$$

Queda demostrado, de esta forma, que la sucesión  $\{I_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$ , teniendo garantizada la convergencia por la completitud de los números reales. ■

De manera análoga se puede demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 1.16.** *Sea  $\Omega$  una región del espacio y  $F = F(x, y, z)$ ,  $\bar{F} = \bar{F}(x, y, z)$  dos funciones definidas en  $\Omega$ . Supongamos, además, que se verifican las siguientes condiciones:*

- I.  $F$  presenta una singularidad en  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ .
- II.  $|F(x, y, z)| \geq \bar{F}(x, y, z) \geq 0$  para cada  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- III.  $\iiint_{\Omega} \bar{F} dv$  diverge.

Entonces, la integral impropia  $\iiint_{\Omega} F dv$  también diverge.

**Corolario 1.1.** Sea  $\Omega$  una región del espacio,  $F = F(x, y, z)$  una función definida en  $\Omega$  con una singularidad en  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ . Supongamos, además, que  $F(x, y, z) \leq \frac{C}{r^\alpha}$  con  $C, \alpha < 3$  constantes y  $r = d(P, P_0)$ , siendo  $P_0 \in \Omega$  fijo. Entonces, la integral impropia  $\iiint_{\Omega} F dv$  converge.

Para la **continuidad** de las integrales será condición suficiente la continuidad del integrando respecto de las variables dependientes de integración y los parámetros. En las integrales impropias, la continuidad del integrando no se da, de manera que no es aplicable el resultado anterior. Veamos, pues, algunos criterios de continuidad de este tipo de integrales.

Sean  $P = P(x, y, z)$  y  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  puntos del espacio,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  y  $F, f$  dos funciones arbitrarias definidas en  $\Omega \times \Omega$  y  $\Omega$  respectivamente. Supongamos que la función  $F$  presenta una singularidad cuando coinciden sus argumentos  $P = P_0 \in \Omega$  y que es continua respecto de  $P_0$ . Supongamos, además, que  $f$  es una función acotada e integrable en su región de definición. Entonces podemos definir la función:

$$V(P_0) = \iiint_{\Omega} F(P, P_0) f(P) dv_P.$$

**Definición 1.19.** Decimos que  $V(P_0) = \iiint_{\Omega} F(P, P_0) f(P) dv_P$  es **uniformemente convergente** en  $P_0$  si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que tiene lugar la desigualdad:

$$|V_{\delta(\varepsilon)}(P)| = \left| \iiint_{\Omega_{\delta(\varepsilon)}} F(P^*, P) f(P^*) dv_{P^*} \right| \leq \varepsilon,$$

para cada  $P \in \mathbb{R}^3$  verificando que  $d(P, P_0) < \delta(\varepsilon)$  y para toda región  $\Omega_{\delta(\varepsilon)}$  conteniendo a  $P_0$  y con diámetro  $\text{diam}(\Omega_{\delta(\varepsilon)}) \leq \delta$ .

Señalemos una condición suficiente de convergencia uniforme de la integral en un punto, cuya demostración puede encontrarse en [8], página 317.

**Teorema 1.17.** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  y  $F = F(P, P_0)$  una función continua en  $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$  para  $P \neq P_0$  y sea  $f = f(P)$  una función uniformemente acotada en  $\Omega$ . Admitamos que existen unas constantes  $\lambda, 0 < \lambda < m$  y  $c > 0$  tales que para cualquier  $P, P_0 \in \Omega$  se verifique la desigualdad:

$$|F(P, P_0)| \leq C \|P - P_0\|_2^{-\lambda}.$$

En estas condiciones, la función  $V = V(P)$  definida como:

$$\begin{aligned} V : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P_0 &\longrightarrow V(P_0) = \iiint_{\Omega} F(P, P_0) f(P) dv_P, \end{aligned}$$

es uniformemente convergente para cada  $P_0$  en  $\Omega$ .

**Lema 1.2.** Dados  $A$  y  $B$  subconjuntos disjuntos de  $\mathbb{R}^n$  y una función  $F$  definida e integrable en una región  $\Omega$  conteniendo a  $A$  y  $B$ , se tiene que:

$$\iiint_{A \cup B} F dv = \iiint_A F dv + \iiint_B F dv.$$

**Teorema 1.18.** Si

$$V(P_0) = \iiint_{\Omega} F(P, P_0) f(P) dv_P$$

es uniformemente convergente en  $P_0 \in \Omega$ , entonces es continua en este punto.

Demostración. Tenemos que demostrar que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  de modo que para todo punto del espacio,  $P$ , tal que  $d(P, P_0) < \delta(\varepsilon)$ , se verifica que  $|V(P) - V(P_0)| \leq \varepsilon$ . Por el lema 1.2 podemos considerar una región dentro de  $\Omega$ ,  $\Omega_1$ , que contenga al punto  $P_0$  y dividir la integral en dos sumandos  $V = V_1 + V_2$ , siendo  $V_i = \iiint_{\Omega_i} F(P, P_0) f(P) dv_P$ , para  $i = 1, 2$  y  $\Omega_2 = \Omega - \Omega_1$ .

Si consideramos la desigualdad  $|V(P_0) - V(P)| \leq |V_2(P_0) - V_2(P)| + |V_1(P_0)| + |V_1(P)|$ , bastará demostrar que cada sumando en el segundo miembro se hace arbitrariamente pequeño si  $P$  está lo suficientemente próximo a  $P_0$ . Por la convergencia uniforme de la integral considerada en  $P_0$ , tenemos garantizada la existencia de un  $\delta'(\frac{\varepsilon}{3})$ , de modo que para  $P$  con  $d(P, P_0) \leq \delta'(\frac{\varepsilon}{3})$  es  $|V_1(P)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  y  $|V_1(P_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Como  $P_0$  no pertenece a la región  $\Omega_2$ ,  $V_2$  es continua en este punto. De ahí que exista un  $\delta''(\frac{\varepsilon}{3})$  tal que  $|V_2(P_0) - V_2(P)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  para  $d(P, P_0) \leq \delta''(\frac{\varepsilon}{3})$ . Haciendo  $\delta(\varepsilon) = \min(\delta'(\frac{\varepsilon}{3}), \delta''(\frac{\varepsilon}{3}))$ , tenemos que  $|V(P) - V(P_0)| \leq \varepsilon$  si  $d(P, P_0) \leq \delta(\varepsilon)$ . ■

### 1.3.3. Teoremas integrales clásicos del análisis vectorial

En lo sucesivo supondremos que las regiones estudiadas tienen una frontera suficientemente suave, como por ejemplo, las conocidas como **superficies de Liapunov**.

**Definición 1.20.** Una superficie,  $\Sigma$ , se llama de **Liapunov** si verifica las condiciones siguientes:

1. En cada punto de la superficie  $\Sigma$  existe una normal determinada.

- II. Existe un número  $d > 0$  tal que las rectas paralelas a la normal en cierto punto  $P \in \Sigma$  de la superficie cortan no más de una vez la parte  $\Sigma'_P$  de la superficie  $\Sigma$  que se halla dentro de una esfera de radio  $d$  con centro en  $P$ . Estas parcelas de superficie,  $\Sigma'_P$ , se llaman entornos de Liapunov.
- III. El ángulo  $\gamma(P, P') = \angle(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ , formado por las normales exteriores en los puntos  $P$  y  $P'$ , satisface la condición:

$$\gamma(P, P') < Ar_{PP'}^\delta,$$

donde  $r_{PP'}$  es la distancia entre los puntos  $P$  y  $P'$ ,  $A$  cierta constante y  $0 < \delta \leq 1$ .

Al estudiar las ecuaciones de tipo elíptico se aplicarán con frecuencia las fórmulas de Green, que son consecuencia directa de la fórmula de Ostrogradski. Estas fórmulas integrales se encuentran entre las ecuaciones básicas de la teoría de potencial y son herramientas de gran importancia para los problemas de geodesia teórica.

**Teorema 1.19.** (Fórmula de Ostrogradski) Sea  $\vartheta$  una región del espacio con frontera  $\partial\vartheta = \Sigma$  una superficie de Liapunov. Supongamos que  $P, Q, R$  son funciones continuas en  $\bar{\vartheta} = \vartheta \cup \Sigma$  y con derivadas parciales continuas de primer orden en  $\vartheta$ . Entonces:

$$\iiint_{\vartheta} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv_P = \iint_{\Sigma} (P \cos(\alpha) + Q \cos(\beta) + R \cos(\gamma)) d\sigma_P,$$

donde  $dv_P = dx dy dz$  es el elemento de volumen y  $\alpha, \beta, \gamma$  los cosenos directores de la normal exterior,  $\mathbf{n}_P$ , a la superficie  $\Sigma$  en el punto  $P$ .

La demostración de este teorema puede verse en [8], página 200 y [15], página 309.

Si  $P, Q, R$  se consideran las componentes de un determinado campo vectorial,  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ , podremos escribir la fórmula de Ostrogradski como:

$$\iiint_{\vartheta} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dv_P = \iint_{\Sigma} F_n d\sigma_P,$$

donde  $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  es la divergencia del campo  $\mathbf{F}$  y  $F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = P \cos(\alpha) + Q \cos(\beta) + R \cos(\gamma)$ , es la proyección del vector  $\mathbf{F}$  a lo largo de la normal exterior  $\mathbf{n}$  en un punto  $P \in \Sigma$ . Así pues, la fórmula anterior es válida para cualquier campo de vectores, independientemente de su significado físico. Por ejemplo, sea  $\mathbf{F}$  el campo de velocidades de un fluido incomprensible dentro

de una región  $\vartheta$ . En esta región podemos encontrar fuentes de flujo, en los que se genera fluido, y sumideros en los que el fluido es aniquilado. Al medirse la intensidad de estas fuentes/sumideros por medio del operador divergencia, la fórmula de Ostrogradski nos viene a decir que la cantidad de fluido que sale a través de la superficie  $\Sigma$  por unidad de tiempo es, precisamente, la cantidad de flujo creado o aniquilado, por unidad de tiempo, por la acción combinada de fuentes y sumideros.

Supongamos que  $\vartheta \subseteq \mathbb{R}^3$  es una región con frontera  $\partial\vartheta = \Sigma$  una superficie de Liapunov. Sean  $u, v$  dos funciones continuas con derivadas parciales de primer orden continuas en  $\bar{\vartheta}$  y con derivadas segundas continuas en  $\vartheta$ . Si hacemos:

$$P = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u \frac{\partial v}{\partial z},$$

aplicamos la *fórmula de Ostrogradski* y tenemos en cuenta que:

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cos(\alpha) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(\beta) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(\gamma) = \nabla v \bullet \mathbf{n} = \frac{\partial v}{\partial n},$$

obtenemos la llamada **primera fórmula de Green**:

$$\iiint_{\vartheta} u \Delta v dv_P = - \iiint_{\vartheta} \nabla u \bullet \nabla v dv_P + \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma_P, \quad (1.9)$$

donde  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  es el operador de Laplace. Si cambiamos el lugar de las funciones  $u$  y  $v$  en (1.9), tendremos:

$$\iiint_{\vartheta} v \Delta u dv_P = - \iiint_{\vartheta} \nabla u \bullet \nabla v dv_P + \iint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_P, \quad (1.10)$$

y restando de la igualdad (1.9) la (1.10), se obtiene la **segunda fórmula de Green**:

$$\iiint_{\vartheta} (u \Delta v - v \Delta u) dv_P = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_P. \quad (1.11)$$

Apliquemos la segunda fórmula de Green a dos funciones  $u$  y  $v$ , una de las cuales es el inverso de la distancia a un punto fijo del espacio. Sean, pues,  $P(x, y, z)$  y  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  dos puntos de  $\mathbb{R}^3$  y  $v(P) = \frac{1}{r_{PP_0}}$ , con

$$r_{PP_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

la distancia entre los dos puntos. Si  $\Delta$  es el operador de laplace es fácil comprobar, por derivación directa, que  $\Delta v = 0$ , es decir, que la función  $v$  verifica la **ecuación de Laplace**. Diremos que  $v$  es una **función armónica**. Sea  $u = u(P)$  una función que verifica las condiciones anteriores. Podemos considerar varios casos dependiendo de dónde esté el punto  $P_0$ .

**Caso 1:**  $P_0 \in \text{Int}(\vartheta)$

En este caso, la función  $v = v(P)$  tiene una discontinuidad en el punto  $P_0 \in \vartheta$  y, por tanto, no es posible aplicar la segunda fórmula de Green a  $u$  y  $v$ . Sea  $\varepsilon > 0$  arbitrario y  $S_\varepsilon(P_0)$  la esfera sólida de centro  $P_0$  y radio  $\varepsilon$ . Denotemos  $\vartheta_\varepsilon = \vartheta - S_\varepsilon(P_0)$ , con frontera  $\Sigma + \Sigma_\varepsilon$ , siendo  $\Sigma = \partial\vartheta$  y  $\Sigma_\varepsilon = \partial S_\varepsilon(P_0)$  las fronteras de  $\vartheta$  y  $S_\varepsilon(P_0)$  respectivamente. Aplicando, ahora sí, la segunda fórmula de Green a las funciones  $u$  y  $v$  en la región  $\vartheta_\varepsilon$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\vartheta_\varepsilon} \left( u \Delta \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) - \frac{1}{r_{PP_0}} \Delta u \right) dv_P = \\ & = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) - \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_P + \iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) d\sigma_P \quad (1.12) \\ & \qquad \qquad \qquad - \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_P \end{aligned}$$

En el segundo miembro de esta igualdad, sólo las dos últimas integrales dependen de  $\varepsilon$ . Si calculamos la derivada direccional por la normal exterior a la región  $\vartheta_\varepsilon$  en  $\Sigma_\varepsilon$ , se tiene que:

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \right|_{\Sigma_\varepsilon} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \right|_{\Sigma_\varepsilon} = \left. \frac{1}{r_{PP_0}^2} \right|_{\Sigma_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Así pues:

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) d\sigma_P = \iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{1}{\varepsilon^2} d\sigma_P = 4\pi u^*(\varepsilon), \quad (1.13)$$

siendo  $u^*(\varepsilon)$  el valor medio de la función  $u$  en  $\Sigma_\varepsilon$ . De igual modo, la tercera integral del segundo miembro de la identidad (1.13) es:

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_P = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_P = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^* (\varepsilon) 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^* (\varepsilon), \quad (1.14)$$

donde  $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*$  ( $\varepsilon$ ) es el valor medio de la derivada normal en la superficie esférica  $\Sigma_\varepsilon$ .

Sustituyendo (1.13) y (1.14) en (1.13) y teniendo en cuenta que  $v$  es armónica en  $\vartheta_\varepsilon$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} & - \iiint_{\vartheta_\varepsilon} \frac{1}{r_{PP_0}} \Delta u dv_P = \\ & = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) - \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_p + 4\pi u^*(\varepsilon) - 4\pi \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^* (\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Al ser  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\alpha) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\beta) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\gamma)$ , la continuidad de las derivadas parciales de primer orden de la función  $u$  nos garantiza la acotación de la derivada normal en un entorno del punto  $P_0$ , de manera que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^* (\varepsilon) = 0$ .

De igual modo, por definición de integral impropia,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\vartheta_\varepsilon} \left( -\frac{1}{r_{PP_0}} \Delta u \right) dv_P = \iiint_{\vartheta} -\frac{1}{r_{PP_0}} \Delta u dv_P$ , por lo que tomando límites en (1.15) para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente y la continuidad de  $u$  en  $P_0$ , queda demostrada la fórmula integral fundamental de Green para este caso:

$$4\pi u(P_0) = - \iiint_{\vartheta} \frac{1}{r_{PP_0}} \Delta u dv_P - \iint_{\Sigma} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) - \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma_p. \quad (1.16)$$

### Caso 2: $P_0 \in Ext(\vartheta)$

Si fuese  $P_0 \notin \bar{\vartheta}$ , la función  $v$  sería armónica en  $\vartheta$  y por tanto continua y con derivadas parciales continuas de cualquier orden. Por esto, sustituyendo en (1.11):

$$0 = - \iiint_{\vartheta} \frac{1}{r_{PP_0}} \nabla u dv_P - \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) - \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_p.$$

### Caso 3: $P_0 \in \Sigma$

Sea  $S_\varepsilon(P_0)$  la esfera sólida de radio  $\varepsilon$  y centro  $P_0$ , cuya intersección con el plano tangente a la superficie  $\Sigma$  en  $P_0$  es un círculo máximo. Esta esfera dividirá la superficie  $\Sigma$  en dos: la parte  $\Sigma_1$  que se encuentra dentro de la esfera y  $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$ .

Sea  $\vartheta_\varepsilon$  la parte de la región  $\vartheta$  que se encuentra dentro de  $S_\varepsilon(P_0)$  y que tiene por frontera  $\partial\vartheta_\varepsilon = \Sigma_1 \cup \Sigma_\varepsilon^*$ , siendo  $\Sigma_\varepsilon^* = \vartheta \cap \partial S_\varepsilon(P_0)$ . Podemos seguir los mismos razonamientos que en el caso anterior, de modo que aplicando (1.11) a la región  $\vartheta_\varepsilon^* = \vartheta - \vartheta_\varepsilon$  en la que  $v$  es armónica:

$$\begin{aligned} - \iint_{\vartheta_\varepsilon^*} \frac{1}{r_{PP_0}} \Delta u dv_P &= \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) - \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_P + \\ &+ \iint_{\Sigma_\varepsilon^*} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) - \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_P - \quad (1.17) \\ &- \iint_{\Sigma_1} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) - \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_P, \end{aligned}$$

siendo  $\partial\vartheta_\varepsilon^* = \Sigma_2 \cup \Sigma_\varepsilon^* = (\Sigma - \Sigma_1) \cup \Sigma_\varepsilon^*$ .

Ahora bien:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_\varepsilon^*} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) - \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_P &= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon^*} u d\sigma_P - \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\Sigma_\varepsilon^*} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_P = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} u^*(\varepsilon) \frac{1}{2} 4\pi\varepsilon^2 - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^*(\varepsilon) \frac{1}{2} 4\pi\varepsilon^2 = 2\pi u^*(\varepsilon) - 2\pi\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^*(\varepsilon), \end{aligned}$$

donde  $u^*(\varepsilon)$  y  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^*(\varepsilon)$  corresponden al valor medio de ambas funciones en la región  $\Sigma_\varepsilon^*$ . Al estar la derivada normal de  $u$  acotada, la integral anterior converge a  $2\pi u(P_0)$  cuando  $\varepsilon$  tiende a cero. Análogamente, si tenemos en cuenta el teorema del valor medio de integrales de superficie y si  $u^*(\varepsilon)$  y  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^*(\varepsilon)$  son los valores de ambas funciones en cierto punto de  $\Sigma_1$ , entonces:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) - \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_P &= u^*(\varepsilon) \int_{r=0}^{r=\varepsilon} \int_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} \frac{1}{r^2} r^2 dr d\lambda - \\ &- \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^*(\varepsilon) \int_{r=0}^{r=\varepsilon} \int_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} \frac{1}{r} r^2 dr d\lambda = 2\pi\varepsilon u^*(\varepsilon) - \pi\varepsilon^2 \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^*(\varepsilon), \end{aligned}$$

que converge a cero cuando  $\varepsilon$  tiende a cero. Si tenemos en cuenta lo que acabamos de exponer y la definición de integral impropia, tomamos límites en (1.18) llegamos a:

$$2\pi u(P_0) = - \iiint_{\vartheta} \frac{1}{r_{PP_0}} \Delta u dv_P - \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) - \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_P. \quad (1.18)$$

Se ha demostrado el siguiente teorema:

**Teorema 1.20.** (Fórmulas de Green) Sea  $\vartheta \subseteq \mathbb{R}^3$  una región del espacio con frontera  $\partial\vartheta = \Sigma$  una superficie de Liapunov. Sean  $u, v$  dos funciones continuas y con derivadas parciales primeras continuas en  $\bar{\vartheta}$  y con derivadas parciales segundas continuas en  $\vartheta$ . Se verifica:

I. Primera fórmula de Green:

$$\iiint_{\vartheta} u \Delta v dv_P = - \iiint_{\vartheta} \nabla u \cdot \nabla v dv_P + \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma_P.$$

II. Segunda fórmula de Green:

$$\iiint_{\vartheta} (u \nabla v - v \nabla u) dv_P = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_P.$$

III. Tercera fórmula de Green. Si  $v(P) = \frac{1}{r_{PP_0}}$  para  $P_0 \in \mathbb{R}^3$  un punto fijo del espacio, se tiene que:

$$\tau u(P_0) = - \iiint_{\vartheta} \frac{1}{r_{PP_0}} \Delta u dv_P - \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) - \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_P,$$

donde:

$$\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } P_0 \notin \bar{\vartheta}, \\ 2\pi & \text{si } P_0 \in \Sigma = \partial\vartheta, \\ 4\pi & \text{si } P_0 \in \text{Int}(\vartheta). \end{cases}$$

Si  $u = u(P)$  fuese una función armónica en  $\vartheta$ , entonces para cada punto  $P_0 \in \vartheta$  se verifica que:

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \right] d\sigma_P,$$

es decir, el valor de una función armónica dentro de una región viene determinado por el valor de la función y de su derivada normal en la frontera.

## 1.4. Funciones esféricas

### 1.4.1. Problemas de valores propios

El problema de valores propios, también conocido como problema de autovalores, se simplifica mucho si trabajamos en espacios con producto escalar. Si

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  es un intervalo compacto y si  $\mathcal{F}$  denota el cuerpo de los números reales o de los números complejos, entonces podemos definir el producto escalar:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{C}(I, \mathcal{F}) \times \mathcal{C}(I, \mathcal{F}) &\longrightarrow \mathcal{F} \\ (f, g) &\longrightarrow \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx, \end{aligned}$$

siendo la norma asociada  $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ .

Consideremos  $k(x) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^+)$  y  $q(x) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  tal que  $k(x) > 0$  para  $a < x < b$ . Definamos el siguiente operador diferencial de segundo orden:

$$\begin{aligned} L[\cdot]: \mathcal{C}^2(I, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{C}) \\ y &\longrightarrow L[y] = (ky')' - qy, \end{aligned}$$

del cual se puede demostrar, sin dificultad, que es un operador lineal. Si consideramos la ecuación:

$$L[y] + \lambda\rho y = [k(x)y'(x)]' - q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0 \quad a < x < b, \quad (1.19)$$

para  $\rho \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ , entonces cinco grandes conjuntos de funciones ortogonales son solución de una ecuación del tipo anterior.

- I. Si  $k(x) = \rho(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$ ,  $a = 0$ ,  $b = \pi$ ,  $\lambda_n = n^2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , obtenemos la ecuación  $y'' + \lambda_n y = 0$ , que tiene por soluciones fundamentales las funciones trigonométricas  $y_1(x) = \sin(nx)$  e  $y_2(x) = \cos(nx)$ .
- II. Si  $k(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $q(x) = 0$ ,  $\rho(x) = 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $\lambda_n = n^2$ , desarrollando en el primer miembro la derivada, se obtiene la ecuación diferencial  $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ , con solución  $y = T_n$  polinomio de Tchebycheff de grado  $n$ .
- III. El polinomio de Hermite de grado  $n$ ,  $y = H_n$ , es solución de la ecuación diferencial  $y'' - 2xy' + ny = 0$ , obtenida al hacer  $k(x) = e^{-x^2}$ ,  $q(x) = 0$ ,  $\rho(x) = e^{-x^2}$ ,  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ ,  $\lambda_n = n$ .
- IV. Si hacemos  $k(x) = e^{\ln(x)-x}$ ,  $q(x) = 0$ ,  $\rho(x) = \frac{e^{\ln(x)-x}}{x}$ ,  $a = 0$ ,  $b = +\infty$ ,  $\lambda_n = n$ , entonces obtenemos la ecuación diferencial  $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ , con solución  $y = L_n$ , denominada polinomio de Laguerre de grado  $n$ .
- v. El polinomio de Legendre de grado  $n$  es solución de la ecuación diferencial con  $k(x) = 1-x^2$ ,  $q(x) = 0$ ,  $\rho(x) = 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $\lambda_n = n(n+1)$ .
- VI. La función asociada de Legendre de grado  $n$  y orden  $m$ ,  $P_{nm}$ , es solución de la ecuación diferencial  $[(1-x^2)y']' - \frac{m^2}{1-x^2}y + n(n+1)y = 0$ , que se

obtiene al hacer  $k(x) = 1 - x^2$ ,  $q(x) = \frac{m^2}{1 - x^2}$ ,  $\rho(x) = 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $\lambda_n = n(n + 1)$ .

Adjuntemos al operador diferencial las siguientes condiciones de contorno reales y lineales:

$$\begin{cases} a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = 0, \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0, \end{cases}$$

siendo  $\{a_{ij}\}, \{b_{ij}\} \subset \mathbb{R}$ . Si denotamos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$C = (A \ B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$\tilde{y}(x) = (y(x) \ y'(x))_{2 \times 1}^t$ ,  $\hat{y} = (\tilde{y}(a)^t \ \tilde{y}(b)^t)_{1 \times 4}^t$ , donde el superíndice  $t$  indica que debemos considerar la traspuesta de la matriz en cuestión, podemos escribir las condiciones de contorno en forma matricial como  $A\tilde{y}(a) + B\tilde{y}(b) = 0$  o  $C\hat{y} = 0$ . Además, suponemos que  $\text{rg}(C) = 2$  evitando así condiciones de contorno redundantes.

**Definición 1.21.** Decimos que las condiciones de contorno son:

I. **Periódicas** si son de la forma:

$$\begin{cases} y(a) - y(b) = 0 \\ y'(a) - y'(b) = 0 \end{cases}$$

II. **Separadas** si se escriben:

$$\begin{cases} a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) = 0 \\ b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0 \end{cases}$$

donde  $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0$  y  $b_{21}^2 + b_{22}^2 \neq 0$ . En este caso decimos que el operador  $L[\ ]$  es de **Sturm-Liouville** ( $S - \mathcal{L}$ ).

**Definición 1.22.** Sean  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Se define el operador de contorno:

$$\begin{aligned} \beta: \mathcal{C}^2(I, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ y &\longrightarrow \beta(y) = C\hat{y} = A\tilde{y}(a) + B\tilde{y}(b). \end{aligned}$$

Denotaremos por  $D_\beta = \{y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{C}) : C\hat{y} = 0\}$  y  $L_\beta = L|_{D_\beta}$  el operador  $L[\ ]$  restringido al dominio  $D_\beta$ .

**Definición 1.23.** Decimos que el operador diferencial  $L_\beta$  es autoadjunto si para cada  $f, g \in D_\beta$  se verifica que:

$$\langle L_\beta f, g \rangle = \langle f, L_\beta g \rangle.$$

**Teorema 1.21.** El operador diferencial  $S - \mathcal{L}$  definido como:

$$\begin{aligned} L_\beta[ ] : D_\beta &\longrightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{C}) \\ y &\longrightarrow L_\beta[y] = (ky')' - qy, \end{aligned}$$

donde  $k(x) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  es estrictamente positiva en  $(a, b)$  y  $q(x) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ , es un operador diferencial autoadjunto.

La demostración de este teorema puede encontrarse en [3], página 255.

Por el teorema 1.21, que un operador sea o no autoadjunto está íntimamente relacionado con las condiciones de contorno del problema. De esta forma, a unas condiciones de contorno,  $\beta(y)$ , que definan un operador autoadjunto las llamaremos **condiciones de contorno autoadjuntas**.

**Definición 1.24.** Sea  $L_\beta[ ]$  un operador diferencial autoadjunto. Se dice que  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un **autovalor** o **valor propio** de  $L_\beta[ ]$  si existe  $y_\lambda \in D_\beta$  no nulo de modo que  $L_\beta[y_\lambda] = \lambda y_\lambda$ . Diremos, en este caso, que  $y_\lambda$  es una **función propia** o **autofunción** para el valor propio  $\lambda$ .

**Definición 1.25.** Se define el espectro de un operador  $L_\beta$ ,  $\sigma(L_\beta)$ , al conjunto de todos los autovalores de  $L_\beta[ ]$ .

**Definición 1.26.** Sea  $\lambda \in \sigma(L_\beta)$ . Se define el autoespacio o espacio propio asociado al valor propio  $\lambda$ , al subespacio de  $D_\beta$ :

$$\varepsilon(L_\beta, \lambda) = \{y \in D_\beta : L_\beta[y] = \lambda y\} = \ker(L_\beta - \lambda Id),$$

donde  $Id$  es el operador identidad en  $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ .

**Teorema 1.22.** Sea  $\lambda \in \sigma(L_\beta)$ . El espacio propio  $\varepsilon(L_\beta, \lambda)$  es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.

**Demostración.** Sean  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  y consideremos  $y_1, y_2 \in \varepsilon(L_\beta, \lambda)$ . Es  $\beta(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 C\hat{y}_1 + \alpha_2 C\hat{y}_2 = 0$  al ser  $y_1, y_2 \in D_\beta$ , por lo que  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in D_\beta$ . Además, por la linealidad del operador diferencial, se tiene que  $L_\beta[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 L_\beta[y_1] + \alpha_2 L_\beta[y_2] = \alpha_1 \lambda y_1 + \alpha_2 \lambda y_2 = \lambda(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$ . ■

**Definición 1.27.** Dado  $\lambda \in \sigma(L_\beta)$ , se define la **multiplicidad geométrica** de  $\lambda$  como la dimensión de  $\varepsilon(L_\beta, \lambda)$  como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.

**Teorema 1.23.** Sea  $L_\beta$  un operador autoadjunto. Entonces:

- I.  $\sigma(L_\beta) \subseteq \mathbb{R}$ .
- II. Si  $\lambda, \mu \in \sigma(L_\beta)$ ,  $\lambda \neq \mu$ , entonces los correspondientes espacios propios son ortogonales,  $\varepsilon(L_\beta, \lambda) \perp \varepsilon(L_\beta, \mu)$ , es decir, para cada  $y_\lambda \in \varepsilon(L_\beta, \lambda)$ ,  $y_\mu \in \varepsilon(L_\beta, \mu)$  se verifica que  $\langle y_\lambda, y_\mu \rangle = 0$ .

Demostración.

- I. Sea  $\lambda \in \sigma(L_\beta)$ ,  $y \in \varepsilon(L_\beta, \lambda) - \{0\}$ . Al ser  $L_\beta[\ ]$  un operador autoadjunto, se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L_\beta[y], y \rangle - \langle y, L_\beta[y] \rangle = \langle \lambda y, y \rangle - \langle y, \lambda y \rangle = \\ &= \lambda \langle y, y \rangle - \bar{\lambda} \langle y, y \rangle = (\lambda - \bar{\lambda}) \langle y, y \rangle = (\lambda - \bar{\lambda}) \|y\|_2^2. \end{aligned}$$

Al ser  $y \neq 0$ , es  $\lambda = \bar{\lambda}$  y, por tanto,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- II. Sean  $\lambda, \mu \in \sigma(L_\beta)$  dos autovalores distintos,  $y_\lambda \in \varepsilon(L_\beta, \lambda)$ ,  $y_\mu \in \varepsilon(L_\beta, \mu)$ . Si una de las dos funciones propias es nula el resultado es trivial. En caso contrario, al ser el operador diferencial un operador autoadjunto y  $\mu \in \mathbb{R}$ , tendremos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L_\beta[y_\lambda], y_\mu \rangle - \langle y_\lambda, L_\beta[y_\mu] \rangle = \langle \lambda y_\lambda, y_\mu \rangle - \langle y_\lambda, \mu y_\mu \rangle = \\ &= \lambda \langle y_\lambda, y_\mu \rangle - \mu \langle y_\lambda, y_\mu \rangle = (\lambda - \mu) \langle y_\lambda, y_\mu \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 1.24.** *Todo operador diferencial autoadjunto  $L_\beta$  tiene por espectro un número infinito numerable de autovalores  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  a los que hay asociados una familia infinita de funciones propias  $\{y_n\}_{n \geq 1}$  de manera que:*

- I.  $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots, \quad \lim_n |\lambda_n| = +\infty$ .
- II.  $\{y_n\}_{n \geq 1}$  es una familia ortonormal.

**Definición 1.28.** *Dado el operador diferencial autoadjunto  $L_\beta[\ ]$  e  $\{y_n\}_{n \geq 1}$  una familia de funciones propias ortonormales asociadas a dicho operador, decimos que  $\{y_n\}_{n \geq 1}$  es **completo** si es un conjunto maximal de autofunciones ortonormales.*

### 1.4.2. Desarrollo del inverso de la distancia

Sea  $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  un sistema de referencia cartesiano en  $\mathbb{R}^3$  y:

$$r = r(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}.$$

Es fácil ver que  $\Delta_u \left( \frac{1}{r} \right) = 0$ , es decir, que la función  $\frac{1}{r}$  verifica la **ecuación de Laplace** en sus tres primeros argumentos y en los tres últimos al ser  $r(u, v) = r(v, u)$ . Las **funciones esféricas**, también conocidas como **funciones**

de Legendre van a surgir, de manera natural, al intentar obtener una solución fundamental de la ecuación anterior.

Consideremos  $P_0(x_0, y_0, z_0), P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  y denotemos  $r_0 = d(O, P_0)$ ,  $r = d(O, P)$ ,  $l = d(P_0, P)$  y  $\psi = \angle(\mathbf{r}_{OP_0}, \mathbf{r}_{OP})$  el ángulo determinado por los radiovectores de  $P_0$  y  $P$ . Aplicando el **teorema del coseno** al triángulo  $\triangle OPP_0$  obtenemos que  $l = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi}$ , pudiendo escribir:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi}} = \begin{cases} \frac{1}{r_0 \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha u}}, & \text{si } r < r_0 \\ \frac{1}{r \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha u}}, & \text{si } r_0 < r \end{cases}$$

siendo  $u = \cos \psi$  ( $-1 \leq u \leq 1$ ) y

$$\alpha = \begin{cases} \frac{r}{r_0} & \text{si } r < r_0 \\ \frac{r_0}{r} & \text{si } r_0 < r \end{cases} \quad (0 < \alpha < 1).$$

**Definición 1.29.** Se define la función generatriz de los polinomios de Legendre a la función:

$$\Psi(\alpha, u) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha u}}, \quad \text{con } 0 < \alpha < 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq u \leq 1.$$

Sea  $u = u_0$  y definamos  $\Psi_{u_0}(\alpha) = \Psi(\alpha, u_0)$ . El denominador de esta función se anulará para  $\alpha = u_0 \pm \sqrt{1 - u_0^2} i$ , siendo  $|u_0| = 1$ . Tendremos, pues, que  $\Psi_{u_0}(\alpha)$  es analítica en el interior del círculo unidad centrado en el origen,  $\text{Int}S_1(0)$ , de manera que se puede desarrollar  $\Psi_{u_0}(\alpha)$  en serie de Taylor, ver [9],pág. 233, alrededor del punto  $\alpha = 0$ ,  $\Psi_{u_0}(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Psi_{u_0}}{\partial \alpha^n}(0) \alpha^n$ .

De igual modo, si tenemos en cuenta la fórmula **integral de Cauchy** para las derivadas de una función analítica en una determinada región, ver [9],pág. 169, entonces:

$$\frac{\partial^n \Psi_{u_0}}{\partial \alpha^n}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Psi_{u_0}(\tau)}{\tau^{n+1}} d\tau,$$

donde  $\gamma$  es una circunferencia centrada en el origen y contenida en el disco unidad. Llegamos, pues, a que:

$$\Psi_{u_0}(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Psi_{u_0}(\tau)}{\tau^{n+1}} d\tau \right] \alpha^n.$$

Si hacemos  $\sqrt{1 + \tau^2 - 2\tau u_0} = 1 - \tau z$ , tendremos que  $\tau = 2\frac{z - u_0}{z^2 - 1}$  y  $d\tau = \frac{2}{z^2 - 1}[1 - \tau z]dz$ , de modo que:

$$\int_{\gamma} \frac{\Psi_{u_0}(\tau)}{\tau^{n+1}} d\tau = \frac{1}{2^n} \int_{\gamma_1} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - u_0)^{n+1}} dz,$$

donde  $\gamma_1$  es un entorno cerrado que rodea al punto  $u_0$ . Sustituyendo en la expresión anterior:

$$\Psi_{u_0}(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \left[ \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_{\gamma_1} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - u_0)^{n+1}} dz \right] \alpha^n.$$

La función  $f_n(u) = (u^2 - 1)^n$  es una función **entera**, es decir, analítica en todo el plano complejo y, de nuevo por la fórmula integral de Cauchy:

$$f_n^k(u) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_1} \frac{f_n(z)}{(z - u)^{k+1}} dz = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_1} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - u)^{k+1}} dz,$$

donde  $\tilde{\gamma}_1$  es una curva cerrada que no contiene a  $u$ . Así pues:

$$\frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_{\gamma_1} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - u_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2^n n!} f_n^n(u_0) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n \Big|_{u_0} = P_n(u_0), \quad (1.20)$$

y

$$\Psi_{u_0}(\alpha) = \Psi(\alpha, u_0) = \sum_{n \geq 0} P_n(u_0) \alpha^n. \quad (1.21)$$

**Definición 1.30.** Se define el **polinomio de Legendre de grado n** como:

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}^+.$$

La expresión dada por la definición anterior se conoce, también, como **fórmula de Rodríguez**. Por definición,  $P_n$  es un polinomio de grado  $n$  y nos permite tener, finalmente, un desarrollo de  $\frac{1}{l}$  de la forma:

$$\frac{1}{l} = \begin{cases} \frac{1}{r_0} \sum_{n \geq 0} P_n(\cos \psi) \left(\frac{r}{r_0}\right)^n & \text{si } r < r_0, \\ \frac{1}{r} \sum_{n \geq 0} P_n(\cos \psi) \left(\frac{r_0}{r}\right)^n & \text{si } r_0 < r. \end{cases} \quad (1.22)$$

Según veremos en la siguiente sección, los polinomios de Legendre están uniformemente acotados verificándose que  $|P_n(\cos(\theta))| \leq 1$  para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$  y para todo  $0 \leq \theta \leq \pi$ . De este modo, la serie (1.21) estará mayorada por la serie geométrica convergente  $\sum_{n \geq 0} \alpha^n$  y será convergente.

### 1.4.3. Propiedades de los polinomios de Legendre

Ciertas propiedades de los polinomios de Legendre son de gran interés cuando estudiamos fenómenos con simetría esférica, algo que se pondrá de manifiesto al considerar los polinomios en la forma  $P_n(\cos \theta)$ , con  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

**Teorema 1.25.** *Para cada  $n \geq 0$ ,  $P_n(u)$  contiene sólo potencias en  $u$  de la misma paridad que  $n$ .*

Demostración. Considerando el teorema del binomio, es:

$$\frac{d^n}{du^n}(u^2 - 1)^n = \frac{d^n}{du^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} u^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{d^n}{du^n} u^{2(n-k)}.$$

Es evidente que  $\frac{d^n}{du^n} u^{2(n-k)} = 0$  para  $k > \frac{n}{2}$ , de manera que si  $r \in \{\frac{n}{2}; \frac{n-1}{2}\}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , tendremos que:

$$\frac{d^n}{du^n}(u^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{n}{k} \frac{d^n}{du^n} u^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} u^{n-2k},$$

siendo  $u^{n-2k}$  par/impar para cada  $k \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$  siempre que  $n$  sea par/impar respectivamente. ■

Teniendo en cuenta la definición 1.30 y la expresión obtenida en la demostración del resultado anterior, podemos escribir:

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} u^{n-2k}, \quad (1.23)$$

donde  $r = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  es la parte entera de  $\frac{n}{2}$ .

**Corolario 1.2.** *Para cada  $n \geq 0$  se verifica que  $P_n(-u) = (-1)^n P_n(u)$ .*

Considerando el desarrollo de la serie geométrica  $\Psi_1(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$  y su expresión según (1.21), es:

$$\sum_{n \geq 0} P_n(1) \alpha^n = \Psi_1(\alpha) = \Psi(\alpha, 1) = \frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots = \sum_{n \geq 0} \alpha^n,$$

de modo que  $P_n(1) = 1$  y  $P_n(-1) = (-1)^n$  para cada  $n \geq 0$ .

**Teorema 1.26.** *Los polinomios de Legendre,  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ , verifican la relación de recurrencia:*

$$(n+1)P_{n+1}(u) + nP_{n-1}(u) - u(2n+1)P_n(u) = 0 \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Demostración. Derivando la función generatriz de los polinomios de Legendre respecto de  $\alpha$  obtenemos:

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha u) \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} - (u - \alpha)\Psi = 0. \quad (1.24)$$

Al ser  $\Psi_u(\alpha)$  analítica en el interior del disco unidad y teniendo en cuenta el resultado de derivación de una función analítica desarrollada en serie de potencias, ver [9] página 230, podemos escribir:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}(\alpha, u) = \sum_{n \geq 1} n P_n(u) \alpha^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) P_{n+1}(u) \alpha^n,$$

de manera que, al sustituir en (1.24):

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + \alpha^2 - 2\alpha u) \sum_{n \geq 0} (n+1) P_{n+1}(u) \alpha^n - (u - \alpha) \sum_{n \geq 0} P_n(u) \alpha^n = \\ &= [P_1(u) - uP_0(u)]\alpha^0 + \sum_{n \geq 1} [(n+1)P_{n+1}(u) + nP_{n-1}(u) - u(2n+1)P_n(u)]\alpha^n. \end{aligned}$$

Al ser  $\{\alpha^n\}_{n \geq 0}$  un sistema linealmente independiente, cada coeficiente en el desarrollo anterior debe ser nulo quedando así demostrado el resultado. ■

Este resultado nos permite relacionar tres polinomios de Legendre con grados sucesivos y, de esta forma, obtener el tercero a partir de los otros dos. Además, la relación de recurrencia del teorema anterior es incluso cierta para  $n = 0$  si definimos  $P_{-1}(u) = 0$ .

A modo de ejemplo, recurriendo a la definición, es fácil verificar que  $P_0(u) = 1$  y  $P_1(u) = u$ . Por tanto, si hacemos  $n = 1$  en la fórmula anterior, debe ser  $2P_2(u) - 3uP_1(u) + P_0(u) = 0$  y  $P_2(u) = \frac{3u^2 - 1}{2}$ .

Análogamente se obtienen los primeros polinomios de Legendre desde  $n = 0$  a  $n = 5$ :

$$\begin{aligned} P_0(u) &= 1, & P_3(u) &= \frac{5}{2}u^3 - \frac{3}{2}u, \\ P_1(u) &= u, & P_4(u) &= \frac{35}{8}u^4 - \frac{15}{4}u^2 + \frac{3}{8}, \\ P_2(u) &= \frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{2}, & P_5(u) &= \frac{63}{8}u^5 - \frac{35}{4}u^3 + \frac{15}{8}u. \end{aligned}$$

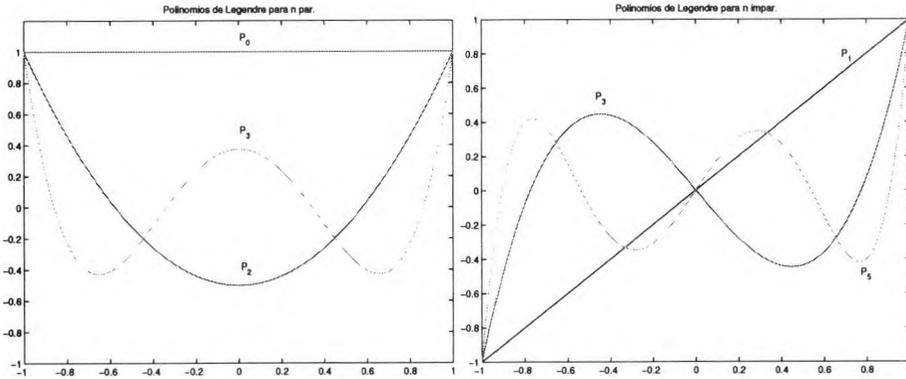


Figura 1.3: Primeros polinomios de Legendre desde  $n = 0$  a  $n = 5$ .

**Teorema 1.27.** Los polinomios de Legendre  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  y sus primeras derivadas verifican las siguientes fórmulas de recurrencia:

- I.  $P'_{n-1}(u) = uP'_n(u) - nP_n(u)$  para cada  $n \geq 1$ .
- II.  $P'_n(u) - uP'_{n-1}(u) - nP_{n-1}(u) = 0$  para cada  $n \geq 1$ .

**Demostración.** Derivando la función generatriz de los polinomios de Legendre respecto de  $\alpha$  y de  $u$ , obtenemos:

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha u) \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} - (u - \alpha) \Psi = 0, \quad (1 + \alpha^2 - 2\alpha u) \frac{\partial \Psi}{\partial u} - \alpha \Psi = 0.$$

Eliminando  $\Psi$  de las expresiones anteriores:

$$\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} - (u - \alpha) \frac{\partial \Psi}{\partial u} = 0. \quad (1.25)$$

Al igual que en la demostración del teorema 1.26, usando la derivación de funciones analíticas es  $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}(\alpha, u) = \sum_{n \geq 1} n P_n(u) \alpha^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) P_{n+1}(u) \alpha^n$  y  $\frac{\partial \Psi}{\partial u}(\alpha, u) = \sum_{n \geq 0} P'_n(u) \alpha^n$ , y sustituyendo en (1.25), obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \sum_{n \geq 0} (n+1) P_{n+1}(u) \alpha^n - (u - \alpha) \sum_{n \geq 0} P'_n(u) \alpha^n \\ &= -u P'_0(u) \alpha^0 + \sum_{n \geq 1} \{n P_n(u) - u P'_n(u) + P'_{n-1}(u)\} \alpha^n. \end{aligned}$$

La familia  $\{\alpha^n\}_n$  es linealmente independiente por lo que  $-u P'_0(u) \alpha^0 = 0$ , algo evidente al ser  $P_0(u) = 1$ , y  $n P_n(u) - u P'_n(u) + P'_{n-1}(u) = 0$ , quedando demostrada la primera de las fórmulas de recurrencia<sup>2</sup>. Para demostrar la segunda de las fórmulas derivamos

<sup>2</sup>seguirá siendo válida para  $n = 0$  si definimos  $P_{-1}(u) = 0$

la expresión del teorema (1.26) respecto de  $u$ :

$$(n+1)P'_{n+1}(u) + nP'_{n-1}(u) - (2n+1)P_n(u) - u(2n+1)P'_n(u) = 0$$

y utilizando la fórmula que acabamos de demostrar se llega a que:

$$(n+1)P'_{n+1}(u) - (n+1)uP'_n(u) - (n+1)^2P_n(u) = 0.$$

Basta dividir por  $n+1$  y cambiar  $n+1$  por  $n$ . ■

**Teorema 1.28.** Si  $P_n$  es el polinomio de Legendre de grado  $n$ , se verifica que:

$$P'_n(u) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (2n-4k-1)P_{n-2k-1}(u),$$

siendo  $\left[\frac{n-1}{2}\right]$  la parte entera de  $\frac{n-1}{2}$ .

**Teorema 1.29.** Para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$  se verifica que:

$$P_n(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u + i\sqrt{1-u^2} \operatorname{sen} \theta]^n d\theta \quad \text{para } -1 \leq u \leq 1.$$

Demostración. Según (1.20) es:

$$P_n(u) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{(z^2-1)^n}{(z-u)^{n+1}} dz, \quad (1.26)$$

donde  $\gamma_1$  es una curva cerrada que contiene al punto  $z = u$  en su interior. Tomemos, por ejemplo,  $\gamma_1 = D(u, R)$  el disco de centro  $z = u$  y radio  $R = \sqrt{1-u^2}$ . Para cada  $z \in \partial D(u, R)$  será  $z = u + \sqrt{1-u^2}e^{i\theta}$ , de manera que  $dz = \sqrt{1-u^2}e^{i\theta}id\theta$ ,  $(z-u)^{n+1} = (1-u^2)^{\frac{n+1}{2}}e^{i(n+1)\theta}$  y  $z^2-1 = \sqrt{1-u^2}e^{i\theta}[2u + 2i\sqrt{1-u^2}\operatorname{sen} \theta]$ . De este modo:

$$\begin{aligned} P_n(u) &= \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(1-u^2)^{\frac{n}{2}}e^{in\theta}[2u + 2i\sqrt{1-u^2}\operatorname{sen} \theta]^n}{(1-u^2)^{\frac{n+1}{2}}e^{i(n+1)\theta}} \sqrt{1-u^2}e^{i\theta}id\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u + i\sqrt{1-u^2}\operatorname{sen} \theta]^n d\theta. \end{aligned}$$

■

**Corolario 1.3.** Los polinomios de Legendre están uniformemente acotados:

$$|P_n(u)| \leq 1, \quad \text{para } -1 \leq u \leq 1 \quad \text{y } n \geq 0.$$

**Demostración.** Al ser  $-1 \leq u \leq 1$  tenemos que:

$$\begin{aligned} |u + i\sqrt{1-u^2} \operatorname{sen} \theta| &= \sqrt{u^2 + (1-u^2) \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{u^2 \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} \leq \sqrt{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} = 1, \end{aligned}$$

por lo que, aplicando el teorema (1.29) para cada  $n \geq 0$  será:

$$|P_n(u)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u + i\sqrt{1-u^2} \operatorname{sen} \theta|^n d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1.$$

■

**Lema 1.3.** (*Teorema de Rolle*) Sea  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  y  $\varphi \in \mathcal{C}[I, \mathbb{R}]$  derivable en  $(a, b)$ . Si  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , entonces existe al menos un punto  $\xi \in (a, b)$  tal que  $\varphi'(\xi) = 0$ .

**Teorema 1.30.** Para cada  $n = 1, 2, \dots$  y para cada  $0 \leq k \leq n$  existen  $c_1, c_2, \dots, c_{n-k}$  verificando:

I.  $-1 < c_1 < c_2 < \dots < c_{n-k} < 1$ .

II.  $P_n^{(k)}(c_i) = 0, 1 \leq i \leq n - k$ .

**Demostración.** Demostraremos, en primer lugar, el caso  $k = 0$ . Consideremos la **fórmula de Rodríguez** y definamos  $\varphi(x) = (x^2 - 1)^n$ , función que se anula en los extremos del intervalo,  $x = \pm 1$ . Su primera derivada,  $\varphi'(x)$ , también se anula en los extremos del intervalo y por el lema 1.3 tiene al menos un cero  $\xi_1^1 \in (-1, 1)$ . Por el mismo resultado,  $\varphi''(x)$  tiene dos ceros  $\xi_1^2 \in (-1, \xi_1^1)$  y  $\xi_2^2 \in (\xi_1^1, 1)$  aunque también se anula en los extremos del intervalo. Si se continúa con este razonamiento, la derivada  $n$ -ésima,  $\varphi^{(n)}(x)$ , tiene, al menos,  $n$  ceros en el intervalo  $(-1, 1)$ , o, más precisamente, exactamente  $n$  ceros por ser un polinomio de grado  $n$ . Queda así demostrado el teorema para el caso  $k = 0$ . Para los demás casos, y teniendo en cuenta que:

$$P_n^k(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+k}}{du^{n+k}} (u^2 - 1)^n, \quad n \geq 0,$$

podemos razonar de manera análoga, llegándose a la conclusión de que debe tener al menos  $n - k$  ceros en el intervalo  $(-1, 1)$ , y al ser un polinomio de grado  $n - k$ , debe tener exactamente ese número de ceros. ■

Por todo lo expuesto anteriormente, si trasladamos las gráficas de  $P_n$  sobre la superficie de una esfera de radio unidad con variable  $0 \leq \theta \leq \pi$ , cada polinomio compartimenta la esfera en  $n + 1$  zonas, positivas y negativas.

#### 1.4.4. Ecuación de Legendre

A continuación veremos que los polinomios de Legendre son soluciones de un determinado problema de valores propios.

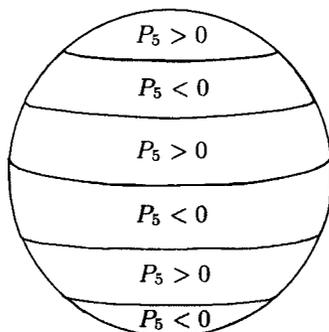


Figura 1.4: División de la esfera, por  $P_5$ , en zonas positivas y negativas.

Si tenemos en cuenta las fórmulas de recurrencia del teorema 1.27 y sustituimos la primera de las fórmulas en la segunda, llegamos a:

$$(1 - u^2)P'_n(u) + unP_n(u) - nP_{n-1}(u) = 0.$$

Derivando una vez y volviendo a utilizar la primera de las expresiones, se concluye que el polinomio de Legendre  $P_n(u)$  es solución de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$[(1 - u^2)P'_n(u)]' + n(n + 1)P_n(u) = 0,$$

conocida como **ecuación de Legendre**. Esta ecuación no es más que un problema de autovalores,  $L[y] = \lambda y$ , donde  $L[y] = (ky')' - qy$  para  $k(x) = 1 - x^2$ ,  $q(x) = 0$  y  $\lambda = -n(n + 1)$ .

Si  $f, g \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{C})$ , integrando por partes dos veces y teniendo en cuenta que  $k(x) = 1 - x^2$  es una función real, se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle L[f], g \rangle &= \int_{-1}^1 [(1 - x^2)f'(x)]' \bar{g}(x) dx \\ &= \bar{g}(x)(1 - x^2)f'(x) \Big|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^1 (1 - x^2)f'(x)\bar{g}'(x) dx \\ &= -\left\{ (1 - x^2)\bar{g}'(x)f(x) \Big|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^1 f(x)[(1 - x^2\bar{g}'(x))]' dx \right\} \\ &= \int_{-1}^1 f(x)\overline{L[g]} dx = \langle f, L[g] \rangle. \end{aligned}$$

Así pues, el operador diferencial de Legendre es un operador diferencial autoadjunto.

### 1.4.5. Ortogonalidad y norma de los polinomios de Legendre

Consideremos la norma  $\| \cdot \|_2$  definida en el espacio de funciones  $\mathcal{C}[-1, 1]$  como:

$$\|f\|_2 = \left( \int_{-1}^1 f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

El polinomio de Legendre de grado  $n$ ,  $P_n(x)$ , es una función propia asociada al autovalor  $\lambda_n = -n(n+1)$  para el problema de valores propios  $[(1-x^2)y']' = -n(n+1)y$ . Según el teorema 1.23,  $\{P_n\}_n$  será un sistema ortogonal, es decir:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad \text{para } n \neq m.$$

Si hacemos  $n+1$  igual a  $n$  en la fórmula de recurrencia (1.26), obtenemos:

$$P_n(x) = \frac{1}{n} [x(2n-1)P_{n-1} - (n-1)P_{n-2}],$$

por lo que, teniendo en cuenta la relación anterior y la ortogonalidad de la familia  $\{P_n\}_n$ :

$$\begin{aligned} \|P_n\|_2^2 &= \frac{1}{n} \int_{-1}^1 P_n [x(2n-1)P_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)] dx \\ &= \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^1 xP_n(x)P_{n-1}(x)dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, por el teorema (1.26), tenemos que:

$$xP_n(x) = \frac{1}{2n+1} [(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)],$$

y sustituyendo en la integral anterior resulta una nueva fórmula de recurrencia:

$$\|P_n\|_2^2 = \frac{2n-1}{2n+1} \|P_{n-1}\|_2^2.$$

Aplicando sucesivamente la relación anterior se llega a:

$$\|P_n\|_2^2 = \frac{1}{2n+1} \|P_0\|_2^2 = \frac{1}{2n+1} \int_{-1}^1 dx = \frac{2}{2n+1},$$

de manera que:

$$\|P_n\|_2 = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Finalmente, podemos escribir:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \delta_{nm} \frac{2}{2n+1} \quad n, m \geq 0, \quad (1.27)$$

siendo:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

### 1.4.6. Completitud de los polinomios de Legendre

**Definición 1.31.** Un sistema ortonormal  $\{\Upsilon_k\}_k \subseteq \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  se denomina **cerrado** si para  $\varepsilon > 0$  y para cada  $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  existe una combinación lineal finita  $\sum_{k=1}^n c_k \Upsilon_k$ , verificando:

$$\|g - \sum_{k=1}^n c_k \Upsilon_k\|_2 < \varepsilon.$$

**Teorema 1.31.** Si  $\{\Upsilon_k\}_k \subseteq \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  es un sistema ortonormal cerrado, entonces para cualquier elemento  $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ :

$$\lim_n \|g - \sum_{k=1}^n \langle g, \Upsilon_k \rangle \Upsilon_k\|_2 = 0.$$

**Teorema 1.32.** Salvo constantes multiplicativas normalizadoras, el sistema trigonométrico  $\{\sin(nx), \cos(nx)\}$  es un sistema cerrado.

La demostración de estos dos resultados puede verse en [8], páginas 330 y 335 respectivamente.

Para demostrar la completitud de la familia  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ , bastará ver que  $\sigma(\beta) = \{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ . Sea  $\lambda \in \sigma(L_\beta)$ ,  $\lambda \neq \lambda_n = n(n+1)$  para todo  $n$  y  $f \in \varepsilon(L_\beta, \lambda) - \{0\}$ . Por el teorema 1.23 tendremos que  $\langle f, P_n \rangle = 0$  para cada  $n$ . Al ser  $P_n$  un polinomio de grado  $n$  con coeficientes reales,  $\{P_k\}_{k=0}^n$  será una base del  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de polinomios reales de grado menor o igual que  $n$ :

$$\mathbb{P}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n\}.$$

En particular, deben existir  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  de modo que

$$x^n = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(x),$$

y

$$\langle f, x^n \rangle = \langle f, \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(x) \rangle = \sum_{k=0}^n \alpha_k \langle f, P_k(x) \rangle = 0.$$

Sea  $\alpha \in \mathbb{N}$  arbitrario. Desarrollando  $\Psi_\alpha(x) = \sin(\alpha x)$  y  $\Phi_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$  en serie de Taylor:

$$f(x)\Psi_\alpha(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha^{2n+1} f(x) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (1.28)$$

$$f(x)\Phi_\alpha(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha^{2n} f(x) \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (1.29)$$

por la convergencia uniforme de las series anteriores, tendremos que:

$$\begin{aligned} \langle f, \Psi_\alpha \rangle &= \int_{-1}^1 f(x) \overline{\sin(\alpha x)} dx = \int_{-1}^1 f(x) \sin(\alpha x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha^{2n+1} f(x) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} dx \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_{-1}^1 f(x) x^{2n+1} dx \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \langle f, x^{2n+1} \rangle = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Análogamente, también se comprueba que  $\langle f, \Phi_\alpha \rangle = 0$  para cada  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

Como consecuencia de este último teorema, debe ser  $f = 0$  quedando así demostrado que los polinomios de Legendre determinan, salvo constantes multiplicativas, un sistema completo.

### 1.4.7. Funciones adjuntas de Legendre

Los polinomios de Legendre son funciones esféricas cuya representación gráfica sobre la superficie de una esfera no depende del parámetro longitud. Sin embargo, podemos incorporar cambios de signo dentro cada una de estas zonas esféricas considerando las denominadas funciones adjuntas de Legendre, también conocidas como funciones esféricas de Laplace. Éstas, al igual que los polinomios de Legendre, también van a constituir un sistema completo y ortogonal.

Consideremos el problema de valores propios consistente en determinar los valores y las funciones propias para la ecuación diferencial  $L[y] + \lambda y = 0$ ,  $-1 < x < 1$ , para:

$$k(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = \frac{m^2}{1 - x^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

y que se conoce con el nombre de *ecuación asociada o generalizada de Legendre*.

Supongamos que existe una solución de esta ecuación de la forma

$$y(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} v(x),$$

siendo  $v(\pm 1) \neq 0$ . Sustituyendo en la ecuación de valores propios anterior se comprueba que  $v(x)$  debe verificar la ecuación diferencial:

$$L_m^\lambda[y] = (1 - x^2)v'' - 2x(1 + m)v' + [\lambda - m(m + 1)]v = 0. \quad (1.30)$$

Si hacemos  $m = 0$ , la ecuación (1.30) resulta ser la ecuación de Legendre. Fijemos  $\lambda_n = n(n + 1)$  y definamos  $z_0^n = P_n$ . Por lo dicho antes, debe ser:

$$L_0^{\lambda_n}[z_0^n] = (1 - x^2)\frac{d^2 z_0^n}{dx^2} - 2x\frac{dz_0^n}{dx} + \lambda_n z_0^n = 0,$$

y derivando obtenemos:

$$(1 - x^2)\frac{d^3 z_0^n}{dx^3} - 4x\frac{d^2 z_0^n}{dx^2} + (\lambda_n - 2)\frac{dz_0^n}{dx} = 0.$$

Haciendo  $z_1^n = \frac{dz_0^n}{dx} = \frac{dP_n}{dx}$  es:

$$(1 - x^2)\frac{d^2 z_1^n}{dx^2} - 4xz_1^n \frac{dz_1^n}{dx} + \lambda_n z_1^n = 0.$$

Es decir,  $z_1^n$  es solución de (1.30) para  $m = 1$ . Finalmente, es fácil ver por inducción que  $z_m^n = \frac{d^m P_n}{dx^m}$  es solución de (1.30) para  $m$  y  $\lambda_n = n \cdot (n + 1)$ .

**Definición 1.32.** *Se define la función de Legendre de grado  $n$  y orden  $m$  como:*

$$P_{nm}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad 0 \leq m \leq n.$$

Observemos que:

- I. Por definición, y al ser  $P_n$  un polinomio de grado  $n$ , es evidente que  $P_{nm} = 0$  para  $m \geq n + 1$ .
- II.  $P_{n0} = P_n$ , es decir, las funciones adjuntas de Legendre de orden cero coinciden con los polinomios de Legendre.
- III. Por el teorema 1.30,  $\frac{d^m P_n}{dx^m}$  tiene  $n - m$  ceros en el intervalo  $(-1, 1)$ . Al ser  $(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \geq 0$  para  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $P_{nm}$  cambia su signo  $n - m$  veces en el intervalo  $[-1, 1]$ .

**Definición 1.33.** Denominamos funciones asociadas de Legendre de grado  $n$  y orden  $m$  a las funciones  $P_{nm}(\cos(\theta))$  para  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

**Teorema 1.33.** La función de Legendre de grado  $n$  y orden  $m$  admite un desarrollo de la forma:

$$P_{nm}(x) = \frac{1}{2^n} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!(n-2k-m)!} x^{n-2k-m}.$$

**Demostración.** Si consideramos el desarrollo (1.23) de un polinomio de Legendre de grado  $n$  y la definición 1.32, entonces:

$$P_{nm}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2n-k)!}{(n-2k)!} \frac{d^m}{dx^m} x^{n-2k},$$

siendo  $r$  la parte entera de  $\frac{n}{2}$ .

La derivada  $q$ -ésima de la potencia  $x^p$  obedece la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{d^q}{dx^q} x^p &= p \frac{d^{q-1}}{dx^{q-1}} x^{p-1} = p(p-1) \frac{d^{q-2}}{dx^{q-2}} x^{p-2} \\ &= \dots = p(p-1) \dots (p-q+2)(p-q+1) x^{p-q} = \frac{p!}{(p-q)!} x^{p-q}. \end{aligned}$$

Haciendo  $q = m$ ,  $p = n - 2k$  se llega a la expresión deseada. ■

El resultado anterior es también válido para el caso particular de los polinomios de Legendre.

### 1.4.8. Ortogonalidad y norma de las funciones adjuntas de Legendre

Nos preguntamos por el producto escalar de dos funciones asociadas de Legendre. Si multiplicamos la ecuación (1.30) por  $(1-x^2)^m$  y tenemos en cuenta que  $z_m^n = \frac{d^m P_n}{dx^m}$  es solución de dicha ecuación, entonces llegamos a:

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2)^{m+1} \frac{d^{m+1} P_n}{dx^{m+1}} \right) + [\lambda_n - m(m+1)] (1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} = 0.$$

Haciendo  $m+1$  igual a  $m$ :

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \right) + [\lambda_n - m(m-1)] (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1} P_n}{dx^{m-1}} = 0, \quad (1.31)$$

definiendo  $\Gamma_{nk}^m = \int_{-1}^1 P_{nm}(x) P_{km}(x) dx$ , para  $n, k = 0, 1, 2, \dots$  y  $m \leq \min\{n, k\}$  e integrando por partes se llega fácilmente a:

$$\Gamma_{nk}^m = [n(n+1) - m(m+1)] \Gamma_{nk}^{m-1} = \dots = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \Gamma_{nk}^0.$$

Por la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, será:

$$\Gamma_{nk}^0 = \int_{-1}^1 P_{n0}(x)P_{k0}(x)dx = \int_{-1}^1 P_n(x)P_k(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nk},$$

pudiendo escribir:

$$\Gamma_{nk}^m = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & n = k \end{cases}. \quad (1.32)$$

Queda así demostrado que la norma de una función adjunta de Legendre tiene por expresión  $\|P_{nm}\|_2 = \sqrt{\frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}}$ .

## 1.5. Ecuación de Laplace

### 1.5.1. Resolución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

La ecuación de Laplace en el sistema curvilíneo de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \lambda)$  responde a la expresión:

$$\Delta_{r,\theta,\lambda} V = r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot(\theta) \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0, \quad (1.33)$$

Buscaremos, según el método de separación de variables, soluciones elementales que sean del tipo:

$$V(r, \theta, \lambda) = f(r)Y(\theta, \lambda). \quad (1.34)$$

Derivando y sustituyendo en (1.33) se llega a la igualdad:

$$\frac{1}{f}(r^2 f'' + 2r f') = -\frac{1}{Y} \left( \cot(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} \right),$$

en la que el primer miembro sólo depende de  $r$  y el segundo miembro de  $\theta$  y  $\lambda$ . Así pues, ambos deben ser iguales a una constante  $\mu$  que, por razones que veremos más adelante, hacemos igual a  $\lambda_n = n(n+1)$ , para  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Llegamos a las dos relaciones siguientes:

- Ecuación en  $f(r)$ :

$$r^2 f'' + 2r f' - \lambda_n f = 0, \quad (1.35)$$

- Ecuación en  $Y(\theta; \lambda)$ :

$$\cot(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + \lambda_n Y = 0 \quad (1.36)$$

### Resolución de la ecuación en $f(r)$

La primera de las ecuaciones es muy sencilla de resolver pues se trata de una ecuación diferencial ordinaria lineal de Euler<sup>3</sup>. Para resolver este tipo de ecuación, consideremos el cambio de variable  $r = e^t$ . Si denotamos  $f(r) = f_*(t)$ , será  $f'(r) = \dot{f}_*(t)e^{-t}$  y  $f''(r) = (\ddot{f}_*(t) - \dot{f}_*(t))e^{-2t}$ , pudiendo escribir la ecuación (1.35) en la forma  $\ddot{f} + \dot{f} - n(n+1)f = 0$ , que es una ecuación diferencial homogénea de orden dos con coeficientes constantes. La ecuación característica asociada es  $p(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - n(n+1)$ , con raíces  $\alpha_1 = n$  y  $\alpha_2 = -(n+1)$ . Así pues, dos soluciones linealmente independientes son  $f_*^1(t) = e^{nt}$  y  $f_*^2(t) = e^{-(n+1)t}$ , de manera que toda solución de esta ecuación será de la forma  $f_*(t) = c_1 e^{nt} + c_2 e^{-(n+1)t}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Deshaciendo ahora el cambio de variable llegamos a la función buscada:

$$f(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-(n+1)}. \quad (1.37)$$

Si denotamos por  $Y_n(\theta, \lambda)$  una solución de (1.36), la ecuación de Laplace tendrá como soluciones  $V = r^n Y_n(\theta, \lambda)$  y  $V = \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}$ .

**Definición 1.34.** Se definen los armónicos esféricos de superficie (de Laplace) a las funciones  $Y_n(\theta, \lambda)$  soluciones de la ecuación (1.36).

**Definición 1.35.** Llamamos armónicos esféricos sólidos a las funciones de la forma:

$$V = r^n Y_n(\theta, \lambda) \quad \text{y} \quad V = \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}},$$

la primera de las cuales corresponde, evidentemente, a la solución de los problemas interiores y la segunda a la de los exteriores.

### Resolución de la ecuación en $Y(\theta, \lambda)$

A continuación resolveremos la ecuación (1.36) aplicando, nuevamente, el método de separación de variables. Supongamos que existe una solución de la forma:

$$Y(\theta, \lambda) = g(\theta)h(\lambda). \quad (1.38)$$

<sup>3</sup>Las ecuaciones de la forma:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0,$$

con  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq i \leq n$  se llaman ecuaciones de Euler.

Derivando y sustituyendo en (1.36) llegamos a:

$$g''(\theta)h(\lambda) + \cot(\theta)g'(\theta)h(\lambda) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta)}g(\theta)h''(\lambda) + n(n+1)g(\theta)h(\lambda) = 0,$$

y multiplicando por  $\frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{g(\theta)h(\lambda)}$  se obtiene:

$$\operatorname{sen}^2(\theta)\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} + \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\frac{g'(\theta)}{g(\theta)} + n(n+1)\operatorname{sen}^2(\theta) = -\frac{h''(\lambda)}{h(\lambda)}.$$

De nuevo, primer y segundo miembro dependen de variables distintas por lo que deben ser iguales a una misma constante. Si imponemos a la ecuación  $h''(\lambda) + \tau h(\lambda) = 0$  la condición de periodicidad  $h(\lambda + 2\pi) = h(\lambda)$ , entonces se puede demostrar que tiene por espectro  $\sigma = \{m^2 : m \in \mathbb{Z}\}$ . Resultan, entonces, las dos ecuaciones:

- Ecuación en  $g(\theta)$ :

$$\operatorname{sen}(\theta)g''(\theta) + \cos(\theta)g'(\theta) + \left[ n(n+1)\operatorname{sen}(\theta) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}(\theta)} \right] g(\theta) = 0. \quad (1.39)$$

- Ecuación en  $h(\lambda)$ :

$$h''(\lambda) + m^2h(\lambda) = 0. \quad (1.40)$$

La última ecuación es de resolución inmediata. Tiene por ecuación característica  $P(\alpha) = \alpha^2 + m^2 = 0$ , de raíces  $\alpha = \pm mi$ . De este modo, dos soluciones linealmente independientes son  $h_1(\lambda) = \cos(m\lambda)$  y  $h_2(\lambda) = \operatorname{sen}(m\lambda)$ . Así pues, cualquier solución será de la forma:

$$h(\lambda) = c_1 \cos(m\lambda) + c_2 \operatorname{sen}(m\lambda), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La ecuación (1.39) tiene soluciones más generales. Para encontrarlas hagamos el cambio de variable  $x = \cos(\theta)$ . Si denotamos  $g_*(x) = g(\theta)$ , entonces:

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= -g'_*(x)\operatorname{sen}(\theta) \\ g''(\theta) &= g''_*(x)\operatorname{sen}^2(\theta) - g_*(x)\cos(\theta), \end{aligned}$$

y sustituyendo en (1.39):

$$(1-x^2)g''_*(x) - 2g'_*(x) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] g_*(x) = 0,$$

que es, precisamente, la ecuación generalizada o asociada de Legendre.

**Definición 1.36.** Llamamos **condición natural de acotación para la ecuación**  $L[y] + \lambda \rho y = 0$ , para  $\rho \in C(I, \mathbb{R})$ , supuesto que  $k(a) = 0$  y  $k(x) > 0$  para cada  $x \in (a, b)$  a la acotación  $|y(a)| < +\infty$ .

Con esta restricción, toda solución de esta ecuación será de la forma  $g_*(x) = c_3 P_{nm}(x)$ , siendo  $P_{nm}$  la función de Legendre de grado  $n$  y orden  $m$ . Esto explica por qué habíamos considerado  $mu_n = n(n+1)$ , para  $n \in \mathbb{Z}^+$ , como únicos valores factibles para la existencia de soluciones acotadas no triviales.

Así pues, deshaciendo el cambio de variables tenemos, finalmente, que la función buscada es  $g(\theta) = c_3 P_{nm}(\cos(\theta))$ .

### Armónicos esféricos de superficie

Si llevamos las funciones obtenidas  $g(\theta)$  y  $h(\lambda)$  a la expresión (1.38), donde hemos convenido escribir el sistema de funciones esféricas de  $n$ -ésimo orden con el índice superior negativo a las funciones que contienen  $\cos(m\lambda)$  y positivo a las que contienen  $\sin(m\lambda)$ , se tiene que:

$$\begin{cases} Y_n^{-m}(\theta, \lambda) = c_1 \cos(m\lambda) c_3 P_{nm}(\cos(\theta)), \\ Y_n^m(\theta; \lambda) = c_2 \sin(m\lambda) c_3 P_{nm}(\cos(\theta)). \end{cases}$$

Por tanto, eliminando la constante innecesaria  $c_3$ , encontramos que son soluciones de la ecuación diferencial (1.36):

$$\begin{cases} Y_n^{-m}(\theta, \lambda) = a_{nm} \cos(m\lambda) P_{nm}(\cos(\theta)), \\ Y_n^m(\theta; \lambda) = b_{nm} \sin(m\lambda) P_{nm}(\cos(\theta)). \end{cases}$$

Más generalmente, superponiendo soluciones y teniendo en cuenta que debe ser  $0 \leq m \leq n$ , escribimos:

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=-n}^{m=n} c_{nm} Y_n^m(\theta, \lambda), \quad (1.41)$$

La expresión anterior es la más genérica de los armónicos esféricos de superficie. Ya estamos, pues, en condiciones de determinar la integral de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Para ello, llevaremos las funciones  $f(r)$  e  $Y_n(\theta, \lambda)$  definidas por (1.37) y (1.41) respectivamente, a la solución inicial (1.34) resultando:

$$\begin{aligned} V(r, \theta, \lambda) &= f(r) Y_n(\theta, \lambda) \\ &= (c_1 r^n + c_2 r^{-(n+1)}) \sum_{m=0}^n [a_{nm} \cos(m\lambda) + b_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm}(\cos(\theta)). \end{aligned}$$

Entonces, aplicando de nuevo el principio de superposición de soluciones elementales y eligiendo según nos encontremos en el problema interior o en el exterior  $c_1 = 0$  o  $c_2 = 0$ :

$$V_i(r, \theta, \lambda) = \sum_{n \geq 0} r^n \sum_{m=0}^n [a_{nm} \cos(m\lambda) + b_{nm} \operatorname{sen}(m\lambda)] P_{nm}(\cos(\theta)), \quad (1.42)$$

$$V_e(r, \theta, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n [a_{nm} \cos(m\lambda) + b_{nm} \operatorname{sen}(m\lambda)] P_{nm}(\cos(\theta)), \quad (1.43)$$

habiéndose eliminado las constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  por ser ahora innecesarias.

Las expresiones (1.42) y (1.43) son soluciones de la ecuación de Laplace  $\Delta V = 0$  siendo, además, soluciones muy generales en el sentido que toda función que es armónica dentro de una determinada esfera admite un desarrollo del tipo (1.42) y toda función que es armónica fuera de una cierta esfera, tal y como ocurre con el potencial gravitatorio terrestre, puede desarrollarse mediante una cierta serie del tipo (1.43). Así pues, es evidente la gran importancia de los armónicos esféricos sólidos en geodesia.

### 1.5.2. Comportamiento de los armónicos esféricos

La representación geométrica de los armónicos esféricos es de gran importancia. Los armónicos esféricos de superficie para  $m = 0$ ,  $Y_n^0$ , no dependen de  $\lambda$  y, por el teorema 1.30, tiene exactamente  $n$  ceros en el intervalo abierto  $(-1, 1)$ , esto es, para  $0 < \theta < \pi$ . De este modo, los armónicos con  $m = 0$  cambian su signo  $n$  veces en este intervalo de manera que su representación sobre la esfera es tal que la compartimenta en  $n + 1$  zonas de latitud, dentro de las cuales la función conserva su signo constante. Puesto que dividen a la esfera en zonas, son también llamados **armónicos zonales**. Para  $m \neq 0$ ,  $P_{nm}(\cos(\theta))$  cambia  $n - m$  veces su signo para  $0 < \theta < \pi$  y se anula en  $n - m$  paralelos. Por otro lado,  $\operatorname{sen}(m\lambda)$  y  $\cos(m\lambda)$  se anulan en  $2m$  meridianos, por lo que toda la esfera se divide en parcelas en las que  $Y_n^{\pm m}$  mantiene su signo constante, formando algo parecido a un tablero de ajedrez. Se llaman **armónicos tesorales**.<sup>4</sup> En particular, para  $n = m$ , los armónicos tesorales degeneran a funciones que dividen la esfera en sectores positivos y negativos, en cuyo caso reciben el nombre de **armónicos sectoriales**.

### 1.5.3. Ortogonalidad del sistema de funciones esféricas.

Demostremos que los armónicos esféricos de superficie son ortogonales en la superficie,  $\Sigma$ , de la esfera unidad. Podemos reescribir la ecuación (1.36), en la

<sup>4</sup> *Tessera* es una palabra griega que significa cuadrado, rectángulo, baldosa.

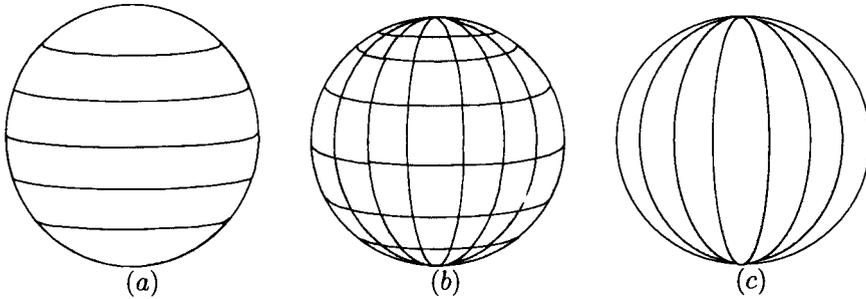


Figura 1.5: Tipos de armónicos esféricos:(a) zonal, (b) teseral, (c) sectorial.

forma:

$$\cot(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + \mu Y = \Delta_{\theta, \lambda} Y + \mu Y = 0, \quad (1.44)$$

donde

$$\Delta_{\theta, \lambda} Y = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2}.$$

Dados  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq n$ , sean  $Y_k$  e  $Y_n$  soluciones de la ecuación (1.44) asociadas a los valores propios  $\mu_k$  y  $\mu_n$  respectivamente. Tendremos que, al ser  $d\sigma = \sin(\theta)d\theta d\lambda$  elemento de superficie, podemos escribir:

$$\iint_{\Sigma} Y_k(\theta, \lambda) \Delta_{\theta, \lambda} Y_n d\sigma = \iint_{\Sigma} Y_k \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin(\theta) \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \right] d\theta d\lambda + \iint_{\Sigma} Y_k \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \lambda^2} d\theta d\lambda. \quad (1.45)$$

Integrando por partes:

- $\iint_{\Sigma} Y_k \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin(\theta) \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \right] d\theta d\lambda = - \iint_{\Sigma} \frac{\partial Y_k}{\partial \theta} \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} d\sigma,$
- $\iint_{\Sigma} Y_k \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \lambda^2} d\lambda d\theta = - \iint_{\Sigma} \frac{\partial Y_k}{\partial \lambda} \frac{\partial Y_n}{\partial \lambda} \frac{1}{\sin^2(\theta)} d\sigma,$

y, de este modo, sustituyendo en (1.45):

$$\iint_{\Sigma} Y_k(\theta; \lambda) \Delta_{\theta, \lambda} Y_n d\sigma = - \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial Y_k}{\partial \theta} \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} + \frac{\partial Y_k}{\partial \lambda} \frac{\partial Y_n}{\partial \lambda} \frac{1}{\sin^2(\theta)} \right\} d\sigma. \quad (1.46)$$

Si escribimos la identidad (1.46) en la forma:

$$\iint_{\Sigma} Y_k \operatorname{div}(\nabla Y_n) d\sigma = - \iint_{\Sigma} \nabla Y_k \bullet \nabla Y_n d\sigma, \quad (1.47)$$

intercambiamos  $Y_k$  por  $Y_n$  y restamos, entonces llegamos a:

$$\iint_{\Sigma} [Y_k \operatorname{div}(\nabla Y_n) - Y_n \operatorname{div}(\nabla Y_k)] d\sigma = 0. \quad (1.48)$$

De la fórmula (1.48) se deduce fácilmente la ortogonalidad de las funciones  $Y_k$  e  $Y_n$ . En efecto, teniendo en cuenta que  $Y_k$  e  $Y_n$  satisfacen la ecuación (1.44) para los valores propios  $\mu_k$  y  $\mu_n$  y sustituyendo en (1.48), se obtiene que:

$$0 = \iint_{\Sigma} [Y_k \operatorname{div}(\nabla Y_n) - Y_n \operatorname{div}(\nabla Y_k)] d\sigma = (\mu_k - \mu_n) \iint_{\Sigma} Y_k Y_n d\sigma,$$

de donde, para  $\mu_k \neq \mu_n$ , debe ser  $\iint_{\Sigma} Y_k Y_n d\sigma = 0$ .

Queda así demostrada la ortogonalidad de las funciones esféricas zonales. Veamos, además, que las  $2n + 1$  funciones  $\{Y_n^m\}$ , para  $-n \leq m \leq n$ , son también ortogonales dos a dos en la esfera. Para ello, consideremos las siguientes igualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \cos(px) dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(px) dx = 0 \quad p \in \mathbb{Z}, \\ \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos(px) \cos(qx) \\ \operatorname{sen}(px) \operatorname{sen}(qx) \end{array} \right\} dx = \begin{cases} 0 & p \neq q \\ \pi & p = q \end{cases} \quad p, q \in \mathbb{Z}, \\ \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(px) \cos(qx) dx = 0 \quad p, q \in \mathbb{Z}, \end{array} \right.$$

que se obtienen fácilmente por integración, e  $Y_n^k$ ,  $Y_n^l$  dos funciones esféricas. Podemos distinguir los siguientes casos:

**Caso 1:**  $k \cdot l = 0$ 

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $k = 0$ . Será, por (1.5.3) y (1.27):

$$\iint_{\Sigma} Y_n^0 Y_n^l d\sigma = \begin{cases} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \cos(l\lambda) d\lambda \int_{\theta=0}^{\pi} P_n(\cos(\theta)) P_{n,-l}(\cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta) d\theta = 0 & \text{si } l < 0, \\ \int_{\lambda=0}^{2\pi} \operatorname{sen}(l\lambda) d\lambda \int_{\theta=0}^{\pi} P_n(\cos(\theta)) P_{nl}(\cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta) d\theta = 0 & \text{si } l > 0, \\ \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} P_n(\cos(\theta)) P_n(\cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\lambda = \frac{4\pi}{2n+1} & \text{si } k = l = 0, \end{cases}$$

**Caso 2:**  $k \cdot l > 0$ 

Sean  $k, l \in \mathbb{Z}$  tal que  $k \cdot l > 0$ . En este caso, por (1.5.3) y teniendo en cuenta (1.32), se tiene que:

$$\iint_{\text{Sigma}} Y_n^{\pm k} Y_n^{\pm l} d\sigma = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} & k = l. \end{cases}$$

**Caso 3:**  $k \cdot l < 0$ 

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $k > 0$  y  $l < 0$ . Si consideramos (1.5.3), tendremos que:

$$\iint_{\Sigma} Y_n^k Y_n^l = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \operatorname{sen}(k\lambda) \cos(l\lambda) d\lambda \int_{\theta=0}^{\pi} P_{nk}(\cos(\theta)) P_{n,-l}(\cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta) d\theta = 0.$$

A modo de resumen, fijado  $n \geq 0$  y dados  $k, l \in \mathbb{Z}$ , se verifica que:

$$\iint_{\Sigma} Y_n^k Y_n^l d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l, \\ \frac{4\pi}{2n+1} & \text{si } k = l = 0, \\ \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+|k|)!}{(n-|k|)!} & \text{si } k = l \neq 0, \end{cases}$$

es decir, que las funciones armónicas  $\{Y_n^m\}$  para  $-n \leq m \leq n$ , forman un sistema ortogonal en la región  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$  y tienen el cuadrado de la norma igual a:

$$\|Y_n^k\|_2^2 = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} [Y_n^k]^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\lambda = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+|k|)!}{(n-|k|)!} \varepsilon_k, \quad (1.49)$$

donde  $\varepsilon_0 = 2$ ,  $\varepsilon_k = 1$  para  $k > 0$ .

#### 1.5.4. Otro desarrollo para el inverso de la distancia

Si suponemos dados dos puntos  $P_0$  y  $P$  con coordenadas esféricas  $P_0(r_0, \theta_0, \lambda_0)$  y  $P(r, \theta, \lambda)$ , sería deseable expresar (1.22) en términos de funciones de las coordenadas esféricas  $\theta_0, \lambda_0, \theta, \lambda$  de las que se compone  $\psi$ . Para ello basta considerar la fórmula de descomposición:

$$P_n(\cos(\psi)) = P_n(\cos(\theta_0))P_n(\cos(\theta)) + 2 \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ \Gamma \in \{R, S\}}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \Gamma_{nm}(\theta_0, \lambda_0) \Gamma_{nm}(\theta, \lambda),$$

que puede encontrarse en [7], página 33.

Sustituyendo en (1.22), se obtiene las expresiones alternativas siguientes:

$$\frac{1}{r_{PP_0}} = \sum_{n \geq 0} \left\{ \frac{P_n(\cos(\theta_0))}{r_0^{n+1}} r^n P_n(\cos(\theta)) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ \Gamma \in \{R, S\}}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\Gamma_{nm}(\theta_0, \lambda_0)}{r_0^{n+1}} r^n \Gamma_{nm}(\theta, \lambda) \right\} \quad \text{si } r < r_0$$

$$\frac{1}{r_{PP_0}} = \sum_{n \geq 0} \left\{ r_0^n P_n(\cos(\theta_0)) \frac{P_n(\cos(\theta))}{r^{n+1}} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ \Gamma \in \{R, S\}}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} r_0^n \Gamma_{nm}(\theta_0, \lambda_0) \frac{\Gamma_{nm}(\theta, \lambda)}{r^{n+1}} \right\} \quad \text{si } r_0 < r$$



## Capítulo 2

# Teoría del potencial gravitatorio

Comenzaremos este capítulo con la formulación del campo generado por cualquier distribución de masas, desde una partícula aislada hasta el caso continuo, para luego demostrar las propiedades analíticas de este campo: convergencia, continuidad y diferenciabilidad. Por último, se repasará el concepto de ángulo sólido y su relación con el flujo del campo gravitatorio, vitales para la determinación del campo generado por una distribución esférica de masas.

### 2.1. De las masas puntuales al continuo

Consideremos  $\{O; X, Y, Z\}$  un sistema de referencia cartesiano y sean  $P(x, y, z)$  y  $P^*(x^*, y^*, z^*)$  dos puntos del espacio a los que asignamos dos escalares que identificaremos como masas,  $m$  y  $m^*$  respectivamente, y tales que  $m \geq m^* > 0$ .

La **Ley de Gravitación Universal** de Newton afirma que<sup>1</sup>:

*Entre dos partículas existe una fuerza atractiva de igual dirección, la determinada por ambas, sentido contrario e igual módulo:*

$$F = G \frac{mm^*}{r^2},$$

*siendo  $G$  la constante de gravitación universal y  $r = d(P, P^*)$  la distancia entre los dos puntos.*

---

<sup>1</sup>En unidades c.g.s la constante de gravitación universal tiene el valor  $G = 66,7 \times 10^{-9} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2}$ , de acuerdo a las medidas hechas por P.R. Heyl alrededor de 1930.

Aunque las masas  $m$  y  $m^*$  se atraen entre sí de forma simétrica, es conveniente llamar a una de esas masas, la mayor, atrayente y a la otra atraída. Considerando como unidad de masa la masa atraída, resulta que  $F = G \frac{m}{r^2}$ .

La **fuerza gravitatoria**, también llamada intensidad de campo gravitatorio, es una magnitud vectorial con dirección  $\mathbf{r}_{PP^*}$ , siendo sus componentes:

$$X = -F \cos \alpha = -\frac{Gm}{r^2} \frac{x^* - x}{r} = -Gm \frac{x^* - x}{r^3},$$

$$Y = -F \cos \beta = -\frac{Gm}{r^2} \frac{y^* - y}{r} = -Gm \frac{y^* - y}{r^3},$$

$$Z = -F \cos \gamma = -\frac{Gm}{r^2} \frac{z^* - z}{r} = -Gm \frac{z^* - z}{r^3},$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$  son los cosenos directores del vector  $\mathbf{F}$ . Es decir,

$$\mathbf{F} = (X, Y, Z) = -G \frac{m}{r^2} \mathbf{u},$$

$$\text{con } \mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}_{PP^*}}{\|\mathbf{r}_{PP^*}\|_2}.$$

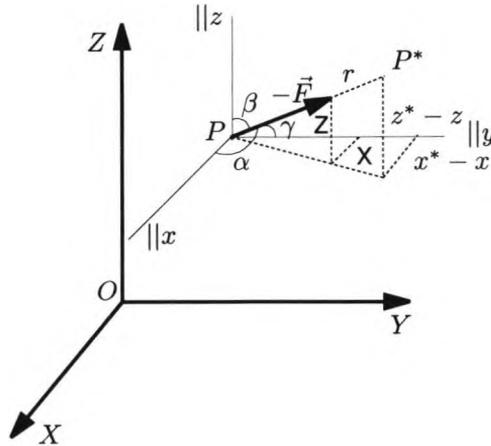


Figura 2.1: Componentes de la fuerza gravitatoria.

Sea una partícula de masa  $m$  en un punto del espacio,  $O$ , en el cual consideramos centrado un sistema de referencia cartesiano  $OXYZ$ . Esta partícula ejercerá una fuerza de atracción sobre cualquier otra, situada en un punto  $P$ , de masa unidad:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m}{r^2} \mathbf{u},$$

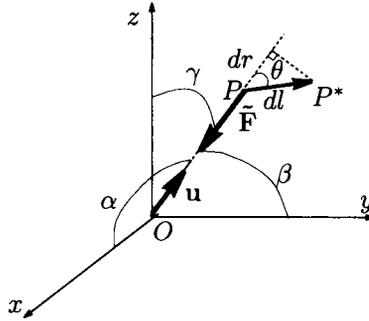


Figura 2.2: Trabajo necesario para desplazar la unidad de masa de  $P$  a  $P^*$ .

donde  $\mathbf{u}$  representa el vector unitario con dirección radial y dirigido hacia el punto  $P$ . El trabajo necesario para desplazar la unidad de masa del punto  $P$  al  $P^*$ , separado del primero por un elemento diferencial de longitud  $d\mathbf{l}$ , vendrá dado por el producto escalar, ver figura 2.2:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -G \frac{m}{r^2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = -G \frac{m}{r^2} \cos \theta dl = -\frac{Gm}{r^2} dr.$$

Denotando  $dV = dW$  e integrando, se obtiene que  $V = G \frac{m}{r} + C$ , siendo  $C$  una constante de integración. Si consideramos que, además,  $V$  se anula en el infinito, entonces  $C$  debe ser nulo.

**Definición 2.1.** Se define el **potencial gravitatorio** como la función escalar

$$V = G \frac{m}{r}.$$

Entre las ventajas de considerar  $V$  en lugar de  $\mathbf{F}$ , podemos destacar:

- El campo newtoniano gravitatorio producido por un foco activo es el campo de gradientes del potencial gravitatorio.

Es fácil ver, por derivación directa, que

$$\nabla V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \mathbf{F}.$$

Así pues, en todo punto exterior a la masa creadora del campo, la fuerza de atracción puede ser sustituida por la función potencial.

- La suma vectorial de los campos newtonianos gravitatorios se corresponde con la suma escalar de los potenciales (Principio de Superposición).

Consideremos un sistema de  $N$  partículas  $\{P_i\}_{i=1}^N$ , de masas  $\{m_i\}_{i=1}^N$ , y un punto  $P$  del espacio, distinto a los puntos en los que están situados las partículas del sistema y al que asignamos masa unidad. Cada partícula  $P_i$  generará un campo:

$$\mathbf{F}_i = -G \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i,$$

con  $\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{r}_{P_i P}}{\|\mathbf{r}_{P_i P}\|_2}$ ,  $r_i = d(P_i, P)$ . Sumando las  $N$  fuerzas que actúan en  $P$  tendremos que, en dicho punto, la intensidad del campo gravitatorio creado por el total de los focos activos es, por la linealidad del operador gradiente:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N -G \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^N \nabla(V_i) = \nabla(V),$$

$$\text{con } V = \sum_{i=1}^N G \frac{m_i}{r_i} = \sum_{i=1}^N V_i.$$

- Dada una dirección arbitraria, representada por el vector unitario  $\mathbf{e}$ , la derivada direccional de  $V$  en un punto  $P$  es:

$$D_{\mathbf{e}} V(P) = \nabla V \bullet \mathbf{e} = \mathbf{F} \bullet \mathbf{e},$$

es decir, la proyección del vector  $\mathbf{F}$  sobre la dirección dada  $\mathbf{e}$ . Así pues, la máxima variación se produce en la dirección radial que une la partícula atraente con la atraída.

Supongamos, ahora, que estamos ante una distribución continua de masas,  $\vartheta$ , de densidad  $\rho$ . En los problemas relacionados con la ley de gravitación universal,  $\rho$  no puede tomar valores negativos, en contraposición a la ley de Coulomb o ley de interacción electrostática:

$$\mathbf{F} = \kappa \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

siendo  $q_1, q_2$  las cargas de dos puntos y  $\kappa$  la constante de Coulomb o constante dieléctrica, donde la densidad, ya no de masa sino de carga, puede tomar valores de distinto signo.

Sea  $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \vartheta$ . Para determinar el potencial que genera  $\vartheta$  en  $P$ , ver figura 2.3,

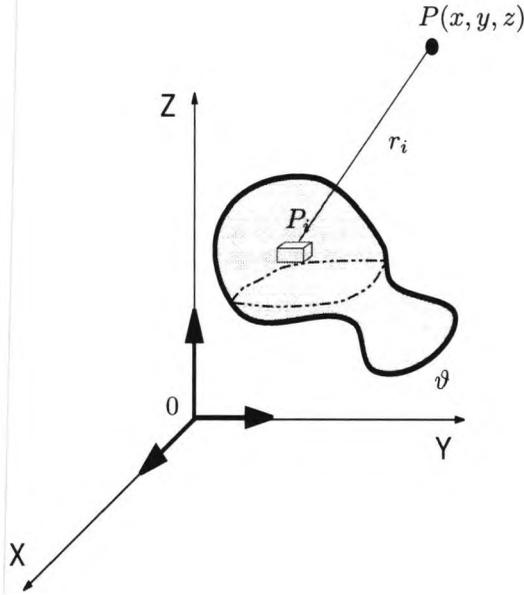


Figura 2.3: Potencial generado por un cuerpo sólido.

dividimos el cuerpo en elementos de volumen  $\{\Delta v_i\}_{i=1}^N$  y suponemos que la acción de cada elemento de volumen es equivalente a la acción de una partícula  $P_i(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$  que se encuentra dentro de este elemento y en el que concentramos toda su masa  $\Delta m_i$ . El potencial que genera  $\Delta v_i$  en  $P$  será:

$$V_i = G \frac{\Delta m_i}{r_i} = G \frac{\rho(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta v_i}{r_i},$$

y las componentes de la fuerza generada por  $\Delta v_i$  vendrán dadas por:

$$\Delta X_i = -G \frac{\rho \Delta v_i}{r_i^3} (x - x_i^*), \quad \Delta Y_i = -G \frac{\rho \Delta v_i}{r_i^3} (y - y_i^*), \quad \Delta Z_i = -G \frac{\rho \Delta v_i}{r_i^3} (z - z_i^*).$$

Por el principio de superposición, el potencial generado por todos estos elementos de volumen será:

$$V = G \sum_{i=1}^N \frac{\rho(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta v_i}{r_i},$$

y para las componentes de la fuerza que actúa en el punto  $P$  tenemos las siguientes

expresiones:

$$\begin{aligned}\Delta X &= -G \sum_{i=1}^N \frac{\rho \Delta v_i}{r_i^3} (x - x_i^*), \\ \Delta Y &= -G \sum_{i=1}^N \frac{\rho \Delta v_i}{r_i^3} (y - y_i^*), \\ \Delta Z &= -G \sum_{i=1}^N \frac{\rho \Delta v_i}{r_i^3} (z - z_i^*).\end{aligned}$$

Integrando en todo el volumen  $\vartheta$ , se obtienen las expresiones correspondientes al caso continuo:

$$V(P) = G \iiint_{\vartheta} \frac{\rho(P^*)}{r_{PP^*}} dv_{P^*}, \quad (2.1)$$

que denominamos **potencial de volumen**, **potencial newtoniano** o **potencial gravitatorio** en el punto  $P$  y el campo gravitatorio:

$$\mathbf{F}(P) = -G \iiint_{\vartheta} \frac{\rho(P^*)}{r_{PP^*}^3} (x - \xi, y - \eta, z - \zeta) dv_{P^*}, \quad (2.2)$$

siendo  $P^*(\xi, \eta, \zeta) \in \vartheta$ ,  $dv_{P^*} = d\xi d\eta d\zeta$  el elemento de volumen y  $r_{PP^*} = d(P^*, P)$  la distancia de  $P$  a cada punto  $P^* \in \vartheta$ . Veremos posteriormente que es posible derivar bajo el signo integral de modo que, al igual que en caso discreto, sigue verificándose que  $\nabla V = \mathbf{F}$ .

## 2.2. Convergencia, continuidad y derivabilidad del potencial y campo gravitatorio.

Para el estudio de la **convergencia** consideremos  $\vartheta \subseteq \mathbb{R}^3$  con una distribución continua de masas y la función escalar:

$$\begin{aligned}V : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P_0 &\longrightarrow V(P_0) = G \iiint_{\vartheta} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}} dv_P.\end{aligned}$$

Análogamente, consideremos el campo vectorial:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P_0 &\longrightarrow \mathbf{F}(P_0) = (X, Y, Z) = -G \iiint_{\vartheta} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}^3} (x_0 - \xi, y_0 - \eta, z_0 - \zeta) dv_P,\end{aligned}$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $P = P(\xi, \eta, \zeta) \in \vartheta$  y  $\rho = \rho(P)$  la densidad del cuerpo en cada punto y que suponemos acotada e integrable en  $\vartheta$ . Tanto el potencial como el campo de intensidades gravitatorias están bien definidos en todo el espacio.

Si  $P_0 \notin \vartheta$ , los integrandos son productos de dos funciones; una integrable y acotada,  $\rho$ , y otra continua que es el inverso de la distancia. Así pues, las integrales anteriores estarán bien definidas.

Análogamente, si tenemos en cuenta el potencial gravitatorio y las componentes de la fuerza gravitatoria en un punto  $P_0 \in \vartheta$ , las integrales anteriores son impropias y convergen con la hipótesis de que  $\rho$  sea una función acotada e integrable.

Efectivamente, si existe una constante  $C$  de modo que  $|\rho(P)| < C$  para cada  $P \in \vartheta$ , tenemos que:

- Para el potencial,  $\frac{|\rho|}{r} < \frac{C}{r^\alpha}$ , con  $\alpha = 1 < 3$  y, por el corolario 1.1, estará definido en un punto interior de la distribución de masas.
- Para las componentes de la fuerza de atracción,  $\frac{|\rho| |\kappa - \kappa_0|}{r^2 r} < \frac{C}{r^\alpha}$ , con  $\kappa \in \{x, y, z\}$ ,  $\alpha = 2 < 3$  y  $|\kappa - \kappa_0| < r$ . En este caso tenemos garantizada, también por el corolario 1.1, la convergencia de las integrales.

Así pues, las definiciones del potencial y campo gravitatorio mantienen su sentido en los puntos interiores a  $\vartheta$  y expresarán la acción que ejercería el campo sobre una partícula de masa unidad colocada en una minúscula cavidad practicada en  $\vartheta$ .

Para estudiar la **continuidad** del potencial y de la fuerza gravitatoria sigamos suponiendo que  $\rho = \rho(P)$  es una función acotada e integrable en el cuerpo  $\vartheta$ .

**Teorema 2.1.** *Sea  $\vartheta \subset \mathbb{R}^3$  con una distribución continua de masas y supongamos que su densidad  $\rho = \rho(P)$  es una función acotada e integrable en  $\vartheta$ . Entonces la función potencial y el campo gravitatorio, dados por (2.1) y (2.2) respectivamente, son continuas en  $\mathbb{R}^3$ .*

Demostración. Para un punto  $P_0 \notin \vartheta$ , la distancia inversa  $1/r_{PP_0}$  es continua en sus dos argumentos y, por el teorema 1.12, las funciones integrales del enunciado serán continuas en esos puntos. Para los puntos de  $\vartheta$ , por el teorema 1.18, tenemos que demostrar que convergen uniformemente para cada  $P_0 \in \vartheta$ , siendo, en este caso,  $F(P, P_0) = 1/r_{PP_0}$  y  $f(P) = \rho(P)$ . Fijemos  $\varepsilon > 0$  y elijamos  $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon/8\pi GC}$ , siendo  $C$  una cota superior de la densidad acotada. Sea  $P^*$  un punto cualquiera con  $d(P_0, P^*) \leq \delta(\varepsilon)$  y  $\vartheta_\delta$  una región que contiene, en su interior, al punto  $P_0$  de diámetro  $\text{diam}(\vartheta_\delta) \leq \delta(\varepsilon)$ . Podemos considerar la esfera  $S(P_0, \delta) = S_\delta(P_0)$  de centro  $P_0$  y radio  $\delta$  de modo que  $\vartheta_\delta \subseteq S_\delta(P_0)$ .

Al ser  $|\rho(P)| \leq C$  para cada  $P \in \vartheta$ :

$$|V_{\delta(\varepsilon)}(P^*)| = \left| G \iiint_{\vartheta_\delta} \frac{\rho(P)}{r_{PP^*}} dv_P \right| \leq G \iiint_{\vartheta_\delta} \frac{|\rho(P)|}{r_{PP^*}} dv_P \leq GC \iiint_{\vartheta_\delta} \frac{1}{r_{PP^*}} dv_P.$$

Ahora bien, como  $d(P_0, P^*) \leq \delta(\varepsilon)$ , es  $P^* \in S_\delta(P_0) \subseteq S_{2\delta}(P^*)$  y teniendo en cuenta que la inversa de la distancia es una función no negativa:

$$\iiint_{\vartheta_\delta} \frac{1}{r_{PP^*}} dv_P \leq \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{1}{r_{PP^*}} dv_P \leq \iiint_{S_{2\delta}(P^*)} \frac{1}{r_{PP^*}} dv_P.$$

Para resolver la última integral pasamos al sistema de coordenadas esféricas con centro en  $P^*$ :

$$\iiint_{S_{2\delta}(P^*)} \frac{1}{r_{PP^*}} dv_P = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin \theta d\theta \int_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} d\lambda \int_{r=0}^{r=2\delta} r dr = 8\pi\delta^2 = 8\pi \frac{\varepsilon}{8\pi GC} = \frac{\varepsilon}{GC}.$$

Finalmente, llegamos a:

$$|V_{\delta(\varepsilon)}(P^*)| \leq GC \iiint_{\vartheta_\delta} \frac{1}{r_{PP^*}} dv_P \leq GC \iiint_{S_{2\delta}(P^*)} \frac{1}{r_{PP^*}} dv_P \leq GC \frac{\varepsilon}{GC} = \varepsilon.$$

Análogamente, si tenemos en cuenta que  $|x-x^*| \leq \sqrt{(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 + (z-z^*)^2} = r_{PP^*}$ , y tomamos  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{8\pi GC}$ , entonces:

$$\begin{aligned} |X_{\delta(\varepsilon)}(P^*)| &\leq G \iiint_{\vartheta_\delta} \frac{|\rho(P)|}{r_{PP^*}^3} |x^* - \xi| dv_P \\ &\leq GC \iiint_{\vartheta_\delta} \frac{dv_P}{r_{PP^*}^2} \leq GC \iiint_{S_{2\delta}(P^*)} \frac{dv_P}{r_{PP^*}^2} \leq 8\pi GC \delta \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

llegándose a la misma acotación con las otras dos componentes de la fuerza. ■

La convergencia de las integrales  $V, X, Y, Z$  se ha demostrado bajo las hipótesis de que la densidad está acotada,  $|\rho| \leq C$ . Así pues, estas integrales son continuas incluso en los puntos de discontinuidad de  $\rho$ .

Acabamos de ver que tanto el potencial gravitatorio como las componentes de la fuerza gravitatoria están definidas en todo el espacio y que, además, son continuas. Es natural preguntarse ahora por la **derivabilidad** de estas funciones.

Sea  $\vartheta \subseteq \mathbb{R}^3$  con una distribución continua de masas. Supongamos que la función densidad,  $\rho = \rho(P)$ , es una función acotada e integrable en  $\vartheta$ . Si fuese lícita la derivación bajo el signo integral, sería  $\nabla V = \mathbf{F} = (X, Y, Z)$ , es decir, el campo de fuerzas gravitatorias sería el gradiente del potencial gravitatorio.

**Teorema 2.2.** *Sea  $\vartheta \subset \mathbb{R}^3$  con una distribución continua de masas y densidad  $\rho = \rho(P)$  acotada e integrable en  $\vartheta$ . Entonces  $\Delta V(P_0) = \mathbf{F}(P_0)$  para cada  $P_0 \in \mathbb{R}^3$ .*

Demostración. Para un punto  $P_0(x_0, y_0, z_0) \notin \vartheta$ , la función:

$$-\frac{x_0 - \xi}{r_{PP_0}^3} = -\frac{x_0 - \xi}{[(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \Big|_{P_0},$$

con  $P(\xi, \eta, \zeta) \in \vartheta$  es continua respecto a ambos argumentos. Por el teorema 1.13, podremos escribir:

$$\begin{aligned} X(P_0) &= - \iiint_{\vartheta} \rho(P) \frac{x_0 - \xi}{r_{PP_0}^3} dv_P = G \iiint_{\vartheta} \rho(P) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \Big|_{P_0} dv_P = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} G \iiint_{\vartheta} \rho(P) \frac{1}{r_{PP_0}} dv_P = \frac{\partial V}{\partial x}, \end{aligned}$$

y razonando exactamente igual con las otras dos componentes de la fuerza gravitatoria se tiene que:

$$\begin{aligned} Y(P_0) &= - \iiint_{\vartheta} \rho(P) \frac{y_0 - \eta}{r_{PP_0}^3} dv_P = G \iiint_{\vartheta} \rho(P) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \Big|_{P_0} dv_P = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} G \iiint_{\vartheta} \rho(P) \frac{1}{r_{PP_0}} dv_P = \frac{\partial V}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(P_0) &= - \iiint_{\vartheta} \rho(P) \frac{z_0 - \zeta}{r_{PP_0}^3} dv_P = G \iiint_{\vartheta} \rho(P) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \Big|_{P_0} dv_P = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} G \iiint_{\vartheta} \rho(P) \frac{1}{r_{PP_0}} dv_P = \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}$$

Análogamente, para todo punto  $P_0(x_0, y_0, z_0) \notin \vartheta$  se sigue verificando que las derivadas parciales de mayor orden de la función  $1/r_{PP_0}$  son continuas, pudiendo, por tanto, derivar bajo el signo integral. De aquí deduciremos después que el potencial gravitatorio verifica la ecuación de Laplace fuera de las masas atrayentes.

Si consideramos el caso en el que  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \vartheta$ , también es lícito derivar bajo el signo integral. Sin pérdida de generalidad, veamos que  $\partial V / \partial x = X$ . Para ello, basta ver que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  de manera que:

$$\left| \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} - X(x_0, y_0, z_0) \right| < \varepsilon,$$

siempre que  $|\Delta x| < \delta = \delta(\varepsilon)$ .

Sea  $S(P_0, \delta) = S_\delta(P_0)$  la esfera centrada en  $P_0$  con radio  $\delta > 0$ , que determinaremos después, y escribamos:

$$\begin{aligned} V(P_0) &= G \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}} dv_P + G \iiint_{\vartheta_\delta} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}} dv_P = V_1 + V_2, \\ X(P_0) &= -G \iiint_{S_\delta(P_0)} \rho(P) \frac{x_0 - \xi}{r_{PP_0}^3} dv_P - G \iiint_{\vartheta_\delta} \rho(P) \frac{x_0 - \xi}{r_{PP_0}^3} dv_P = X_1 + X_2, \end{aligned}$$

donde  $\vartheta_\delta = \vartheta - S_\delta(P_0)$ . Denotando  $P_0^* = P_0^*(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)$ , tendremos que:

$$\frac{V(P_0^*) - V(P_0)}{\Delta x} = \frac{V_1(P_0^*) - V_1(P_0)}{\Delta x} + \frac{V_2(P_0^*) - V_2(P_0)}{\Delta x},$$

y, por las propiedades del valor absoluto, la desigualdad:

$$\left| \frac{V(P_0^*) - V(P_0)}{\Delta x} - X(P_0) \right| \leq \left| \frac{V_2(P_0^*) - V_2(P_0)}{\Delta x} - X_2(P_0) \right| + |X_1(P_0)| + \left| \frac{V_1(P_0^*) - V_1(P_0)}{\Delta x} \right|. \quad (2.3)$$

Ahora bien:

$$\frac{V_2(P_0^*) - V_2(P_0)}{\Delta x} = \frac{G}{\Delta x} \iiint_{\vartheta_\delta} \rho(P) \left\{ \frac{1}{r_{PP_0^*}} - \frac{1}{r_{PP_0}} \right\} dv_P,$$

y teniendo en cuenta el teorema 1.12:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V_2(P_0^*) - V_2(P_0)}{\Delta x} &= G \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \iiint_{\vartheta_\delta} \rho(P) \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{r_{PP_0^*}} - \frac{1}{r_{PP_0}} \right\} dv_P = \\ &= G \iiint_{\vartheta_\delta} \rho(P) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{r_{PP_0^*}} - \frac{1}{r_{PP_0}} \right\} dv_P = G \iiint_{\vartheta_\delta} \rho(P) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) dv_P = X_2, \end{aligned}$$

ya que  $P_0 \notin \vartheta_\delta$ . Por definición de límite, debe existir  $\delta_1 > 0$  de manera que siempre que  $|\Delta x| < \delta_1$  es:

$$\left| \frac{V_2(P_0^*) - V_2(P_0)}{\Delta x} - X_2(P_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como  $|\rho(P)| < C$  para cada  $P \in \vartheta$  y  $\frac{|x_0 - \xi|}{r_{PP_0}} \leq 1$  para  $P(\xi, \eta, \zeta) \in \vartheta - \{P_0\}$ , entonces:

$$\begin{aligned} |X_1| &= \left| -G \iiint_{S_\delta(P_0)} \rho(P) \frac{x_0 - \xi}{r_{PP_0}^3} dv_P \right| \leq G \iiint_{S_\delta(P_0)} |\rho(P)| \frac{|x_0 - \xi|}{r_{PP_0}^3} dv_P \leq \\ &\leq GC \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{|x_0 - \xi|}{r_{PP_0}} \frac{1}{r_{PP_0}^2} r_{PP_0}^2 \sin(\theta) d\theta d\lambda dr \leq GC \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta d\lambda dr = \\ &= 4\pi GC \delta < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{si } \delta < \frac{\varepsilon}{12\pi GC} = \delta_2. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} H &= \left| \frac{V_1(P_0^*) - V_1(P_0)}{\Delta x} \right| = \left| \frac{G}{\Delta x} \iiint_{S_\delta(P_0)} \rho(P) \left( \frac{1}{r_{PP_0^*}} - \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P \right| = \\ &= \left| \frac{G}{\Delta x} \iiint_{S_\delta(P_0)} \rho(P) \frac{r_{PP_0} - r_{PP_0^*}}{r_{PP_0^*} \cdot r_{PP_0}} dv_P \right| \leq GC \frac{1}{|\Delta x|} \iiint_{S_\delta(P_0)} \left| \frac{r_{PP_0} - r_{PP_0^*}}{r_{PP_0^*} \cdot r_{PP_0}} \right| dv_P. \end{aligned}$$

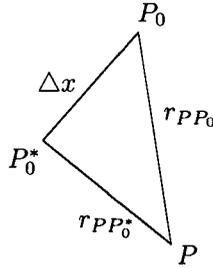


Figura 2.4: Triángulo formado por los puntos  $P$ ,  $P_0$  y  $P_0^*$ .

Si consideramos el triángulo formado por  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $P_0^*(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)$  y  $P(\xi, \eta, \zeta)$ , ver figura 2.4, se deduce, aplicando la desigualdad triangular, que  $|r_{PP_0} - r_{PP_0^*}| \leq |\Delta x|$ , por lo que:

$$H \leq GC \frac{1}{|\Delta x|} \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{|r_{PP_0} - r_{PP_0^*}|}{|r_{PP_0^*} \cdot r_{PP_0}|} dv_P \leq GC \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{1}{|r_{PP_0^*} \cdot r_{PP_0}|} dv_P.$$

Teniendo en cuenta la desigualdad  $a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ , para  $a, b \in \mathbb{R}$ , haciendo  $a = \frac{1}{r_{PP_0^*}}$  y  $b = \frac{1}{r_{PP_0}}$ , tenemos que:

$$H \leq GC \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_{PP_0^*}^2} + \frac{1}{r_{PP_0}^2} \right) dv_P.$$

Consideremos dos cambios de variable; el primero,  $\phi(x, y, z) = (x + x_0, y + y_0, z + z_0)$ , con jacobiano  $J_\phi = 1$  y, el segundo, un cambio a esféricas. Resulta:

$$\begin{aligned} \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{1}{r_{PP_0}^2} dv_P &= \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{1}{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2} d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \iiint_{S_\delta(0)} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_{r=0}^{r=\delta} \int_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{1}{r^2} r^2 \sin(\theta) dr d\lambda d\theta = 4\pi\delta. \end{aligned}$$

Como  $0 < \Delta x$  es arbitrariamente pequeño,  $P_0^*$  está tan próximo de  $P_0$  como queramos. Tomemos  $P_0^* \in S_\delta(P_0)$ . De este modo, por la desigualdad triangular,  $S_\delta(P_0) \subset S_{2\delta}(P_0^*)$  y al ser el inverso de la distancia una función no negativa:

$$\iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{1}{r_{PP_0^*}^2} dv_P \leq \iiint_{S_{2\delta}(P_0^*)} \frac{1}{r_{PP_0^*}^2} dv_P = 8\pi\delta,$$

y será  $H \leq 6\pi GC\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , si  $\delta \leq \frac{\varepsilon}{18\pi GC} = \delta_3$ .

Finalmente, la desigualdad (2.3) será menor que  $\varepsilon$  si tomamos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ . Hemos demostrado que  $\partial V/\partial x = X$  no habiendo demostración especial para  $\partial V/\partial y = Y$ ,  $\partial V/\partial z = Z$ . Llegamos así a que también para el potencial de volumen se verifica que  $\mathbf{F}(P) = (X, Y, Z) = \nabla V(P)$  para cada  $P \in \mathbb{R}^3$ . ■

En los puntos de la frontera de  $\vartheta$ , en los que la densidad es discontinua por ser  $\rho|_{\vartheta^c} \equiv 0$ , queda también garantizada la derivabilidad del potencial gravitatorio, ya que en la demostración del resultado anterior sólo se exige que el potencial sea una función acotada e integrable. Además, si tenemos en cuenta el teorema 2.1, no sólo existen las derivadas parciales de primer orden sino que, además, éstas son continuas.

La existencia y continuidad de las derivadas de primer orden del potencial gravitatorio nos plantea la posibilidad de la existencia y continuidad de las derivadas de mayor orden.

Si consideramos  $\vartheta \subseteq \mathbb{R}^3$  con una distribución continua de masas de densidad  $\rho = \rho(P)$  y fijamos  $P_0(x, y, z) \in \vartheta$  entonces, la integral impropia:

$$\iiint_{\vartheta} \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P = - \iiint_{\vartheta} \rho(P) \left\{ \frac{1}{r_{PP_0}^3} - \frac{3(x-\xi)^2}{r_{PP_0}^5} \right\} dv_P,$$

con  $P(\xi, \eta, \zeta) \in \vartheta$  no converge. Supuesto que la densidad del cuerpo está acotada con cota  $C$ , la mayorante para el integrando tiene la forma  $C/r^3$  que, según el teorema 1.14, diverge. Así pues, no podemos garantizar la convergencia de estas integrales en el interior de  $\vartheta$ . A continuación estudiaremos los puntos en los que podemos determinar las derivadas segundas de  $V$  bajo la hipótesis de que  $\rho$  tiene derivada continua en un entorno del punto considerado.

**Teorema 2.3.** *Sea  $\vartheta \subseteq \mathbb{R}^3$  con una distribución continua de masas de densidad  $\rho = \rho(P)$ . Para un punto  $P_0 \in \mathbb{R}^3 - \partial\vartheta$  supongamos que existe un entorno de  $P_0$ ,  $E(P_0)$ , de modo que  $\rho \in C^1(E(P_0), \mathbb{R}^+)$ . Entonces:*

$$\Delta V(P_0) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(P_0) + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(P_0) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(P_0) = -4\pi G\rho(P_0).$$

Demostración. Para un punto  $P_0(x, y, z) \in \text{Int}(\vartheta)$ , sea  $E(P_0)$  el entorno de  $P_0$  donde tenemos asegurado, por hipótesis, que  $\rho \in C^1(E(P_0), \mathbb{R}^+)$ . Consideremos  $\delta > 0$  de modo que  $S_\delta(P_0) \subseteq E(P_0)$ . Podemos escribir:

$$V(P_0) = G \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}} dv_P + G \iiint_{\vartheta_\delta} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}} dv_P = G [V_1(P_0) + V_2(P_0)],$$

siendo  $\vartheta_\delta = \vartheta - S_\delta(P_0)$ . Como  $P_0 \notin \vartheta_\delta$ , el integrando de  $V_2$  será dos veces derivable con continuidad respecto de los argumentos de  $P_0$  pudiendo calcular, por el teorema 1.13,

la segunda derivada bajo el signo integral:

$$\frac{\partial^2 V_2(P_0)}{\partial x^2} = \iiint_{\vartheta_\delta} \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P. \quad (2.4)$$

Por otro lado, si aplicamos el teorema 2.2 a la región  $S_\delta(P_0)$ , podemos calcular la primera derivada de  $V_1$  bajo el signo integral y:

$$\frac{\partial V_1(P_0)}{\partial x} = \iiint_{S_\delta(P_0)} \rho(P) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P = - \iiint_{S_\delta(P_0)} \rho(P) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P,$$

ya que, al ser  $r_{PP_0} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$  con  $P_0(x, y, z)$ ,  $P(\xi, \eta, \zeta) \in S_\delta(P_0)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right).$$

Teniendo en cuenta la relación:

$$-\rho(P) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial \xi}(P) \frac{1}{r_{PP_0}} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \rho(P) \frac{1}{r_{PP_0}} \right],$$

podemos transformar esta última integral usando, para ello, la fórmula de Ostrogradski:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}(P_0) = - \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \rho(P) \frac{1}{r_{PP_0}} \cos(\alpha) d\sigma_P + \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}(P) \frac{1}{r_{PP_0}} dv_P, \quad (2.5)$$

donde  $\partial S_\delta(P_0)$  es la capa esférica de centro  $P_0$  y radio  $\delta$  y  $\alpha$  el coseno director entre la normal exterior a  $\partial S_\delta(P_0)$  y el eje  $X$ .

El vector  $\mathbf{r}_{P_0P}$  es paralelo al vector normal,  $\mathbf{n}_P$ , a la esfera  $S_\delta(P_0)$  en el punto  $P(\xi, \eta, \zeta) \in \partial S_\delta(P_0)$ , de manera que, si  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  son vectores unitarios en la dirección de los ejes  $X, Y, Z$  respectivamente, entonces:

$$\begin{aligned} \xi - x_0 &= \mathbf{r}_{P_0P} \bullet \mathbf{e}_1 = r_{PP_0} \cos(\alpha), \\ \eta - y_0 &= \mathbf{r}_{P_0P} \bullet \mathbf{e}_2 = r_{PP_0} \cos(\beta), \\ \zeta - z_0 &= \mathbf{r}_{P_0P} \bullet \mathbf{e}_3 = r_{PP_0} \cos(\gamma), \end{aligned}$$

siendo  $\alpha, \beta, \gamma$  los cosenos directores de la normal exterior en cada punto. Elevando al cuadrado las tres expresiones anteriores y sumando se obtiene, además, que  $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$ .

El integrando del primer sumando de (2.5) tiene derivadas parciales continuas de primer orden en  $\partial S_\delta(P_0)$  respecto de los argumentos de  $P_0$ . Por el teorema 1.13, podemos derivar bajo el signo integral:

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \rho(P) \frac{1}{r_{PP_0}} \cos(\alpha) d\sigma_P = \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \rho(P) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \cos(\alpha) d\sigma_P.$$

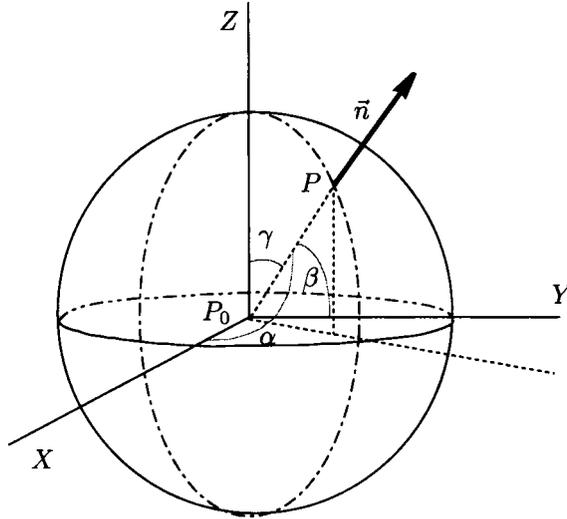


Figura 2.5: Cosenos directores de la normal en un punto de la esfera.

Análogamente, por ser  $\rho \in C^1(S_\delta(P_0), \mathbb{R}^+)$ , se verifica que  $\partial\rho/\partial\xi$  es continua en esta región compacta siendo, por tanto, acotada e integrable. Por el teorema 2.2, podemos derivar bajo el signo integral en el segundo término de (2.5), quedando:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}(P_0) = - \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \rho(P) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \cos(\alpha) d\sigma + \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{\partial\rho}{\partial\xi}(P) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P. \quad (2.6)$$

Si  $C^*$  es una cota superior de  $\partial\rho/\partial\xi$  en el compacto  $S_\delta(P_0)$  y observamos que  $|x_0 - \xi| \leq r_{PP_0}$  para  $P(\xi, \eta, \zeta) \in S_\delta(P_0)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \left| \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{\partial\rho}{\partial\xi}(P) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P \right| &\leq C^* \iiint_{S_\delta(P_0)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \right| dv_P = \\ &= C^* \iiint_{S_\delta(P_0)} \left| -\frac{x_0 - \xi}{r_{PP_0}^3} \right| dv_P \leq C^* \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{1}{r_{PP_0}^2} dv_P = 4\pi C^* \delta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por otro lado, si aplicamos el teorema del valor medio a la integral de superficie en (2.6), entonces:

$$\begin{aligned} - \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \rho(P) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \cos(\alpha) d\sigma_P &= - \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \rho(P) \left[ -\frac{x_0 - \xi}{r_{PP_0}^3} \right] \cos(\alpha) d\sigma_P = \\ &= - \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \rho(P) \frac{\cos^2(\alpha)}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = -\rho^* \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \frac{\cos^2(\alpha)}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P, \end{aligned}$$

donde  $\rho^*$  es el valor de la densidad en cierto punto de  $\partial S_\delta(P_0)$ . Por simetría esférica,

$$\iint_{\partial S_\delta(P_0)} \frac{\cos^2(\alpha)}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \frac{\cos^2(\beta)}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \frac{\cos^2(\gamma)}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P,$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$  son los cosenos directores de la normal exterior a la capa esférica  $\partial S_\delta(P_0)$  en un punto  $P(\xi, \eta, \zeta) \in \partial S_\delta(P_0)$ . Denotando  $\mathcal{I} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ , será:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \frac{\cos^2(\alpha)}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P &= \frac{1}{3} \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \frac{\cos^2(\alpha)}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = \frac{1}{3} \sum_{\phi \in \mathcal{I}} \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \frac{\cos^2(\phi)}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \frac{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma)}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = \frac{1}{3} \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \frac{1}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = \frac{4\pi}{3}, \end{aligned}$$

por lo que:

$$- \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \rho(P) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \cos(\alpha) d\sigma_P = - \frac{4\pi\rho^*}{3}. \quad (2.8)$$

De este modo, considerando el paso al límite cuando  $\delta$  tiende a cero en (2.6), teniendo en cuenta la acotación (2.7), la expresión (2.8) y la continuidad de  $\rho$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}(P_0) &= \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ - \iint_{\partial S_\delta(P_0)} \rho(P) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \cos(\alpha) d\sigma_P + \iiint_{S_\delta(P_0)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \xi}(P) dv_P \right] = \\ &= - \frac{4\pi}{3} \rho(P_0). \end{aligned}$$

La igualdad  $\partial^2 V / \partial x^2(P_0) = G(\partial^2 V_1 / \partial x^2(P_0) + \partial^2 V_2 / \partial x^2(P_0))$  es válida para cada  $\delta > 0$ , siendo, además, el primer miembro independiente de  $\delta$ . Teniendo en cuenta (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(P_0) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} G \left( \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}(P_0) + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}(P_0) \right) \\ &= - \frac{4\pi}{3} G \rho(P_0) + \lim_{\delta \rightarrow 0} G \iiint_{\vartheta_\delta} \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P. \end{aligned}$$

La existencia de  $\partial^2 V / \partial x^2$ , deducida antes, nos asegura la convergencia condicional de la integral impropia:

$$\iiint_{\vartheta} \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P,$$

ya que las regiones consideradas que tienden al punto  $P_0$  son esferas. El cambio de la forma de estas regiones podría, en general, darnos un valor distinto e, incluso, no converger. Al valor que se obtiene mediante el paso al límite considerando regiones esféricas

que aislan el punto de singularidad se le conoce con el nombre de **valor principal** de la integral y se denota:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iiint_{\vartheta_\delta} \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P = \overline{\iiint_{\vartheta}} \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P.$$

De este modo:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(P_0) = G \overline{\iiint_{\vartheta}} \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P - \frac{4\pi G}{3} \rho(P_0),$$

y de aquí se deduce que las derivadas segundas del potencial no se pueden determinar mediante la derivación formal bajo el signo integral.

Razonando igual con  $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$  y sustituyendo los valores de las derivadas en la expresión del operador de Laplace:

$$\begin{aligned} \Delta V(P_0) &= G \overline{\iiint_{\vartheta}} \rho(P) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P - 4\pi G \rho(P_0) \\ &= G \overline{\iiint_{\vartheta}} \rho(P) \Delta \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P - 4\pi \rho(P_0). \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que el inverso de la distancia,  $1/r_{PP_0}$ , es una función armónica respecto de los argumentos de  $P_0$  para  $P \neq P_0$ , entonces  $\Delta V(P_0) = -4\pi G \rho(P_0)$ .

Para un punto  $P_0 \notin \overline{\vartheta}$ , la función  $1/r_{PP_0}$  tiene derivadas continuas de cualquier orden para  $P \in \vartheta$ . El teorema 1.13 nos permite considerar la derivada segunda bajo el signo integral y escribir:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2}(P_0) = G \iiint_{\vartheta} \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P, \quad \text{para } \omega \in \{x, y, z\}.$$

Si sumamos las tres igualdades anteriores y tenemos en cuenta la linealidad de la integral, entonces:

$$\Delta V(P_0) = G \iiint_{\vartheta} \rho(P) \Delta \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) dv_P = 0.$$

Como la densidad se anula en los puntos que están fuera de las masas atrayentes, la tesis del teorema es también cierta para los puntos exteriores a la región  $\vartheta$ . ■

El análisis efectuado más arriba no se aplica a los puntos de la frontera donde, por regla general, tiene lugar una discontinuidad de la densidad.

Para demostrar que el potencial gravitatorio satisface la ecuación de Poisson se ha asumido que la densidad  $\rho = \rho(x, y, z)$  es diferenciable en un entorno del punto donde se está justificando la veracidad de dicha ecuación. De este modo, si  $\rho = \rho(x, y, z)$  se anula fuera de cierta esfera y tiene derivadas primeras continuas en un entorno de un punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , entonces en un entorno de dicho punto el potencial gravitatorio, de densidad  $\rho$ , satisface la ecuación de Poisson.

## 2.3. Fórmulas integrales y potencial gravitatorio

La interpretación de la fórmula de Ostrogradski cuando el campo vectorial considerado es el gravitatorio, no es tan intuitiva como en el caso de la velocidad de un fluido incompresible, aunque la comparación entre ambos puede ayudar a su entendimiento.

Si tenemos en cuenta que para un punto  $P_0 \in \vartheta$  es  $\text{div}(\mathbf{F})(P) = \Delta V(P) = -4\pi G\rho$  y sustituimos en la fórmula de Ostrogradski, entonces:

$$-4\pi G \iiint_{\vartheta} \rho(P) dv_P = \iint_{\Sigma} F_n(P) d\sigma_P,$$

siendo  $\vartheta$  la distribución de masas considerada y  $\partial\vartheta = \Sigma$  su frontera y la integral del segundo miembro el flujo de la fuerza gravitatoria. Despejando  $-4\pi G$  del primer miembro de la igualdad anterior:

$$M = \iiint_{\vartheta} \rho(P) dv_P = -\frac{1}{4\pi G} \iint_{\Sigma} F_n(P) d\sigma_P, \quad (2.9)$$

donde  $M$  es la masa del cuerpo. Por tanto, en el caso que  $\vartheta$  fuese la Tierra y  $\mathbf{F}$  el campo de fuerzas gravitatorias, sería posible determinar la masa de la Tierra a partir de medidas gravimétricas sobre su superficie topográfica, sin ser necesario el conocimiento detallado de la densidad en su interior<sup>2</sup>.

Supongamos ahora que  $\vartheta^*$  es una región del espacio exterior a la masa activa, es decir, a la distribución generadora de campo,  $\vartheta$ . Sea  $\Sigma^* = \partial\vartheta^*$  su frontera. Podremos aplicar el teorema de Ostrogradski a esta región, por ejemplo una esfera de centro un punto exterior a  $\vartheta$ , siendo:

$$\iint_{\Sigma^*} F_n d\sigma_P = \iiint_{\vartheta^*} \text{div}(\mathbf{F}) dv_P = \iiint_{\vartheta^*} \Delta V dv_P = 0,$$

ya que el potencial gravitatorio verifica la ecuación de Laplace en  $\vartheta$ .

Por tanto, el flujo del campo gravitatorio a través de toda superficie cerrada, que verifique las hipótesis del teorema de Ostrogradski y que no contenga a las masas activas, es siempre nulo.

<sup>2</sup>La masa terrestre se estima en  $5,976 \times 10^{27}$  gramos, siendo la densidad media de  $\rho = 5,5 \text{ gr/cm}^3$ .

## 2.4. Comportamiento del potencial gravitatorio en el infinito

Sea  $\vartheta \subseteq \mathbb{R}^3$  con una distribución continua de masas generadora de un campo gravitatorio y consideremos un sistema de referencia con origen,  $O$ , en el centro de masas del cuerpo. Demostraremos que

$$\lim_{r_{OP_0} \rightarrow +\infty} V(P_0) = 0,$$

siendo  $V$  el potencial gravitatorio generado por  $\vartheta$ .

**Teorema 2.4.** *Sea  $\vartheta \subseteq \mathbb{R}^3$  acotada con una distribución continua de masas de densidad,  $\rho$ , una función integrable en  $\vartheta$ . Si consideramos la función potencial gravitatorio:*

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P_0 &\longrightarrow V(P_0) = G \iiint_{\vartheta} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}} dv_P, \end{aligned}$$

donde  $r_{PP_0}$  es la distancia de  $P_0$  a un punto  $P \in \vartheta$ , entonces:

$$\lim_{r_{OP_0} \rightarrow +\infty} r_{OP_0} \cdot V(P_0) = G \iiint_{\vartheta} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}} dv_P.$$

Demostración. Si para un punto  $P_0 \in \mathbb{R}^3$  multiplicamos el valor del potencial en dicho punto por la distancia del mismo al origen, entonces:

$$r_{OP_0} \cdot V(P_0) = G \iiint_{\vartheta} \frac{\rho(P)}{1 - \frac{r_{OP_0} - r_{PP_0}}{r_{OP_0}}} dv_P.$$

Si tenemos en cuenta, para  $P \in \vartheta$ , el triángulo  $\triangle POP_0$  y consideramos  $R > 0$  lo suficientemente grande de manera que  $\vartheta \subseteq S_R(O)$ , entonces,  $0 \leq |r_{OP_0} - r_{PP_0}| \leq r_{OP} \leq R$ . Al ser  $r_{OP_0}$  divergente al infinito, podemos suponer que  $r_{OP_0} > R$  y hacer la acotación:

$$\left| \frac{r_{OP_0} - r_{PP_0}}{r_{OP_0}} \right| \leq \frac{r_{OP}}{r_{OP_0}} \leq \frac{R}{r_{OP_0}} < 1,$$

que nos permitirá considerar la siguiente serie geométrica:

$$\frac{1}{1 - \frac{r_{OP_0} - r_{PP_0}}{r_{OP_0}}} = \sum_{n \geq 0} \left( \frac{r_{OP_0} - r_{PP_0}}{r_{OP_0}} \right)^n = 1 + o\left(\frac{1}{r_{OP_0}}\right).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} r_{OP_0} \cdot V(P_0) &= \iiint_{\vartheta} \rho(P) \left[ 1 + o\left(\frac{1}{r_{OP_0}}\right) \right] dv_P \\ &= G \iiint_{\vartheta} \rho(P) dv_P + G \iiint_{\vartheta} \rho(P) \cdot o\left(\frac{1}{r_{OP_0}}\right) dv_P, \end{aligned}$$

y, tomando límites:

$$\begin{aligned} \lim_{r_{OP_0} \rightarrow +\infty} r_{OP_0} \cdot V(P_0) &= \\ &= G \iiint_{\vartheta} \rho(P) dv_P + \lim_{r_{OP_0} \rightarrow +\infty} G \iiint_{\vartheta} \rho(P) \cdot o\left(\frac{1}{r_{OP_0}}\right) dv_P \\ &= G \iiint_{\vartheta} \rho(P) dv_P + G \iiint_{\vartheta} \rho(P) \cdot \lim_{r_{OP_0} \rightarrow +\infty} o\left(\frac{1}{r_{OP_0}}\right) dv_P \\ &= G \iiint_{\vartheta} \rho(P) dv_P. \end{aligned}$$

■

## 2.5. Flujo del campo gravitatorio

### 2.5.1. Revisión del concepto de ángulo sólido

Dada una superficie abierta,  $\Sigma$ , limitada por un contorno  $\Gamma$ , se va a definir el ángulo sólido,  $\Omega$ , desde un punto  $O$  y abarcado por dicha superficie, como una magnitud indicadora de la abertura en todas direcciones que tiene en el vértice  $O$  el cono cuya intersección con  $\Sigma$  es el contorno  $\Gamma$ , ver figura 2.6.

Para establecer la medida de un determinado ángulo sólido consideremos, en primer lugar, un elemento de superficie,  $d\sigma$ , de contorno  $\Gamma$  y situada a una distancia  $r$  de  $O$ , siendo  $r$  la distancia del vértice a un punto  $P$  del elemento de superficie. Sean  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{u}$  las direcciones de la normal al elemento  $d\sigma$  y del vector radial  $\mathbf{r}_{OP}$ , ambos unitarios. Si consideremos el cono que se obtiene al unir el punto  $O$  con cada punto de  $\Gamma$ , entonces el ángulo sólido bajo el cual se observa el elemento de superficie desde el punto  $O$  se define por medio del producto escalar:

$$d\Omega = \frac{1}{r^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\cos(\varphi)}{r^2} d\sigma,$$

donde  $\varphi = \angle(\mathbf{n}_P, \mathbf{r}_{OP})$  es el ángulo que determinan la normal exterior a  $d\sigma$  en  $P$  y el radio vector  $\mathbf{r}_{OP}$ . Esto nos lleva a la siguiente definición:

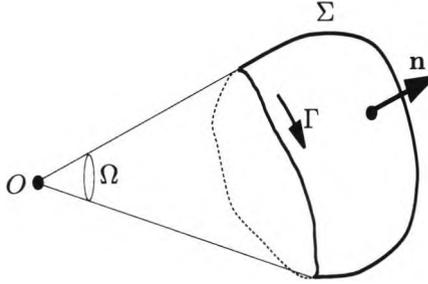


Figura 2.6: Ángulo sólido  $\Omega$  abarcado por una superficie abierta  $\Sigma$  limitada por un contorno  $\Gamma$ .

**Definición 2.2.** Dada una superficie finita  $\Sigma$  y un punto  $O$ , que llamaremos vértice, se define el **ángulo sólido** abarcado por dicha superficie desde el punto  $O$  como:

$$\Omega = \iint_{\Sigma} \frac{\cos(\varphi)}{r_{OP}^2} d\sigma_P,$$

siendo  $\varphi = \angle(\mathbf{n}_P, \mathbf{r}_{OP})$  el ángulo que determinan la normal exterior a  $\Sigma$  en  $P$  y el radio vector  $\mathbf{r}_{OP}$ , para  $P \in \Sigma$ .

Esta definición implicará que, para una superficie  $\Sigma$ , el ángulo sólido será mayor cuando el contorno  $\Gamma$  de la superficie se coloque lo más perpendicular posible a la dirección radial.

Al ángulo sólido se le asigna un signo en función del sentido de recorrido de la curva  $\Gamma$ . Así pues, diremos que el ángulo sólido es positivo cuando el vector normal a la superficie y el sentido de recorrido de la curva están relacionados por la regla de la mano derecha, siendo negativo en caso contrario. La regla de la mano derecha implica que, visto  $\Gamma$  desde el punto  $O$ , si esta curva se recorre en sentido de las agujas del reloj, entonces el ángulo  $\Omega$  es positivo cuando se calcula la normal exterior a  $\Sigma$ .

La unidad de medida de la magnitud ángulo sólido es el estereorradián, definido como sigue.

**Definición 2.3.** Se define el **estereorradián**, denotado por **strad**, como el ángulo sólido que, con su vértice en el centro de una esfera de radio  $R$ , determina sobre la superficie de ésta un área igual a la de un cuadrado de lado  $R$ .

Según la definición anterior, si  $\Sigma$  es una superficie cerrada y el punto  $O$  es exterior a ella, el ángulo sólido tendrá valor nulo. Al contrario, si  $O$  es interior al

volumen limitado por  $\Sigma$ , entonces el ángulo sólido alcanza su valor máximo. Considerando la definición de estereorradián, este valor máximo se obtiene dividiendo la superficie de una esfera entre el cuadrado del radio:

$$\Omega_{\text{máx}} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \text{ strad.}$$

Es más, si suponemos que la superficie dada,  $\Sigma$ , es una superficie de Liapunov y denotamos por  $\vartheta$  el volumen contenido en su interior, entonces, aplicando la tercera fórmula de Green a la función  $u \equiv 1$  se obtiene que:

$$\Omega(P_0) = \iint_{\Sigma} \frac{\cos(\varphi)}{r_{PP_0}^2} dv_P = \begin{cases} 0 & \text{si } P_0 \notin \bar{\vartheta} \\ 2\pi & \text{si } P_0 \in \Sigma \\ 4\pi & \text{si } P_0 \in \text{Int}(\vartheta) \end{cases}$$

para cada punto  $P_0 \in \mathbb{R}^3$ .

### 2.5.2. Flujo del campo gravitatorio generado por distintas distribuciones de masa

Sea  $F = (X, Y, Z)$  el campo gravitatorio generado por una partícula de masa  $m$  situada en un punto  $O$  del espacio. Calculemos, en primer lugar, el flujo del campo que genera esta masa puntual a través de un determinado elemento de superficie  $d\sigma$ . Si  $P$  es un punto de este elemento de superficie y  $\mathbf{n}_P$  la normal exterior a  $d\sigma$  en  $P$ , entonces la fuerza de atracción en  $P$ , considerando en él una masa unidad, viene dado por:

$$\mathbf{F}(P) = -G \frac{m}{r_{OP}^3} \mathbf{r}_{OP},$$

siendo  $\mathbf{r}_{OP}$  el radio vector con origen en  $O$  y extremo  $P$ . El flujo que atraviesa el elemento de superficie se define como:

$$d\phi = \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}_P d\sigma = -G \frac{m}{r_{OP}^3} \mathbf{r}_{OP} \bullet \mathbf{n}_P d\sigma = -G \frac{m}{r_{OP}^2} \cos(\varphi) d\sigma,$$

donde  $\varphi$  es el ángulo determinado por el radio vector  $\mathbf{r}_{OP}$  y la normal exterior,  $\mathbf{n}_P$ , a  $d\sigma$  en  $P$ . El signo menos puede interpretarse como que el flujo es entrante en la superficie.

Si tenemos en cuenta la definición de ángulo sólido que determina el contorno  $\Gamma$  de la superficie  $d\sigma$  desde  $O$ , entonces:

$$d\Omega = \frac{\cos(\varphi)}{r_{OP}^2} d\sigma,$$

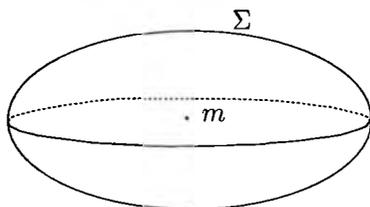


Figura 2.7: Flujo que atraviesa una superficie cerrada  $\Sigma$  si la masa está en su interior.

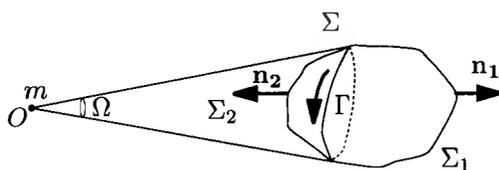


Figura 2.8: Flujo que atraviesa una superficie cerrada  $\Sigma$  si la masa está en su exterior.

y será  $d\phi = -Gm d\Omega$ . Considerando ahora una superficie  $\Sigma$  acotada, el flujo del campo generado por una masa  $m$  situada en un punto  $O$  y que atraviesa dicha superficie es:

$$\phi = -Gm \iint_{\Sigma} d\Omega = -Gm\Omega, \quad (2.10)$$

de modo que el valor de este flujo, para una masa dada, depende sólo del ángulo sólido desde el punto donde se encuentre la masa y con el que se abarca la superficie considerada. Vemos, pues, que desde un punto de vista matemático, los conceptos de ángulo sólido y flujo del campo vectorial gravitatorio están íntimamente relacionados.

Si la masa activa se encuentra dentro de la superficie en la que pretendemos determinar el flujo, que suponemos cerrada, al ser  $\Omega = \Omega_{\text{máx}} = 4\pi \text{ strad}$ , tendremos que el flujo total entrante a través de ella será, ver figura 2.7,  $\phi = -4\pi Gm$ .

Por el contrario, supongamos que la masa  $m$  es exterior a  $\Sigma$ . Intersecando  $\Sigma$  con un plano  $\Pi$ , obtenemos que  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Gamma$ , con  $\Gamma = \Sigma \cap \Pi$ . Si tomamos para las dos superficies el vector normal exterior, fijamos el sentido de recorrido de la curva  $\Sigma$  y tenemos en cuenta el signo del ángulo sólido para cada una, tendremos que  $\phi = \phi_1 + \phi_2 = -Gm\Omega + Gm\Omega = 0$ . Se concluye, pues, que el flujo que entra por la superficie  $\Sigma_1$  sale por  $\Sigma_2$ .

Si en lugar de una masa aislada consideramos un sistema con  $N$  partículas de masas  $\{m_i\}_{i=1}^N$ , por el principio de superposición, el flujo del campo generado

por estas masas que atraviesa una superficie  $\Sigma$  vendrá dado por:

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_{\Sigma} F_n d\sigma_P = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_P d\sigma_P \\ &= \iint_{\Sigma} \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \right) \cdot \mathbf{n}_P d\sigma_P = \sum_{i=1}^N \iint_{\Sigma} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}_P d\sigma_P \\ &= \sum_{i=1}^N \phi_i,\end{aligned}$$

es decir, la aditividad es extensible al concepto de flujo de un campo de fuerzas gravitatorias. De este modo, por ejemplo, si  $\Sigma$  es una superficie cerrada en cuyo interior se encuentran las  $N$  partículas, el flujo a través de  $\Sigma$  será :

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i = \sum_{i=1}^N -4\pi G m_i = -4\pi G \left( \sum_{i=1}^N m_i \right).$$

Análogamente, si la superficie es cerrada pero ni en su interior ni sobre ella encontramos ninguna masa activa, entonces el flujo que atraviesa dicha superficie será nulo.

Por último, sea  $\vartheta \subseteq \mathbb{R}^3$ , con una distribución continua de masas de densidad  $\rho$  y  $\mathbf{F}$  el campo de intensidades gravitatorias generado por dicho cuerpo.

Sea  $S$  una superficie cerrada en cuyo interior se encuentra el volumen  $\vartheta$  y  $\vartheta_S$  el volumen dentro de  $S$ . Teniendo en cuenta que  $\vartheta \subseteq \vartheta_S$  y que:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(P_0) = \Delta V(P_0) = \begin{cases} -4\pi G \rho(P_0) & \text{si } P_0 \in \vartheta \\ 0 & \text{si } P_0 \notin \vartheta \end{cases}$$

será, por el teorema de Ostrogradski:

$$\iiint_{\vartheta_S} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dv_P = \iiint_{\vartheta} -4\pi G \rho(P_0) dv_P = -4\pi G \iiint_{\vartheta} \rho(P_0) dv_P = -4\pi G M, \quad (2.11)$$

donde  $M$  es la masa de  $\vartheta$ . Así pues, el flujo que atraviesa la superficie cerrada  $S$  es  $\phi = -4\pi G M$ , coincidiendo, así, con el caso de una distribución discreta de partículas.

Asimismo, si la superficie cerrada  $S$  no tiene en su interior ningún punto de  $\vartheta$ , entonces:

$$\iint_S F_n d\sigma_P = \iiint_{\vartheta_S} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dv_P = \iiint_{\vartheta_S} \Delta V dv_P = 0,$$

ya que  $V$  es armónica fuera de las masas atrayentes. Queda así demostrado que el flujo que atraviesa toda superficie de Liapunov cerrada y que no contenga masas activas es siempre nulo.

## Capítulo 3

# Casos particulares de distribuciones de masas activas

Si  $u$  es una función armónica en una determinada región  $\vartheta \subseteq \mathbb{R}^3$  y  $P_0 \in \mathbb{R}^3$ , entonces, por la segunda fórmula de Green:

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\vartheta=\Sigma} \left[ \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \right] d\sigma_P,$$

es decir, una función armónica en una región está determinada por los valores de dicha función y su derivada normal en la frontera de ésta.

Esto justifica el hecho de estudiar el potencial generado por masas activas que están distribuidas según una superficie  $\Sigma$  cerrada, de espesor nulo y densidad superficial  $\kappa = \kappa(P)$ , ya que toda función armónica va a poder expresarse por medio de integrales que son potenciales de superficie.

Si las masas están distribuidas en cierta capa de espesor  $h$  alrededor de una superficie  $\Sigma$  y estudiamos el campo generado a grandes distancias,  $h/r \ll 1$ , entonces podemos despreciar este espesor. Por todo esto, en el presente capítulo se presentarán las distribuciones superficiales y se estudiarán sus propiedades de convergencia, continuidad y diferenciabilidad. Además, intentaremos resolver el *problema directo de la teoría del potencial gravitatorio*: la obtención de dicho potencial a partir de las masas generadoras. El *problema inverso*, consistente en determinar la distribución de masas a partir del potencial, no tiene solución única, como comprobaremos en la próxima sección al estudiar el campo generado por una distribución esférica radial.

### 3.1. Potencial de capa simple

**Definición 3.1.** Sea  $\Sigma$  una superficie cerrada de espesor nulo y  $P \in \Sigma$ . Se define la densidad superficial,  $\kappa = \kappa(P)$ , en el punto  $P$  de la superficie  $\Sigma$  al límite:

$$\kappa(P) = \lim_{d\sigma \rightarrow 0} \frac{dm}{d\sigma},$$

siendo  $dm$  el elemento de masa que se halla en un cierto elemento de superficie  $d\sigma$  que contenga al punto  $P$ .

En correspondencia con la expresión (2.1), y por un razonamiento similar, el potencial en un punto  $P_0 \notin \Sigma$ , tanto si  $P_0$  pertenece al volumen exterior o interior a dicha superficie, viene dado por:

$$V(P_0) = G \iint_{\Sigma} \frac{\kappa(P)}{r_{PP_0}} d\sigma_P, \quad (3.1)$$

donde  $r_{PP_0} = d(P, P_0)$  es la distancia entre los puntos  $P$  y  $P_0$ . La expresión anterior, llamada **potencial de capa simple**, será convergente si suponemos que la densidad superficial está acotada y es integrable sobre la superficie.

#### 3.1.1. Convergencia y continuidad del potencial de capa simple

Supongamos que la superficie considerada,  $\Sigma$ , es una superficie de Liapunov y que la densidad superficial está acotada y es integrable sobre esta superficie. Para un punto  $P_0 \notin \Sigma$ , la integral paramétrica (3.1) estará bien definida por ser  $\kappa(P)$  integrable y el inverso de la distancia continuo en  $\Sigma$ .

De igual modo, estas expresiones integrales son impropias convergentes en los puntos de la superficie, de manera que la función potencial de capa simple estará definida en todo el espacio  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 3.1.** Sea  $\Sigma$  una superficie de Liapunov y  $\kappa = \kappa(P)$  una función acotada e integrable en  $\Sigma$ . Entonces, para cada  $P_0 \in \Sigma$ , la integral impropia:

$$V(P_0) = G \iint_{\Sigma} \frac{\kappa(P)}{r_{PP_0}} d\sigma_P$$

es convergente.

**Demostración.** Sea  $P_0 \in \Sigma$  y consideremos un sistema de referencia cartesiano, con centro en  $P_0$  y eje  $Z$  en dirección a la normal a  $\Sigma$  en el punto  $P_0$ . De este modo, el

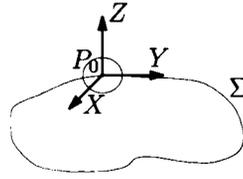


Figura 3.1: Sistema de referencia considerado sobre un punto de una capa superficial  $\Sigma$ .

plano  $XY$  será coincidente con el tangente a la superficie en  $P_0$ , ver figura 3.1. Por la segunda condición de superficie de Liapunov, debe existir  $\rho_0 > 0$  de modo que  $\Sigma$  pueda representarse explícitamente como  $z = f(x, y)$ , para  $(x, y) \in D_{\rho_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \rho_0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Designemos por  $\Sigma'_{P_0} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in S_{\rho_0}, z = f(x, y)\}$ , un entorno de Liapunov de  $P_0$ . De la existencia de la normal en cada punto de una superficie de Liapunov se sigue la derivabilidad de la función  $f(x, y)$ , siendo los cosenos directores de la normal exterior:

$$\cos(\alpha) = \frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \cos(\beta) = \frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \cos(\gamma) = \frac{-1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

donde hemos denotado  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  y  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ .

Según el sistema de coordenadas elegido, es  $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$ , de manera que si  $\cos(\alpha_0), \cos(\beta_0), \cos(\gamma_0)$  son los cosenos directores de la normal a  $\Sigma$  en  $P_0$ , entonces  $\cos(\alpha_0) = \cos(\beta_0) = 0$ .

Al ser  $\gamma = \angle(\mathbf{n}_P, \mathbf{n}_{P_0})$  el ángulo que determinan las normales en los puntos  $P$  y  $P_0$ , se tiene que  $\sin(\gamma) < \gamma < Ar_{P_0}^\delta$ , con  $0 < \delta \leq 1$ , pudiendo tomar  $\rho_0$  lo suficientemente pequeño para que se verifique la acotación:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} = |\cos(\gamma)| \leq 1. \quad (3.2)$$

Sea  $\Sigma'_{P_0}$  entorno Liapunov para este  $\rho_0$  y escribamos:

$$V(P_0) = G \iint_{\Sigma'_{P_0}} \frac{\kappa(P)}{r_{PP_0}} d\sigma_P + G \iint_{\Sigma - \Sigma'_{P_0}} \frac{\kappa(P)}{r_{PP_0}} d\sigma_P = V_1 + V_2.$$

Como  $P_0 \notin \Sigma - \Sigma'_{P_0}$ , la función  $1/r_{PP_0}$  será continua sobre los puntos de la superficie y, al ser  $\kappa = \kappa(P)$  una función integrable por hipótesis,  $V_2$  estará definido. Bastará, pues, demostrar la convergencia de la integral  $V_1$ .

Si consideramos el cambio a polares en  $V_1$ , entonces:

$$V_1 = G \iint_{\Sigma_{P_0}^+} \frac{\kappa(P)}{r_{PP_0}} d\sigma_P = G \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{\kappa(P)}{r_{PP_0}} \frac{\rho}{\cos(\gamma)} d\theta d\rho,$$

siendo  $(\rho, \theta)$  las coordenadas polares en el plano  $XY$ .

Sea  $C$  una cota para la densidad superficial. Teniendo en cuenta la acotación (3.2) y que  $\rho < r_{PP_0}$ , llegamos a:

$$V_1 \leq 2GC \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{r_{PP_0}} d\theta d\rho < 2GC \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} -0^2 d\theta d\rho = 4\pi GC \rho_0,$$

es decir, la integral impropia  $V_1$  está mayorada por una integral convergente y será, por tanto, convergente. ■

Al igual que ocurre con los potenciales de volumen, el potencial de capa simple también va a ser continuo en cada punto del espacio.

**Teorema 3.2.** *Sea  $\Sigma$  una superficie de Liapunov y  $\kappa = \kappa(P)$  una función acotada e integrable sobre  $\Sigma$ . La función:*

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P_0 &\longrightarrow V(P_0) = G \iint_{\Sigma} \frac{\kappa(P)}{r_{PP_0}} d\sigma_P \end{aligned}$$

es una función continua en todo  $\mathbb{R}^3$ .

**Demostración.** Si  $P_0 \notin \Sigma$ , basta aplicar el teorema 1.12. Supongamos, pues, que  $P_0 \in \Sigma$ . En este caso, la función está definida por una integral impropia cuyo integrando posee una singularidad en el punto  $P = P_0$ . Por el teorema 1.18, comprobaremos la convergencia uniforme en dicho punto.

Sea  $\varepsilon > 0$  y consideremos un sistema de coordenadas con origen en el punto  $P_0$  y eje  $Z$  el determinado por la normal exterior a  $\Sigma$  en el punto  $P_0$ . Al ser  $\Sigma$  una superficie de Liapunov, existe  $\rho_0 > 0$  de modo que podemos representar la superficie localmente y de manera explícita como  $z = f(x, y)$ , para cada  $(x, y) \in D_{\rho_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < \rho_0\}$ . Consideremos, además, que  $\rho_0$  es lo suficientemente pequeño como para que se de la acotación (3.2),  $1/2 < |\cos(\gamma)| \leq 1$ , siendo  $\gamma$  el ángulo que determina la normal  $\mathbf{n}_P$  a  $\Sigma$ , en un punto  $P$ , con el eje  $Z$ . Si  $\delta = \min\{\rho_0; \varepsilon/8\pi GC\}$ , denotemos por  $\Sigma_1 = \Sigma \cap S_\delta(P_0)$  la intersección de  $\Sigma$  con la esfera de centro  $P_0$  y radio  $\delta$ , y  $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$ . Podemos escribir:

$$V(P_0) = G \iint_{\Sigma_1} \frac{\kappa(P)}{r_{PP_0}} d\sigma_P + G \iint_{\Sigma_2} \frac{\kappa(P)}{r_{PP_0}} d\sigma_P = V_1 + V_2.$$

Sea  $P(x, y, z) \in S_\delta(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^3 : d(P, P_0) < \delta\}$  un punto de la esfera de centro  $P_0$  y radio  $\delta$  y  $\Sigma'_1$  la proyección de  $\Sigma_1$  sobre el plano  $XY$ , ver figura 3.2.

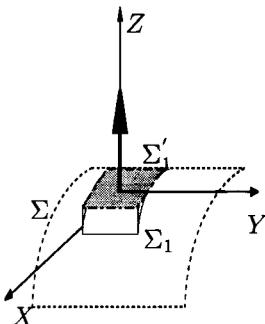


Figura 3.2: Proyección normal de  $\Sigma_1$  sobre el plano  $XY$ .

Si  $P' = P'(x, y, 0)$  es la proyección del punto  $P$  sobre este plano, denotemos por  $D_{2\delta}(P')$  el círculo de radio  $2\delta$  y centro  $P'$  contenido en el plano tangente a  $\Sigma$  en  $P_0$ . Para un punto  $Q' \in \Sigma'_1$ , tendremos que  $Q = (Q', f(Q')) \in \Sigma_1$  y, por tanto:

$$d(Q', P') \leq d(P, Q) \leq d(Q, P_0) + d(P, P_0) < \delta + \delta = 2\delta.$$

Así pues,  $\Sigma'_1 \subseteq D_{2\delta}(P')$ . Teniendo en cuenta que  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_{PP_0} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , siendo  $\rho$  coordenada polar del punto  $P'$  en el plano  $XY$  y la acotación (3.2) se verifica que:

$$\begin{aligned} |V_1(P)| &= \left| G \iint_{\Sigma_1} \frac{\kappa(P^*)}{r_{PP^*}} d\sigma_{P^*} \right| \\ &\leq GC \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{\sqrt{(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 + (z-z^*)^2}} \frac{1}{|\cos(\gamma)|} dx^* dy^* \\ &\leq 2GC \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{\sqrt{(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2}} dx^* dy^* \\ &\leq 2GC \iint_{D_{2\delta}(P')} \frac{1}{\sqrt{(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2}} dx^* dy^*. \end{aligned}$$

Introduciendo un sistema de coordenadas polares en el plano  $XY$  con origen en  $P' = P'(x, y, 0)$ , resulta:

$$|V_1(P)| \leq 2GC \int_0^{2\delta} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \rho d\rho d\theta = 8\pi GC \delta < \varepsilon.$$

De este modo,  $|V_1(P)| < \varepsilon$  si  $d(P, P_0) < \delta$  y la función potencial  $V = V(P)$  convergerá uniformemente en todo punto  $P_0 \in \Sigma$ . ■

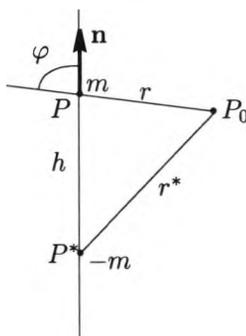


Figura 3.3: Potencial de un dipolo.

### 3.2. Potencial de capa doble

Otro tipo de potencial de superficie es el potencial de capa doble. Imaginemos un dipolo, ver figura 3.2, que conste de dos puntos,  $P$  y  $P^*$ , separados por una distancia  $h$  y a los que asignamos dos escalares iguales y de signos opuestos, que identificaremos como masas,  $m$  y  $-m$  respectivamente.

**Definición 3.2.** Se define el **momento dipolar** como la constante  $M = mh$ .

Al contrario que en magnetismo, en el que sí existen dipolos reales, este es un caso puramente teórico al no existir partículas de masa negativa. El potencial que genera cada masa en un punto  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  del espacio, no coincidente con ninguno de los puntos anteriores y en el que suponemos una partícula de masa unidad, será:

$$V_+ = G \frac{m}{r_{PP_0}}, \quad V_- = -G \frac{m}{r_{P^*P_0}},$$

donde  $r_{PP_0}$  y  $r_{P^*P_0}$  son las distancias del punto  $P_0$  a  $P$  y  $P^*$  respectivamente. Por el principio de superposición, el potencial generado en  $P_0$  vendrá dado por:

$$V = Gm \left( \frac{1}{r_{PP_0}} - \frac{1}{r_{P^*P_0}} \right). \quad (3.3)$$

Si  $\mathbf{n}$  es un vector unitario en la dirección del eje del dipolo, podemos desarrollar  $\frac{1}{r_{P^*P_0}}$  en serie de Taylor respecto a  $h$ :

$$\frac{1}{r_{P^*P_0}} = \frac{1}{r_{PP_0}} - \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) h^2 - \dots$$

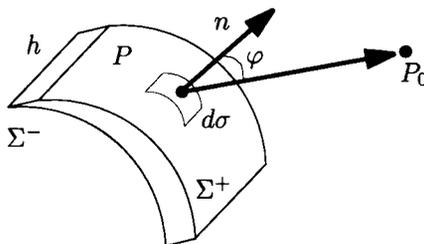


Figura 3.4: Elemento de superficie de una capa doble.

de modo que al sustituir en (3.3) se llega a:

$$\begin{aligned} V &= Gm \left( \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) h - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) h^2 + \dots \right) \\ &= GM \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) - \frac{1}{2} GMh \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right) + \dots \end{aligned}$$

Si disminuimos ahora la distancia  $h$  y al mismo tiempo aumentamos  $m$  de manera que el momento dipolar se mantenga finito, los términos de alto orden tienden a cero cuando  $h$  converge a cero y la expresión para  $V$ , en el límite, será:

$$V = GM \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PP_0}} \right).$$

Calculando la derivada en la dirección  $\mathbf{n}$  y denotando por  $\varphi$  el ángulo entre el vector  $\mathbf{n}$  y el vector  $\mathbf{r}_{PP_0}$  con origen  $P$  y extremo  $P_0$ , se llega a que el potencial de un dipolo tendrá por expresión::

$$V(P_0) = GM \frac{\cos(\varphi)}{r_{PP_0}^2}, \quad (3.4)$$

siendo  $M$  el momento dipolar.

Una capa doble sobre una superficie debe ser entendida como dos capas superficiales simples separadas, de manera uniforme, por una distancia infinitamente pequeña,  $h$ . Sean  $\Sigma$  y  $\Sigma^*$  estas dos capas simples separadas por una distancia  $h$ , siendo su distribución de masas tal que la masa correspondiente a cada elemento de superficie  $\Sigma^*$  es igual en valor absoluto pero de signo contrario que la masa del elemento correspondiente de la superficie  $\Sigma$ , ver figura 3.2. Sea  $\mathbf{n}$  la normal común a las dos superficies dirigida de la superficie repulsiva,  $\Sigma^*$ , con masa negativa, hacia la superficie atractiva,  $\Sigma$ , con masa positiva. Por lo dicho anteriormente, la normal cortará a ambas superficies en dos puntos,  $P$  y  $P^*$ , en los que las densidades de superficie sean de igual magnitud y signo contrario. De

este modo, los dos puntos van a determinar un dipolo con densidad del momento dipolar  $\tau = dM/d\sigma = \kappa h$ , supuesto que la distancia  $h$  es constante entre las dos superficies y siendo  $\kappa$  la densidad superficial.

**Definición 3.3.** Se define el **potencial de doble capa** generado por una capa superficial  $\Sigma$  en un punto  $P_0$  como la integral:

$$V(P_0) = G \iint_{\Sigma} \frac{\cos(\varphi)}{r_{PP_0}^2} \tau(P) d\sigma_P,$$

donde  $\varphi$  es el ángulo entre la normal exterior y la dirección  $\mathbf{r}_{PP_0}$ , para  $P \in \Sigma$ .

Esta definición, evidentemente, corresponde al caso en el que el lado exterior de la superficie atrae y el lado interior repele.

### 3.2.1. Convergencia y continuidad del potencial de capa doble

Si el punto de observación,  $P_0$ , se encuentra fuera de la superficie, el integrando de la definición 3.3 es una función continua en la región de integración y está multiplicada por otra función que suponemos acotada e integrable: la densidad dipolar. Tendremos, pues, que el potencial de capa doble estará definido para los puntos que estén fuera de la superficie considerada.

En los puntos de  $\Sigma$  estamos ante integrales impropias. Demostraremos que estas integrales son convergentes para un tipo especial de superficie, las superficies de Liapunov, con la única hipótesis de que la densidad dipolar,  $\tau = \tau(P)$ , sea integrable y esté acotada.

**Teorema 3.3.** Sea  $\Sigma$  una superficie de Liapunov y  $\tau = \tau(P)$  una función acotada e integrable en  $\Sigma$ . Entonces, para cada  $P_0 \in \Sigma$ , la integral impropia:

$$V(P_0) = G \iint_{\Sigma} \frac{\cos(\varphi)}{r_{PP_0}^2} \tau(P) d\sigma_P,$$

es convergente.

Demostración. Consideremos la notación y los pasos seguidos en la demostración del teorema 3.1. Sea  $P \in \Sigma'_{P_0}$  y denotemos por  $\mathbf{n}'_P$  la proyección de su vector normal,  $\mathbf{n}_P$ , sobre el plano  $XY$ , ver figura 3.2.1. Si  $\alpha'$  y  $\beta'$  son los ángulos que determina  $\mathbf{n}'_P$  con los ejes  $X$  e  $Y$  respectivamente, entonces  $\cos(\alpha) = \sin(\gamma) \cos(\alpha')$  y  $\cos(\beta) = \sin(\gamma) \sin(\alpha')$ .

Por otro lado,  $\gamma = \angle(\mathbf{n}_{P_0}, \mathbf{n}_P)$  es el ángulo determinado por las normales a  $\Sigma$  en  $P$  y  $P_0$ , de manera que, por la tercera condición de superficie de Liapunov, es  $\sin(\gamma) < \gamma <$

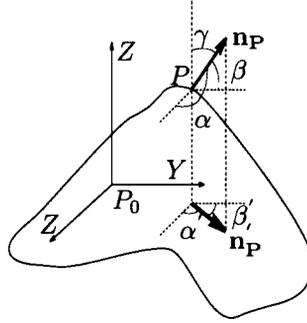


Figura 3.5: Proyección de la normal en  $P$  al plano  $XY$ .

$Ar_{PP_0}^\delta$ , con  $A$  una constante y  $0 < \delta \leq 1$ . Teniendo en cuenta la acotación 3.2, es claro que:

$$|f_x| = \left| \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\gamma)} \right| < 2|\cos(\alpha)| \leq 2|\sin(\gamma)| < 2Ar_{PP_0}^\delta,$$

$$|f_y| = \left| \frac{\cos(\beta)}{\cos(\gamma)} \right| < 2|\cos(\beta)| \leq 2|\sin(\gamma)| < 2Ar_{PP_0}^\delta.$$

Aplicando el teorema de Taylor a la función  $z = f(x, y)$  en un entorno del punto  $P_0(0, 0)$  se obtiene que:

$$z = f(x, y) = f(0, 0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) + y \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}),$$

donde  $0 \leq \bar{x} \leq x$ ,  $0 \leq \bar{y} \leq y$ , y teniendo en cuenta que  $0 = f(0, 0)$ , resulta:

$$|f(x, y)| \leq 2|x|Ar_{PP_0}^\delta + 2|y|Ar_{PP_0}^\delta \leq 4Ar_{PP_0}^{1+\delta}, \quad (3.5)$$

ya que  $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r_{PP_0}$ . Acotemos  $\cos(\varphi)$ , siendo  $\varphi$  el ángulo determinado por la normal exterior en el punto  $P(x, y, z) \in \Sigma'_{P_0}$  y la dirección  $\mathbf{r}_{PP_0}$ . Considerando el producto escalar,

$$\mathbf{r}_{PP_0} \bullet \mathbf{n}_P = x \cos(\alpha) + y \cos(\beta) + z \cos(\gamma) = r_{PP_0} \cos(\varphi),$$

teniendo en cuenta (3.5) y que  $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r_{PP_0}$ , podremos escribir:

$$\begin{aligned}
|\cos \varphi| &= \left| \frac{x}{r_{PP_0}} \cos(\alpha) + \frac{y}{r_{PP_0}} \cos(\beta) + \frac{z}{r_{PP_0}} \cos(\gamma) \right| \\
&\leq \frac{|x|}{r_{PP_0}} |\cos(\alpha)| + \frac{|y|}{r_{PP_0}} |\cos(\beta)| + \frac{|z|}{r_{PP_0}} |\cos(\gamma)| \\
&\leq |\cos(\alpha)| + |\cos(\beta)| + \frac{|z|}{r_{PP_0}} \\
&\leq Ar_{PP_0}^\delta + Ar_{PP_0}^\delta + \frac{4Ar_{PP_0}^{1+\delta}}{r_{PP_0}} \\
&= 6Ar_{PP_0}^\delta.
\end{aligned}$$

Hemos llegado, así, a la acotación:

$$\frac{\cos(\varphi)}{r_{PP_0}^2} \leq 6A \frac{1}{r_{PP_0}^{2-\delta}} \quad 0 < \delta \leq 1. \quad (3.6)$$

Escribiendo el potencial como suma de dos potenciales:

$$V(P_0) = G \iint_{\Sigma'_{P_0}} \frac{\cos(\varphi)}{r_{PP_0}^2} \tau(P) d\sigma_P + G \iint_{\Sigma - \Sigma'_{P_0}} \frac{\cos(\varphi)}{r_{PP_0}^2} \tau(P) d\sigma_P = V_1 + V_2,$$

y teniendo en cuenta que no hay singularidades en el integrando de la segunda integral, bastará demostrar la convergencia de la integral  $V_1$ . Considerando el cambio a polares, la integral anterior se escribe:

$$V_1 = G \iint_{\Sigma'_{P_0}} \frac{\cos(\varphi)}{r_{PP_0}^2} \tau(P) d\sigma_P = G \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi)}{r_{PP_0}^2} \tau(P) \frac{\rho}{\cos(\gamma)} d\theta d\rho,$$

siendo  $(\rho, \theta)$  las coordenadas polares en el plano  $XY$ . Si suponemos que  $C$  es una cota para la densidad dipolar y tenemos en cuenta la acotación (3.2), entonces:

$$|V_1| \leq 12ACG \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_{PP_0}^{2-\delta}} \rho d\rho d\theta.$$

Ahora bien,  $\rho < r_{PP_0}$ , de modo que, al ser  $2 - \delta > 1$ :

$$|V_1| \leq 12ACG \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^{1-\delta}} d\rho d\theta = 24\pi ACG \frac{\rho_0^\delta}{\delta}, \quad 0 < \delta \leq 1.$$

Hemos llegado a que  $V_1$  está mayorada por una integral convergente y será, por tanto, convergente. ■

Aunque el potencial de capa doble está definido en todo el espacio, a diferencia de lo que ocurre con los potenciales volumétricos, demostraremos que es discontinua en los puntos de la superficie generadora del campo.

Dada una superficie cerrada,  $\Sigma$ , definimos su **exterior** como la componente conexa no acotada de  $\mathbb{R}^3 - \Sigma$  y, como **interior**, la otra componente conexa. Si  $\Sigma$  no fuese cerrada, el lado interior se define, convencionalmente, especificando qué normal, en cada punto, se toma interior y cuál exterior.

Si suponemos que  $\Sigma$  es una distribución homogénea de densidad  $\tau = \tau_0$  y tenemos en cuenta la definición de ángulo sólido, entonces:

$$V^*(P_0) = G\tau_0 \iint_{\Sigma} \frac{\cos(\varphi)}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = G\tau_0 \iint_{\Sigma} d\Omega = G\tau_0\Omega,$$

siendo  $\Omega$  el ángulo sólido abarcado por la superficie  $\Sigma$  desde el punto  $P_0$  y donde hemos denotado por  $V^*$  el potencial de capa doble para una densidad constante. En este caso, el potencial será constante a trozos y:

$$\begin{cases} V_i^*(P_0) = V^*(P_0) + 2\pi G\tau_0, \\ V_e^*(P_0) = V^*(P_0) - 2\pi G\tau_0, \end{cases} \quad (3.7)$$

donde  $V_i^*$  y  $V_e^*$  son los límites del potencial de capa doble cuando nos aproximamos al punto  $P_0$  desde el lado interior y exterior, respectivamente, de la superficie  $\Sigma$ .

Veremos, a continuación, que si el potencial de capa doble tiene densidad  $\tau = \tau(P)$  variable entonces tienen lugar igualdades análogas a (3.7) en los puntos de  $\Sigma$  en los que la densidad sea continua.

**Teorema 3.4.** *Sea  $\Sigma$  una superficie de Liapunov cerrada con un número finito de partes convexas y  $\tau = \tau(P)$  una función acotada e integrable en  $\Sigma$  tal que es continua en un punto  $P_0 \in \Sigma$ . Entonces, la función potencial de capa doble dada por la expresión 3.3 verifica:*

$$\begin{cases} V_i(P_0) = V(P_0) + 2\pi G\tau(P_0), \\ V_e(P_0) = V(P_0) - 2\pi G\tau(P_0), \end{cases}$$

donde  $V_i$  y  $V_e$  son los límites del potencial de capa doble cuando nos aproximamos al punto  $P_0$  desde el lado interior y exterior, respectivamente, de la superficie  $\Sigma$ .

**Demostración.** Sea  $P_0 \in \Sigma$  y supongamos que  $\tau = \tau(P)$  es continua en dicho punto. Si denotamos por  $\tau_0 = \tau(P_0)$ , introduzcamos el potencial de doble capa,  $V^*$ , para la densidad constante  $\tau_0$ . Definamos la función:

$$\begin{aligned} I: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow I(P) = V(P) - V^0(P) = G \iint_{\Sigma} (\tau(P) - \tau_0) \frac{\cos(\varphi)}{r_{P^*P}^2} d\sigma_{P^*}. \end{aligned}$$

Demostraremos que esta función integral es uniformemente convergente en  $P_0$  siendo, por el teorema 1.18, continua en dicho punto.

La superficie  $\Sigma$  tiene un número finito de partes convexas, ver [15] pág. 379, por lo que la función paramétrica

$$H(P) = \iint_{\Sigma} \frac{|\cos(\varphi)|}{r_{P^*P}^2} d\sigma_{P^*},$$

donde  $\varphi$  es el ángulo que determina la normal exterior a  $\Sigma$  en  $P^*$  y el vector  $\mathbf{r}_{P^*P}$  con origen  $P^*$  y extremo  $P$ , esta acotada superiormente. Sea  $C_{\Sigma}$  una cota superior para esta función.

Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Como  $\tau = \tau(P)$  es una función continua en  $P_0$ , existe un entorno en  $\Sigma$  de  $P_0$ ,  $\Sigma^1$ , de modo que  $|\tau(P) - \tau_0| < \varepsilon/C_{\Sigma}G$  para  $P \in \Sigma^1$ . Sea  $\delta$  el diámetro de este entorno. Si  $\Sigma_1$  es otro entorno de  $P_0$  con diámetro menor o igual que  $\delta$ , entonces:

$$|I_{\delta}(P)| = \left| G \iint_{\Sigma_1} (\tau(P) - \tau_0) \frac{\cos(\varphi)}{r_{P^*P}^2} d\sigma_{P^*} \right| \leq G \frac{\varepsilon}{C_{\Sigma}G} \iint_{\Sigma^1} \frac{|\cos(\varphi)|}{r_{P^*P}^2} d\sigma_{P^*} \leq \varepsilon.$$

Finalmente, si denotemos por  $\vartheta$  el volumen encerrado por  $\Sigma$ , entonces:

$$\begin{aligned} V_i(P_0) &= \lim_{P \in \text{Int}(\vartheta) \rightarrow P_0} V^0(P) + I(P) = V(P_0) + 2\pi G\tau(P_0), \\ V_e(P_0) &= \lim_{P \notin \vartheta \rightarrow P_0} V^0(P) + I(P) = V(P_0) - 2\pi G\tau(P_0). \end{aligned}$$

■

### 3.2.2. Derivabilidad del potencial de capa simple

Se ha demostrado que el potencial de capa simple está definido y es continuo en todo el espacio. Sin embargo, las derivadas primeras sobre los puntos de la superficie considerada van a ser distintas según nos aproximemos desde el interior o desde el exterior. En particular, estudiemos el comportamiento de las derivadas normales del potencial de capa simple en la superficie.

Sea  $\Sigma$  una superficie de Liapunov y  $P_0 \in \Sigma$ . Definiremos, en primer lugar, las derivadas normales exterior e interior del potencial de capa simple en  $P_0$ . Para ello, centremos un sistema de referencia cartesiano en  $P_0$  y elijamos como eje  $Z$  el determinado por la normal exterior a  $\Sigma$  en  $P_0$ .

Si tenemos en cuenta la derivada parcial  $(\partial V/\partial z)(P)$  en cierto punto del eje  $Z$ , definamos  $(\partial V/\partial z)_i(P_0)$  y  $(\partial V/\partial z)_e(P_0)$  como los límites de la derivada  $(\partial V/\partial z)(P)$  cuando el punto  $P$  tiende a  $P_0$  por el lado interior o exterior, respectivamente, de la superficie  $\Sigma$ . Los denominaremos **valores límite interior y exterior de la derivada normal exterior** en el punto  $P_0$ .

Sea  $P$  un punto del eje  $Z$  distinto de  $P_0$ . El inverso de la distancia desde  $P$  hasta cualquier otro punto  $P^* \in \Sigma$  es derivable con continuidad respecto de los

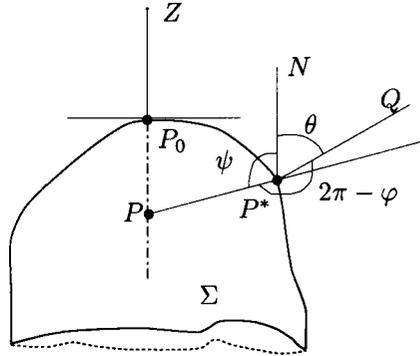


Figura 3.6: Derivada normal del potencial de capa simple.

argumentos de  $P$ , de modo que, por el teorema 1.13:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z}(P) &= G \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\Sigma} \frac{\kappa(P^*)}{r_{P^*P}} d\sigma_{P^*} \\ &= G \iint_{\Sigma} \kappa(P^*) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{P^*P}} \right) d\sigma_{P^*} \\ &= G \iint_{\Sigma} \kappa(P^*) \frac{\cos(\psi)}{r_{P^*P}^2} d\sigma_{P^*}, \end{aligned}$$

donde  $\psi$  es el ángulo entre el eje  $Z$  y el vector  $r_{P^*P}$  con origen  $P^*$  y extremo  $P$ .

Tracemos la recta  $P^*N$  paralela al eje  $Z$  y la normal exterior a  $\Sigma$  en  $P^*$ , en la dirección  $PQ$ , ver figura 3.6. Designemos por  $\theta = \angle NP^*Q$  al ángulo determinado por las normales exteriores a  $\Sigma$  en los puntos  $P_0$  y  $P^*$ .

La expresión del potencial de doble capa contiene el factor  $\cos \varphi / r^2$ , donde  $\varphi = \angle PP^*Q$  es el ángulo determinado por la normal exterior a  $\Sigma$  en  $P^*$  y el vector  $r_{P^*P}$  de origen  $P^*$  y extremo  $P$ .

Consideremos una esfera unitaria de centro  $P^*$  y el triedro de vértice  $P^*$  y aristas  $P^*P$ ,  $P^*N$  y  $P^*Q$ . Si tenemos en cuenta el triángulo esférico determinado por la intersección de la esfera anterior y el triedro y aplicamos la primera fórmula de Bessel, ver [5] página 16, entonces:

$$\cos(\psi) = \cos(\varphi) \cos(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\theta) \cos(\Omega),$$

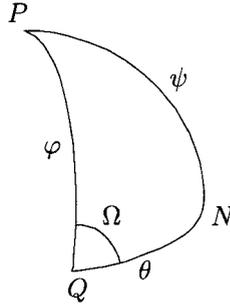


Figura 3.7: Triángulo esférico determinado por el triedro de aristas  $P^*P$ ,  $P^*N$  y  $P^*Q$ .

donde  $\Omega$  es el ángulo del diedro de arista  $P^*Q$ . De aquí se deduce que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z}(P) &= G \iint_{\Sigma} (\kappa(P^*) \cos(\theta)) \frac{\varphi}{r_{P^*P}^2} d\sigma_{P^*} + \\ &+ G \iint_{\Sigma} \kappa(P^*) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\Omega) \frac{\operatorname{sen} \varphi}{r_{P^*P}^2} d\sigma_{P^*} = V^*(P) + I(P), \end{aligned}$$

donde, en esta ocasión, hemos denotado por  $V^*$  el potencial de capa doble con densidad del momento dipolar  $\tau(P^*) = \kappa(P^*) \cos(\theta)$ . Además, se puede comprobar que la función  $I(P)$  es una función uniformemente convergente en  $P_0$ , ver [15] página 381, y por tanto, continua en dicho punto. Tendremos que:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_i = V^*(P_0) + 2\pi G \kappa(P_0) \cos(0) + I(P_0),$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_e = V^*(P_0) - 2\pi G \kappa(P_0) \cos(0) + I(P_0),$$

y si denotamos por  $\left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_0 = V^*(P_0) + I(P_0)$ , podremos escribir:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_i = \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_0 + 2\pi G \kappa(P_0), \quad \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_e = \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_0 - 2\pi G \kappa(P_0).$$

Si se dirige el eje  $Z$  por la normal interior, el signo de  $\cos(\psi)$  cambia y se obtiene:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_i = \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_0 - 2\pi G \kappa(P_0), \quad \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_e = \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_0 + 2\pi G \kappa(P_0).$$

### 3.3. Campo producido por una capa esférica

Consideremos una capa esférica de espesor nulo y densidad superficial  $\kappa = \kappa(P)$ , de radio  $R$  y con centro en el origen de coordenadas,  $O$ . Si la denotamos por  $\Sigma_R = \partial S_R(O)$ , el potencial en cada punto  $P_0$  del espacio vendrá dado por, ver (3.1):

$$V(P_0) = G \iint_{\Sigma_R} \frac{\kappa(P)}{r_{PP_0}} d\sigma_P,$$

que está definido y es continuo en cada punto  $P_0 \in \mathbb{R}^3$ .

Supongamos que la distribución de masas tiene simetría esférica, de modo que  $\kappa = \kappa_0$  es constante para cada punto de la capa  $\Sigma_R$ . Tendremos, pues, que la masa de  $\Sigma_R$  es:

$$M = \iint_{\Sigma_R} \kappa(P) d\sigma_P = \kappa_0 \iint_{\Sigma_R} d\sigma_P = \kappa_0 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} R^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\lambda = 4\pi\kappa_0 R^2.$$

A continuación determinemos el campo y potencial gravitatorios que genera esta distribución superficial de masas activas.

#### Para un punto $P$ exterior a la capa esférica

Sea  $r = d(O, P) > R$  y consideremos la esfera de radio  $r$  y centro  $O$ ,  $S_r(O)$ . Al ser  $\Sigma_R \subseteq S_r(O)$ , el flujo del campo gravitatorio que atraviesa la superficie  $\Sigma_r = \partial S_r(O)$  es  $\phi = -4\pi GM$ , siendo  $M$  la masa de  $\Sigma_R$ . Del mismo modo, si recurrimos a la definición de flujo y teniendo en cuenta que, por la simetría esférica de la distribución de masas, también el campo creado es simétrico y radial, tenemos que:

$$\phi = \iint_{\Sigma_r} F_n d\sigma_P = \iint_{\Sigma_r} -F(r) \mathbf{e}_P \cdot \mathbf{n}_P d\sigma_P = -F(r) \iint_{\Sigma_r} d\sigma_P = -4\pi r^2 F(r).$$

Igualando estas dos expresiones del flujo se obtiene que la intensidad de campo es  $F(r) = GM/r^2$  e integrando,  $V(r) = GM/r$ , siendo  $r = d(O, P)$ .

#### Para un punto $P$ interior a la capa esférica

Sea  $r = d(O, P) < R$  y consideremos la esfera de centro  $O$  y radio  $r$ . Dado que esta esfera no contiene ni interseca a ninguna distribución de masas, el flujo

del campo newtoniano a su través es nulo. Por este motivo,

$$0 = \phi = \iint_{\Sigma_r} -F(r)\mathbf{e}_P \bullet \mathbf{n}_P d\sigma_P = -F(r) \iint_{\Sigma_r} d\sigma_P = -4\pi r^2 F(r),$$

y  $F(r) = 0$ . Por tanto, al ser el campo nulo en cada punto interior y  $\partial V/\partial r = -F(r) = 0$ , el potencial debe ser constante en el interior de la capa esférica. El potencial de capa simple es continuo en todo punto del espacio de manera que este valor constante debe ser el que tome el potencial en los puntos situados sobre la capa de masa activa:

$$V(R) = \lim_{r \rightarrow R^+} V(r) = \lim_{r \rightarrow R^+} \frac{GM}{r} = \frac{GM}{R}.$$

Así pues, se ha llegado a que el potencial y la intensidad del campo gravitatorio generado por una capa esférica de radio  $R$  son:

$$F(P) = \begin{cases} \frac{GM}{r^2} & \text{si } r = d(O, P) \geq R \\ 0 & \text{si } r = d(O, P) < R. \end{cases}$$

y

$$V(P) = \begin{cases} \frac{GM}{r} & \text{si } r = d(O, P) > R \\ \frac{GM}{R} & \text{si } r = d(O, P) \leq R \end{cases}$$

Es claro que el potencial  $V$ , así definido, es continuo en cada punto del espacio. Junto a esto, la intensidad del campo gravitatorio,  $-F(r) = \partial V/\partial r = \partial V/\partial n$  que es la derivada normal del potencial en cada punto, es tal que:

$$\lim_{r \rightarrow R^+} F(r) = \frac{GM}{R^2} \neq 0 = \lim_{r \rightarrow R^-} F(r),$$

de modo que el campo gravitatorio presenta, en este caso, una discontinuidad de salto finito sobre los puntos de la capa esférica.

### 3.4. Estudio del potencial y de la fuerza gravitatoria en diversas distribuciones geométricas

#### 3.4.1. Campo generado por una distribución esférica radial

Consideremos una distribución continua de masas que sea una esfera sólida de radio  $R$ , ver figura 3.4.1. Fijemos un sistema de referencia con origen el centro de

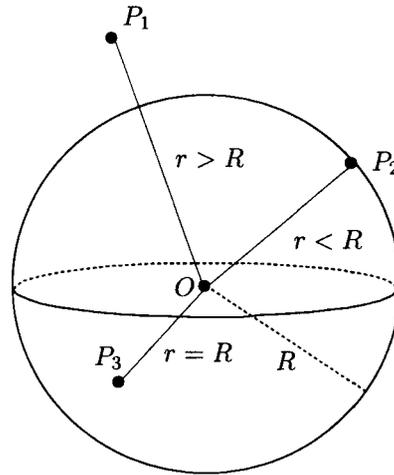


Figura 3.8: Potencial generado por una esfera de radio  $R$  en un punto exterior, interior y de la frontera.

la esfera,  $O$ , y supongamos que la distribución de masas tiene simetría esférica, es decir, que la densidad, que supondremos diferenciable con continuidad en cada punto, **sólo** depende de la distancia al origen. En estas condiciones, y trabajando en un sistema de coordenadas esféricas centradas en  $O$ , podemos determinar la masa de una esfera centrada en el origen y con radio  $r \leq R$ :

$$\begin{aligned}
 m(r) &= \iiint_{S_r(O)} \rho(P) dv_P \\
 &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \text{sen}(\theta) d\theta \int_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} d\lambda \int_{s=0}^{s=r} \rho(s) s^2 ds \\
 &= 4\pi \int_{s=0}^{s=r} \rho(s) s^2 ds.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

En particular, la masa activa total será:

$$M = m(R) = 4\pi \int_{s=0}^{s=R} \rho(s) s^2 ds. \tag{3.9}$$

La simetría esférica de la masa activa implica, también, simetría esférica en el campo que genera. Por este motivo, para cada punto  $P$  del espacio, debe ser  $\mathbf{F}(P) = -F(r)\mathbf{e}_P$ , siendo  $r = d(O, P)$  y  $\mathbf{e}_P$  vector unitario con dirección y sentido el radio vector del punto  $P$ . Estudiemos, a continuación, el campo y el potencial, generados por esta esfera sólida, en cada punto del espacio.

**Para un punto  $P$  exterior a la esfera sólida:**  $P \in Ext(S_R(O))$

Consideremos la esfera con centro el origen y radio  $r = d(O, P) > R$ . Es claro que  $S_R(O) \subseteq S_r(O)$ , siendo  $S_R(O)$  la esfera sólida de masa activa. Por (2.11), el flujo que atraviesa la capa esférica  $\partial S_r(O)$  vendrá dado por  $\phi = -4\pi GM$ , siendo  $M$  la masa activa total. Por otro lado, recurriendo a la definición de flujo:

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_{\partial S_r(O)} F_n d\sigma_P = - \iint_{\partial S_r(O)} F(r) \mathbf{e}_P \bullet \mathbf{n}_P d\sigma_P \\ &= -r^2 F(r) \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \text{sen}(\theta) d\theta \int_{\lambda=0}^{2\pi} d\lambda = -4\pi r^2 F(r).\end{aligned}$$

De este modo, igualando las dos expresiones que hemos obtenido para el flujo, debe ser:

$$\mathbf{F}(P) = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_P.$$

Así pues, el campo gravitatorio producido por una distribución de masa esférica en un punto exterior es el mismo que el generado por una masa puntual equivalente a la de la esfera  $S_R(O)$  y situada en el centro de dicha esfera.

Como ya sabemos, el campo gravitatorio es el gradiente de un campo escalar; el potencial gravitatorio  $V$ . Si tenemos en cuenta que  $F = F(r)$ , es decir, que la intensidad de campo tiene simetría esférica, entonces el potencial gravitatorio debe ser dependiente, solamente, del parámetro  $r$ . Considerando la expresión (1.2) del gradiente de una función en coordenadas curvilíneas y el valor de los factores de escala para un sistema de coordenadas esféricas, debe ser:

$$-\frac{GM}{r^2} = \nabla_{r,\theta,\lambda} V = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Integrando,  $V(r) = GM/r + C$ , siendo  $C$  la constante de integración. Según el teorema 2.4, el potencial gravitatorio debe anularse en el infinito de manera que  $C = 0$  y:

$$V(P) = V(r) = \frac{GM}{r}, \quad (3.10)$$

es el potencial gravitatorio para todo punto  $P$  situado a una distancia  $r > R$  del origen.

**Para un punto  $P$  interior a la esfera sólida:**  $P \in Int(S_R(O))$

Sea  $r = d(O, P) < R$  y consideremos la esfera sólida de centro el origen y radio  $r$ . Aplicando el teorema (1.19) al campo gravitatorio  $\mathbf{F}$  en la región  $S_r(O)$ :

$$\iiint_{S_r(O)} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dv_P = \iint_{\partial S_r(O)} F_n d\sigma_P, \quad (3.11)$$

siendo  $\operatorname{div}(\mathbf{F})(P) = \Delta V(P) = -4\pi G\rho(P)$  para cada  $P \in S_r(O) \subseteq S_R(O)$  y  $F_n = -F(r)\mathbf{e}_P \cdot \mathbf{n}_P = -F(r)$ , con  $\mathbf{n}_P$  la normal exterior a la superficie  $\partial S_r(O)$  en  $P$ . De este modo, sustituyendo en (3.11):

$$-4\pi Gm(r) = -F(r) \iint_{\partial S_r(O)} d\sigma_P = -4\pi r^2 F(r),$$

y  $F(r) = Gm(r)/r^2$ , siendo  $m(r)$  la masa contenida en la esfera de radio  $r$  centrada en el origen y dado por (3.8).

De este modo llegamos a la conclusión de que el campo producido por una distribución continua de masa activa con simetría esférica, en un punto interior de dicha esfera y a una distancia  $r$  del origen, es el mismo que el generado por una masa puntual equivalente a la contenida en la esfera de centro  $O$  y radio  $r$  y situada en el centro de esa esfera. Así pues, el campo generado por las masas comprendidas entre las esferas de radio  $r$  y  $R$  es nulo.

A continuación, pasemos a determinar el potencial gravitatorio en un punto interior. Integrando la expresión:

$$\nabla V_{r;\theta;\lambda} = \frac{\partial V}{\partial r} = -G \frac{m(r)}{r^2},$$

se obtiene que:

$$V(r) = V(r) - \lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = -G \int_{\infty}^r \frac{m(r)}{r^2} dr.$$

Teniendo en cuenta que la densidad es nula fuera de la distribución de masas,

$$m(r) = \iiint_{S_r(O)} \rho(P) dv_P = m(R) = M,$$

para cada  $r \geq R$ . De este modo, se llega a que el potencial en un punto interior

de la esfera y a una distancia  $r$  de su origen viene dado por:

$$\begin{aligned}
 V(r) &= -G \int_{\infty}^r \frac{m(r)}{r^2} dr = -G \int_{\infty}^R \frac{m(r)}{r^2} dr - G \int_R^r \frac{m(r)}{r^2} dr \\
 &= GM \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr + G \int_r^R \frac{m(r)}{r^2} dr \\
 &= -\frac{GM}{r} \Big|_R^{\infty} + G \int_r^R \frac{m(r)}{r^2} dr \\
 &= G \left( \frac{M}{R} + \int_r^R \frac{m(r)}{r^2} dr \right).
 \end{aligned}$$

**Para un punto  $P$  de la superficie esférica:**  $P \in \partial S_R(O)$

Tanto el potencial como el campo gravitatorio deben ser funciones continuas en todo el espacio, de modo que para un punto  $P \in \partial S_R(O)$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
 V(P) = V(R) &= \lim_{r \rightarrow R^+} V(r) = \lim_{r \rightarrow R^+} \frac{GM}{r} = \frac{GM}{R}, \\
 F(P) = F(R) &= \lim_{r \rightarrow R^+} F(r) = \lim_{r \rightarrow R^+} \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{R^2}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, se ha llegado a que una esfera sólida de radio  $R$  y en cuyo centro consideramos el origen de coordenadas genera un campo gravitatorio radial de magnitud:

$$F(P) = G \frac{m(r)}{r^2},$$

siendo  $r = d(O, P)$  y  $m(r)$ , dado por (3.8), la masa de la esfera de centro  $O$  y radio  $r$ . El potencial gravitatorio vendrá dado por la función continua:

$$V(P) = \begin{cases} \frac{GM}{r}, & \text{si } r = d(O, P) \geq R \\ G \left( \frac{M}{R} + \int_r^R \frac{m(r)}{r^2} dr \right), & \text{si } r = d(O, P) < R. \end{cases} \quad (3.12)$$

pudiendo comprobar, por derivación directa, que  $\nabla V(P) = \mathbf{F}(P)$  para cada  $P \in \mathbb{R}^3$ . Por otro lado, considerando la expresión del laplaciano para una función en coordenadas esféricas y que el potencial sólo depende del parámetro  $r$ :

$$\Delta_{r,\theta,\lambda} V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r}.$$

De este modo, para un punto  $P \notin S_R(O)$ :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{2GM}{r^3},$$

y

$$\Delta_{r,\theta,\lambda} V(P) = \frac{2GM}{r^3} - \frac{2GM}{r^3} = 0.$$

Luego el potencial será armónico en el exterior de  $S_R(O)$ , es decir, fuera de las masas atrayentes.

Para un punto  $P \in \text{Int}(S_R(O))$ ,

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{Gm(r)}{r^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = -\frac{Gm'(r)}{r^2} + 2\frac{Gm(r)}{r^3}.$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo a la expresión (3.8) se tiene que  $m'(r) = 4\pi\rho(r)r^2$ . Por tanto:

$$\Delta_{r,\theta,\lambda} V = -\frac{G}{r^2}4\pi\rho(r)r^2 + 2\frac{Gm(r)}{r^3} - 2\frac{Gm(r)}{r^3} = -4\pi G\rho(r),$$

y, consecuentemente,  $V$  verifica la ecuación de Poisson en los puntos interiores a la esfera.

Como caso particular, supongamos que estamos ante una distribución homogénea de masas de densidad  $\rho = \rho_0$ . Entonces:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho_0 s^2 ds = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3,$$

y, en particular,  $M = 4\pi\rho_0 R^3/3$ . Sustituyendo en (3.12), el potencial en cada punto vendrá dado por:

$$V(P) = \begin{cases} \frac{4\pi G\rho_0 R^3}{3} \frac{1}{r}, & \text{si } r = d(O, P) \geq R \\ 2\pi G\rho_0 \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right), & \text{si } r = d(O, P) < R, \end{cases} \quad (3.13)$$

y la magnitud del campo gravitatorio:

$$F(r) = G \frac{m(r)}{r^2} = \frac{4\pi}{3} G\rho_0 r.$$

Así pues, para  $r = 0$  se tienen los valores  $F(0) = 0$  y  $V(0) = 2\pi G\rho_0 R^2$ , y para  $r = R$ ,  $F(R) = 4\pi G\rho_0 R/3$  y  $V(R) = 4\pi G\rho_0 R^2/3$ .

### 3.4.2. Campo producido por una capa esférica de espesor finito

Consideremos la distribución de masas comprendida entre dos esferas de radios  $R$  y  $R'$ ,  $R' < R$ , y caracterizada por una densidad volumétrica,  $\rho = \rho_0$ , que spondremos constante. La masa total de esta distribución será:

$$M = \int_{r=R'}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} \rho_0 r^2 \sin(\theta) d\theta d\lambda dr = \frac{4}{3} \pi \rho_0 (R^3 - (R')^3).$$

Calculemos el potencial y la atracción en cualquier punto del espacio.

**Para un punto  $P$  exterior a la esfera de radio  $R$ :  $P \in Ext(S_R(O))$**

Sea  $r = d(O, P) > R$  y  $S_r(O)$  la esfera centrada en  $O$  con radio  $r$ . Es claro que  $S_{R'}(O) \subseteq S_R(O) \subseteq S_r(O)$  y, por tanto, el flujo a través de la capa esférica  $\partial S_r(O)$  vendrá dado por  $\phi = -4\pi GM$ . Por otro lado, también es evidente la simetría esférica del campo generado, de modo que, al ser  $\mathbf{F}(P) = -F(r)\mathbf{e}_P$ , con  $r = d(O, P)$  y  $\mathbf{e}_P$  vector unitario con dirección y sentido el determinado por el radio vector del punto  $P$ :

$$\phi = \iint_{\Sigma_r} F_n d\sigma_P = -F(r) \iint_{\Sigma_r} d\sigma_P = -4\pi r^2 F(r),$$

y, al igual que en los casos anteriores, igualando las dos expresiones obtenidas para el flujo, la intensidad del campo gravitatorio para un punto  $P$  exterior a la esfera  $S_R(O)$  viene dado por  $F(P) = GM/r^2$ . De aquí se deducirá, sin más que integrar y tener en cuenta que el potencial se anula en el infinito, que el potencial viene dado por  $V(P) = GM/r$ . Es más, por continuidad del potencial gravitatorio, podemos extender esta definición a los puntos de la frontera  $\partial S_R(O)$ .

**Para un punto  $P$  interior a la esfera de radio  $R'$ :  $P \in Int(S_{R'}(O))$**

El mismo razonamiento para la determinación del potencial gravitatorio para un punto interior a una capa esférica, nos conduce al hecho que el campo debe ser nulo y el potencial constante para todo punto interior a la esfera de radio  $R'$ . La continuidad del potencial gravitatorio nos va a permitir determinar la constante

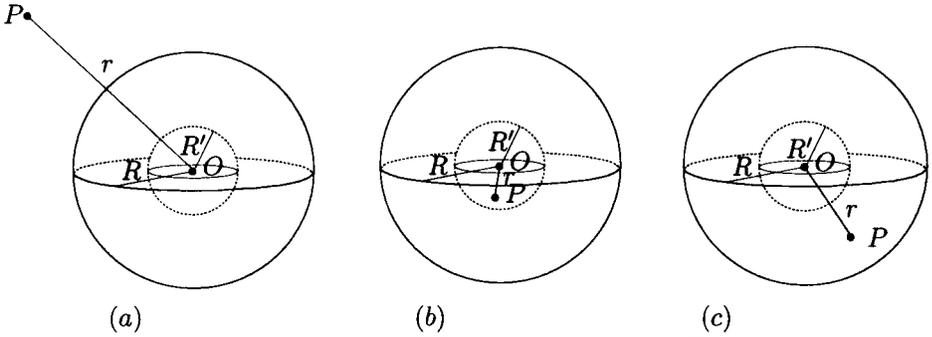


Figura 3.9: Capa esférica de espesor finito: (a) Punto exterior; (b) Punto interior; (c) Punto intermedio.

anterior; este escalar debe coincidir con el potencial existente en los puntos de la capa esférica de radio  $R'$ . Para obtenerlo, basta hacer  $r = R' < R$  en la expresión (3.13) y restarle el potencial que generaría una distribución esférica homogénea de radio  $R'$ :

$$V(R') = 2\pi G\rho_0 \left( R^2 - \frac{(R')^2}{3} \right) - \frac{4\pi}{3} G\rho_0 \frac{(R')^3}{R'} = 2\pi G\rho_0 (R^2 - (R')^2).$$

Así pues,  $V(P) = 2\pi G\rho_0 (R^2 - (R')^2)$ , si  $r = d(O, P) \leq R'$ .

**Para un punto  $P$  situado entre ambas esferas:  $P \in S_R(O) - S_{R'}(O)$**

Estudiemos qué ocurre en un punto  $P$  que está en la zona de masa activa, siendo  $R' < r = d(O, P) < R$ . Consideremos la esfera de centro  $O$  y radio  $r$ ,  $S_r(O)$ . Esta esfera envuelve a una masa:

$$m(r) = \int_{R'}^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 r^2 \sin(\theta) d\lambda d\theta dr = 4\pi\rho_0 \left. \frac{r^3}{3} \right|_{R'}^r = \frac{4\pi}{3} \rho_0 (r^3 - (R')^3). \quad (3.14)$$

Teniendo en cuenta que cuando una superficie no envuelve la distribución generadora del campo el flujo que la atraviesa es nulo, el flujo que atraviesa la capa esférica  $\partial S_r(O)$  será  $\phi = -4\pi Gm(r)$ . Según la definición:

$$\phi = \iint_{\Sigma_r} F_n d\sigma_P = -4\pi r^2 F(r),$$

e igualando ambas expresiones y teniendo en cuenta (3.14):

$$F(r) = \frac{Gm(r)}{r^2} = \frac{4\pi}{3}G\rho_0\left(r - \frac{(R')^3}{r^2}\right).$$

En cuanto al potencial, al ser  $\frac{\partial V}{\partial r} = -F(r)$ :

$$\begin{aligned} V(r) &= V(r) - \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \int_{\infty}^r \frac{\partial V}{\partial r} dr \\ &= \int_{\infty}^{R'} \frac{\partial V}{\partial r} dr + \int_{R'}^r \frac{\partial V}{\partial r} dr \\ &= V(R') - \int_{R'}^r \frac{Gm(r)}{r^2} dr \\ &= 2\pi G\rho_0(R^2 - (R')^2) - G \int_{R'}^r \frac{m(r)}{r^2} dr, \end{aligned}$$

y por (3.14):

$$V(r) = 2\pi G\rho_0(R^2 - (R')^2) - \frac{4\pi}{3}G\rho_0 \int_{R'}^r \left( r - \frac{(R')^3}{r^2} \right) dr. \quad (3.15)$$

Resolviendo la integral del segundo miembro:

$$\int_{R'}^r \left( r - \frac{(R')^3}{r^2} \right) dr = \frac{r^3 + 2(R')^3}{2r} - \frac{3}{2}(R')^2,$$

y sustituyendo en (3.15) resulta:

$$V(r) = \frac{2\pi}{3}G\rho_0 \left[ \frac{3rR^2 - r^3 - 2(R')^3}{r} \right].$$

Fácilmente se obtiene el valor de  $V(r)$  cuando  $r = R$  y  $r = R'$  y por tanto el potencial gravitatorio vendrá dado por:

$$V(P) = \begin{cases} \frac{GM}{r}, & \text{si } r = d(O, P) \geq R \\ \frac{2\pi}{3}G\rho_0 \left[ \frac{3rR^2 - r^3 - 2(R')^3}{r} \right], & \text{si } R' < r = d(O, P) < R \\ 2\pi G\rho_0(R^2 - (R')^2), & \text{si } r = d(O, P) \leq R' \end{cases} \quad (3.16)$$

y la intensidad del campo gravitatorio será:

$$F(P) = \begin{cases} \frac{GM}{r^2}, & \text{si } r = d(O, P) \geq R \\ \frac{4\pi}{3}G\rho_0 \left( r - \frac{(R')^3}{r^2} \right), & \text{si } R' < r = d(O, P) < R \\ 0, & \text{si } r = d(O, P) \leq R' \end{cases} \quad (3.17)$$

ambos continuos en todos los puntos de  $\mathbb{R}^3$ . Además, es claro que  $\Delta_{r,\theta,\lambda}V = 0$  en los puntos exteriores a la esfera  $S_R(O)$  e interiores a  $S_{R'}(O)$ . Veamos qué ocurre en los puntos de masa activa. Teniendo en cuenta el teorema fundamental del cálculo se verifica que:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 \left( r - \frac{(R')^3}{r^2} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 \left( 1 + 2\frac{(R')^3}{r^3} \right),$$

y al sustituir en la expresión del laplaciano de una función en coordenadas esféricas,  $\Delta_{r,\theta,\lambda}V = -4\pi G\rho_0$ . Es decir, el potencial gravitatorio, definido por (3.16), es armónico fuera de las masas atrayentes y verifica la ecuación de Poisson en los puntos de la región  $S_R(O) - S_{R'}(O)$ .

### 3.4.3. Campo producido por una esfera preñada

Consideremos una distribución de masas homogénea, de densidad  $\rho = \rho_0$ , comprendida entre dos esferas de radios  $R$  y  $R'$  y centradas en  $O$  y  $O'$  respectivamente, verificándose, además, que  $S_{R'}(O') \subseteq S_R(O)$ , ver figura 3.4.3. En esta ocasión, **las dos esferas no son concéntricas** de manera que no hay simetría esférica en el campo generado por esta esfera preñada. Supongamos un sistema de referencia con origen en  $O$  y tal que  $O'$  no se encuentre sobre el eje  $Z$  ni sobre el eje  $X$ , supuesto ésta dirección fundamental a partir del cuál medimos la longitud

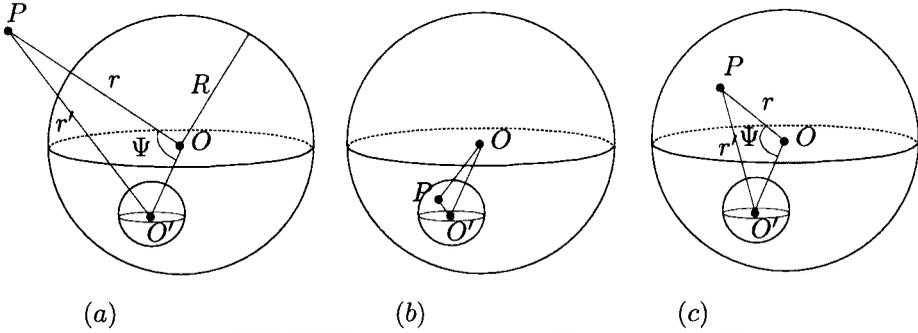


Figura 3.10: Esfera preñada: (a) Punto exterior; (b) Punto interior; (c) Punto intermedio.

de cada punto. Sean  $(l', \theta', \lambda')$  las coordenadas esféricas de  $O'$  respecto de este sistema.

Las masas de las esferas  $S_R(O)$  y  $S_{R'}(O')$ , supuesta que la primera es sólida y la segunda no es hueca, serán:

$$M = \iiint_{S_R(O)} \rho dv_P = \rho_0 \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \operatorname{sen}(\theta) d\lambda d\theta dr = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3,$$

y,

$$M' = \iiint_{S_{R'}(O')} \rho dv_P = \rho_0 \int_0^{R'} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \operatorname{sen}(\theta) d\lambda d\theta dr = \frac{4\pi}{3} \rho_0 (R')^3.$$

respectivamente. Pasemos a determinar el potencial generado por esta distribución de masas en cualquier punto del espacio.

**Para un punto  $P$  exterior a la esfera  $S_R(O)$ :  $P \in \operatorname{Ext}(S_R(O))$**

Consideremos un punto  $P = P(r, \theta, \lambda)$  tal que  $r = d(O, P) > R$ , ver figura 3.4.3(a). Los potenciales que generaran  $S_R(O)$  y  $S_{R'}(O')$ , supuestas ambas sólidas, en el punto  $P$  vendrán dados por (3.10):

$$V_1(P) = \frac{GM}{r} \quad \text{y} \quad V_2(P) = \frac{GM'}{r'},$$

siendo  $r' = d(O', P)$ . Por el principio de superposición del potencial gravitatorio, el potencial generado por la esfera preñada para un punto exterior será la diferencia de las dos expresiones anteriores:

$$V(P) = G \left( \frac{M}{r} - \frac{M'}{r'} \right) = \frac{4\pi}{3} G \rho_0 \left( \frac{R^3}{r} - \frac{(R')^3}{r'} \right). \quad (3.18)$$

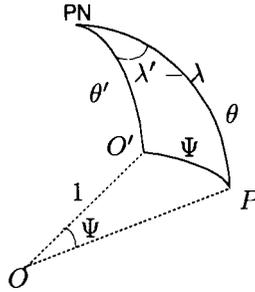


Figura 3.11: Triángulo esférico determinado por los puntos  $O'$ ,  $P$  y  $PN$ .

Proyectemos los puntos  $P = P(r, \theta, \lambda)$  y  $O'(l', \theta', \lambda')$  sobre la esfera unidad centrada en  $O$ . Seguiremos denotando sus proyecciones como  $P = P(1, \theta, \lambda)$  y  $O' = O'(1, \theta', \lambda')$ . Si consideramos el triángulo esférico determinado por los puntos  $P$ ,  $O'$  y el polo norte,  $PN$ , ver figura 3.11, y le aplicamos la **primera fórmula de Bessel**, entonces:

$$\cos(\Psi) = \cos(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\lambda' - \lambda), \quad (3.19)$$

siendo  $\Psi$  la distancia angular<sup>1</sup> entre los puntos  $P$  y  $O'$ . Consideremos el desarrollo del inverso de la distancia en armónicos zonales dado por (1.22):

$$\frac{1}{r'} = \begin{cases} \frac{1}{r} \sum_{n \geq 0} P_n(\cos \Psi) \left(\frac{l'}{r}\right)^n, & \text{si } l' < r \\ \frac{1}{l'} \sum_{n \geq 0} P_n(\cos \Psi) \left(\frac{r}{l'}\right)^n, & \text{si } r < l'. \end{cases} \quad (3.20)$$

En este caso, es  $r > l'$  de manera que al sustituir (3.20) en (3.18) se llega a:

$$V(P) = \frac{4\pi G\rho_0}{3r} \left( R^3 - (R')^3 \sum_{n \geq 0} P_n(\cos(\Psi)) \alpha^n \right), \quad (3.21)$$

siendo  $\alpha = \frac{l'}{r}$  y  $\cos(\Psi)$  dado por (3.19).

<sup>1</sup>Dada una esfera se denomina **círculo máximo** a cada una de las intersecciones de la esfera con un plano que pase por el centro de la misma y **distancia angular**,  $\Psi$ , se define como el ángulo central del menor arco de círculo máximo que une las proyecciones de ambos puntos sobre la esfera unidad centrada en el origen de coordenadas.

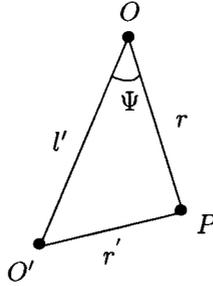


Figura 3.12: Triángulo determinado por los puntos  $O'$ ,  $P$  y  $O$ .

**Para un punto  $P$  en la capa esférica exterior:**  $P \in \partial S_R(0)$

Por la continuidad del potencial gravitatorio basta tomar límite en la expresión (3.21) según la dirección determinada por el radio vector  $\mathbf{r}_{OP}$ :

$$\begin{aligned} V(P) &= V(R, \theta, \lambda) = \lim_{r \rightarrow R^+} V(r, \theta, \lambda) \\ &= \lim_{r \rightarrow R^+} \frac{4\pi G\rho_0}{3} \frac{1}{r} \left( R^3 - (R')^3 \sum_{n \geq 0} P_n(\cos(\Psi)) \left(\frac{l'}{r}\right)^n \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} G\rho_0 \left( R^2 - \frac{(R')^3}{l'} \sum_{n \geq 0} P_n(\cos(\Psi)) \alpha^{n+1} \right). \end{aligned}$$

**Para un punto  $P$  interior a la esfera pequeña:**  $P \in \text{Int}(S_{R'}(O'))$

Supongamos, en primer lugar, que  $P \neq O'$ . Como  $P \in \text{Int}(S_{R'}(O')) \subseteq S_R(O)$ , por el principio de superposición, el potencial generado en  $P$  será diferencia del potencial creado por la esfera  $S_R(O)$  para el punto interior  $P$  y el creado por  $S_{R'}(O')$  para ese mismo punto interior. Por (3.13), el potencial en  $P$  vendrá dado por:

$$V(P) = 2\pi G\rho_0 \left( R^2 - (R')^2 + \frac{(r')^2 - r^2}{3} \right). \quad (3.22)$$

Si consideramos el triángulo  $\triangle OPO'$ , ver figura 3.12, y le aplicamos el teorema del coseno, entonces  $(r')^2 = r^2 + (l')^2 - 2rl' \cos(\Psi)$ , donde  $\Psi$  es la distancia angular entre los puntos  $O'$  y  $P$ . Sustituyendo en (3.22) llegamos a:

$$V(P) = \frac{2\pi}{3} G\rho_0 [3(R^2 - (R')^2) + l'(l' - 2r \cos(\Psi))]. \quad (3.23)$$

Supongamos ahora que  $P = O'$ . En este caso es  $r' = 0$ . Considerando el límite direccional según la línea  $OO'$  y por la continuidad del potencial gravitatorio, tendremos que:

$$V(O') = \lim_{h \rightarrow 0^+} V(l' + h, \theta', \lambda') = 2\pi G\rho_0 \left[ R^2 - (R')^2 + \frac{l'}{3}(l' - 2l' \cos(\Psi)) \right].$$

Además, en este caso es  $\cos(\Psi) = \cos(0) = 1$ , y:

$$V(O') = \frac{2\pi}{3} G\rho_0 [3(R^2 - (R')^2) - (l')^2].$$

**Para un punto  $P$  en la capa esférica interior:  $P \in \partial S_{R'}(O')$**

Sea  $P = P(r, \theta, \lambda) \in \partial S_{R'}(O')$  arbitrario y consideremos un nuevo sistema de referencia centrado en  $O'$  y con ejes paralelos a los del sistema de referencia inicial. Si denotamos por  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\lambda})$  las coordenadas esféricas de cualquier punto respecto del nuevo origen y tenemos en cuenta que  $\mathbf{r}_{OP} = \mathbf{r}_{OO'} + \mathbf{r}_{O'P}$  y las relaciones de transformación entre las coordenadas esféricas y cartesianas, entonces:

$$\begin{cases} r \sin(\theta) \cos(\lambda) &= l' \sin(\theta') \cos(\lambda') + R' \sin(\hat{\theta}) \cos(\hat{\lambda}) \\ r \sin(\theta) \sin(\lambda) &= l' \sin(\theta') \sin(\lambda') + R' \sin(\hat{\theta}) \sin(\hat{\lambda}) \\ r \cos(\theta) &= l' \cos(\theta') + R' \cos(\hat{\theta}), \end{cases}$$

ya que, en este caso, es  $\hat{r} = R'$ . De estas relaciones se obtiene que:

$$\begin{cases} \lambda &= \arctan \frac{\tan(\lambda') + \frac{R' \sin(\hat{\theta}) \sin(\hat{\lambda})}{l' \sin(\theta') \cos(\lambda')}}{1 + \frac{R' \sin(\hat{\theta}) \cos(\hat{\lambda})}{l' \sin(\theta') \cos(\lambda')}} \\ \theta &= \arctan \frac{\sqrt{(l')^2 \sin^2(\theta') + (R')^2 \sin^2(\hat{\theta}) + 2l'R' \sin(\theta') \sin(\hat{\theta}) \cos(\lambda' - \hat{\lambda})}}{l' \cos(\theta') + R' \cos(\hat{\theta})} \\ r &= \sqrt{(l')^2 + (R')^2 + 2R'l'[\cos(\theta') \cos(\hat{\theta}) + \sin(\theta') \sin(\hat{\theta}) \cos(\lambda' - \hat{\lambda})]} \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} \hat{\lambda} &= \arctan \frac{\tan(\lambda) - \frac{l' \sin(\theta') \sin(\lambda')}{r \sin(\theta) \cos(\lambda)}}{1 - \frac{l' \sin(\theta') \cos(\lambda')}{r \sin(\theta) \cos(\lambda)}} \\ \hat{\theta} &= \arctan \frac{\sqrt{r^2 \sin^2(\theta) + (l')^2 \sin^2(\theta') - 2rl' \sin \theta \sin(\theta') \cos(\lambda - \lambda')}}{r \cos(\theta) - l' \cos(\theta')} \\ \hat{r} &= \sqrt{r^2 + (l')^2 - 2rl' \cos(\Psi)} \end{cases}$$

Sea  $\phi(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\lambda}) = (r, \theta, \lambda)$  la función dada por las expresiones anteriores, definida para  $0 \leq \hat{r} < \infty$ ,  $0 \leq \hat{\lambda} \leq 2\pi$  y  $0 \leq \hat{\theta} \leq \pi$  y consideremos la composición  $\hat{V} = V \circ \phi$ . Por la continuidad de  $V$  y  $\phi$ , el potencial en  $P = P(r, \theta, \lambda) = P(R', \hat{\lambda}, \hat{\theta})$  se puede obtener como límite de la expresión (3.23), según la dirección radial de  $P$  desde el punto  $O'$ :

$$\begin{aligned} \frac{3V(P)}{2\pi G\rho_0} &= \frac{3\hat{V}(R', \hat{\theta}, \hat{\lambda})}{2\pi G\rho_0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} 3(R^2 - (R')^2) + l' \left[ l' - 2r(R' + h, \hat{\theta}, \hat{\lambda}) \cos(\Psi(R' + h, \hat{\theta}, \hat{\lambda})) \right] \\ &= 3(R^2 - (R')^2) + l' \left[ l' - 2r(R', \hat{\theta}, \hat{\lambda}) \cos(\Psi(R', \hat{\theta}, \hat{\lambda})) \right] \\ &= 3(R^2 - (R')^2) + l'(l' - 2r \cos(\Psi)). \end{aligned}$$

**Para un punto  $P$  en la masa activa:**  $P \in B_R(O) - S_{R'}(O')$

Para la esfera sólida homogénea  $S_R(O)$ , el potencial que genera en un punto  $P$  que está en su interior viene dado por (3.13):

$$V_1(P) = 2\pi G\rho_0 \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right), \quad (3.24)$$

así como el potencial debido a la esfera sólida  $S_{R'}(O')$ , al ser  $P$  exterior:

$$V_2(P) = \frac{4\pi}{3} G\rho_0 \frac{(R')^3}{r'}. \quad (3.25)$$

Por tanto, el potencial en  $P$  vendrá dado por la diferencia de (3.24) y (3.25):

$$V(P) = 2\pi G\rho_0 \left( R^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{(R')^3}{r'} \right). \quad (3.26)$$

Al igual que hicimos cuando estudiamos el caso en el que el punto era exterior a la esfera de mayor dimensión, vamos a sustituir, en la expresión anterior, el inverso de la distancia al centro  $O'$  por su desarrollo en armónicos zonales.

Sin embargo, y por motivos de convergencia, debemos ser más cuidadosos a la hora de considerar esta serie. Si  $P \in \text{Int}(S_R(O)) - S_{R'}(O')$ , es  $r < l'$ , de modo que:

$$V(P) = 2\pi G\rho_0 \left[ R^2 - \frac{1}{3} \left( r^2 + \frac{2(R')^3}{l'} \sum_{n \geq 0} P_n(\cos(\Psi)) \frac{1}{\alpha^n} \right) \right],$$

donde  $\alpha = \frac{l'}{r}$  y  $\cos(\Psi)$  viene dado por (3.19).

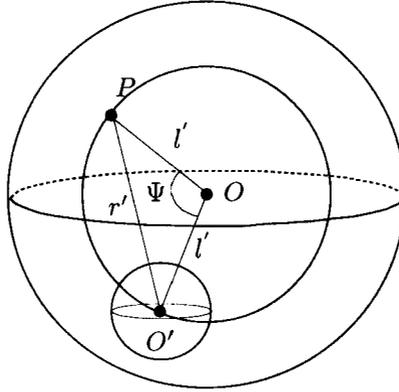


Figura 3.13: Potencial de la esfera preñada para  $P \in \partial S_{l'}(O) - S_{R'}(O')$ .

Análogamente, si  $P \in \text{Int}(S_R(O)) - \{S_{R'}(O') \cup S_{l'}(O)\}$ , es  $r > l'$  y:

$$V(P) = 2\pi G\rho_0 \left[ R^2 - \frac{1}{3} \left( r^2 + \frac{2(R')^3}{l'} \sum_{n \geq 0} P_n(\cos(\Psi)) \alpha^{n+1} \right) \right].$$

Por último, consideremos el caso extremo en el que  $P \in \partial S_{l'}(O) - S_{R'}(O')$ . Los puntos  $O, O'$  y  $P$  no estarán alineados de manera que si consideramos el triángulo isósceles  $\triangle OPO'$ , ver figura 3.13, entonces  $r' = 2l' \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right)$ . Sustituyendo en (3.26) resulta:

$$V(P) = 2\pi G\rho_0 \left[ R^2 - \frac{1}{3} \left( (l')^2 + \frac{(R')^3}{l' \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right)} \right) \right].$$

Finalmente, y a modo de resumen, el potencial generado por una esfera de radio  $R$  y centro  $O$  preñada de otra de radio  $R'$  y centro  $O'$ , viene dado por:

$$V(P) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \frac{G\rho_0}{r} \left( R^3 - (R')^3 \sum_{n \geq 0} P_n(\cos(\Psi)) \alpha^n \right), & \text{si } r > R \\ \frac{4\pi}{3} G\rho_0 \left( R^2 - \frac{(R')^3}{l'} \sum_{n \geq 0} P_n(\cos(\Psi)) \alpha^{n+1} \right), & \text{si } r = R \\ \frac{2\pi}{3} G\rho_0 [3(R^2 - (R')^2) + l'(l' - 2r \cos(\Psi))], & \text{si } r' \leq R' \\ \frac{2\pi}{3} G\rho_0 [3(R^2 - (R')^2) - (l')^2], & \text{si } P = O' \\ 2\pi G\rho_0 \left[ R^2 - \frac{1}{3} \left( r^2 + \frac{2(R')^3}{l'} \sum_{n \geq 0} P_n(\cos(\Psi)) \alpha^{k(n)} \right) \right], & \text{si } P \in \Xi \\ 2\pi G\rho_0 \left[ R^2 - \frac{1}{3} \left( (l')^2 + \frac{(R')^3}{l' \sin(\frac{\Psi}{2})} \right) \right], & \text{si } P \in \Upsilon, \end{cases}$$

donde  $\Xi = \text{Int}(S_R(O)) - \{S_{R'}(O') \cup \partial S_{l'}(O)\}$ ;  $\Upsilon = \partial S_{l'}(O) - S_{R'}(O')$  y  $P$  es un punto de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \lambda)$ , siendo, además,  $r' = d(O', P)$ ,  $\cos(\Psi)$  dado por (3.19),  $\alpha = \frac{l'}{r}$  y

$$k(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{si } P \in \text{Int}(S_R(O)) - \{S_{R'}(O') \cup S_{l'}(O)\} \\ -n, & \text{si } P \in \text{Int}(S_{l'}(O)) - S_{R'}(O') \end{cases}$$

Se puede comprobar la continuidad de este potencial gravitatorio en cualquier punto del espacio. A modo de ejemplo, veamos qué ocurre en los puntos  $P \in \partial S_{l'}(O) - S_{R'}(O')$ . Es claro que podemos determinar  $\delta_1 > 0$  de modo que  $\text{Int}(S_{\delta_1}(P)) \subseteq \text{Int}(S_R(O)) - S_{R'}(O')$ . Definamos las funciones  $\psi_1(P) = d(O, P)^2 = r_P^2$  y  $\psi_2(P) = \frac{1}{d(O, P)} = \frac{1}{r'_P}$ . Por la continuidad de la distancia,  $\psi_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^+)$  y  $\psi_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3 - \{O\}, \mathbb{R}^+)$ . Así pues, fijado  $\varepsilon > 0$  debe existir  $\delta_2 > 0$  de manera que para cada  $Q \in B_{\delta_2}(P)$  se verifique que  $|\psi_1(Q) - \psi_1(P)| = |r_Q^2 - r_P^2| < \frac{3\varepsilon}{4\pi G\rho_0}$  y  $|\psi_2(Q) - \psi_2(P)| = \left| \frac{1}{r'_Q} - \frac{1}{r'_P} \right| < \frac{3\varepsilon}{8\pi G\rho_0 (R')^3}$ . Sea  $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$ . Si  $Q \in B_\delta(P) \subseteq B_{\delta_1}(P)$  es, por (3.26):

$$|V(Q) - V(P)| \leq 2\pi G\rho_0 \left\{ \frac{|r_P^2 - r_Q^2|}{3} + \frac{2}{3} (R')^3 \left| \frac{1}{r'_P} - \frac{1}{r'_Q} \right| \right\} < \varepsilon,$$

quedando, así, demostrada la continuidad en estos puntos.

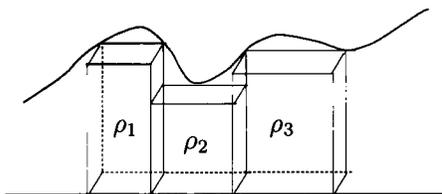


Figura 3.14: Modelización local de una distribución de masas por medio de prismas.

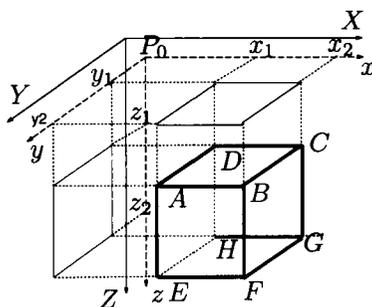


Figura 3.15: Notación usada para definir el prisma.

#### 3.4.4. Potencial gravitatorio generado por un prisma.

El potencial generado por un prisma es de gran importancia en los estudios locales de gravedad en las zonas en las que se supone suficiente una aproximación plana de la Tierra. Es más, es mucho más preciso una modelización plana que un modelo esférico del que serían necesarios un desarrollo de hasta orden 36,000 para alcanzar la misma precisión en una región de  $1km \times 1km$ , ver [13]. Por este motivo, una distribución local de masas puede aproximarse por varios prismas a los que asignamos densidades de manera independiente, ver figura 3.14. Este método, además, nos permite obtener información no disponible directamente, como puede ser la variación de la vertical con la altura, permitiéndonos entender mucho mejor las complejas variaciones del campo local.

Consideremos un prisma homogéneo de densidad constante  $\rho = \rho_0$ :

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : X_1 \leq x \leq X_2, Y_1 \leq y \leq Y_2, Z_1 \leq z \leq Z_2\}.$$

Pretendemos estudiar el potencial generado por dicho prisma en cada punto  $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Una primera simplificación va a consistir en definir un nuevo sis-

tema de coordenadas con origen el punto  $P$ . Las nuevas coordenadas definitorias del prisma serán:

$$x_i = X_i - x, \quad y_i = Y_i - y, \quad z_i = Z_i - z, \quad \text{para } 1 \leq i \leq 2.$$

El potencial en  $P$  vendrá dado por:

$$V(P) = G \iiint_{\Pi} \frac{\rho_0}{r_{PP'}} dV_{P'} = G\rho_0 \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = G\rho_0 u(P), \quad (3.27)$$

siendo el resultado de integrar (3.27) en el volumen  $\Pi$ , ver [13]:

$$u(P) = |||xy \ln(z+r) + yz \ln(x+r) + zx \ln(y+r) - \frac{x^2}{2} \arctan\left(\frac{yz}{xr}\right) - \frac{y^2}{2} \arctan\left(\frac{zx}{yr}\right) - \frac{z^2}{2} \arctan\left(\frac{xy}{zr}\right) \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2}, \quad (3.28)$$

con  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , de manera que al sustituir todos los límites de integración nos quedan cuarenta y ocho términos.

Aunque el potencial  $V(P) = G\rho_0 u(P)$  existe y es continuo en todo el espacio, (3.28) no está definida en cada punto de  $\mathbb{R}^3$ , algo que puede causar problemas en el caso de una evaluación numérica directa. Sin embargo, la expresión anterior va a poder extenderse de manera continua a todo el espacio. Para ello, basta igualar a cero, en todos aquellos puntos en los que un término del segundo miembro no esté definido, dicho término.

Por ejemplo, supongamos que queremos determinar el potencial en el vértice  $D(X_1, Y_1, Z_1)$ . En este caso, y después de trasladar el origen de coordenadas a este punto, tendremos que los tres primeros valores definitorios del prisma,  $x_1, y_1, z_1$  son nulos, motivo por el cual términos del tipo  $xy \ln(z+r)$  no están definidos. Ahora bien, al desarrollar por Taylor:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} xy \ln(z+r(x,y,z)) &= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} xy \ln(1+(z+r-1)) = \\ &= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} xy \left[ (z+r-1) - \frac{(z+r-1)^2}{2!} + \frac{(z+r-1)^3}{3!} - \dots \right. \\ &\quad \left. - \dots + (-1)^{n+1} \frac{(z+r-1)^n}{n!} + o[(z+r-1)^n] \right] = 0, \end{aligned}$$

siendo  $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ . Esto justifica que hagamos cero este término aunque no esté definido para  $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ . De manera análoga, también se puede

demostrar que en el resto de los términos en los que no está definido el límite también es cero.

Supongamos ahora que  $P$  es un punto de la arista  $CD$ . Si trasladamos el origen del sistema de referencia a dicho punto, el prisma estará definido como:

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \neq x_1 \leq x \leq x_2 \neq 0, 0 \leq y \leq y_2, 0 \leq z \leq z_2\}$$

y será, por continuidad del potencial gravitatorio :

$$\begin{aligned} u(P) &= \lim_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow (0,0,0)} \left\| \|xy \ln(z+r) + yz \ln(x+r) + zx \ln(y+r) - \right. \\ &= \left. -\frac{x^2}{2} \arctan\left(\frac{yz}{xr}\right) - \frac{y^2}{2} \arctan\left(\frac{zx}{yr}\right) - \frac{z^2}{2} \arctan\left(\frac{xy}{zr}\right) \right\|_{x_1+\xi_1}^{x_2+\xi_1} \Big|_{\xi_2}^{y_2+\xi_2} \Big|_{\xi_3}^{z_2+\xi_3} \end{aligned}$$

Los cuatro primeros términos del segundo miembro del límite anterior están definidos en  $P$  y sus límites son iguales a los obtenidos por simple sustitución. El límite para los dos últimos miembros es:

$$\begin{aligned} \lim_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow (0,0,0)} \left\| \left\| -\frac{y^2}{2} \arctan\left(\frac{zx}{yr}\right) - \frac{z^2}{2} \arctan\left(\frac{xy}{zr}\right) \right\|_{x_1+\xi_1}^{x_2+\xi_1} \Big|_{\xi_2}^{y_2+\xi_2} \Big|_{\xi_3}^{z_2+\xi_3} \right. \\ = \left. -\frac{y_2^2}{2} \arctan\left(\frac{z_2 x_2}{y_2 r(x_2, y_2, z_2)}\right) - \frac{z_2^2}{2} \arctan\left(\frac{x_2 y_2}{z_2 r(x_2, y_2, z_2)}\right) \right. \\ \left. + \frac{y_2^2}{2} \arctan\left(\frac{z_2 x_1}{y_2 r(x_1, y_2, z_2)}\right) + \frac{z_2^2}{2} \arctan\left(\frac{x_1 y_2}{z_2 r(x_1, y_2, z_2)}\right), \right. \quad (3.29) \end{aligned}$$

es decir, que (3.29) se reduce a tan sólo cuatro términos ya que los otros doce se anulan en el límite independientemente de la dirección a la que nos acerquemos.

De manera análoga se razona con todos los vértices, aristas y caras del prisma, pudiéndose extender (3.28) de manera continua a todo el espacio.

Sabemos que el campo gravitatorio es el campo de gradientes del potencial gravitatorio en cada punto. Para esta distribución de masas también va a ser  $\mathbf{F} = \nabla V = G\rho_0 \nabla u$  continuo en todo  $\mathbb{R}^3$ .

Por ejemplo, la componente vertical de  $u$  se obtiene derivando respecto de  $z$  la expresión (3.28):

$$\frac{\partial u}{\partial z}(P) = \left\| \left\| x \ln(y+r) + y \ln(x+r) - z \arctan\left(\frac{xy}{zr}\right) \right\|_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \right\|_{z_1}^{z_2}, \quad (3.30)$$

expresión a la que también habríamos llegado derivando bajo el signo integral:

$$\frac{\partial u}{\partial z}(P) = \iiint_{\Pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) dx dy dz = - \iiint_{\Pi} \frac{z}{r^3} dx dy dz,$$

y luego integrando. Las otras dos derivadas parciales se pueden obtener de  $\frac{\partial u}{\partial z}(P)$  por permutación cíclica:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(P) = \left\| \left\| y \ln(x+r) + z \ln(y+r) - x \arctan\left(\frac{yz}{xr}\right) \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \right|_{z_1}^{z_2}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(P) = \left\| \left\| z \ln(y+r) + x \ln(x+r) - y \arctan\left(\frac{zx}{yr}\right) \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \right|_{z_1}^{z_2}. \quad (3.32)$$

Al intentar evaluar cualquiera de las expresiones anteriores surge el mismo problema que aparecía en (3.28). Así pues, aunque  $\frac{\partial V}{\partial z}$  debe estar definido en el interior de las caras  $Int(ABCD \cup EFGH)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$  no lo está al ser  $z_1 = 0$  o  $z_2 = 0$ . Sin embargo, al considerar los límites de los términos en los que no están definidos, dichos límites valen cero. Se cumple, por tanto, que las derivadas primeras pueden, también, extenderse de manera continua a todo el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Supongamos, al igual que antes, que  $P = D$ . Será  $x_1 = y_1 = z_1 = 0$  y

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z}(D) &= \\ &= \lim_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow (0,0,0)} \left\| \left\| x \ln(y+r) + y \ln(x+r) - z \arctan\left(\frac{xy}{zr}\right) \right|_{\xi_1}^{x_2+\xi_1} \right|_{\xi_2}^{y_2+\xi_2} \right|_{\xi_3}^{z_2+\xi_3} \\ &= x_2 \ln(y_2 + r(x_2, y_2, z_2)) - x_2 \ln(y_2 + r(x_2, y_2, 0)) - x_2 \ln(r(x_2, 0, z_2)) + \\ &+ x_2 \ln(r(x_2, 0, 0)) + y_2 \ln(x_2 + r(x_2, y_2, z_2)) - y_2 \ln(x_2 + r(x_2, y_2, 0)) - \\ &- y_2 \ln(+r(0, y_2, z_2)) + y_2 \ln(+r(0, y_2, 0)) - z_2 \arctan\left(\frac{x_2 y_2}{z_2 r(x_2, y_2, z_2)}\right). \end{aligned}$$

En teoría, esta expresión debería tener veinticuatro términos aunque tiene sólo nueve. El motivo es que al tomar límite en nueve de ellos, y por simple sustitución, convergen a cero, mientras que para los otros seis:

$$\lim_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow (0,0,0)} \left[ x \ln(y + r(x, y, z)), y \ln(x + r(x, y, z)), z \arctan\left(\frac{xy}{zr}\right) \right] = [0, 0, 0].$$

Tendremos, pues, que el campo en cada punto  $P \in \mathbb{R}^3$  vendrá dado, de manera continua, por  $\mathbf{F}(P) = \nabla V(P) = G\rho\nabla u(P)$ .

Generalmente, las segundas derivadas no van a estar definidas en la frontera del prisma si en ella hay una discontinuidad de la densidad. Variará, de hecho, de qué derivada se esté considerando y el plano de la frontera que tratemos. Veamos algunos ejemplos:

### Ejemplo 1: Discontinuidad de salto de la segunda derivada

Supongamos que  $P$  es un punto interior de la cara  $Int(ABCD)$  que, después de la traslación del sistema de coordenadas, pasa a estar en el plano  $XY$ , ver figura 3.15. Tendremos que:

$$\begin{aligned} \lim_{P' \rightarrow P} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(P') &= \lim_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow (0,0,0)} \left| \left| -\arctan\left(\frac{xy}{zr}\right) \Big|_{x_2+\xi_1}^{x_2+\xi_1} \Big|_{y_1+\xi_1}^{y_2+\xi_2} \Big|_{\xi_3}^{z_2+\xi_3} \right. \right. \\ &= 2\pi \text{signo}(\xi_3) - \arctan\left(\frac{x_2 y_2}{z_2 r(x_2, y_2, z_2)}\right) \\ &\quad + \arctan\left(\frac{x_1 y_2}{z_2 r(x_1, y_2, z_2)}\right) - \arctan\left(\frac{x_1 y_1}{z_2 r(x_1, y_1, z_2)}\right) \\ &\quad + \arctan\left(\frac{x_2 y_1}{z_2 r(x_2, y_1, z_2)}\right), \end{aligned}$$

siendo  $0 \neq \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \rightarrow 0$ , es decir, en el límite consideramos puntos que no están en el plano  $XY$ , y donde  $\text{signo}(\xi_3)$  indica que el límite en  $P$  depende del semiespacio por el que nos aproximamos al punto. Las segundas derivadas  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P)$  y  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P)$  tienen un comportamiento análogo a  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(P)$  en las superficies planas  $Int(ADHE \cup BCGF)$  e  $Int(ABFE \cup DCGH)$  respectivamente.

### Ejemplo 2: El límite no existe

Consideremos un punto  $P$  que esté en la arista  $AD$  del prisma, coincidente con el eje  $Y$ . Será  $x_1 = z_1 = 0$  y

$$\begin{aligned} \lim_{P' \rightarrow P} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(P') &= \lim_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow (0,0,0)} \left| \left| -\arctan\left(\frac{xy}{zr}\right) \Big|_{\xi_1}^{x_2+\xi_1} \Big|_{y_1+\xi_2}^{y_2+\xi_2} \Big|_{\xi_3}^{z_2+\xi_3} \right. \right. \\ &= \text{signo}(\xi_3)\pi - \arctan\left(\frac{x_2 y_2}{z_2 r(x_2, y_2, z_2)}\right) + \arctan\left(\frac{x_2 y_1}{z_2 r(x_2, y_1, z_2)}\right) \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{k\alpha y_1}{k\beta r(0, y_1, 0)}\right) - \lim_{k \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{k\alpha y_2}{k\beta r(0, y_2, 0)}\right), \end{aligned}$$

siendo  $0 \neq \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \rightarrow 0$ , y donde  $\xi_1 = k\alpha$  y  $\xi_3 = k\beta$ . Los dos límites anteriores no existen ya que dependen de los valores  $\alpha$  y  $\beta$  que determinan la dirección desde la cual nos aproximamos.

Si  $P = D$ , tendremos que:

$$\begin{aligned} \lim_{P' \rightarrow D} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(P') &= \lim_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow (0,0,0)} \left| \left| -\arctan\left(\frac{xy}{zr}\right) \right|_{\xi_1}^{x_2+\xi_1} \right|_{\xi_2}^{y_2+\xi_2} \Big|_{\xi_3}^{z_2+\xi_3} \\ &= \frac{\pi}{2} \text{signo}(\xi_3) - \arctan\left(\frac{x_2 y_2}{z_2 r(x_2, y_2, z_2)}\right) \\ &\quad - \lim_{k \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{k\alpha y_2}{k\beta r(0, y_2, 0)}\right) + \lim_{k \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{k\alpha k\gamma}{k\beta r(k\alpha, k\gamma, k\beta)}\right) \\ &\quad - \lim_{k \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{x_2 k\gamma}{k\beta r(x_2, 0, 0)}\right), \end{aligned}$$

siendo  $\xi_2 = k\gamma$ ,  $\gamma$  determinando la dirección desde la que nos aproximamos. Así pues, en este caso tampoco existe límite.

### Ejemplo 3: Derivadas cruzadas divergentes

Sea  $P$  un punto de la arista  $AE$ . Tendremos que  $x_1 = y_1 = 0$  y

$$\begin{aligned} \lim_{P' \rightarrow P} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}(P') &= \lim_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow (0,0,0)} \left| \left| \ln(z+r) \right|_{\xi_1}^{x_2+\xi_1} \right|_{\xi_2}^{y_2+\xi_2} \Big|_{z_1+\xi_3}^{z_2+\xi_3} \\ &= \ln(z_2 + r(x_2, y_2, z_2)) - \ln(z_1 + r(x_2, y_2, z_1)) \\ &\quad - \ln(z_2 + r(x_2, 0, z_2)) + \ln(z_1 + r(x_2, 0, z_1)) \\ &\quad - \ln(z_2 + r(0, y_2, z_2)) + \ln(z_1 + r(0, y_2, z_1)) \\ &\quad + \ln(2z_2) \\ &\quad - \lim_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow (0,0,0)} \ln(z_1 + \xi_3 + r(\xi_1, \xi_2, z_1 + \xi_3)) = \infty, \end{aligned}$$

supuesto que  $z_1 < 0$  y  $z_2 > 0$ . De este modo, los puntos de las aristas paralelas al eje  $Z$  son puntos de singularidad para  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

Evidentemente, los problemas también aparecen cuando  $P$  es un punto exterior al prisma. Así pues:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(P) = \left| \left| -\arctan\left(\frac{xy}{zr}\right) \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2},$$

no está definido en aquellos puntos en los que  $z_1 = 0$  ó  $z_2 = 0$ . Se puede comprobar, sin embargo, que existe límite para  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(P)$  y es único si y sólo si  $P$  es

un punto exterior al prisma de modo que podemos definir esta segunda derivada por medio del valor de su límite.

| Función            | Dominio   |           |            |            |            |            |            |            |            |
|--------------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                    | 1         | 2         | 3          | 4          | 5          | 6          | 7          | 8          | 9          |
| $u, u_x, u_y, u_z$ | $\exists$ | $\exists$ | $\exists$  | $\exists$  | $\exists$  | $\exists$  | $\exists$  | $\exists$  | $\exists$  |
| $u_{xx}$           | $\exists$ | $\exists$ | $\exists$  | $\exists$  | $\nexists$ | $\nexists$ | $\exists$  | $\nexists$ | $\nexists$ |
| $u_{xy}$           | $\exists$ | $\exists$ | $\exists$  | $\exists$  | $\exists$  | $\exists$  | $\exists$  | $\nexists$ | $\nexists$ |
| $u_{xz}$           | $\exists$ | $\exists$ | $\exists$  | $\exists$  | $\exists$  | $\nexists$ | $\exists$  | $\exists$  | $\nexists$ |
| $u_{yy}$           | $\exists$ | $\exists$ | $\exists$  | $\nexists$ | $\exists$  | $\exists$  | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ |
| $u_{yz}$           | $\exists$ | $\exists$ | $\exists$  | $\exists$  | $\exists$  | $\exists$  | $\nexists$ | $\exists$  | $\nexists$ |
| $u_{zz}$           | $\exists$ | $\exists$ | $\nexists$ | $\exists$  | $\exists$  | $\nexists$ | $\nexists$ | $\exists$  | $\nexists$ |

Cuadro 3.1: Lista de todos los casos dependiendo de la localización del punto P en el caso del potencial generado por un prisma.

- Dominio 1  $\equiv Ext(ABCDEFGH)$ ,
- Dominio 2  $\equiv Int(ABCDEFGH)$ ,
- Dominio 3  $\equiv Int(ABCD \cup EFGH)$ ,
- Dominio 4  $\equiv Int(ADHE \cup BCGF)$ ,
- Dominio 5  $\equiv Int(ABFE \cup DCGH)$ ,
- Dominio 6  $\equiv Int(\overline{AB} \cup \overline{DC} \cup \overline{HG} \cup \overline{EF})$ ,
- Dominio 7  $\equiv Int(\overline{AD} \cup \overline{BC} \cup \overline{FG} \cup \overline{EH})$ ,
- Dominio 8  $\equiv Int(\overline{AE} \cup \overline{BF} \cup \overline{CG} \cup \overline{DH})$ ,
- Dominio 9  $\equiv \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ .

### 3.4.5. Potencial generado por un cilindro

Consideremos un cilindro circular de radio  $a$  y altura  $b$ :

$$\vartheta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq b\},$$

con una distribución homogénea de masas de densidad  $\rho = \rho_0$ .

Supongamos que  $P_0$  es un punto del espacio con coordenadas cilíndricas  $(r_0, \theta_0, u_0)$ . Para un punto  $P(r, \theta, u) \in \vartheta$  tendremos que  $\mathbf{r}_{OP_0} = \mathbf{r}_{OP} + \mathbf{r}_{PP_0}$ .

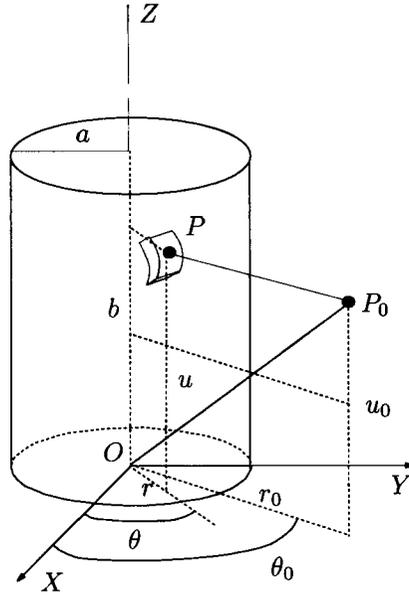


Figura 3.16: Potencial de un cilindro.

Si tenemos en cuenta la relación entre coordenadas cilíndricas y cartesianas:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ u = z \end{cases},$$

entonces,  $\mathbf{r}_{PP_0} = (r_0 \cos(\theta_0) - r \cos(\theta), r_0 \sin(\theta_0) - r \sin(\theta), u_0 - u)$  y su módulo:

$$r_{PP_0} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0r \cos(\theta - \theta_0) + (u_0 - u)^2} = \sqrt{f(r_0, \theta_0, r, \theta) + (u_0 - u)^2}.$$

El potencial gravitatorio creado por el cilindro en el punto  $P_0$  vendrá dado por la expresión integral:

$$V(P_0) = G \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{r_{PP_0}} dv_P = G\rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^a \frac{r}{\sqrt{f(r_0, \theta_0, r, \theta) + (u_0 - u)^2}} dr du d\theta.$$

Estudiemos el caso particular en el que el punto  $P_0$  se encuentra sobre el eje de revolución del cilindro. En este caso será  $r_0 = \theta_0 = 0$  y, por tanto, la función  $f(r_0, \theta_0, r, \theta) = r^2$  no dependerá de  $\theta$ . Distinguiremos varios casos.

**Caso 1:**  $u_0 > b$ 

Teniendo en cuenta que  $|u_0 - u| = u_0 - u$  para  $0 \leq u \leq b$ , tendremos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi G\rho_0} V(P_0) &= \int_0^b \int_0^a \frac{r}{r^2 + (u_0 - u)^2} dr du = \int_0^b \sqrt{r^2 + (u_0 - u)^2} \Big|_0^a du = \\ &= \int_0^b \left( \sqrt{a^2 + (u_0 - u)^2} - |u_0 - u| \right) du = \left\{ \frac{(u_0 - u)^2}{2} \Big|_0^b + \int_0^b \sqrt{a^2 + (u_0 - u)^2} du \right\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

La integral del segundo miembro es casi inmediata. Si consideramos el cambio de variable  $u_0 - u = a \sinh(z)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^b \sqrt{a^2 + (u_0 - u)^2} du &= \int_{z_0}^{z_b} a \sqrt{1 + \sinh^2(z)} (-a \cosh(z)) dz \\ &= -a^2 \int_{z_0}^{z_b} \cosh^2(z) dz = -a^2 \int_{z_0}^{z_b} \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4} dz \\ &= -a^2 \left[ \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2} + 2z \right]_{z_0}^{z_b} - \frac{a^2}{4} |\sinh(2z) + 2z|_{z_0}^{z_b}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Por definición de las funciones hiperbólicas seno y coseno:

$$\sinh(z) \cosh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \cdot \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \sinh(2z),$$

y, teniendo en cuenta la relación  $\sinh\left(\frac{x}{c}\right) = \ln(x + \sqrt{c^2 + x^2})$ , es claro que:

$$z = \operatorname{argsinh}\left(\frac{u_0 - u}{a}\right) = \ln(u_0 - u + \sqrt{a^2 + (u_0 - u)^2}).$$

Así pues, deshaciendo el cambio de variables en (3.34):

$$\begin{aligned} \int_0^b \sqrt{a^2 + (u_0 - u)^2} du &= \frac{u_0 \sqrt{a^2 + u_0^2} - (u_0 - b) \sqrt{a^2 + (u_0 - b)^2}}{2} + \\ &+ \frac{a^2}{2} \ln \frac{u_0 + \sqrt{a^2 + u_0^2}}{u_0 - b + \sqrt{a^2 + (u_0 - b)^2}}. \end{aligned}$$

Finalmente, si sustituimos en (3.33) entonces el potencial en un punto del eje

de revolución por encima del prisma viene dado por:

$$\begin{aligned} \frac{V(P_0)}{\pi G \rho_0} = & -b(2u_0 - b) + \left| (u_0 - u) \sqrt{a^2 + (u_0 - u)^2} \right|_b^0 \\ & + a^2 \ln \frac{u_0 + \sqrt{a^2 + u_0^2}}{u_0 - b + \sqrt{a^2 + (u_0 - b)^2}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

**Caso 2:**  $u_0 < 0$

El razonamiento es exactamente el mismo salvo que, en esta ocasión, es  $|u_0 - u| = u - u_0$  para  $0 \leq u \leq b$ . El potencial en un punto  $P_0$  del eje de revolución con coordenada cilíndrica  $u_0 < 0$ , tiene por expresión:

$$\begin{aligned} \frac{V(P_0)}{\pi G \rho_0} = & b(2u_0 - b) + \left| (u_0 - u) \sqrt{a^2 + (u_0 - u)^2} \right|_b^0 \\ & + a^2 \ln \frac{u_0 + \sqrt{a^2 + u_0^2}}{u_0 - b + \sqrt{a^2 + (u_0 - b)^2}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

**Caso 3:**  $u_0 \in \{0, b\}$

En esta ocasión, ver figura 3.17, si consideramos los límites direccionales según el eje  $Z$ , las expresiones dadas por (3.35) y (3.36) y tenemos en cuenta la continuidad del potencial gravitatorio, entonces:

$$V(0, 0, b) = \pi G \rho_0 \left\{ -b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right\}, \quad (3.37)$$

$$V(0, 0, 0) = \pi G \rho_0 \left\{ -b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 \ln \frac{a}{-b + \sqrt{a^2 + b^2}} \right\}. \quad (3.38)$$

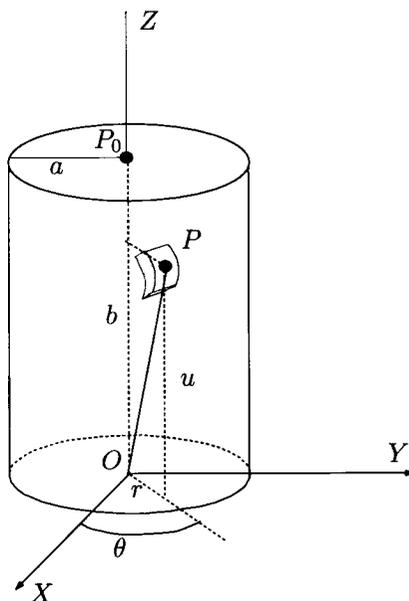
**Caso 4:**  $0 < u_0 < b$

Consideremos los dos cilindros:

$$\vartheta_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq u_0\},$$

$$\vartheta_2 = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, u_0 \leq z \leq b\}.$$

Es evidente que  $\vartheta = \vartheta_1 \cup \vartheta_2$  y, por el principio de superposición, el potencial creado en  $P_0$  por  $\vartheta$  vendrá dado por la suma de los potenciales generados por  $\vartheta_1$

Figura 3.17: Potencial de un cilindro en el punto  $P_0(0, 0, b)$ .

y  $\vartheta_2$  en dicho punto. Teniendo en cuenta (3.37) y (3.38):

$$\begin{aligned}
 V(P_0) &= V_1(P_0) + V_2(P_0) = \\
 &= \pi G \rho_0 \left\{ -u_0^2 + u_0 \sqrt{a^2 + u_0^2} + a^2 \ln \frac{u_0 + \sqrt{a^2 + u_0^2}}{a} \right\} + \\
 &+ \pi G \rho_0 \left\{ -(b - u_0)^2 + (b - u_0) \sqrt{a^2 + (b - u_0)^2} + \right. \\
 &\left. + a^2 \ln \frac{a}{u_0 - b + \sqrt{a^2 + (b - u_0)^2}} \right\} = \\
 &= \pi G \rho_0 \left\{ -[u_0^2 + (b - u_0)^2] + \left| u \sqrt{a^2 + u^2} \right|_{u=u_0-b}^{u=u_0} \right. \\
 &\left. + a^2 \ln \frac{u_0 + \sqrt{a^2 + u_0^2}}{u_0 - b + \sqrt{a^2 + (b - u_0)^2}} \right\}.
 \end{aligned}$$

### 3.4.6. Potencial generado por un cono

Consideremos un cono esférico,  $\vartheta$ , definido por:

$$\vartheta = (r \sin(\theta) \cos(\lambda), r \sin(\theta) \operatorname{sen}(\lambda), r \cos(\theta))$$

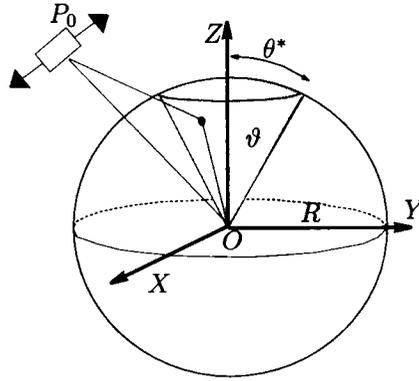


Figura 3.18: Potencial generado por un cono.

con  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta^*$ , y  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ .

y con una distribución de masas de densidad  $\rho = \rho(r)$ , que suponemos con simetría esférica.

El potencial generado por dicho cono en un punto  $P_0 \in \mathbb{R}^3$  vendrá dado por la expresión integral:

$$V(P_0) = G \iiint_{\vartheta} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}} dv_P.$$

Consideremos la fórmula de descomposición del inverso de la distancia entre dos puntos  $P_0(r_0, \theta_0, \lambda_0)$  y  $P(r, \theta, \lambda)$  que para  $r < r_0$  es:

$$\frac{1}{r_{PP_0}} = \sum_{n \geq 0} \left\{ \frac{P_n(\cos(\theta_0))}{r_0^{n+1}} r^n P_n(\cos(\theta)) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ \Gamma \in \{R, S\}}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\Gamma_{nm}(\theta_0, \lambda_0)}{r_0^{n+1}} r^n \Gamma_{nm}(\theta, \lambda) \right\}$$

y para  $r > r_0$  es:

$$\frac{1}{r_{PP_0}} = \sum_{n \geq 0} \left\{ r_0^n P_n \cos(\theta_0) \frac{P_n(\cos(\theta))}{r^{n+1}} + 2 \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ \Gamma \in \{R, S\}}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} r_0^n \Gamma(\theta_0, \lambda_0) \frac{\Gamma_{nm}(\theta, \lambda)}{r^{n+1}} \right\}$$

y supongamos que  $P_0$  es un punto exterior de la esfera  $S_R(O)$ . Sustituyendo en la expresión integral del potencial volumétrico anterior y por la convergencia uniforme de la serie que resulta en el integrando, tendremos que:

$$V(P_0) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=0}^{m=n} A_{nm} \frac{R_{nm}(\theta_0, \lambda_0)}{r_0^{n+1}} + B_{nm} \frac{S_{nm}(\theta_0, \lambda_0)}{r_0^{n+1}},$$

siendo:

$$A_{n0} = G \iiint_{\vartheta} r^n P_n(\cos(\theta)) \rho(P) dV_P,$$

para  $n \geq 0$ ;

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{nm} \\ B_{nm} \end{array} \right\} = 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} G \iiint_{\vartheta} r^n \left\{ \begin{array}{l} R_{nm}(\theta, \lambda) \\ S_{nm}(\theta, \lambda) \end{array} \right\} \rho(P) dV_P,$$

para  $n \geq 0$ , y  $1 \leq m \leq n$ ; y

$$B_{n0} = 0,$$

para  $n \geq 0$ .

Como suponemos que hay simetría de rotación, el potencial no puede depender de la longitud del punto, de manera que debe ser:

$$V(P_0) = \sum_{n \geq 0} A_{n0} \frac{P_n \cos(\theta_0)}{r_0^{n+1}}.$$

Determinemos algunos armónicos esféricos de grado inferior, en los que hemos denotado  $A_{n0} = A_n$ . Para  $n = 0$ , tendremos que:

$$A_0 = G \int_0^{\theta^*} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho(r) r^2 \sin(\theta) dr d\lambda d\theta = 2\pi G (1 - \cos(\theta^*)) \int_0^R \rho(r) r^2 dr,$$

y para una distribución homogénea,  $\rho = \rho_0$ :

$$A_0 = \frac{2\pi}{3} G \rho_0 (1 - \cos(\theta^*)) R^3.$$

Para  $n = 1$  será:

$$A_1 = G \iiint_{\mathcal{V}} r P_1(\cos(\theta)) \rho(P) dv_P = \frac{\pi G}{2} (1 - \cos(2\theta^*)) \int_0^R \rho(r) r^3 dr,$$

y para una distribución homogénea de masas,  $\rho = \rho_0$ :

$$A_1 = \frac{\pi G}{8} \rho_0 (1 - \cos(2\theta^*)) R^4.$$

Para  $n = 2$ :

$$A_2 = G \iiint_{\mathcal{V}} r^2 \left( \frac{3}{4} \cos(2\theta) + \frac{1}{4} \right) \rho(P) dv_P = -\frac{G}{2} \iiint_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2 - 2z^2) \rho(P) dv_P.$$

Si tenemos en cuenta que los **momentos de inercia respecto de los planos coordenados**  $YZ$ ,  $XZ$  y  $XY$  se definen mediante las integrales de volumen:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{YZ} \\ I_{XZ} \\ I_{XY} \end{array} \right\} = \iiint_{\mathcal{V}} \left\{ \begin{array}{l} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{array} \right\} dv_P,$$

y que los **momentos de inercia respecto de los ejes**  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  vienen dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_X \\ I_Y \\ I_Z \end{array} \right\} = \iiint_{\mathcal{V}} \left\{ \begin{array}{l} y^2 + z^2 \\ x^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 \end{array} \right\} dv_P,$$

entonces, supuesta una distribución homogénea de masas de densidad  $\rho = \rho_0$ , tendremos que:

$$\begin{aligned} A_2 &= -G\rho_0 \iiint_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2) dv + \frac{G}{2} \rho_0 \iiint_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2) dv_P + G\rho_0 \iiint_{\mathcal{V}} z^2 dv_P = \\ &= -G\rho_0 I_Z + G\rho_0 \left\{ \iiint_{\mathcal{V}} \frac{x^2 + y^2}{2} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{y^2 + z^2}{2} \right\} = -G\rho_0 \left( \frac{I_X + I_Y}{2} - I_Z \right). \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que:

$$\int_0^{\theta^*} \sin^3(\theta) d\theta = \frac{2}{3} - \cos(\theta^*) + \frac{\cos^3(\theta^*)}{3} \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2(\lambda) d\lambda = \pi,$$

entonces:

$$\begin{aligned} I_X &= \int_0^{\theta^*} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^4 (\sin^2(\theta) \sin^2(\lambda) + \cos^2(\theta)) \sin(\theta) dr d\lambda d\theta \\ &= \frac{\pi R^5}{5} \left( \frac{4}{3} - \cos(\theta^*) - \frac{\cos^3(\theta^*)}{3} \right). \end{aligned}$$

Se puede ver, por simetría de rotación, que  $I_X = I_Y$ . Por otro lado:

$$\begin{aligned} I_Z &= \iiint_{\vartheta} (x^2 + y^2) dv_P = \iiint_{\vartheta} r^2 \sin^2(\theta) r^2 \sin(\theta) dr d\lambda d\theta \\ &= \frac{2\pi R^5}{5} \left( \frac{2}{3} - \cos(\theta^*) + \frac{\cos^3(\theta^*)}{3} \right), \end{aligned}$$

por lo que:

$$A_2 = G\rho_0 \left( \frac{I_X + I_Y}{2} - I_Z \right) = G\rho_0 (I_X - I_Z) = \frac{\pi}{5} G\rho_0 R^5 \cos(\theta^*) \sin^2(\theta^*).$$

Sustituyendo estos tres primeros coeficientes en la expresión del potencial generado por el cono y operando, se llega finalmente a:

$$\begin{aligned} V(P_0) &= \frac{\pi G\rho_0 R^3}{r_0} \left( \frac{2}{3}(1 - \cos(\theta^*)) + \frac{1}{8}(1 - \cos(2\theta^*)) \right) \frac{R}{r_0} + \\ &\quad + \frac{1}{5} \cos(\theta^*) \sin^2(\theta^*) \frac{R^2}{r_0^2} + \sum_{n \geq 3} A_n \frac{P_n \cos(\theta_0)}{r_0^{n+1}}. \end{aligned}$$



# Bibliografía

- [1] BURGOS, J. (1994): *Cálculo infinitesimal de una variable*. McGRAW-HILL. Madrid.
- [2] CID, R. (1985): *Curso de Geodesia. Tomo I: Teorías Auxiliares y Geodesia Geométrica*. Universidad de Zaragoza.
- [3] CODDINGTON, E. A; CARLSON, R. (1997): *Linear Ordinary Differential Equations*. Siam. Colorado Springs.
- [4] CRONIN, J. (1994): *Differential Equations. Introduction and Qualitative Theory*. New York.
- [5] DANJON, A. (1959): *Astronomie Générale. Astronomie sphérique et éléments de mécanique céleste*. J. & R. Sennac. París.
- [6] GODUNOV, S. K. (1971): *Ecuaciones de la física matemática*. Moscú.
- [7] HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. (1985): *Geodesia Física*. Instituto Geográfico Nacional. Madrid.
- [8] LLÍN, V; POZNIAK, E. (1991): *Fundamentos del análisis matemático*. Vol. 3. Mir Moscú.
- [9] MARSDEN, J. E. ; HOFFMAN, M. J. (1996) : *Basic Complex Analysis*. W. H. Freeman and Company. New York.
- [10] MENA, J. (1998): *Curso de Geodesia. Matemáticas superiores II. Ecuaciones diferenciales ordinarias. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Teoría de variable compleja*. Servicio Geográfico del Ejército. Madrid.
- [11] MIJÁILOV, V. P. (1978): *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*. Mir Moscú. Moscú.
- [12] MORITZ, H. (1979): *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann. Graz (Austria).

- 
- [13] NAGY, D. ; PAPP, G. ; BENEDEK, J. (2000): *The gravitational potential and its derivatives for the prism*. Journal of Geodesy. 74: 552-560.
- [14] PUIG, P (1973): *Cálculo integral*. Vol. 1. Biblioteca Matemática S. L. Madrid.
- [15] TÍJONOV, A.N. ; SAMARSKI, A.A. (1975): *Ecuaciones de la física matemática*. Pueblo y Ciencia.





ISBN 84-9828-044-3



9 788496 280443