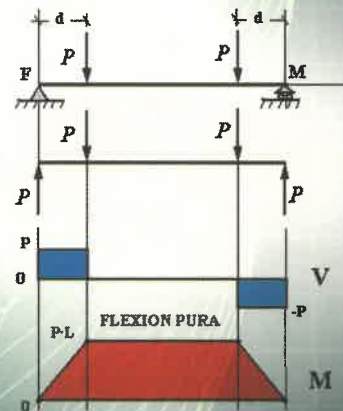
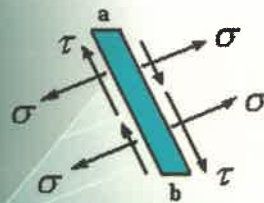
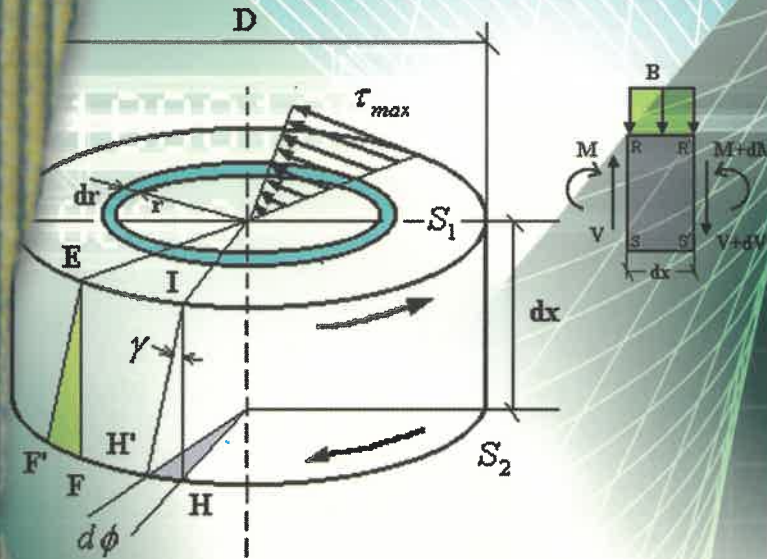


Apuntes de elasticidad y resistencia de materiales para ingenieros técnicos

RAÚL MARTÍN Y ANTONIO ILLANA



SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

**APUNTES DE ELASTICIDAD
Y RESISTENCIA DE MATERIALES PARA
INGENIEROS TÉCNICOS**

AUTORES:

**Raúl Martín García
Antonio Illana Martos**

**Área de Ingeniería Mecánica
DPTO. DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
E INGENIERÍA CIVIL**

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

APUNTES DE ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES PARA INGENIEROS TÉCNICOS

Raúl Martín García
Antonio Illana Martos



Universidad
de Cádiz

Servicio de Publicaciones
2003

Martín García, Raúl

Apuntes de elasticidad y resistencia de materiales para ingenieros técnicos / Raúl Martín García, Antonio Illana Marcos . -- Cádiz : Universidad, Servicio de Publicaciones, 2003. -- pp.160.

ISBN 84-7786-866-2

I. Elasticidad. 2. Resistencia de materiales. I. Illana Marcos, Antonio. II. Universidad de Cádiz. Servicio de Publicaciones, ed. IV. Título

620.17

© Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz
Raúl Martín García
Antonio Illana Martos

Edita: Servicio de Publicaciones de la UCA

ISBN: 84-7786-866-2

Depósito Legal: CA-560/03

Diseño: Cadigrafía

Maquetación y fotomecánica: Produce

Imprime: Imprenta Vistalegre

A la Escuela Politécnica Superior de Algeciras

Presentación

Estos apuntes han sido confeccionados por los profesores D. Raúl Martín García y D. Antonio Illana Martos, ambos pertenecientes al Área de Ingeniería Mecánica del Departamento de Ingeniería Industrial e Ingeniería Civil que imparte docencia en la Escuela Politécnica Superior de Algeciras (Universidad de Cádiz).

Los apuntes, debido a su carácter fundamental, están dirigidos en principio a los estudios de cualquier ingeniería técnica industrial. No obstante se recomienda su uso para especialidades que traten en sus asignaturas la elasticidad y resistencia de materiales desde un nivel general y básico. Asimismo también puede ser de interés para otras ingeniería técnicas como la de obras públicas, la naval, etc.

La experiencia docente de los autores en la asignatura ha sido clave para la realización de los apuntes, los cuales están basados en las transparencias de clase.

Utilización de los apuntes

El objetivo de los apuntes es ofrecer una guía que aporte los conocimientos básicos necesarios relacionados con la “elasticidad y resistencia de los materiales”. Por tal motivo, son apuntes bastante esquemáticos, con una carga matemática sencilla, entregados así con la intención de que el alumno pueda complementarlos con cuestiones o aclaraciones surgidas con la asistencia a clase (o a tutorías), o por cuenta propia haciendo uso de la bibliografía adecuada. Son pues apuntes que demandan un trabajo y una participación continuos del alumno para su aprovechamiento final.

Como texto de consulta para complementar alguna cuestión determinada o para profundizar en la misma se recomienda al alumno acudir al texto “Resistencia de Materiales - L. Ortiz Berrocal - Mc Graw-Hill” en cualquiera de sus últimas ediciones.

Los apuntes se complementan con ejercicios prácticos incluidos antes del anexo final. Estos no están resueltos, pero sí se disponen las soluciones finales de cada uno de ellos con el fin de motivar a su resolución.

Cualquier observación sobre los apuntes dirigidas a la mejora de los mismos será agradecida y atendida por los autores. Pueden dirigirse a raul.martin@uca.es, o a antonio.illana@uca.es.

ÍNDICE GENERAL

	<u>Páginas</u>
TEMA 1. Esfuerzos y tensiones. Carga Axial	13 a 52
TEMA 2. Flexión simple.	53 a 81
TEMA 3. Flexión compuesta. Pandeo.	83 a 97
TEMA 4. Torsión.	99 a 116
Anexos	117 a 133
Ejercicios propuestos	135 a 145
Soluciones de los ejercicios	147 a 154

TEMA 1

ESFUERZOS Y TENSIONES CARGA AXIAL

ÍNDICE

- 1.1. Introducción y objetivos.
- 1.2. Elasticidad.
- 1.3. Fuerzas internas en elementos.
- 1.4. Tracción y compresión. Ley de Hooke.
- 1.5. Diagrama de tracción.
- 1.6. Tensión de trabajo, tensión admisible y coeficiente de seguridad.
- 1.7. Tensiones y deformaciones producidas en una barra por su propio peso.
- 1.8. Tensiones iniciales y térmicas.
- 1.9. Concentración de tensiones.
- 1.10. Problemas hiperestáticos en tracción y compresión.
- 1.11. Tensión cortante. Tensión en secciones oblicuas.
- 1.12. Círculo de Mohr para carga monoaxial.
- 1.13. Tracción y compresión en dos direcciones perpendiculares. Círculo de Mohr.
Tensiones principales.
- 1.14. Tensión cortante pura.

1.1. INTRODUCCIÓN

PRESENTACIÓN:

En este tema estudiaremos **conceptos fundamentales** de Elasticidad y Resistencia de Materiales referidos a esfuerzos y tensiones internos consecuencia de someter un cuerpo a carga externa de tracción/compresión.

OBJETIVOS:

A continuación se muestra una guía de los objetivos académicos del tema a conseguir por parte del alumno:

- Entender los conceptos de esfuerzo y tensión, así como su diferencia, tipología, y características.
- Saber interpretar y realizar diagramas de esfuerzos y tensiones de cualquier tipo.
- Entender y aplicar convenientemente la Ley de Hooke.
- Saber interpretar el Diagrama de Tracción de un material sometido a carga axial.
- Conocer las características y propiedades de los materiales más empleados en los diseños constructivos.
- Entender y aplicar la relación entre coeficiente de seguridad, tensión admisible y tensión de trabajo.
- Conocer los efectos que sobre las tensiones y deformaciones tienen el peso propio y las variaciones de temperatura.
- Saber identificar un problema hiperestático y resolverlo adecuadamente (de grado uno).
- Entender el concepto de tensión cortante y su relación con las secciones de corte inclinadas.
- Saber realizar e interpretar el Círculo de Mohr para un estado de tensiones determinado, ya sea monoaxial o biaxial.
- Entender el concepto de tensiones y direcciones principales, y su aplicación.
- Comprender el concepto de tensión cortante pura y sus características.

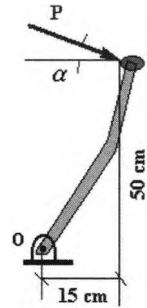
INTRODUCCIÓN CONCEPTUAL

La Estática estudia al sólido en equilibrio desde el exterior. Nos permite contestar preguntas del tipo:

❖ ¿Si aplico la fuerza P a la barra que reacción se produce en la articulación en O ?

Pero hay otras preguntas esenciales para el ingeniero:

- ❖ ¿Qué sección debe tener la barra para que no se rompa?
- ❖ ¿La deformación de la barra cargada es admisible o excesiva?



En ellas se estudia el comportamiento mecánico de los materiales.

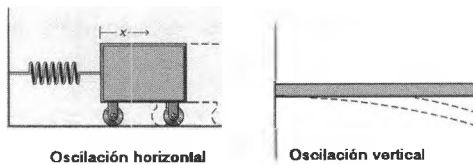
Ya no es válida la simplificación de “sólido rígido” sino que deben considerarse las deformaciones y las fuerzas que se desarrollan en el seno de un cuerpo bajo carga.

Este es el campo de estudio de la “Elasticidad y Resistencia de Materiales”, o “Mecánica de Materiales” en terminología anglosajona.

1.2. ELASTICIDAD

DEFORMACIÓN:

- Un cuerpo está en **estado de deformación** cuando al aplicarle cargas externas, sus partículas se desplazan variando su posición relativa.
- $\Sigma F_{\text{externas}}$ realizan un trabajo que se transforma completa o parcialmente en $E_{\text{potencial}}$ de deformación. P.e. acumulación de energía en el muelle de un reloj.



- Si $\Sigma F_{\text{externas}} \downarrow \Rightarrow$ el cuerpo vuelve total o parcialmente a su forma primitiva, recuperándose durante esta deformación inversa la $E_{\text{potencial}}$ acumulada en forma de trabajo exterior.

un cuerpo es:

- ❖ **perfectamente elástico** (caso ideal) si al descargarlo de $E_{\text{potencial}}$ recobra su forma original completa ($W_{\text{Fexts}} = E_{\text{potencial}}$). La deformación es pues temporal.
- ❖ **parcialmente elástico** (caso real) si la deformación no elástica producida por las $F_{\text{exteriores}}$ no desaparece por completo ($W_{\text{Fexts}} = E_{\text{potencial}} + \text{calor}$).

1.3. FUERZAS INTERNAS EN ELEMENTOS

Como consecuencia de la deformación provocada por las cargas externas aparecen en el cuerpo **esfuerzos o fuerzas internas** que se traducen en **tensiones** como veremos:

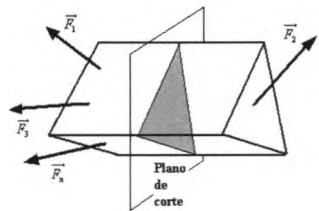
FUERZAS INTERNAS

Denominadas también esfuerzos. Son las realizadas a nivel interno entre partes de un mismo sistema, compensando el desequilibrio provocado por las cargas externas.

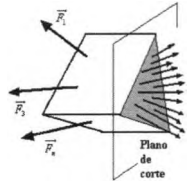
Sea un prisma en equilibrio que se somete a cargas exteriores.



Aparecerán esfuerzos internos que garanticen el **equilibrio elástico** del cualquier trozo.

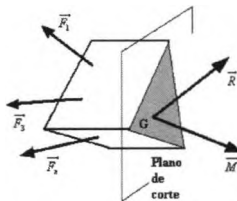


Cortemos por ejemplo por el plano de corte y quedémonos con la parte izquierda. Aparecerán en el cdg G de la sección de corte R y M equilibrantes del sistema de fuerzas exterior reducido a G.



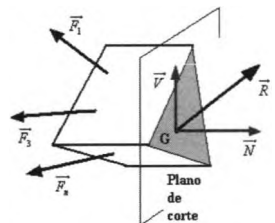
Tenemos pues dos efectos:

- Fuerza Resultante **R**
- Momento resultante **M**



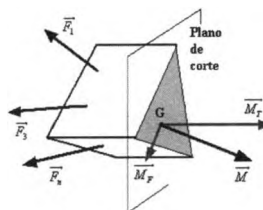
La fuerza resultante se puede descomponer en dos efectos:

- Esfuerzo Normal **N** (\perp plano corte).
Produce extensión (separación entre sección de corte y las próximas)
- Esfuerzo Cortante **V** (dirección plano corte).
Produce cizallamiento (deslizamiento entre sección de corte y próximas)



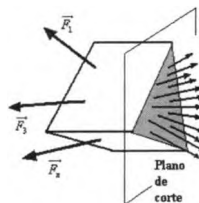
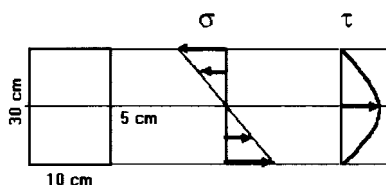
El momento resultante se puede descomponer en dos efectos:

- Momento Flector M_F
Produce flexión del prisma respecto a un eje coplanario con la sección de corte
- Momento torsor M_T
Produce torsión del prisma según la normal de la sección de corte



TENSIONES GENERADAS

Los esfuerzos (F) se hayan en realidad distribuidos sobre la superficie interna (y no concentrados), en forma de tensión ($F \cdot L^{-2}$).



La **tabla** siguiente muestra la relación entre esfuerzos y tensiones.

Esfuerzos	Tensiones	Distribución de tensiones
Fuerza Normal N	Tensión normal σ	prácticamente constante
Fuerza Cortante V	Tensión cortante τ	tendencia parabólica con máximo en zona central
Momento Flector M_F	Tensión normal σ	variable linealmente con máximos en extremos y nula en zona central
Momento Torsor M_T	Tensión cortante τ	variable linealmente con máximo en periferia y nula en centro

DIAGRAMAS DE ESFUERZOS Y TENSIONES:

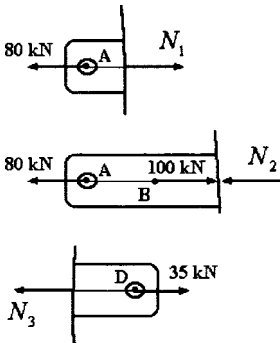
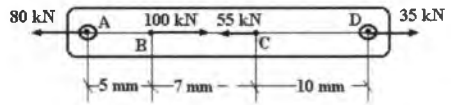
Son representaciones gráficas de los valores que toman esfuerzos y tensiones para cada sección que se tome a lo largo del cuerpo.

Ejemplo 1.1.

Para el elemento de máquina sometido a los esfuerzos indicados, dibujar el diagrama de esfuerzos normales y de tensiones normales. Despreciar el efecto de concentración de esfuerzos en orificios A y D.

Considerar $S = 5 \text{ cm}^2$

Aislando cada una de las partes que delimitan las fuerzas: AB, BC y CD, e imponiendo las condiciones de equilibrio elástico:

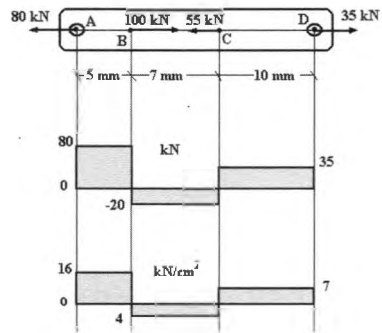


Observar que N_1 y N_3 son esfuerzos que indican tracción (+), mientras que N_2 indica compresión (-).

$$N_1 = 80 \text{ Kg}$$

$$N_2 = 100 - 80 = 20 \text{ Kg}$$

Representación gráfica →



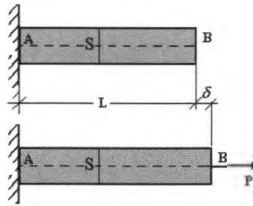
1.4. TRACCIÓN Y COMPRESIÓN. LEY DE HOOKE

EXPERIMENTO CON BARRA PRISMÁTICA

“entre ciertos límites (zona de proporcionalidad) el **alargamiento total** (δ) que se produce en una barra al someterla a extensión (**tracción**), es proporcional a la **fuerza extensora axial** (**P**) y a la **longitud** (**L**), e inversamente proporcional a la **sección recta** (**S**) y al **módulo elástico del material** (**E**)”

$$\delta = \frac{P \cdot L}{S \cdot E} \quad \text{Ley de Hooke}$$

Supondremos que durante la tracción todas las fibras longitudinales de la barra tienen el mismo alargamiento y las secciones rectas y perpendiculares al eje se siguen manteniendo así después de la extensión



FUERZAS INTERIORES O ESFUERZOS (provocadas por las F_{externas})

- Tensión o esfuerzo normal: $\sigma = \frac{P}{A}$ Dimensiones $F \cdot L^{-2}$

- Deformación o alargamiento unitario: $\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{\sigma}{E}$
otra expresión de la ley de hooke

Así,

Tracción $\Rightarrow P > 0 \rightarrow \delta > 0 \rightarrow \sigma > 0$

Compresión $\Rightarrow P < 0 \rightarrow \delta < 0 \rightarrow \sigma < 0$

- Valores del Módulo de Elasticidad “E” para diferentes materiales

MATERIAL	E (Kg/cm ²)
Acero	2,1·10 ⁶
Aluminio	0,7·10 ⁶
Bronce	0,8·10 ⁶
Cobre	0,9·10 ⁶
Fundición gris	2,1·10 ⁶
Hormigón	1,76·10 ⁵
Latón	0,9·10 ⁶
Madera pino	1,27·10 ⁵
1 Kg/cm ² = 0,098 MPa	

Si E aumenta, el material es más rígido, deformándose menos ante una carga dada. A la rigidez de un eslabón se le conoce como el producto de “E” por el momento de inercia “I”: Rigidez = E·I

Ejemplo 1.2.

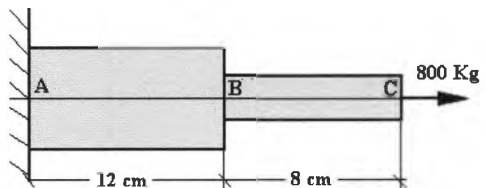
Se aplica una fuerza extensora de 800 kg a la barra compuesta ABC. Calcular el alargamiento experimentado por toda la barra y las tensiones de trabajo en cada uno de los dos materiales.

Datos:

$$S_{AB} = 2 \text{ cm}^2, S_{BC} = 1 \text{ cm}^2$$

$$E_{AB} = 5 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{BC} = 7 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$



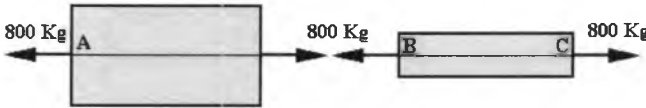
Para la barra AB:

$$\delta_{AB} = \frac{P_{AB} \cdot L_{AB}}{S_{AB} \cdot E_{AB}} = \frac{800 \cdot 12}{2 \cdot 5 \cdot 10^4} = 0,096 \text{ cm}$$

Para la barra BC:

$$\delta_{BC} = \frac{P_{BC} \cdot L_{BC}}{S_{BC} \cdot E_{BC}} = \frac{800 \cdot 8}{1 \cdot 7 \cdot 10^6} = 0,00091 \text{ cm}$$

En realidad estamos aislando la barra compuesta en dos barras simples y superponiendo los efectos para sumarlos.



El alargamiento total será la suma de los alargamientos de cada una de las barras:

$$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} = 0,09691 \text{ cm} \cong 0,097 \text{ cm}$$

Las tensiones de trabajo serán:

Para la barra AB:

$$\sigma_{TAB} = \frac{P_{AB}}{S_{AB}} = \frac{800}{2} = 400 \text{ Kg / cm}^2$$

Para la barra BC:

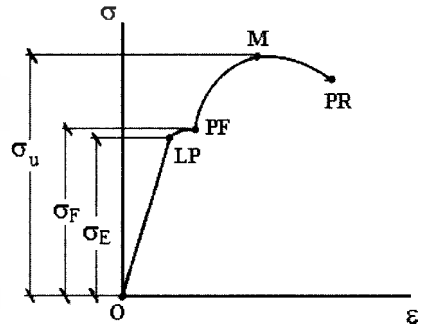
$$\sigma_{TBC} = \frac{P_{BC}}{S_{BC}} = \frac{800}{1} = 800 \text{ Kg / cm}^2$$

1.5. DIAGRAMA DE TRACCIÓN

- Representa diferentes zonas y puntos según los alargamientos experimentados por una probeta al someterla a ensayo de tracción con aumento continuo de carga (extensión creciente), hasta que rompa.
- Da una información completa de las propiedades mecánicas de un material: acero, fundición, etc¹.
- Variables $\epsilon - \sigma$. Las tensiones que aparecen en el diagrama son las características de cada material y no dependen del estado de cargas exteriores.
- Se obtienen diagramas similares en el Ensayo de Compresión (3^{er} cuadrante) ya que $\epsilon < 0, \sigma < 0$

ZONAS DEL DIAGRAMA BÁSICO²:

- ❖ **Zona de Elasticidad.** La probeta recupera sus dimensiones iniciales cuando cesa la carga. En los materiales más usuales en la ingeniería (acero, fundición, hormigón ...) la mayor parte de la zona elástica viene representada por un tramo recto en el diagrama, donde se cumple Ley de Hooke hasta el Límite de proporcionalidad (LP). Nótese la tensión de elasticidad (σ_E).
($\sigma_{E(\text{acero})} = 1200 \text{ Kp/cm}^2$).
- ❖ **Zona de fluencia.** El alargamiento crece sin apenas aumentar la carga: Fluencia del material. Punto de fluencia (PF) y Tensión de Fluencia (σ_F).
- ❖ **Punto de rotura (PR)** y Resistencia última o de rotura (σ_r). Después de la fluencia el material aumenta su rigidez (endurecimiento por deformación) hasta alcanzar un valor máximo (σ_U) en M que precede a la rotura. La probeta rompe después del máximo, en el punto PR, a pesar de que disminuya la tensión nominal.

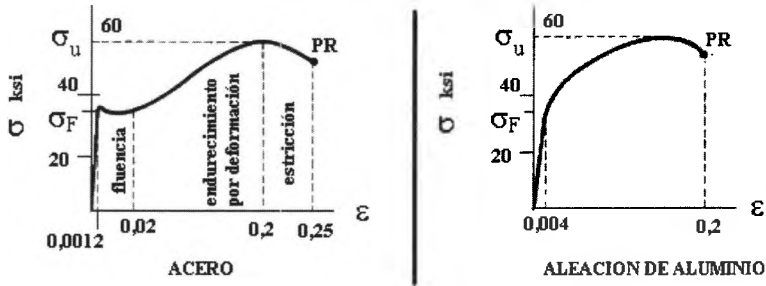


¹ Véase Anexo 1 “Tabla Propiedades mecánicas de los materiales” donde se muestran tensiones admisibles de diferentes materiales.

² En estos apuntes se muestra el diagrama básico. En realidad los diagramas son más complejos, mostrando otras etapas y fenómenos como la zona elastoplástica, estricción, etc. Consúltase “Resistencia de Materiales - L. Ortiz Berrocal (pags. 20-22)”.

Tras σ_u se produce la estricción o “cuello” en la probeta, disminuyendo bastante la sección con lo que la relación $\sigma = P/A$ ya no es representativa.

EJEMPLO DE DIAGRAMAS REALES PARA ACERO Y ALUMINIO



Según el tipo de material, la tensión responsable de que rompa será:

- ❖ **Material dúctil** (elásticos hasta LP) (acero normal, cobre, aluminio ...) - tensión cortante.
 - El diagrama de tracción para compresión es simétrico respecto al origen de coordenadas, es decir, las resistencias a compresión son similares a las de tracción.
- ❖ **Material frágil** (elásticos hasta la rotura) (fundición, aceros tratados, ...) - tensiones normales.
 - Diagrama totalmente distinto para compresión. En general tienen resistencias a compresión mucho más grandes que a tracción.

1.6. TENSIÓN DE TRABAJO, TENSIÓN ADMISIBLE Y COEFICIENTE DE SEGURIDAD

σ_{adm} = tensión admisible. Es la máxima que admite el material dependiendo de sus características y propiedades³

σ_{trab} = tensión máxima a la que trabaja el material. Dependerá del estado de carga. Tendrá una localización en sección y fibra determinadas⁴.

En el diseño de la pieza hemos de tener en cuenta que $\sigma_{adm} > \sigma_{trab}$

Así, ante una sobrecarga o aumento de σ_{trab} estaremos aún por debajo de σ_{adm} . Esto lo conseguimos con el Coeficiente de seguridad n,

$$n = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{trab}} \geq 1$$

Si $n = 1$ estamos diseñando para caso límite $\sigma_{adm} = \sigma_{trab}$. Con un mínimo aumento de σ_{trab} se sobrepasa σ_{adm} produciéndose la falla.

Ejemplo 1.3.

Un cable de acero de una grúa, con una longitud de 6 m, soporta una carga de 6000 kg, siendo la sección útil $A = 2,5 \text{ cm}^2$. Determinar el alargamiento experimentado por el cable y el coeficiente de seguridad n_R , sabiendo que $\sigma_R = 6200 \text{ Kg/cm}^2$ (tensión de rotura máxima que admite el material).

La expresión para obtener el alargamiento del cable que nos piden, la sacamos de la Ley de Hooke :

$$\delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} = \frac{6000 \text{ Kg} \cdot 600 \text{ cm}}{2,5 \text{ cm}^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2} = 0,6857 \text{ cm}$$

³ Véase Anexo 1 "propiedades mecánicas de los materiales".

⁴ Como se verá en el apartado 2.6 "Flexión pura en vigas. Teoría de Navier".

Para hallar el coeficiente de seguridad necesitamos la tensión de trabajo, que la obtendremos de la siguiente forma:

$$\sigma_T = \frac{P}{A} = \frac{6000 \text{ kg}}{2,5 \text{ cm}^2} = 2400 \text{ Kg / cm}^2$$

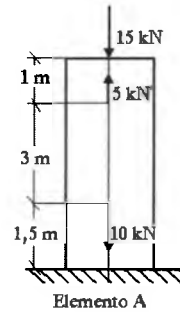
Ahora podemos conocer el coeficiente de seguridad:

$$n_R = \frac{\sigma_R}{\sigma_T} = \frac{6200 \text{ kg / cm}^2}{2400 \text{ kg / cm}^2} = 2,58$$

Ejemplo 1.4.

Para el elemento resistente elástico A de sección circular de 5 cm², mostrado determinar:

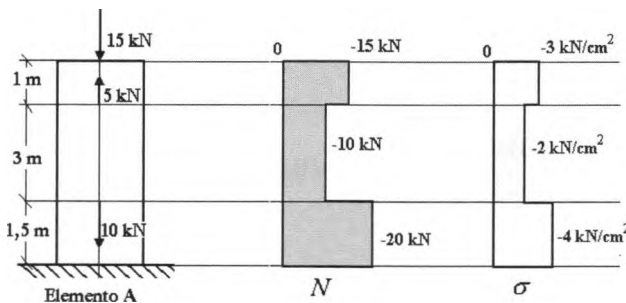
- Diagrama acotado de esfuerzo normal N.
- Diagrama acotado de tensión normal σ_x .
- ¿Resisten los elementos sus cargas?
- Alargamiento total.



Datos:

$\sigma_E = 32 \text{ MPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ y $n = 1,5$.

a y b) Cortando por secciones y aislándolas en el equilibrio⁵ obtenemos:



⁵ Según se vió en el Ejemplo 1.1.

c) Aplicando lo visto en el apartado 1.6. tenemos,

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{n} = \frac{3,2}{1,5} = 2,13 \text{ kN/cm}^2$$

$$10MPa = 1 \frac{kN}{cm^2}$$

Se aprecia comparando la tensión admisible con la de trabajo, según diagrama de tensiones que la única sección segura es la intermedia. Los trozos extremos romperían por compresión (aplastamiento). Digamos que se desmoronarían. Sin embargo el extremo intermedio permanecería indeformable.

d) El alargamiento total, suponiendo que el elemento resistiera el estado de cargas, sería la suma de los alargamientos parciales,

$$\delta_T = \delta_1 + \delta_3 + \delta_{1,5} = \frac{1}{S E} (P_1 L_1 + P_3 L_3 + P_{1,5} L_{1,5}) =$$

$$\frac{1}{5 \cdot 10^2 \cdot 2,110^5} (-15 \cdot 10^3 \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3 - 20 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^3) = -0,7143 \text{ mm}$$

(acortamiento)

1.7. TENSIONES Y DEFORMACIONES PRODUCIDAS EN UNA BARRA POR SU PROPIO PESO

- Cuando las barras resistentes trabajan verticalmente y la longitud y peso específico son grandes, el **peso propio** de la barra puede producir una tensión adicional a considerar en la deformación total.
- Si γ es el peso por unidad de volumen (Kg/m^3) \Rightarrow El peso total de la barra y la tensión normal máxima serán:

$$P_{\text{total}} = P + S \cdot \gamma \cdot L \Rightarrow \sigma_{\text{max}} = \frac{P + S \cdot \gamma \cdot L}{S}$$

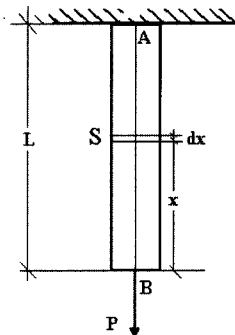
- Para una sección S a una distancia x del extremo inferior B, el peso de la porción inferior será:

$$P_{\text{par. inf.}} = P + S \cdot \gamma \cdot x \Rightarrow \sigma_{\text{max}} = \frac{P + S \cdot \gamma \cdot x}{S}$$

- Si nos piden la sección de seguridad ($n = 1$)

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_T \Rightarrow S = \frac{P}{\sigma_T - \gamma \cdot L}$$

- Vemos que el incremento de longitud de barra obliga a aumentar la sección de seguridad $L \uparrow \Rightarrow S \uparrow$
- Si $\sigma_T = \gamma \cdot L \Rightarrow S \rightarrow \infty \Rightarrow$ es imposible el uso de la barra prismática y se recurre a las barras de sección variable

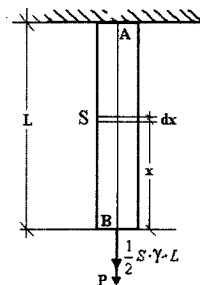


El alargamiento total δ_T de la barra prismática será:

$$d\delta = \frac{\sigma \cdot dx}{E} = \frac{P + S \cdot \gamma \cdot x}{S \cdot E} dx$$

$$\delta_T = \int \frac{L}{S \cdot E} (P + S \cdot \gamma \cdot x) dx = \frac{L \left(P + \frac{1}{2} S \cdot \gamma \cdot L \right)}{S \cdot E}$$

Se aprecia que el **peso propio** contribuye a la **deformación total** como si fuera una carga exterior de **valor su mitad y aplicada en el extremo**.



Ejemplo 1.5.

Sea el pilar cilíndrico biescalonado de acero mostrado en la figura sometido a la carga de tracción de 30 T. Determinar considerando su peso:

- a) área de cada uno de los escalonamientos
- b) alargamiento total experimentado

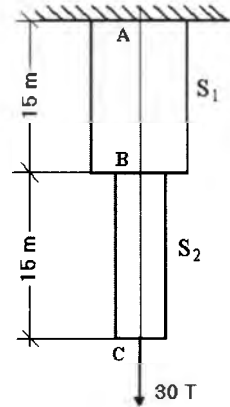
Datos para el acero:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$g = 7,8 \text{ T/m}^3$$

$$\sigma_{lim} = 1200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$n = 2 \rightarrow \text{Tensión admisible trabajo } 600 \text{ Kg/cm}^2$$



- a) Cortando por el trozo 2 y aislando en equilibrio:

$$N_{f2} = 30 \cdot 10^3 + W_{f2}$$

$$N_{2max(x=15)} = 30 \cdot 10^3 + \gamma \cdot S_2 \cdot 15 = \sigma_r \cdot S_2$$

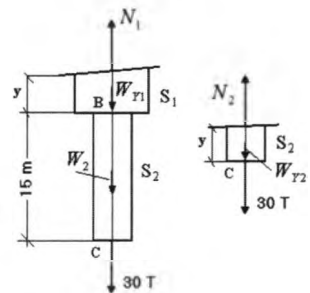
$$S_2 = \frac{30 \cdot 10^3}{\sigma_r - \gamma \cdot 1500} = \frac{30 \cdot 10^3}{600 - 7,8 \cdot 10^{-3} \cdot 1500} = 62,11 \text{ cm}^2$$

- b) Cortando por el trozo 1 y aislando en equilibrio:

$$N_{f1} = 30 \cdot 10^3 + W_2 + W_{f1}$$

$$N_{1max(x=15)} = 30 \cdot 10^3 + \gamma \cdot S_2 \cdot 15 + \gamma \cdot S_1 \cdot 15 = \sigma_r \cdot S_1$$

$$S_1 = \frac{30 \cdot 10^3 + \gamma \cdot S_2 \cdot 1500}{\sigma_r - \gamma \cdot 1500} = \frac{30 \cdot 10^3 + 7,8 \cdot 10^{-3} \cdot S_2 \cdot 1500}{600 - 7,8 \cdot 10^{-3} \cdot 1500} = 77,16 \text{ cm}^2$$



Se aprecia la diferencia de secciones.

El alargamiento total será la suma de los alargamientos parciales.

$$\delta_r = \delta_1 + \delta_2$$

Sabemos que el peso contribuye a la deformación como una carga de valor su mitad aplicada en el extremo.

Previo cálculo de W_1 y W_2 , obtendremos los alargamientos,

$$W_1 = 9027,72 \text{ Kg}$$

$$W_2 = 7266 \text{ Kg}$$

$$\delta_T = \delta_1 + \delta_2$$

$$\delta_2 = \frac{P + \frac{1}{2}W_1}{S_2 E} = \frac{30 \cdot 10^3 + \frac{1}{2}W_1}{S_2 \cdot 2,1 \cdot 10^6} = 0,000264 \text{ cm}$$

$$\delta_1 = \frac{P + W_2 + \frac{1}{2}W_1}{S_1 E} = \frac{30 \cdot 10^3 + W_2 + \frac{1}{2}W_1}{S_1 \cdot 2,1 \cdot 10^6} = 0,000257 \text{ cm}$$

$$\delta_T = \delta_1 + \delta_2 = 0,000521 \text{ cm}$$

1.8. TENSIONES INICIALES Y TÉRMICAS

TENSIONES INICIALES

Pueden existir en un sistema estáticamente indeterminado producidas en el montaje y debidas a errores en las longitudes de las barras o a variaciones intencionadas de los valores correctos de aquellas longitudes

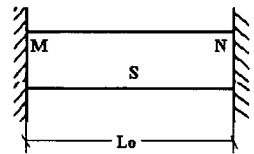
- Existen aun cuando no actúen cargas exteriores y dependen de las proporciones geométricas del sistema, de las propiedades mecánicas de los materiales y de la magnitud de los errores.

TENSIONES TÉRMICAS

Son debidas a los cambios de temperatura que originan a su vez variaciones en las longitudes de las barras, con independencia de las tensiones que deban resistir debidas al estado de carga al que se vea sometida

- Estas deformaciones introducen tensiones adicionales que pueden provocar situaciones de riesgo si no se han previsto con anterioridad en el diseño de la estructura.
- Barra biempotrada:

Si $\Delta T = T_1 - T_0$, y la dilatación térmica se impide por las reacciones en los extremos \Rightarrow se producirán en la barra tensiones de compresión cuyas magnitudes pueden calcularse por la condición de que $L = \text{cte.}$ con la expresión:



$$L_0 + \Delta L_0 = L_0 [1 + \alpha(T_1 - T_0)]$$

$$\Delta L_0 = L_0 \alpha (T_1 - T_0)$$

$L_0 =$ longitud inicial, $L_1 =$ longitud final

$\alpha =$ coeficiente de dilatación lineal

$\Delta L_0 =$ dilatación que experimentaría la barra si fuese libre

Al no poderse alargar la barra por impedírselo los dos empotramientos M y N es como si sufriese una compresión que le produce el acortamiento $\Delta L_0 = \delta \Rightarrow$ aparecerá una tensión térmica adicional de compresión tal que:

$$\sigma_c = E \cdot \alpha \cdot (T_1 - T_0)$$

de donde tenemos que:

$$\delta = \frac{P \cdot L_0}{A \cdot E} = L_0 \cdot \alpha \cdot (T_1 - T_0)$$

- Si la barra se enfríase desde T_0 a T_2 se determinaría de forma análoga una tracción térmica adicional de valor:

$$\sigma_T = E \cdot \alpha \cdot (T_0 - T_2)$$

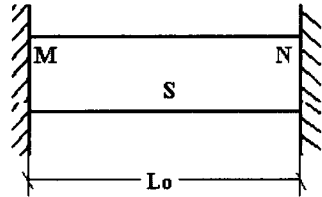
Ejemplo 1.6.

Una barra de hormigón se monta empotrada entre dos paredes rígidas en invierno con una temperatura ambiente de 2°C. Determinar la tensión de compresión cuando la barra alcance la temperatura de 70°C (en reposo y con la maquinaria en funcionamiento).

Datos material:

$$E = 1,76 \cdot 10^5 \text{ Kg/cm}^2 \text{ y } \alpha = 120 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}.$$

La barra tenderá a estirarse, cosa que no podrá hacer debido al empotramiento, produciéndose una tensión de compresión de,



$$\sigma_c = E \cdot \alpha \cdot (t_i - t_o) = 1,76 \cdot 10^5 \cdot 120 \cdot 10^{-7} \cdot (70 - 2) = 1436 \text{ Kg/cm}^2$$

La resistencia a la compresión de este hormigón es de 120 Kg/cm². Se aprecia que el efecto térmico basta por sí sólo para provocar la falla.

El ejemplo ilustra que el diseño debe contemplar la dilatación de los elementos, evitándose en lo posible las tensiones térmicas.

1.9. CONCENTRACIÓN DE TENSIONES

Cuando la sección de la pieza sometida a tracción (o compresión) monoaxial varía bruscamente no se corresponde una variación uniforme de tensiones.

Se alcanza una tensión máxima de valor bastante mayor que la tensión media que correspondería a un reparto uniforme,

$$\sigma_{max} = K \cdot \sigma$$

■ K = coeficiente de concentración de tensiones.

❖ Toma valores positivos.

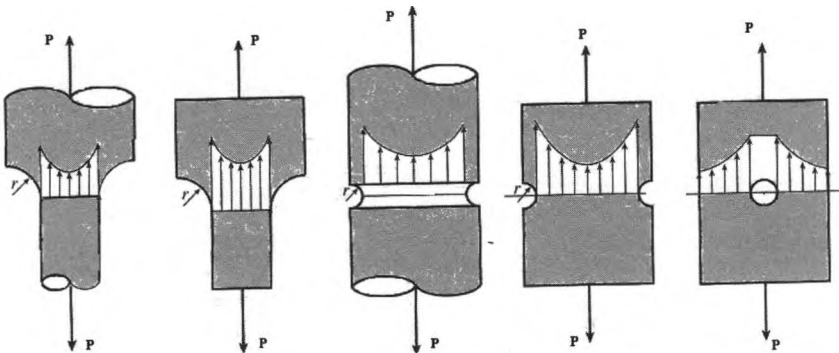
❖ Se obtiene por métodos experimentales (fotoelasticidad, extensometría, etc.).

$$K = \frac{\sigma_{max}}{S_{min}}$$

❖ Equivale a la relación entre la tensión máxima y la sección de menor área que correspondería a una distribución uniforme de dicha sección,

❖ Depende de la geometría con que varía la sección recta

❖ La figura inferior muestra el efecto de la concentración de esfuerzos sobre los cambios bruscos de sección donde se localiza σ_{max}



1.10. PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS EN TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

Estructuras estáticamente indeterminadas: cuando las fuerzas axiales que actúan en la barra no pueden determinarse por las condiciones de la estática \Rightarrow necesitamos ecuaciones adicionales de la Resistencia de Materiales basadas en la deformación que hagan el sistema compatible.

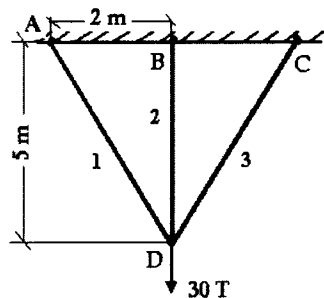
Si necesitamos:

1 ecuación \Rightarrow Grado de Hiperestaticidad es 1 (lo estudiaremos)

n ecuaciones \Rightarrow Grado de Hiperestaticidad es n

Ejemplo 1.7.

Para la estructura de barras simétrica mostrada en la figura hallar el desplazamiento del punto D.



Datos:

$$S_1 = S_2 = S_3 = 5 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{adm1,2,3} = 220 \text{ MPa}$$

$$E_{1,2,3} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Equilibrio nudo D: $\alpha = \tan^{-1}(5/2) = 68,2^\circ$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_1 = N_3$$

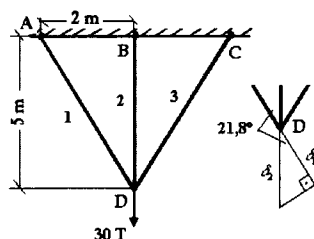
$$\sum F_y = 0 \rightarrow 2N_1 \cdot \cos 21,8 + N_2 = 30 \cdot 10^3$$

2 ecuación · 3 incógnitas \Rightarrow
Hiperestático de grado 1

Buscamos ecuación adicional basada en la deformación.

$$L_1 = L_3 = 5,38 \text{ m}$$

$$L_2 = 5$$



Según el triángulo de deformación y Hooke tenemos que,

$$\left. \begin{aligned} \delta_2 \cos 21,8^\circ &= \delta_1 \\ \sigma_2 L_{BD} \cos 21,8^\circ &= \sigma_1 L_{AD} \end{aligned} \right\} \sigma_2 = 1,16 \sigma_1 \longrightarrow N_2 = 1,16 N_1$$

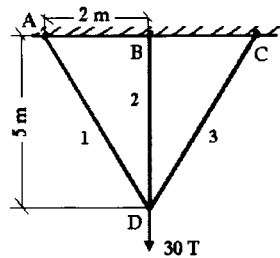
Tenemos sistema 3 x 3 cuyas soluciones son:

$$N_1 = 9,96 \text{ kN} \quad N_2 = 11,56 \text{ kN} \quad N_3 = 9,96 \text{ kN}$$

Ejemplo 1.8.

Para la estructura del ejemplo 1.7., hallar el desplazamiento del punto D con los nuevos datos:

$$\begin{aligned} S_1 = S_3 &= 5 \text{ cm}^2, & S_2 &= 8 \text{ cm}^2 \\ \sigma_{adm1,3} &= 220 \text{ MPa} \\ \sigma_{adm2} &= 200 \text{ MPa} & E_{1,2,3} &= 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \end{aligned}$$



Resolución

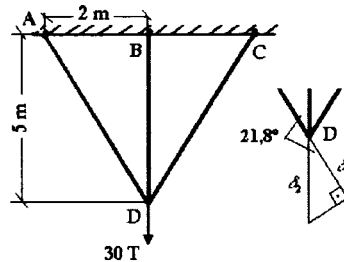
Equilibrio nudo D: $\alpha = \tan^{-1}(5/2) = 68,2^\circ$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow N_1 = N_3 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow 2N_1 \cdot \cos 21,8 + N_2 = 30 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

} 2 ecuación · 3 incógnitas \Rightarrow
Hiperestático de grado 1

Necesitamos ecuación adicional basada en la deformación:

$$\begin{aligned} L_1 = L_3 &= 5,38 \text{ m} \\ L_2 &= 5 \text{ m} \end{aligned}$$



Según el triángulo de deformación y Hooke tenemos que,

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_2 \cdot \cos 21,8^\circ &= \delta_1 \\
 \sigma_2 \cdot L_{BD} \cdot \cos 21,8^\circ &= \sigma_1 \cdot L_{AD} \\
 \text{Si } \sigma_{adm2} &= 200 \text{ MPa}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned}
 \sigma_2 &= 1,16 \sigma_1 & \text{Si } \sigma_{adm1} &= 220 \text{ MPa} \Rightarrow \\
 \sigma_{adm2} &= 1,16 \sigma_{adm1} & &= 255,2 \text{ MPa} > \sigma_{adm2} \rightarrow \text{NO} \\
 \sigma_{adm1} &= \sigma_{adm2} / 1,16 & &= 172,41 \text{ MPa} < \sigma_{adm1} \rightarrow \text{SI}
 \end{aligned}$$

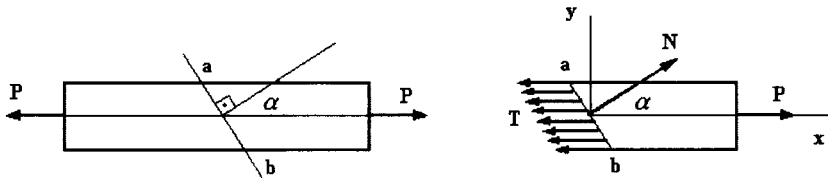
$$N_2 = \sigma_2 \cdot S_2 = 200 \cdot 800 = 160 \text{ kN}$$

$$N_1 = N_3 = \sigma_1 \cdot S_1 = 172,41 \cdot 500 = 86,20 \text{ kN}$$

$$\delta_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} L_2 = \frac{200}{1,7 \cdot 10^5} 500 = 0,5882 \text{ cm}$$

1.11. TENSIÓN CORTANTE. TENSIÓN EN SECCIONES OBLICUAS

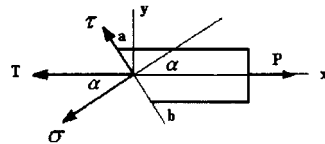
Hasta ahora consideramos siempre las secciones normales a una carga axial. Veamos que ocurre en las secciones oblicuas al eje principal de la barra.



$$S_{ab} = \frac{S}{\cos \alpha}$$

$$T = \frac{P}{S_{ab}} = \frac{P \cos \alpha}{S} = \sigma_x \cos \alpha$$

Pero T no es la tensión normal ya que la sección no es perpendicular a ella. Si descomponemos T en dos direcciones, una normal a "ab" y otra en dirección de "ab".

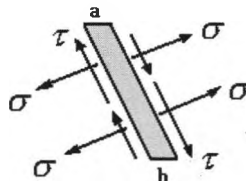


$$\sigma = T \cdot \cos \alpha = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\tau = T \cdot \sin \alpha = \sigma_x \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \sin 2\alpha$$

■ vemos que una sección oblicua estará sometida a la acción simultánea de dos tipos de tensiones de distinta naturaleza:

- ❖ unas normales σ , que tienden a producir extensión
- ❖ otras tangenciales τ , que producen efecto de cizalladura (deslizamiento) en dos secciones muy próximas



CRITERIO DE SIGNOS

- Tomaremos la tensión cortante positiva en sentido horario (como muestra la figura superior) y viceversa
- Tomaremos la tensión normal positiva a tracción y viceversa

Ejemplo 1.10.

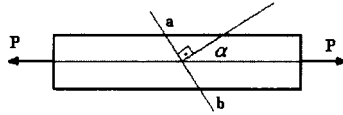
Una barra de sección 5 cm^2 está sometida a tracción monoaxial horizontal de 90 kN . Encontrar las tensiones correspondientes a una sección que forma con OX 45° .

Simplemente aplicamos las ecuaciones obtenidas en el desarrollo anterior, en las cuales sustituyendo tenemos,

$$\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha = \frac{90}{5} \cdot \cos^2 45 = 9 \text{ Kg/cm}^2$$
$$\tau = \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{90}{5} \sin 90 = 9 \text{ Kg/cm}^2$$

1.12. CÍRCULO DE MOHR PARA CARGA MONOAXIAL

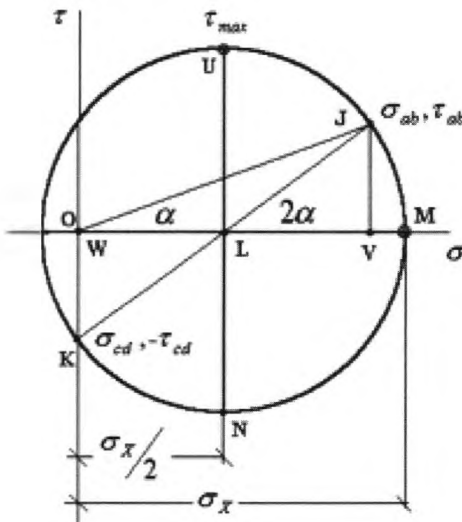
- Es la representación gráfica de las variaciones vistas de σ y t con el ángulo α perpendicular a la sección de barra sometida a tracción,



- σ en abscisas y t en ordenadas
$$\begin{cases} \sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \tau = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\alpha \end{cases}$$

eliminando el parámetro α y sustituyendo en ecuación de τ obtenemos una función $f(\sigma, \tau) = 0$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_x}} \\ \sin \alpha &= \sqrt{\frac{\sigma_x - \sigma}{\sigma_x}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \tau &= T \sin \alpha = \sigma_x \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau^2 &= \sigma (\sigma_x - \sigma) \\ \tau^2 + \sigma^2 - \sigma \sigma_x &= 0 \end{aligned}$$



Expresión analítica de una circunferencia que pasa por el origen 0 y cuyo centro es $L(\sigma_x/2, 0)$. Permite calcular las tensiones actuantes en cualquier sección.

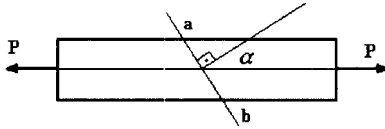
También permite localizar una sección a a partir de (σ, τ) :

$$\frac{\tau_{ob}}{\sigma_{ob}} = \frac{\sigma_x \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sigma_x \cdot \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Cada ángulo de inclinación en la barra α (medido desde O), equivale a 2α en el círculo (medido desde L)

MÉTODO GRÁFICO

Tomemos las siguientes secciones representadas por α



- ❖ Sección recta ($\alpha = 0^\circ$) $\Rightarrow \sigma = \sigma_x$, $\tau = 0$ M
- ❖ Sección paralela a OX ($\alpha = 90^\circ$) $\Rightarrow \sigma = 0$, $\tau = 0$ O

Tenemos dos puntos (diámetro: 90° en barra = 180° en círculo) que nos permiten dibujar el círculo **con centro en C**.

Ahora podemos conseguir los valores de cualquier sección ab (α°) como sigue:

Giramos 2α desde LM (ó α desde OM) y obtenemos los valores de la sección representada por el punto J (σ_{ab}, τ_{ab}). Solo tenemos que sumar los segmentos hasta obtener los valores:

$$\sigma_{ab} = OL + LV = OL + LJ \cdot \cos 2\alpha$$

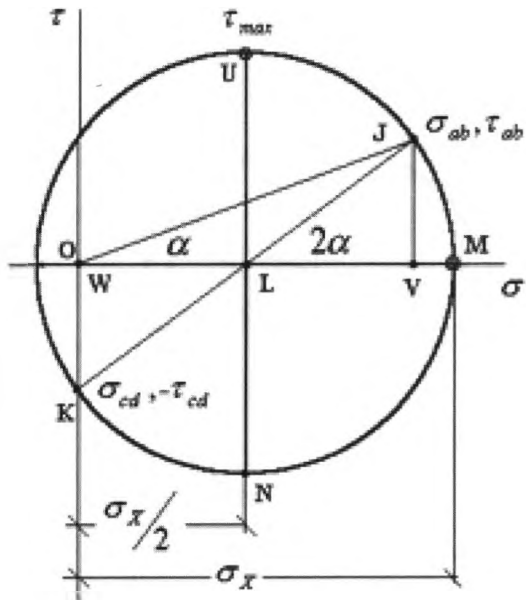
$$\tau_{ab} = JV = LJ \cdot \sin 2\alpha$$

O viceversa:
conocidas las tensiones obtener su sección (α) con:

$$\frac{\tau_{ab}}{\sigma_{ab}} = \operatorname{tg} \alpha$$

τ_{max} ($\pm 90^\circ$ en el círculo) se da en los puntos U y N que representan planos situados a $\pm 45^\circ$ en la barra, y toma el valor:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$$



Hemos visto como la tensión cortante en el caso de tracción o compresión simple va acompañada de tensión normal. En otros casos no ocurre esto (la sección trabaja a cortante puro).

También ocurre que cuando el cortante es nulo, las tensiones normales se denominan principales⁶, y toman los valores máximo y mínimo. Las direcciones donde se localizan se denominan direcciones principales.

Ejemplo 1.11.

Resolver el ejemplo 1.10 empleando el método gráfico del Círculo de Mohr.

Localizamos dos puntos del círculo correspondientes a:

Corte transversal ($\alpha = 0^\circ$). Todo en Kg/cm^2

$$\diamond \text{ Sección recta } (\alpha = 0^\circ) \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sigma_x = 90/5 = 18, \text{ y } \tau = 0$$

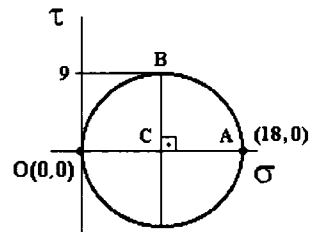
$$\diamond \text{ Sección paralela a OX } (\alpha = 90^\circ) \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0, \text{ y } \tau = 0$$

Tenemos dos puntos a 90° en la barra que son 180° en el círculo, esto es el diámetro OA. Así, el radio será la mitad. Con centro en C y valor el radio, trazamos el círculo.

A una sección de 45° en la barra le corresponde 90° en el círculo, es decir el punto B, para el cual tenemos,

$$\sigma = OC = 9 \quad \text{Kg/cm}^2$$

$$\tau = CB = 9 \quad \text{Kg/cm}^2$$

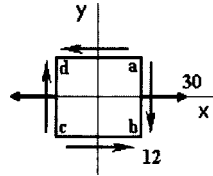


Valores que como vemos coinciden con los obtenidos en la resolución analítica del ejemplo anterior.

⁶ Este concepto se desarrollará en el apartado 1.13 “Tracción y compresión en dos...”.

Ejemplo 1.12.

Para el estado de tensiones representado perteneciente a una sección inclinada de una barra sometida a tracción monoaxial, obtener el Círculo de Mohr.



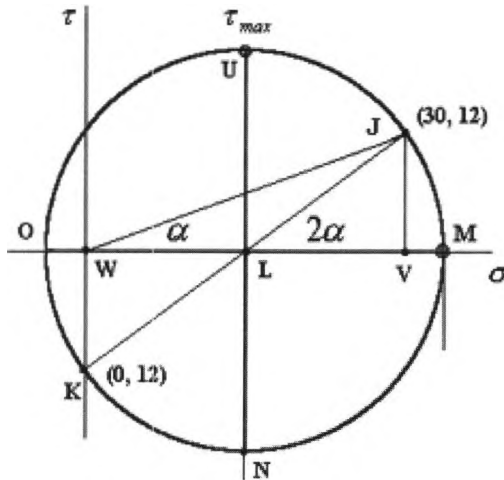
$$\sigma_x = 30 \text{ MPa}$$

$$\tau = 12 \text{ MPa}$$

Tenemos dos puntos del círculo:

- ❖ Sección ab $\rightarrow J(30, 12)$
- ❖ Sección da $\rightarrow K(0, 12)$

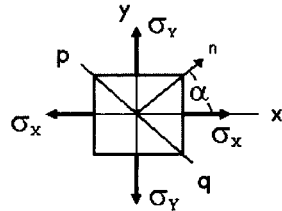
Entre dichas secciones hay 90° , luego entre dichos puntos J y K habrá 180° en el círculo, constituyendo pues un diámetro del círculo JK, que intercepta con OX en el punto L, centro del círculo. El radio será pues JL, KL, LO, LM, etc.



1.13. TRACCIÓN Y COMPRESIÓN EN DOS DIRECCIONES PERPENDICULARES. CÍRCULO DE MOHR. TENSIONES PRINCIPALES

Cuando actúan tensiones en dos direcciones, tenemos cambios respecto al caso monoaxial

Ej. elemento pared cilíndrica de recipiente a presión. Tendremos tensiones normales y cortantes debidas a σ_x (eje X) y debidas a σ_y (respecto a eje Y)



$$\begin{array}{l}
 \text{Eje X} \\
 \text{Eje Y} \\
 \text{Total:}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \sigma'_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha \\
 \tau' = \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \sin 2\alpha \\
 \sigma''_n = \sigma_y \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha \\
 \tau'' = \frac{1}{2} \sigma_y \cdot \sin 2 \left(- \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) = - \frac{1}{2} \sigma_y \cdot \sin 2\alpha
 \end{array} \right.$$

Para $\sin 2\alpha = -1$ ($\alpha = 3\pi/4$, y $\pi/4$) $\rightarrow \tau_{\max} = \sigma_x - \sigma_y / 2$

Las expresiones finales para obtener las tensiones son⁷:

$$\begin{aligned}
 \sigma_n &= \sigma'_n + \sigma''_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha \\
 \tau &= \tau' + \tau'' = \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sigma_y \cdot \sin 2\alpha = - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha
 \end{aligned}$$

⁷ Demostración completa en “Resistencia de Materiales - L. Ortiz Berrocal (págs. 40-45)”.

CÍRCULO DE MOHR PARA CARGA BIAxIAL EN EL PLANO

Supone la representación gráfica de las expresiones:

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha$$

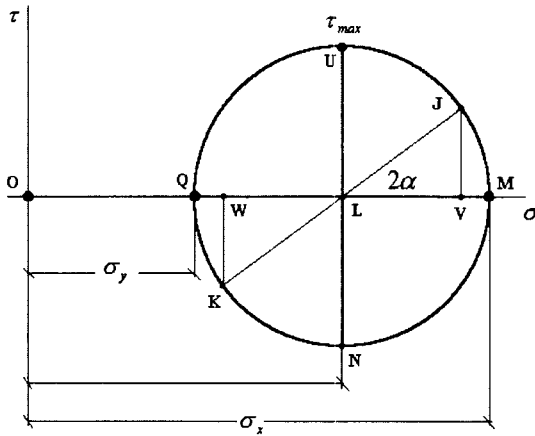
$$\tau = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha$$

Sección de corte normal α → buscamos dos puntos de las tensiones ligadas a las caras perpendiculares a los ejes x e y

Para $\alpha = 0^\circ$ ⇒ $\sigma_n = \sigma_x, \tau = 0$ (punto M)

Para $\alpha = 90^\circ$ (180° en el círculo) ⇒ $\sigma_n = \sigma_y, \tau = 0$ (punto Q)

MQ = diámetro. Con centro en L trazamos círculo.



Podemos buscar los valores (σ, τ) gráficamente para cualquier valor α normal de sección

Para obtener tensiones de una sección cualquiera α (2α) en el círculo, vamos sumando gráficamente los segmentos:

Para el punto J:

$$\sigma_{nJ} = OM - VM = \sigma_x - (LM - LV) = L = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha$$

$$\tau_J = VJ = LJ \sin 2\alpha = L = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha$$

Girando la sección en la barra 90° (180° en el círculo), vamos al punto K, donde:

$$\begin{aligned}\sigma_{nK} &= OW = OQ + QW = OQ + (QL - LW) = OQ + (LQ - LK \cos 2\alpha) = \dots \\ \dots &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha \\ \tau_K &= WK = -VJ = LJ \sin 2\alpha = \dots = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha\end{aligned}$$

Propiedades:

Para dos secciones perpendiculares (90°), que corresponden a dos puntos extremos J y K del mismo diámetro (180° en el círculo), se cumple que:

$$\begin{aligned}\sigma_{nJ} + \sigma_{nK} &= \sigma_x + \sigma_y \\ \tau_J &= -\tau_K \\ \tau_{\max} &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\end{aligned}$$

} La suma de las componentes normales de las tensiones ligadas a 2 planos perpendiculares permanece constante al variar la inclinación de los planos α

} Las componentes cortantes son iguales y opuestas

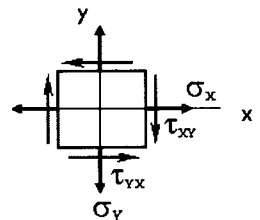
TENSIONES PRINCIPALES

Las denominaremos σ_1 σ_2

- Actúan en las direcciones principales, perpendiculares a su vez a los planos (principales) caracterizados por $\tau = 0$
- Corresponden a los valores máximo y mínimo de tensiones
- La mejor forma de determinación de σ_1 y σ_2 es con el círculo de Mohr

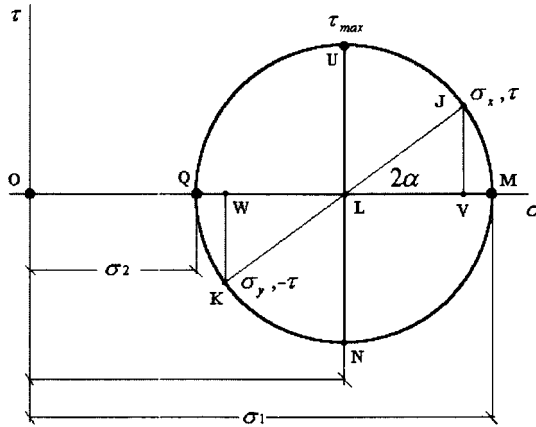
Vemos el paralelepípedo rectangular sometido a tensiones σ_x y σ_y que no son principales ya que $\tau \neq 0$

Dibujamos el círculo a partir de los dos puntos pertenecientes al estado doble de tensiones de 2 planos \perp (σ_n, τ) \rightarrow diámetro QM



Hayamos centro del círculo L como QM intersección con OX

Trazamos el círculo:



Q y M definen los valores máximo y mínimo con $\tau = 0 \rightarrow \sigma_1$ y σ_2

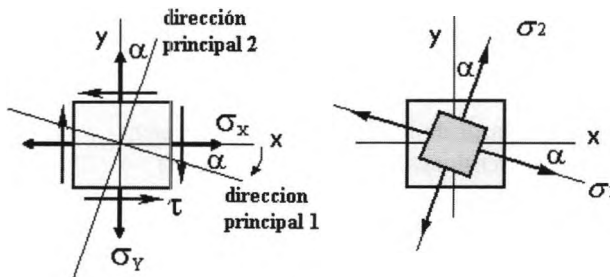
Geoméricamente se obtiene el valor de las tensiones principales:

$$\sigma_1 = OM = OL + LJ = \dots = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 + \sqrt{((\sigma_x - \sigma_y) / 2)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = OQ = OL - LJ = \dots = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 - \sqrt{((\sigma_x - \sigma_y) / 2)^2 + \tau^2}$$

Las direcciones principales se obtienen girando en sentido horario LJ hasta OX (eje donde se encuentran las tensiones principales), 2α en el círculo (α en el elemento)

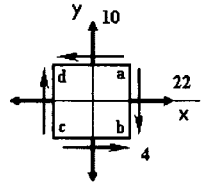
$$\text{tg } 2\alpha = -DE / DC = -2\tau / (\sigma_x - \sigma_y)$$



Ejemplo 1.13.

Para el estado de tensiones representado en la figura y tomando valores de $\sigma_x = 22 \text{ Kg}\cdot\text{cm}^2$, $\sigma_y = 10 \text{ Kg}\cdot\text{cm}^2$ y $\tau = 4 \text{ Kg}\cdot\text{cm}^2$, determinar:

- Círculo de Mohr.
- Tensiones y direcciones principales.
- Tensión tangencial máxima.
- Tensiones en plano que forma 40° con el eje OX.
- Tensiones en un plano perpendicular al AB.

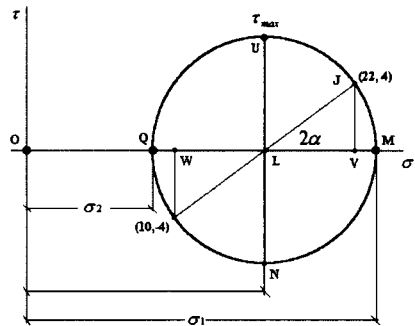


a) Círculo de Mohr

Tenemos dos punto del círculo:

- ✦ Sección ab \rightarrow J(22, 4) y Sección da \rightarrow K(10, -4)

Entre dichas secciones hay 90° , luego entre dichos puntos J y K habrá 180° en el círculo, constituyendo pues un diámetro del círculo JK, que intercepta con OX en el punto L (16,0), centro del círculo. El radio será pues JL, KL, LO, LM, etc.



b) Tensiones y direcciones principales.

Gráficamente vemos en el círculo que:

$$\sigma_1 = OM = OL + LJ = 16 + \sqrt{(22 - 16)^2 + 4^2} = 23,21 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = OQ = OL - LQ = 16 - \sqrt{(22 - 16)^2 + 4^2} = 8,79 \text{ Kg/cm}^2$$

Análiticamente hubiésemos obtenido los mismos valores sustituyendo en las expresiones,

$$\sigma_1 = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 + \sqrt{((\sigma_x - \sigma_y) / 2)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 - \sqrt{((\sigma_x - \sigma_y) / 2)^2 + \tau^2}$$

Las direcciones principales se obtienen a partir de,

$$\tan 2\alpha = \frac{JV}{LV} = \frac{4}{6} = 0,66 \rightarrow 2\alpha = 33,69^\circ$$
$$\alpha_1 = 16,84^\circ \quad \alpha_2 = 90^\circ + 16,84^\circ = 106,84^\circ$$

Quedan pues localizadas las direcciones principales girando en sentido horario.

c) La tensión tangencial máxima será,

$$\tau_{\max} = LU = LJ = \sqrt{(22 - 16)^2 + 4^2} = 7,21 \text{ kg/cm}^2$$

d) Las tensiones en un plano a 40° con OX se obtienen gráficamente a 80° en el círculo, o analíticamente con las expresiones

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha = 22 \cos^2 40 + 10 \sin^2 40 = 17,04 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = -\frac{1}{2}(22 - 10) \sin 80 = -5,90 \text{ kg/cm}^2$$

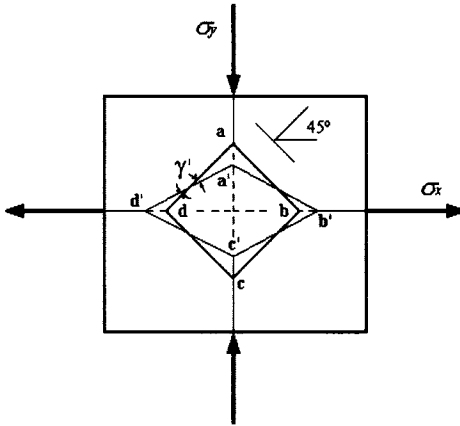
e) Las tensiones en un plano perpendicular al anterior nos llevan a una sección de 130° . Podemos localizarlas a 260° en el círculo o sustituyendo en las expresiones analíticas,

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha = 22 \cos^2 130 + 10 \sin^2 130 = 14,96 \text{ Kg/cm}^2$$

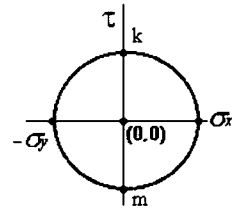
$$\tau_{\max} = -\frac{1}{2}(22 - 10) \sin 260 = 5,90 \text{ kg/cm}^2$$

1.14. TENSION CORTANTE PURA

Sea el estado doble de tensiones representado siendo $\sigma_y = -\sigma_x$



El Círculo de Mohr correspondiente será



El punto k representa las tensiones ligadas a los planos ab y cd cuya normal forma 45° con OX (correspondiente a 90° en el círculo)

El punto m representa las tensiones ligadas a los planos bc y da, perpendiculares a ab y cd (90° que se corresponden con 180° en el círculo)

Según el círculo, para los planos ab y cd (punto k), y los planos bc y da (punto m) no existen tensiones normales, actuando solo la tensión cortante (cortadura pura) de valor,

$$\tau = \sigma_x = -\sigma_y$$

Así, el elemento abcd puede aislarse y considerarse en equilibrio bajo la acción de las tensiones cortantes τ únicamente (estado de tensión cortante pura). Si el elemento girase, lo harán los planos (o sus normales) dejando de formar 45° con OX, y aparecerán tensiones normales junto a las cortantes.

Con el elemento abcd aislado en cortadura pura, al no existir tensiones normales a los planos, las longitudes de estos se mantienen constante durante la deformación, durante la cual la ac se acorta y db se alarga formándose el rombo a'b'c'd'.

El ángulo inicial de 90° entre los planos ab y da (así como entre bc y dc) aumenta a $90+2\gamma'$. Asimismo el ángulo inicial de 90° entre los planos ab y bc disminuye a $90-2\gamma'$ (así como entre cd y da) según se aprecia en la figura.

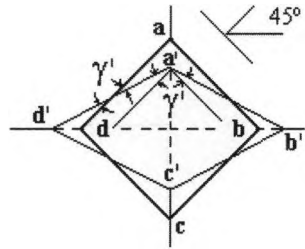
$\gamma = 2\gamma'$ es la deformación angular unitaria la cual mide la distorsión o deformación del elemento.

Para la deformación longitudinal en régimen elástico teníamos la Ley de Hooke

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Que en rotación y por analogía con la traslación se transforma en,

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$



	Deformación	Módulo de Elasticidad	Tensión
Longitudinal	ε	E	σ
Angular	γ	G	τ

TEMA 2

FLEXIÓN SIMPLE

ÍNDICE

- 2.1 Introducción.
- 2.2. Vigas estáticamente determinadas, cargas y reacciones.
- 2.3. Momento flector y esfuerzo cortante.
- 2.4. Relación entre flector y cortante en vigas.
- 2.5. Diagramas de cortante y flector.
- 2.6. Flexión pura en vigas. Teoría de Navier.
- 2.7. Tensión cortante en la flexión.
- 2.8. Elástica o deformada.

2.1. INTRODUCCIÓN

PRESENTACIÓN

En este tema estudiaremos **conceptos fundamentales** sobre flexión simple, y el cálculo de vigas ante este fenómeno.

OBJETIVOS

Como objetivos académicos a conseguir con el aprovechamiento del tema tenemos:

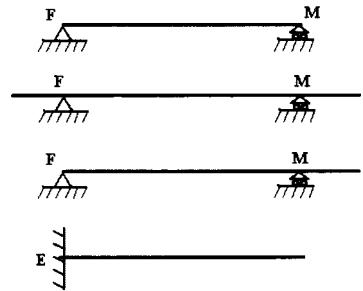
- Saber manejar las cargas distribuidas adecuadamente según su naturaleza.
- Tener claro los conceptos de esfuerzo cortante y momento flector y la relación entre ellos.
- Saber calcular los diagramas de solicitaciones de las vigas isostáticas más comunes, sometidas a un determinado tipo de cargas.
- Entender el concepto de elástica y saber aproximarla gráficamente. No profundizaremos en su cálculo.
- Conocer y saber aplicar la Teoría de Navier y comprender su desarrollo a partir de la hipótesis del mismo nombre.
- Saber dimensionar una viga para que soporte un determinado estado de carga estática ya sea por el Método de Navier, o por el Método de la Flecha Máxima. En su caso empleando las tablas de perfiles constructivos.

2.2. VIGAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

Ecuaciones de la Estática → reacciones en los apoyos

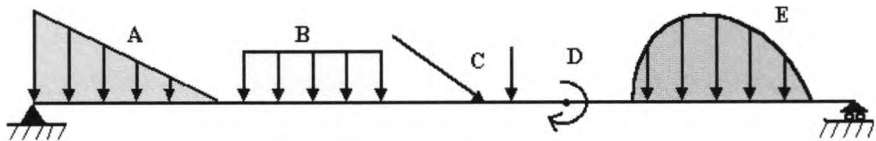
⇒ Las vigas estáticamente determinadas que estudiaremos son:

- viga **simplemente apoyada** en articulaciones Fija y Móvil que permiten el giro durante la flexión
- viga **apoyada con doble voladizo** (F, M y los extremos en voladizo pueden girar)
- viga **apoyada con voladizo** (F, M y el extremo en voladizo pueden girar)
- viga empotrada **en voladizo** (el empotramiento E no puede girar)



⇒ como tipos de carga que actúan sobre las vigas tenemos:

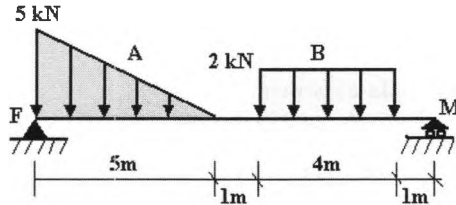
- cargas concentradas inclinadas o verticales (C)
- cargas distribuidas:
 - ✓ uniformemente (B) $q_1 = Q_1 / x_1$
 - ✓ linealmente crecientes o decrecientes (A) $y_2 = k \cdot x_2$
 - ✓ de forma irregular (E) $y_2 = f(x_2)$
- Momentos puntuales (D)



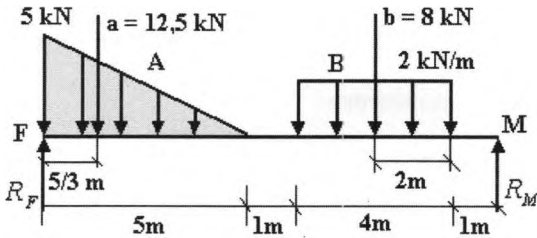
Recordemos que exclusivamente para el cálculo de las reacciones en los apoyos, cada carga distribuida se sustituye por una carga concentrada de módulo equivalente al área de carga, sentido el de la carga distribuida, y dirección tal que su línea de acción pase por el centroide de dicha área de carga. Para efectos deformativos no es válida dicha sustitución ya que no deforma de igual manera la carga distribuida que su supuesta concentrada en un punto.

Ejemplo 2.1.

Calcular las reacciones en los apoyos F y M para la viga mostrada en la figura.



Sustituyendo las cargas distribuidas por las concentradas, y aplicando las ecuaciones de equilibrio, obtenemos las reacciones en los apoyos como sigue:



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_F + R_M = 12,5 + 8$$

$$\Sigma M_F = 0 \rightarrow 12,5 \cdot \frac{5}{3} + 8 \cdot 8 = 11 R_M$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones doble obtenemos el valor de las reacciones:

$$R_M = 7,71 \text{ kN}$$

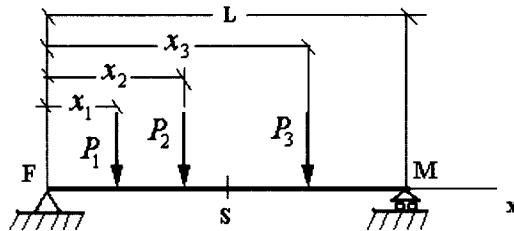
$$R_F = 12,79 \text{ kN}$$

2.3. MOMENTO FLECTOR Y ESFUERZO CORTANTE

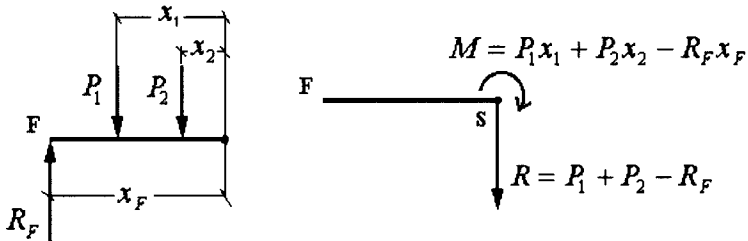
Flexión: efecto producido por una carga sobre una viga de manera que ésta tiende a curvarla, girando las secciones respecto a su eje longitudinal, apareciendo dos fenómenos a nivel interno:

- Momento Flector (M)
- Esfuerzo Cortante (V)

Si cortamos la viga sometida a un estado de cargas y en equilibrio, por una sección S como muestra la figura,

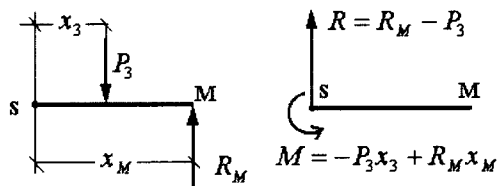


Y nos quedamos con la parte izquierda, que también estará en equilibrio:

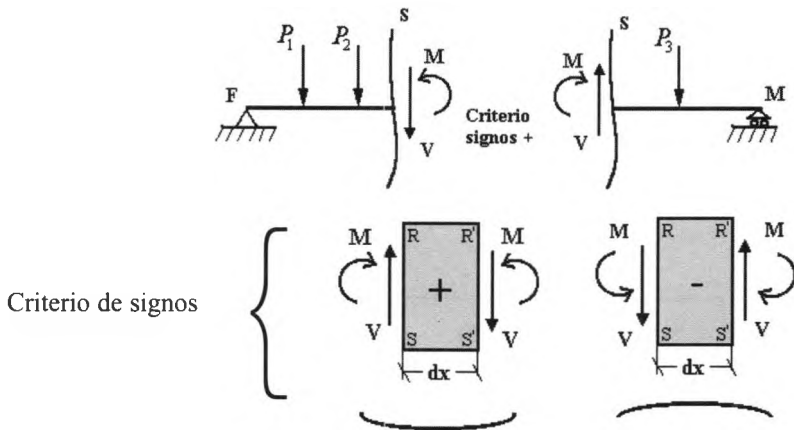


Podemos reducir el sistema de cargas actuantes a la sección S , donde aparecerá un momento y una fuerza resultantes, M y R .

Si en lugar de quedarnos con la parte izquierda nos hubiésemos quedado con la derecha tendríamos



En cualquier caso, oponiéndose a la acción del momento resultante y de la fuerza resultante (reducción sistema fuerza-par en cdg sección de corte) aparecerán a nivel interno dos efectos iguales y contrarios a estos, que equilibran el sistema.



Estos efectos internos son:

- **Momento flector:**

Aplicado en cdg de S, equilibra al momento resultante M , tomando por tanto el mismo valor que éste, que será la suma de los momentos producidos respecto a S, por todas las fuerzas que actúan en el trozo de barra que nos quedamos, incluidas las reacciones de apoyos. El criterio de signos es el establecido en la figura anterior.

- **Esfuerzo cortante:**

Equilibra a la resultante R , tomando por tanto el valor de ésta. Está aplicado en el cdg de la sección en dirección paralela a la misma. Su valor será la suma de todas las fuerzas verticales que actúan en el trozo de barra. Su signo depende del criterio de signos representado en la figura.

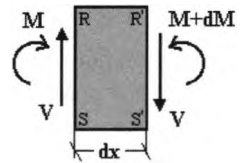
2.4. RELACIÓN ENTRE FLECTOR Y CORTANTE EN VIGAS

Vamos a encontrar la relación que existe entre M y V

Para un tramo de viga de longitud dx que aislamos (quitando los trozos de viga a ambos lados y poniendo sus efectos como vimos anteriormente), tenemos según sea el estado de carga y aplicando equilibrio:

a) Ninguna carga

$$M + dM = M + V \cdot dx \quad \rightarrow \quad V = \frac{dM}{dx}$$

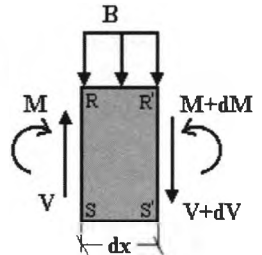


b) Carga q(x) uniformemente distribuida

$$\Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow \quad V - q \cdot dx - (v + dV) = 0 \quad \rightarrow \quad q = -\frac{dV}{dx}$$

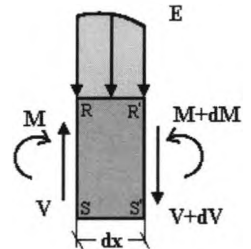
$$\Sigma M = 0 \quad \rightarrow \quad M + V \cdot dx - (q \cdot dx) \frac{dx}{2} = dM + M \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow V = \frac{dM}{dx}$$



c) Carga q(x) variable de forma continua

caso análogo al anterior ya que en dx el valor de la carga se mantiene prácticamente constante.

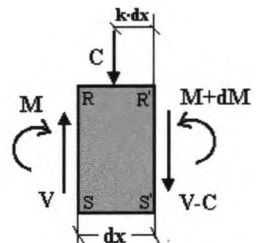


d) Carga puntual o concentrada C⁸

$$\Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow \quad V - C - (V - C) = 0$$

$$\Sigma M = 0 \quad \rightarrow \quad M + V \cdot dx - C \cdot k \cdot dx = dM + M \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow V = \frac{dM}{dx} + C \cdot k \quad \left| \begin{array}{l} k=0 \rightarrow V = \frac{dM}{dx} + C \\ k=1 \rightarrow V = \frac{dM}{dx} + C \end{array} \right.$$



⁸ Se justifica salto en diagrama de esfuerzos cortantes de valor la carga C, y debajo de ésta

2.5. DIAGRAMAS DE CORTANTE Y FLECTOR

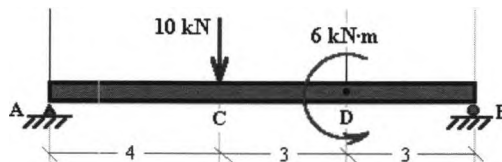
Nos permiten determinar los esfuerzos que han de resistir y transmitir cada sección

El proceso para obtener los diagramas sigue los pasos siguientes:

1. Partimos de una viga sometida a un estado de cargas que limita las zonas homogéneas o continuas, las cuales identificamos
2. Cortamos en cada zona continua mediante una sección S_i
3. Nos quedamos con la parte de la viga menos complicada, y la que deseamos la sustituimos por su efecto según el criterio de Momentos Flectores y esfuerzos cortantes establecido
4. Equilibrio \rightarrow obtenemos las expresiones de N , V y M
5. Vamos realizando el diagrama y observando que se cumplen las siguientes relaciones:
 - $V = dM/dx$ para cada zona continua, con independencia del tipo de carga.
 - ✓ V experimenta un salto en su valor cuando pasa por una carga puntual (que limita dos zonas continuas).
 - ✓ M experimenta un salto en su valor cuando pasa por un momento puntual (que limita dos zonas continuas)
 - $q = -dV/dx$

Ejemplo 2.2.

Empleando el método de las secciones obtener los diagramas de sollicitaciones para la viga representada en la figura.1.

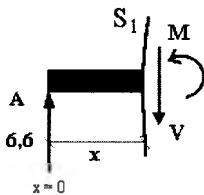


1. Comprobamos que la viga es isostática. Tiene tres reacciones y tres ecuaciones para resolverlas, así obtenemos las reacciones en los apoyos con las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A + R_B = 10 \\ \Sigma M_A = 0 \rightarrow 10R_B - 10 \cdot 4 + 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} R_A = 6,6 \text{ kN} \\ R_B = 3,4 \text{ kN} \end{cases}$$

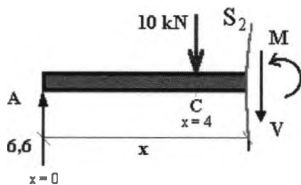
2. Quitamos los apoyos y ponemos su efecto, esto es las reacciones. Identificamos zonas continuas como AC, CD y DB, en las cuales las leyes de flector y cortante no cambian.
3. Cortamos en cada zona continua mediante una sección S_i

S_1 en tramo continuo AC. Aplicando condiciones equilibrio tenemos:



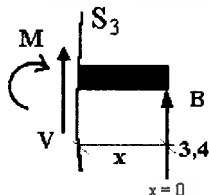
$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\rightarrow 6,6 = V \\ \Sigma M_S = 0 &\rightarrow M = 6,6 \cdot x \end{aligned} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=0 \\ x=4 \Rightarrow M=26,4 \end{cases}$$

S_2 en tramo continuo CD.



$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\rightarrow 6,6 - 10 = V = -3,4 \\ \Sigma M_S = 0 &\rightarrow M = 6,6 \cdot x - 10(x - 4) \end{aligned} \begin{cases} x=4 \Rightarrow M=26,4 \\ x=7 \Rightarrow M=16,2 \end{cases}$$

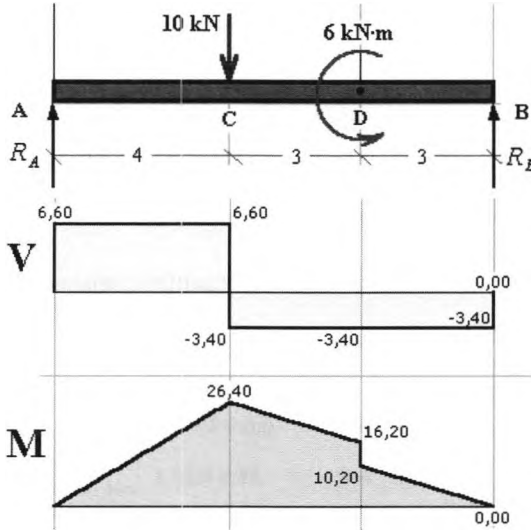
S_3 en tramo continuo CB.



$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\rightarrow V = -3,4 \\ \Sigma M_S = 0 &\rightarrow M = 3,4 \cdot x \end{aligned} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=0 \\ x=3 \Rightarrow M=12,2 \end{cases}$$

Comprobamos que las leyes de M y V cumplen las relaciones correspondientes.

Así queda el siguiente diagrama de solicitaciones:



Los valores están dados en kN y m. Vemos como el diagrama de cortantes salta en los puntos de carga concentrada (A, C y B) el valor de dicha carga, y como el diagrama de flectores lo hace con los momentos (punto D).

Asimismo se comprueba que en cada tramo se cumple la relación

$$V = \frac{dM}{dx}$$

Obsérvese que en el corte S₃ la relación negativa, debido a que estamos barriendo la sección en -OX (o sea -dx)

$$V = -\frac{dM}{dx}$$

2.6. FLEXIÓN PURA EN VIGAS. TEORÍA DE NAVIER

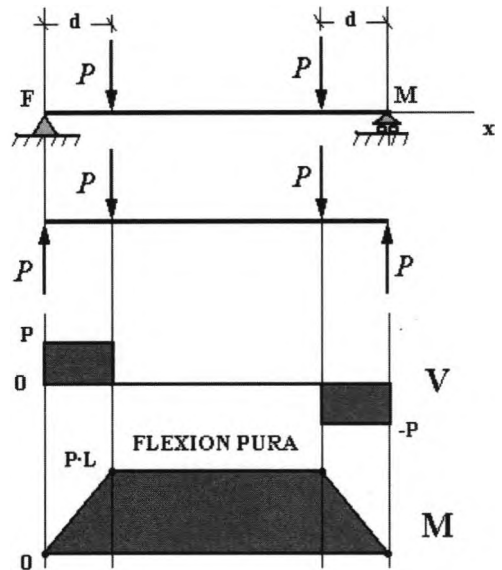
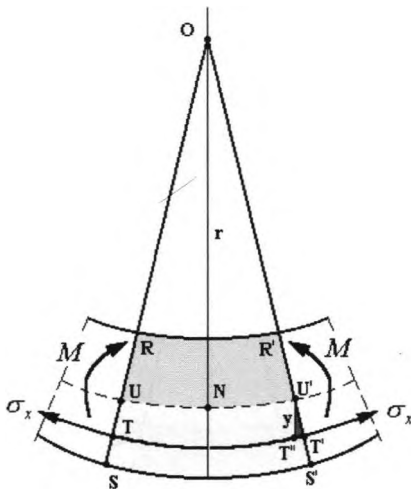
Hasta ahora hemos visto la flexión como fenómeno elástico que viene acompañado del esfuerzo cortante.

Cuando $M = \text{cte} \Rightarrow V = dM/dx = 0$, decimos que la viga trabaja a Flexión Pura

ANÁLISIS DE LA FLEXIÓN PURA

1. Hipótesis de Navier

“al someter una viga a Flexión Pura, cualquier sección transversal plana de la misma permanece plana después de la deformación”



Aplicación:

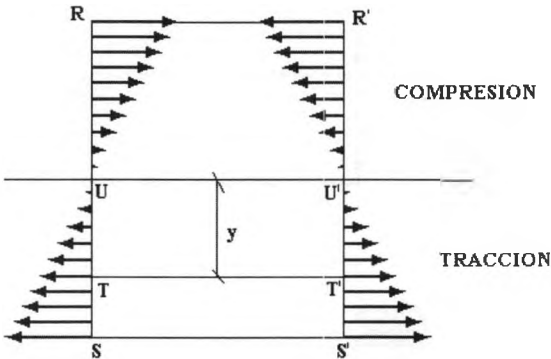
Sean dos secciones infinitamente próximas RS y R'S' en la zona de flexión pura

Tenemos para el ejemplo de una sección rectangular homogénea:

- r = radio de curvatura entre U y U'
- ∞ fibras longitudinales

Línea Neutra
(no tiene porque pasar por el medio)

{ Por encima las fibras experimentan compresión (max en RR')
 Permanece invariable y pasa por el c.d.g.
 Por debajo las fibras experimentan tracción (max en SS')



Para una fibra cualquiera a distancia hacia abajo "y" de la neutra UNU':

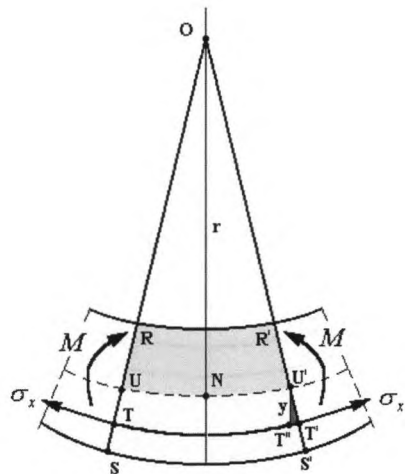
$$L_o = UU' = TT''$$

$$L_f = TT'$$

$$\delta_x = TT' - TT'' = T''T'$$

Hooke:

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L_o} = \frac{T''T'}{TT''} = \frac{\sigma_x}{E}$$



Por semejanza de triángulos OUU'-U''T'T',

$$\frac{y}{r} = \frac{T''T'}{UU'} = \frac{T''T'}{TT''} = \frac{\delta_x}{L_o} = \epsilon_x$$

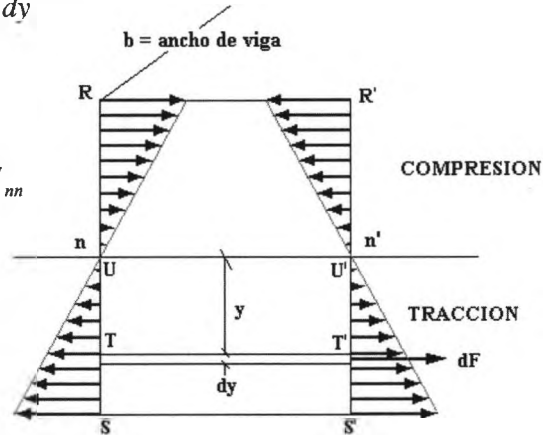
$$\sigma_x = \frac{E \cdot y}{r} \left\{ \begin{array}{l} y < 0 \text{ tracción} \\ y > 0 \text{ compresión} \end{array} \right.$$

Para un elemento dy a una distancia “ y ”,

$$dF = \sigma_x \cdot dS = \sigma_x \cdot b \cdot dy = \frac{E \cdot y}{r} b \cdot dy$$

El momento respecto al eje neutro es,

$$M = \int y \cdot dF = \int y \frac{E \cdot y}{r} b \cdot dy = \frac{E}{r} I_{nn}$$



Así,

$$M = \frac{E}{r} I_{nn} \longrightarrow r = \frac{E \cdot I_{nn}}{M} = \frac{E \cdot y}{\sigma_x} \longrightarrow \sigma_x = \frac{M \cdot y}{I_{nn}}$$

$$M_{\max} \text{ e } y_{\max} \rightarrow \sigma_{\max}$$

La tensión máxima se dará en aquella sección donde se localice el momento flector máximo, y dentro de ésta en la fibra donde $y = y_{\max}$. Habrá una tensión máxima a tracción y otra máxima a compresión.

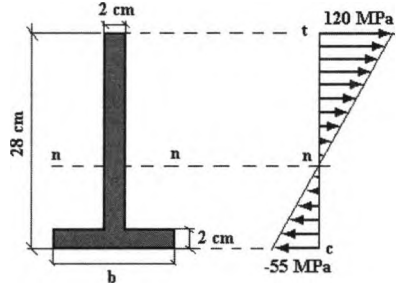
Así pues la viga rompería por flexión en dicha sección de viga y en la fibra superficial (como si se sometiera a ensayo de tracción y desgarrara) para transmitir la rotura al resto de fibras internas y provocar la rotura definitiva de la viga (como una grieta que crece).

Por último comentar que aunque la expresión de Navier se ha deducido para flexión pura, también es adecuada para el caso general de flexión. Esta aproximación tendrá para nosotros validez en el diseño de vigas.

Ejemplo 2.3.

La viga de carga cuya sección recta se muestra trabaja a flexión simple, estando en una determinada sección sometida al diagrama de tensiones normales representado. Determinar:

- a) Situación de la línea neutra
- b) Anchura “b” del ala de viga
- c) Momento flector que actúa en la sección



- a) Observando la figura y los triángulos se aprecian las siguientes igualdades que nos permiten localizar la altura a la que se encuentra la línea neutra (nc)

$$\left. \begin{array}{l} \overline{tn} + \overline{nc} = 28 \\ \frac{120}{tn} = \frac{55}{nc} \end{array} \right\} \begin{array}{l} nc = 8,8 \text{ cm} \\ tn = 19,2 \text{ cm} \end{array}$$

- b) ancho de ala de viga “b”.

Como el centro de gravedad viene en función del área y ésta a su vez en función de b,

$$\begin{array}{l} S_1 = 26 \cdot 2 = 52 \text{ cm}^2 \quad \overline{y}_1 = 2 + 13 = 15 \\ S_2 = 2 \cdot b = 2b \text{ cm}^2 \quad \overline{y}_2 = 1 \end{array}$$

Basándonos en la expresión de la ordenada de gravedad tenemos,

$$\overline{cn} = 8,8 = \frac{S_1 \cdot \overline{y}_1 + S_2 \cdot \overline{y}_2}{S_1 + S_2} = \frac{52 \cdot 15 + 2b \cdot 1^2}{52 + 2b} \quad 457,6 + 17,6b = 780 + 2b$$

$$b = 20,66 \text{ cm}$$

- c) M_F en la sección?

Se deja propuesto a resolver por el alumno.

MÓDULO RESISTENTE

Se define como:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} \left\{ \begin{array}{l} I_x = I_{nn} = \text{m.d.i. de la sección respecto a la línea neutra} \\ Y_{max} = \text{ordenada en valor absoluto de la fibra situada a la máxima distancia de la fibra neutra} \end{array} \right.$$

Su aplicación se localiza en la expresión de Navier para el cálculo de vigas,

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I_x} = \frac{M}{W_x}$$

Como ejemplos básicos tenemos,

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} \left\{ \begin{array}{l} \text{O} \rightarrow y_{max} = r = d/2 \rightarrow W_x = \frac{2I_x}{d} \\ \square \rightarrow y_{max} = r = h/2 \rightarrow W_x = \frac{2I_x}{h} \end{array} \right.$$

Ejemplo 2.4.

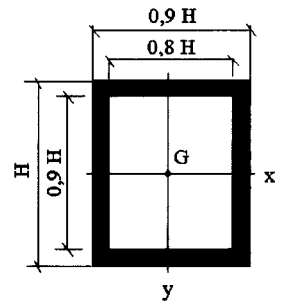
Determinar el módulo resistente W_x de la sección simétrica representada en la figura.

Resolviendo sin considerar las unidades tenemos,

$$I_{nn} = \frac{0,9H \cdot H^3}{12} - \frac{0,8H \cdot (0,9H)^3}{12} = 0,0264H^4$$

$$y_{max} = \frac{H}{2}$$

$$W_x = \frac{I_{nn}}{y_{max}} = \frac{I_{nn}}{y_{max}} = \frac{0,0264H^4 \cdot 2}{H} = 0,0528H^3$$



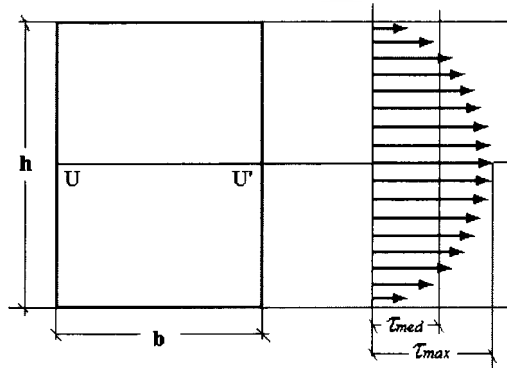
2.7. TENSIÓN CORTANTE EN LA FLEXIÓN

Vimos que la resultante en la sección S era equilibrada con el efecto del cortante V, que daba lugar a su vez a la tensión cortante la cual se distribuye de forma parabólica, alcanzando su valor máximo en la línea neutra y nulo en los extremos.

Para una sección rectangular tenemos:

$$\tau_{med} = \frac{V}{A} = \frac{V}{b \cdot h}$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \tau_{med} = \frac{3V}{2b \cdot h}$$



Propiedades

$$\tau_{max} \left\{ \begin{array}{l} \text{Máxima en la línea neutra} \\ \text{Nula en las fibras extremas} \\ \text{(sección rectangular)} \end{array} \right.$$

Sección circular:

$$\tau_{med} = \frac{V}{A} = \frac{V}{\pi d^2 / 4} = \frac{4V}{\pi d^2}$$

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \tau_{med} = \frac{3V}{2 \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{16V}{3\pi d^2}$$

Perfil doble T:

$$\tau_{med} = \tau_{max(alma)} = \frac{V}{A_{alma}}$$



Perfiles de acero IPN

Las alas apenas soportan tensión cortante por lo que se usa esta aproximación

Para el cálculo de cualquier viga emplearemos la expresión general de Colignon:

$$\tau_i = \frac{V_i \cdot M_{ei}}{b \cdot I_{nn}} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_i = \text{valor del cortante en la sección "i"}. \\ M_{ei} = \text{Momento estático máximo de la sección "i" respecto a la línea neutra.} \\ b = \text{ancho de la sección en la línea neutra.} \\ I_{nn} = \text{m.d.i. de la sección respecto a la línea neutra.} \end{array} \right.$$

Para comprobar una viga a cortante lo haremos con la expresión

$$\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot M_{e(max)}}{b \cdot I_{nn}} \leq \tau_{adm}$$

RESUMEN CÁLCULO DE VIGAS

1. Conocer estado de cargas, y tipo de material a emplear (para conocer tensiones admisibles).
2. Reacciones en los apoyos.
3. Diagramas de sollicitaciones.
4. Valores máximos de M y V (valor absoluto) y su situación.
5. Determinamos W_x mínimo necesario.

$$W_x = \frac{|M_{max}|}{\sigma_x} \quad \sigma_x = \sigma_{adm} = \sigma_{max} \quad (\text{según material})$$

Si nos dan coeficiente de seguridad "n", limitar

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{adm}}{n}$$

6. W_x determina las dimensiones de la sección
7. Comprobamos la viga a cortante, localizando V_{max} , obteniendo τ_{max} (aplicando Colignon) y comprobando que,

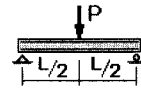
$$\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot M_{e(max)}}{b \cdot I_{nn}} \quad \tau_{max} \leq \tau_{trab} = \tau_{adm}$$

Esta comprobación es superflua en vigas uniformes macizas, donde la tensión normal máxima es muy superior a la tensión cortante máxima. Sin embargo la obliga realizar algunos reglamentos. En tal caso y si no se cumple la comprobación anterior, incrementamos las dimensiones de la sección y volvemos al paso 5 determinando otra vez W_x . Cuando se cumpla habremos terminado.

Ejemplo 2.5.

Dimensionar la sección circular de la viga mostrada en la figura, si $L = 1,2$ m y $P = 25$ kN. No hace falta comprobación a cortante.

Datos: $\sigma_{adm} = 2400$ Kg/cm² $n = 2$



El momento flector máximo se localiza en el centro y toma el valor:

$$M_{max} = P \cdot L/2 = 25 \cdot 0,6 = 15 \text{ kN} \cdot \text{m} = 1500 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

El módulo resistente mínimo necesario será:

$$W_x = \frac{M_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{1500}{\frac{2400}{2}} = 1,25 \text{ cm}^3$$

$$W_{x(SC)} = \frac{\pi D^3}{32} \geq 1,25 \rightarrow D = 2,33 \text{ cm} \rightarrow R \geq 1,65 \text{ cm}$$

Ejemplo 2.6.

Dimensionar la viga del ejemplo 2.2., supuesta de un acero de $\sigma_{adm} = 166,67$ MPa; $\tau_{adm} = 10$ MPa, tomando un coeficiente de seguridad de 2, para los siguientes casos:

- sección rectangular de $h/b = 5$ cm
- sección circular de radio R
- seleccionar perfiles⁹ IPN, IPE Y UPN. Comprobar a cortante.

Pasos:

- Los valores máximos de solicitaciones nos ayudan a localizar la sección más peligrosa en $x = 4$ m, encontrándose los valores:

⁹ En el Anexo 2 se muestran tablas de perfiles normalizados.

$$M_{\max} = 26,40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$V_{\max} = 6,6 \text{ kN}$$

2. Determinamos W_x mínimo necesario para cualquier tipo de sección:

Como $n = 2$ coeficiente de seguridad "n", limitaremos σ_{\max} a:

$$\frac{\sigma_{adm}}{n} = \sigma_{\max} = \frac{166,67 \text{ MPa}}{2} = 83,3 \text{ MPa}$$

$$W_x = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{26,40 \cdot 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}}{83,3 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2} = 0,00031692 \text{ m}^3 = 316,92 \text{ cm}^3$$

Dicho módulo nos permite dimensionar la sección según el tipo que sea:

Para los casos pedidos:

a) Sección rectangular $h/b = 5 \text{ cm}$

$$\left. \begin{aligned} W_{xSR} &= \frac{b \cdot h^2}{6} = 316,92 \text{ cm}^3 \\ \frac{h}{b} &= 5 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} b &= 4,23 \text{ cm} \\ h &= 21,18 \text{ cm} \end{aligned}$$

b) Sección circular de radio R

$$\left. \begin{aligned} W_{xSC} &= \frac{\pi \cdot D^3}{32} = 316,92 \text{ cm}^3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} D &= 14,78 \text{ cm} \\ R &= 7,39 \text{ cm} \end{aligned}$$

c) Selección de perfiles IPN, IPE y UPN

Vamos a tablas de perfiles normalizados, buscamos $W_x \geq 316,92 \text{ cm}^3$, y obtenemos los siguientes perfiles:

IPN	$W_x = 354 \text{ cm}^3 \rightarrow$ IPN 240
IPE	$W_x = 324 \text{ cm}^3 \rightarrow$ IPE 240
UPN	$W_x = 371 \text{ cm}^3 \rightarrow$ UPN 260

3. Para terminar comprobaremos la viga a cortante

a) Comprobación sección rectangular

Los valores a aplicar en la fórmula de Colignon son:

$$V_{max} = 6,6 \text{ kN}$$

$$M_e^{max} = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = 4,23 \cdot 10,59 \cdot \frac{10,59}{2} = 237,19 \text{ cm}^3$$

$$b = 4,23 \text{ cm}$$

$$I_{nn} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{4,23 \cdot 21,18^3}{12} = 3349,17 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot M_e^{max}}{b \cdot I_{nn}} = \frac{6,6 \cdot 237,19}{4,23 \cdot 3349,17} = 0,11 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 1,1 \text{MPa} \leq \tau_{adm} = 10 \text{MPa}$$

También

$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3 \cdot 6,6}{2 \cdot 4,23 \cdot 21,18} = 0,11 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

b) Comprobación sección circular¹⁰

Los valores a aplicar en la fórmula de Colignon son:

$$V_{max} = 6,6 \text{ kN}$$

$$M_e^{max} = \frac{2}{3} R^3 = \frac{2}{3} 7,39^3 = 269,05 \text{ cm}^3$$

$$b = D = 14,78 \text{ cm}$$

$$I_{nn} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 14,78^4}{64} = 2342,43 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot M_e^{max}}{b \cdot I_{nn}} = \frac{6,6 \cdot 269,05}{14,78 \cdot 2342,43} = 0,05 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 0,5 \text{MPa} \leq \tau_{adm} = 10 \text{MPa}$$

$$\text{También } \tau_{max} = 1,33 \frac{V}{A} = 1,33 \frac{6,6}{\pi 7,39^2} = 0,05 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 0,5 \text{MPa}$$

c) Comprobación perfiles IPN, IPE y UPN

¹⁰ Desarrollo de las expresiones de los Momentos Estáticos en "Resistencia de Materiales. L. Ortiz Berrocal (Págs 204-208)", 2ª Edición.

Los valores a aplicar en la fórmula de Colignon son:

El Momento estático se obtiene de las tablas. Seleccionaremos el mayor de los tres ejes.

IPN 240

$$V_{max} = 6,6 \text{ kN}$$

$$M_e^{max} = S_{x(240)} = 206 \text{ cm}^3$$

$$b = e_{(240)} = r_{(240)} = 8,7 \text{ mm}$$

$$I_{nn} = I_{xx(240)} = 4250 \text{ cm}^4$$

$$\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot M_e^{max}}{b \cdot I_{nn}} = \frac{6,6 \cdot 206}{0,87 \cdot 4250} = 0,36 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 3,6 \text{ MPa} \leq \tau_{adm} = 10 \text{ MPa}$$

IPE 240

Según tablas tenemos

$$V_{max} = 6,6 \text{ kN}$$

$$M_e^{max} = S_{x(240)} = 183 \text{ cm}^3$$

$$b = e_{(240)} = 6,2 \text{ mm}$$

$$I_{nn} = I_{xx(240)} = 3890 \text{ cm}^4$$

$$\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot M_e^{max}}{b \cdot I_{nn}} = \frac{6,6 \cdot 183}{0,62 \cdot 3890} = 0,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 5 \text{ MPa} \leq \tau_{adm} = 10 \text{ MPa}$$

UPN 260

Según tablas tomamos los siguientes valores,

$$V_{max} = 6,6 \text{ kN}$$

$$M_e^{max} = S_{x(260)} = 221 \text{ cm}^3$$

$$b = e_{(260)} = 10 \text{ mm}$$

$$I_{nn} = I_{xx(240)} = 4820 \text{ cm}^4$$

$$\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot M_e^{max}}{b \cdot I_{nn}} = \frac{6,6 \cdot 221}{1 \cdot 4820} = 0,30 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 3 \text{ MPa} \leq \tau_{adm} = 10 \text{ MPa}$$

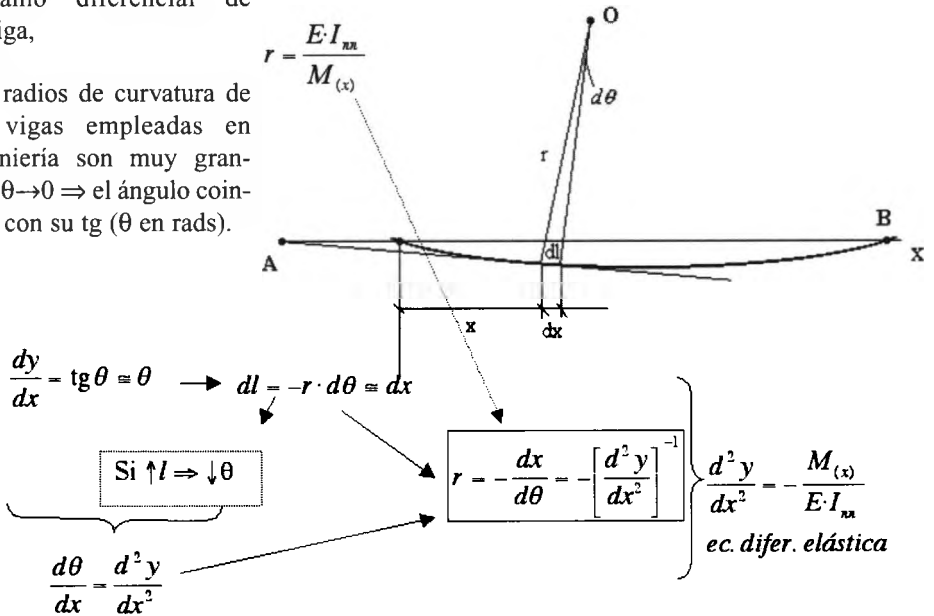
Como vemos las tensiones cortantes de trabajo están por debajo en todos los casos de la máxima admisible. En caso contrario nos iríamos a un aumento de sección y/o al perfil inmediato mayor en tablas y volveríamos a comprobarlo hasta garantizar su resistencia.

Así pues, todos los casos comprobados están bien diseñados o seleccionados a flexión y a cortante.

2.8. ELÁSTICA O DEFORMADA

- Representa el estado en que queda la viga después de la deformación.
- Para su desarrollo tendremos en cuenta el Diagrama de Momentos Flectores teniendo en cuenta que:
 - ✓ En los tramos en los que $M > 0$ la elástica es cóncava hacia abajo \cup , y viceversa.
 - ✓ Cuando M pase de ser $+$ a $-$ o viceversa, la sección de cambio representará un punto de inflexión en la elástica.
 - ✓ Siempre pasará por los apoyos, en los cuales habrá giro (la tangente formará un ángulo). En el empotramiento es imposible el giro \Rightarrow la tangente tiene la dirección de la viga.
- Radio de curvatura en tramo diferencial de viga,

Los radios de curvatura de las vigas empleadas en ingeniería son muy grandes, $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow$ el ángulo coincide con su tg (θ en rads).



CÁLCULO DE VIGAS POR EL MÉTODO DE LA FLECHA MÁXIMA

Es frecuente que una viga dimensionada para resistir las cargas, según el método anterior basado en la expresión de Navier presente deformaciones inadmisibles. Por tanto para diseñar la viga con una flecha máxima aceptable necesitaremos:

- × Conocer el sistema viga-carga (longitud viga y/o ubicación carga y/o valor carga)
- × Tabla de expresiones de deformaciones generales incluida la máxima¹¹
- × Relación de valores máximos flecha-luz (F_{max}) bajo la acción de una determinada carga (ubicación y/o valor).

Tabla de Valores máximos de la relación flecha/luz bajo la acción de la carga característica¹²

TIPO DE VIGA	Flecha/luz
Vigas o viguetas de cubierta	1/250
Vigas hasta 5 m de luz y viguetas de forjado que no soporten muros de fábrica	1/300
Vigas de más de 5 m de luz, que no soporten muros de fábrica	1/400
Vigas y viguetas de forjado que soporten muros de fábrica	1/500
Ménsulas, con la flecha medida en el extremo libre	1/300

Procedimiento de cálculo:

1. Cálculo de la flecha admisible y_{adm}

$$y_{adm} = F_{max} \cdot L$$

2. Búsqueda en tablas de la expresión de la flecha máxima $y_{max} = f(L, P, I, E)$, según sistema viga-carga

3. Hacemos,

$$\frac{y_{max}}{n} = y_{adm} = f(L, P, I, E)$$

¹¹ Se adjunta dicha tabla en Anexo 3.

¹² Datos obtenidos de normativa de construcción en vigencia.

4. Podemos obtener una variable conocida las otras tres. Así, tendremos:

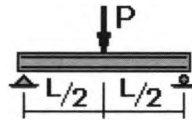
Si despejamos $I \rightarrow$ Obtenemos dimensión sección o perfil directo de tablas

Si despejamos $P \rightarrow$ Obtenemos carga máxima que soporta la viga

Si despejamos $L \rightarrow$ Obtenemos longitud máxima que puede tener la viga

Ejemplo 2.7.

Para la viga de cubierta mostrada de acero calcular:



a) Carga máxima P que puede soportar la viga si la sección es un IPN 240.

b) Longitud máxima que puede tener la viga si duplicamos la carga del caso anterior.

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2 = 2,06 \cdot 10^5 \text{ MPa} \quad (1 \text{ MPa} = 10,20 \text{ Kg/cm}^2)$$

a) P_{\max} para IPN 240

Cálculo de la flecha admisible y_{adm}

$$y_{\text{adm}} = F_{\max} \cdot L = \frac{1}{250} 1,2 = 0,0048 \quad m = 0,48 \quad \text{cm}$$

Según tabla la expresión de la flecha máxima es
$$y_{\max} = -\frac{P_{\max} \cdot L^3}{48E \cdot I}$$

La máxima carga la soportará con el mayor momento de inercia. Según tablas de perfiles para IPN 240 $I_{\text{máx}} = I_x = 4250 \text{ cm}^4$. Es importante destacar que la viga solo deberá trabajar a flexión en el eje OX. Si no supiéramos respecto a eje que va a flectar la viga escogeríamos el momento inercia axial mínimo para ponernos en el caso más desfavorable.

Así, suponiendo que la viga flecta exclusivamente en OX tenemos,

Para $n = 1$, y operando en kN y cm tenemos,

$$\frac{P_{\max} \cdot L^3}{48E \cdot I} = 0,48$$

$$P_{\max} = \frac{0,48 \cdot 48 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 4250}{120^3} = 119000 \quad \text{kN}$$

b) L_{max} para 238000 kN?

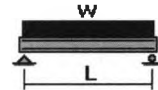
$$\frac{P_{max} \cdot L^3}{48E \cdot I} = \frac{L_{max}}{250}$$

$$L_{max} = \sqrt[3]{\frac{48 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 4250}{238000 \cdot 250}} = 84,85 \text{ cm}$$

Ejemplo 2.8.

Para la viga de cubierta mostrada de aluminio 2014-T6 calcular:

a) Diámetro si la sección es circular y soporta una carga máxima de 4 kN/m.



b) Carga máxima distribuida W que puede soportar la viga si la sección es un rectángulo de base 20 mm y altura 100 mm,

Datos:

$$E = 73,1 \text{ MPa} = 73,1 \text{ N/mm}^2$$

$$(1 \text{ MPa} = 10,20 \text{ Kg/cm}^2 = 1 \text{ N/mm}^2)$$

$$\sigma_{adm} = 276 \text{ MPa}$$

$$L = 120 \text{ mm.}$$

a) D para 4 kN?

La flecha admisible y_{adm} será:

$$y_{adm} = F_{max} \cdot L = \frac{1}{250} 1,2 = 0,0048 \text{ m} = 0,48 \text{ cm}$$

Según tabla la expresión de la flecha máxima es,

$$y_{adm} = y_{max} = -\frac{5w_{max} \cdot L^4}{384E \cdot I}$$

Asimismo el mdi será:

$$I_{xx} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

Sustituyendo en la expresión obtenida de tablas Anexo 3, y operando en N y mm tenemos,

$$y_{adm} = y_{max} = 4,8 = -\frac{5 \cdot 4000 \cdot 120^4}{384 \cdot 73,1 \cdot \frac{\pi \cdot D^4}{64}} \rightarrow D = 234,22 \text{ mm}$$

b) Volviendo a la expresión

$$y_{adm} = y_{max} = -\frac{5w_{max} \cdot L^4}{384E \cdot I}$$

La máxima carga flectando respecto a OX será con el momento de inercia I_{xx} que es:

$$I_{xx} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 10^3}{12} = 166,66 \text{ mm}^4$$

Así tenemos operando en mm y N,

$$w_{max} = -\frac{384E \cdot I \cdot y_{max}}{5L^4} = -\frac{384 \cdot 73,1 \cdot 166,67 \cdot 4,8}{5 \cdot 120^4} = -0,021 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = -21 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

TEMA 3

FLEXIÓN COMPUESTA PANDEO



ÍNDICE

3.1. Introducción.

3.2. Flexión combinada con tracción o compresión.

3.3. Carga excéntrica en columnas rígidas.

3.4. Pandeo.

3.1. INTRODUCCIÓN

PRESENTACIÓN

En este tema estudiaremos **conceptos fundamentales** sobre flexión compuesta acompañada con tracción o compresión, analizándola particularmente para el caso de cargas aplicadas excéntricamente sobre columnas rígidas. Aplicaremos dichos conceptos al diseño.

Analizaremos también la flexión lateral o pandeo, y lo aplicamos al diseño de columnas de cierta esbeltez.

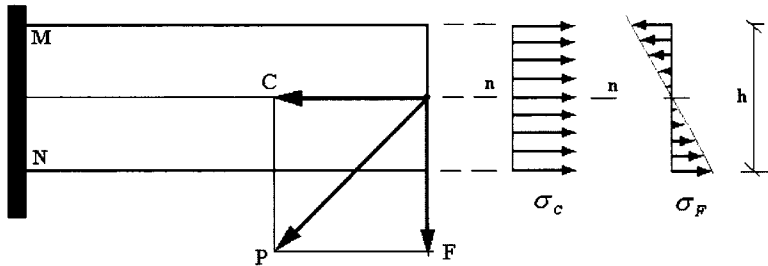
OBJETIVOS

Como objetivos académicos a conseguir con el aprovechamiento del tema tenemos:

- Conocer la flexión acompañada con tracción o compresión, y la distribución de tensiones total que conlleva.
- Saber dimensionar una viga sometida a flexión acompañada de tracción.
- Tener claro el concepto de pandeo y su importancia en el diseño de columnas que trabajan a compresión.
- Saber dimensionar una columna a pandeo por el Método de Euler o por el Método de los coeficientes w .

3.2. FLEXIÓN COMBINADA CON TRACCIÓN O COMPRESIÓN

Sea la barra empotrada de longitud l ,



Hipótesis: rigidez suficiente \rightarrow no pandeo

$$\sigma_c = -\frac{C}{A} \quad \sigma_F = \pm \frac{F \cdot l \cdot y}{I_x}$$

Fuerza P:

Componente axial \rightarrow compresión $\rightarrow \sigma_c$

Componente \perp eje \rightarrow flexión $\rightarrow \sigma_F$

SOLICITACIÓN COMPUESTA:
COMPRESIÓN + FLEXIÓN

$$M(x) = -F \cdot x \rightarrow M_{\max} = -F \cdot l \text{ (sección del empotramiento MN)}$$

$$\sigma_x = \sigma_c + \sigma_F = -\frac{C}{A} - \frac{F \cdot l \cdot y}{I_{nn}}$$

Valores máximos dentro de dicha sección MN para $y = \pm h/2$

$$\sigma_x = \sigma_c + \sigma_F = -\frac{C}{A} \pm \frac{F \cdot l \cdot h}{2 I_x} = -\frac{C}{A} \pm \frac{F \cdot l}{W_z}$$

Tensión máxima de compresión en el punto N

$$\sigma_{\max C} = -\left(\frac{C}{A} + \frac{F \cdot l \cdot h}{2 I_x}\right) = -\left(\frac{C}{A} + \frac{F \cdot l}{W_z}\right)$$

Tensión máxima de tracción o mínima de compresión en el punto M

$$\sigma_{\min TC} = -\frac{C}{A} + \frac{F \cdot l \cdot h}{2 I_x} = -\frac{C}{A} + \frac{F \cdot l}{W_z}$$

3.3. CARGA EXCÉNTRICA EN COLUMNAS RÍGIDAS

Es un caso muy similar al anterior, frecuente en multitud de aplicaciones del tipo: bancadas para máquinas, cimentaciones de básculas de alumbrado, etc.

Carga P aplicada con excentricidad "e" = P + P·e aplicado en eje

P produce compresión

$$\sigma_C = -\frac{P}{A} = -\frac{P}{b \cdot h}$$

P·e produce flexión

$$\sigma_F = \frac{-P \cdot e \cdot y}{I_{zz}} = \frac{-12P \cdot e \cdot y}{h \cdot b^3}$$

I_{zz} = m.d.i. respecto a la línea neutra zz

Para una fibra paralela a una distancia "y" de zz:

$$\sigma_x = \sigma_C + \sigma_F = -\frac{P}{b \cdot h} \pm \frac{12P \cdot e \cdot y}{b \cdot h^3}$$

Suponemos

$$|\sigma_1| < |\sigma_2|$$

Valor máximo para y = b/2 (punto D)

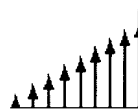
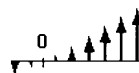
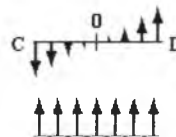
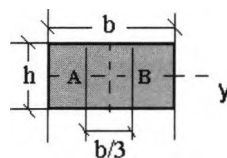
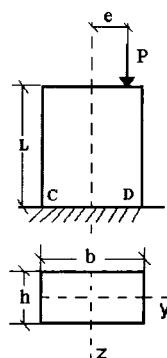
$$\sigma_{XT} = \sigma_C + \sigma_F = -\frac{P}{b \cdot h} - \frac{12P \cdot e \cdot b}{2h \cdot b^3} = -\frac{P}{b \cdot h} \left[1 + \frac{6e}{b} \right]$$

En el extremo izquierdo C la tensión total es:

$$\sigma_{XT} = \sigma_C + \sigma_F = -\frac{P}{b \cdot h} + \frac{12P \cdot e \cdot b}{2h \cdot b^3} = \frac{P}{b \cdot h} \left[1 - \frac{6e}{b} \right]$$

Para que σ_T sea negativa siempre (compresión)

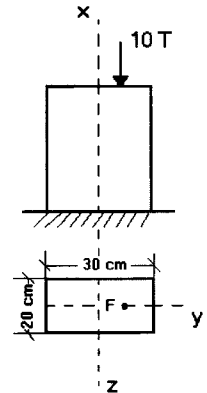
$$\left[1 - \frac{6e}{b} \right] < 0 \rightarrow e < \frac{b}{6} \quad \text{zona } b/3$$



Ejemplo 3.1.

La figura muestra un pilar empotrado de longitud lo suficientemente corta como para no pandear. Dicho pilar se encuentra sometido a una carga de compresión de 10T aplicada en F ($y = 7,5$ cm). Se pide hallar:

- Tensiones normales máximas indicando si son a tracción o a compresión y localización
- Situación de la línea neutra



Resolución:

- Según la localización de la fuerza de 10T, ésta produce un momento respecto al eje de simetría que hace que la columna flexe hacia la derecha. Ello produce que la zona de la izquierda trabaje a tracción y la de la derecha a compresión.

Además, debido a la carga todo el pilar está sometido a compresión. Las tensiones normales máximas se darán en los extremos derecho e izquierdo.

Así,

$$\sigma_{extr.izq} = \frac{M}{I_z} y_{max} - \frac{P}{S} = \frac{75000}{45000} 15 - \frac{10000}{600} = 8,33 \text{ Kg}\cdot\text{cm}^{-2} \text{ (traccion)}$$

$$\sigma_{extr.dcho} = \frac{M}{I_z} y_{max} + \frac{P}{S} = \frac{75000}{45000} 15 + \frac{10000}{600} = 41,66 \text{ Kg}\cdot\text{cm}^{-2} \text{ (compresion)}$$

$$M = 10000 \cdot 7,5 = 75000 \text{ Kg}\cdot\text{cm}$$

$$I_{zz} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45000 \text{ cm}^4$$

$$S = 20 \cdot 30 = 600 \text{ cm}^2$$

Vemos como una zona trabaja a tracción y otra a compresión.

- La situación de la línea neutra estará en la parte de la izquierda (según distribución de tensiones) y será tal que la tensión normal es cero en una de tales fibras. Podemos calcularla como sigue.

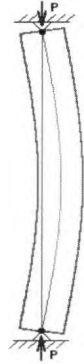
$$\sigma_{izq} = \frac{M}{I} y - \frac{P}{S} = \frac{75000}{45000} y + \frac{10000}{600} = 0 \text{ Kg}\cdot\text{cm}^{-2} \text{ (traccion)} \Rightarrow y = 10 \text{ cm izq}$$

3.4. PANDEO

DEFINICIÓN

Fenómeno de inestabilidad elástica que acompaña siempre y es característico de la compresión excéntrica en piezas esbeltas

También conocido como “flexión lateral”



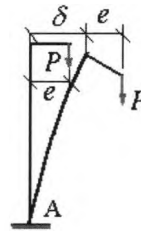
Ejemplo práctico

Sea radio de rueda de bicicleta de $S = 1 \text{ mm}^2$
(sección circular de radio R)

$$\sigma_R = 16 \text{ N/mm}^2 \text{ (tensión rotura material)} \rightarrow P = 16 \text{ N}$$

Sin embargo al someterlo a compresión rompe a 4 N

¿Qué paso, porqué rompió?



Rompió porque sufrió:

$$\text{Compresión (cte.) + Flexión } \uparrow\uparrow (e\uparrow) \longrightarrow \sigma = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot e}{I_{nn}} y$$

En la sección con M_{max} y dentro de ésta en una fibra a $y_{max} = R$, se alcanzó una tensión normal de trabajo a compresión máxima que superó a la de rotura o límite:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}}{I} y_{max} > \sigma_R \longrightarrow \boxed{\text{ROTURA POR PANDEO}}$$

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_R}{n}$$

ESBELTEZ O GRADO DE ESBELTEZ

Es la relación entre la Longitud y el Radio de giro k_m

$$\lambda = \frac{L}{k_m}$$

Si $\lambda \uparrow \Rightarrow$ flexión $\uparrow \Rightarrow \sigma_{\text{flexión}} \uparrow \Rightarrow$ la rotura por pandeo se alcanza con menos carga (p.e. 2 N)

Si $\lambda \downarrow \Rightarrow$ flexión lateral $\downarrow \Rightarrow \sigma_{\text{flexión}} \downarrow \Rightarrow$ la rotura por pandeo se alcanza con más carga (p.e. 8 N)

Si sigue disminuyendo llega un punto en el que hay que aplicar toda la carga de 16 N y si se supera tenemos



ROTURA POR COMPRESIÓN.
YA NO ROMPE POR PANDEO.

El PANDEO es un fenómeno crítico que ocurre por encima de:

- cierta longitud \longrightarrow Longitud Crítica de Pandeo (L_{CP})
(carga constante)
- cierto valor de carga \longrightarrow Carga Crítica de Pandeo (P_{CP})
(longitud constante)

BARRA COMPRIMIDA AXIALMENTE. P_{CP}

☞ P_{CP} es la carga límite supuesta aplicada en el eje sin excentricidad que si se supera produce el pandeo

☞ P_{Padm} es la carga admisible o de trabajo de la barra

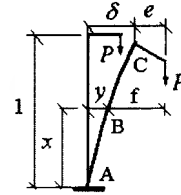
☞ n_p = coeficiente de seguridad al pandeo

$$P_{Padm} = \frac{P_{CP}}{n_p}$$

- ✓ es algo mayor que n (seguridad por resistencia)
- ✓ considera efectos como curvatura inicial de la barra, excentricidad de la carga P, etc.

CARGA CRÍTICA. FÓRMULA DE EULER

Sea la barra empotrada sometida a carga P con excentricidad "e", que se deforma como se aprecia en la figura.



Según la ecuación de la elástica y la figura:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{-M}{E \cdot I_{mn}} \rightarrow E \cdot I_{mn} \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \\ M &= -P(\delta + e - y) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} E \cdot I_{mn} \frac{d^2 y}{dx^2} &= -P(\delta + e - y) \\ y'' &= \frac{P}{E \cdot I_{mn}} (\delta + e - y) \end{aligned}$$

EL PANDEO OCURRIRÁ
EN EL PLANO DE MENOR
RIGIDEZ $I_{nn} = I_{\min}$

Denominando a k

$$k^2 = \frac{P}{E \cdot I_{mn}} \Rightarrow y'' = k^2 (\delta + e - y) \rightarrow y'' + k^2 y = k^2 (\delta + e)$$

Obtenemos ecuación diferencial lineal de 2º orden, cuya solución general es

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 \cdot \operatorname{sen} kx + C_2 \cdot \operatorname{cos} kx + (\delta + e) \\ \text{Condiciones de contorno:} \\ x=0, y=0 &\Rightarrow C_1 = -(\delta + e) \\ x=0, y'=0 &\Rightarrow 0 = k \cdot C_1 \rightarrow C_1 = 0 \end{aligned} \right\} y = (\delta + e) \cdot (1 - \operatorname{cos} kx)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Haciendo:} \\ x=L \\ y=\delta \end{aligned} \right\} \delta = (\delta + e) \cdot (1 - \operatorname{cos} kL) \Rightarrow \delta = \frac{e(1 - \operatorname{cos} kL)}{\operatorname{cos} kL} \downarrow$$

$$y = \frac{e(1 - \operatorname{cos} kx)}{\operatorname{cos} kL}$$

Rotura por Pandeo:

$$\delta \rightarrow \infty \Rightarrow \operatorname{cos} kL = 0 \Rightarrow kL = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = \dots = \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

Entonces:

$$k = \sqrt{\frac{P_{CP}}{E \cdot I_{mn}}} = \frac{(2n+1)\pi}{2} \Rightarrow P_{CP} = \frac{E \cdot I_{mn} \cdot n^2}{4L^2} (2n+1)^2$$

Observación: la columna rompe por pandeo mucho antes de $\delta \rightarrow \infty$

En la práctica interesa el valor mínimo de P_{CP} que produce el pandeo ($n = 0$)

$$P_{CP} = \frac{E \cdot I_{min} \cdot \pi^2}{4L^2} \quad \text{Fórmula de EULER}$$

Euler desarrolló su fórmula a partir de una columna ideal:

- ❖ perfectamente derecha antes de cargarla
- ❖ de material homogéneo
- ❖ con la carga aplicada en el eje axial



PIEZA IDEAL

DISCUSIÓN SOBRE LA FÓRMULA DE EULER

Para llegar a esta expresión partimos de Ecuación diferencial de la elástica. Para que tenga validez:

- ✓ El material debe seguir la Ley de Hooke
- ✓ Las deformaciones deben ser pequeñas
- ✓ Se ha de cumplir la Hipótesis de las secciones planas (deformación debida al cortante despreciable)

Mucho antes de llegar a rotura por pandeo estas condiciones no se cumplen:

- ✗ La fórmula de Euler no tiene validez matemática
- ✗ No obstante despreciaremos tales inconvenientes y la usaremos para calcular P_{CP}

GENERALIZACIÓN DE LA FÓRMULA DE EULER

La fórmula de Euler desarrollada para el soporte empotramiento-libre podemos desarrollarla para diferentes tipos de soportes. Si lo hacemos tenemos diferentes expresiones que se pueden generalizar como sigue:

Consideramos la longitud de pandeo (distancia entre dos puntos consecutivos de inflexión),

$$L_{CP} = K_e \cdot L$$

K_e = coeficiente de pandeo según tipo de soporte (coeficiente de reducción de la longitud de la barra según tipo de extremos). Tabulado en tabla siguiente.

L_{CP} = longitud (crítica) de pandeo según sea K_e para la cual se da P_{CP}

Tenemos una expresión general como sigue:

$$P_{CP} = \frac{E \cdot I_{min} \cdot \pi^2}{L_{CP}^2}$$

Apoyos	L_p	K_e
Articulación - Articulación	L	1
Articulación - Empotramiento	$L \cdot 2^{-1/2}$	0,7
Empotramiento - Empotramiento	L/2	0,5
Empotramiento - Extremo libre	2L	2
Articulación - Móvil guiado	$L \cdot 2^{1/2}$	$2^{1/2}$
Empotramiento - Móvil guiado	L/2	0,5

CONSIDERANDO EL PANDEO EN EL DISEÑO

Interesa $P_{CP} \uparrow$

según expresión se consigue: $P_{CP} = \frac{E \cdot I_{min} \cdot \pi^2}{L_p^2}$

$I_{min} \uparrow \Rightarrow$ material lo más lejos de ejes
Perfiles con alto valor de I_{min}

$L_p \downarrow \Rightarrow$ p.e. arrostros

E apenas varía de un acero a otro ni con tratamientos térmicos

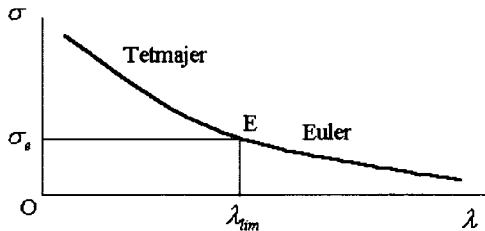
FÓRMULA DE EULER PARA LA TENSIÓN CRÍTICA DE UNA COLUMNA

$$\sigma_{CP} = \frac{P_{CP}}{S} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{S \cdot L_p^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \frac{I_{min}}{S}}{L_p^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot k_{min}^2}{L_p^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{L_p^2 / k_{min}^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Si $\lambda \uparrow \Rightarrow L_p \uparrow$ ó $k_{min} \downarrow \Rightarrow I_{min} \downarrow$ (con $S = cte$) $\Rightarrow \sigma_{CP} \downarrow$ (con el consiguiente riesgo)

Representación gráfica. Hipérbola de Euler.

La fórmula de Euler sólo es válida para la zona elástica ($\lambda > \lambda_{lim}$)



Según el material:

Acero:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_e = 200 \text{ MPa} \\ E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \end{array} \right\} \lambda_{min} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} = 100$$

Duraluminio:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_e = 180 \text{ MPa} \\ E = 0,7 \cdot 10^5 \text{ MPa} \end{array} \right\} \lambda_{min} = 62$$

Para la zona plástica ($\lambda < \lambda_{lim}$) se aplica la Fórmula de Tetmajer:

$$\sigma_{CP} = (3100 - 11,4 \frac{l}{k_{min}}) \text{ Kg/cm}^2$$

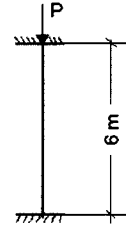
Ejemplo 3.2.

Para el pilar de la figura formado por un perfil IPN-260, determinar la máxima carga de compresión admisible para que no pandee.

Datos:

$$\sigma_{adm} = 1200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$



Por el tipo de apoyos (biempotrado) sabemos que $k_p = 0,5$

Nos vamos a las tablas de perfiles IPN y nos centramos en el IPN 260, obteniendo:

$$k_{min} = i_y = 2,32 \text{ cm}$$

$$S = 53 \text{ cm}^2$$

$$\lambda = \frac{L_p}{k_{min}} = \frac{0,5 \cdot 600}{2,32} = 129,31 > 100 \Rightarrow \text{EULER}$$

$$P_{Padm} = P_{CP} = \sigma_{Padm} \cdot S = \sigma_{Padm} \cdot S = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} S = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{129,31^2} \cdot 53 = 65694,75 \text{ Kg}$$

Nota: Este ejercicio también se podría haber resuelto aplicando la expresión de la carga crítica de Euler.

MÉTODO DE LOS COEFICIENTES W PARA EL CÁLCULO DE BARRAS COMPRIMIDAS A PANDEO

Método más utilizado, y aplicable a todos los casos de λ

w = coeficiente de seguridad para cada valor de λ término que caracteriza el pandeo

$$w \frac{P_{Padm}}{S} \leq \sigma_{adm}$$

si $w = 1$ compresión axial de piezas cortas

PANDEO $w > 1 \Rightarrow P_{adm} \downarrow$

σ_{adm} = cte., tensión admisible del material a tracción/compresión(dato)

σ_{Padm} = $f(\lambda)$, tensión admisible del material a pandeo

Podemos tabular $w = f(\text{material}, \lambda)^{13}$

Teníamos :

$$\sigma_{CP} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad \sigma_{Padm} = \frac{\sigma_{CP} \cdot S}{n} = \frac{P_{Padm}}{S}$$

Así,

$$w \frac{P_{Padm}}{S} = \sigma_{Padm} \rightarrow w \frac{\frac{\sigma_{CP} \cdot S}{n}}{S} = \sigma_{Padm} \rightarrow w \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2 \cdot n} = \sigma_{Padm}$$

$$w = \frac{n \cdot \sigma_{Padm}}{\pi^2 \cdot E} \lambda^2 = f(\lambda)$$

Existen dos tipos principales de problemas a resolver de pandeo:

- Dada la configuración de una columna y su forma de fijación, determinar la carga P_{adm} que puede soportar.
- Conocida la carga, la longitud y el sistema de fijación del pilar, encontrar la sección adecuada.

Ejemplo 3.3.

Resolver el ejemplo 3.2. para una longitud de pilar de 3,5 m. Considerar Acero F622.

$$\lambda = \frac{L_P}{k_{min}} = \frac{0,5350}{2,32} = 75,43 < 100 \Rightarrow \text{coeficientes } w$$

$$w \frac{P_{Padm}}{S} \leq \sigma_{Padm}$$

Según tabla coeficientes w , obtenemos para $\lambda = 75,4 \rightarrow w = 1,38$ (traspolando)

Las columnas verticales muestran las decenas y la horizontal las unidades. Así, para localizar nuestro valor vamos a la columna vertical de 70 y buscamos la celda que interseca con 5, obteniendo 1,37. Como tenemos 4 décimas nos quedamos a medias del 6 cuyo valor de w es 1,39, quedando el valor final a medias de los dos, estos es 1,38

$$1,38 \frac{P_{Padm}}{S} \leq \sigma_{Padm} \rightarrow P_{Padm} \leq \frac{\sigma_{Padm}}{w} S \leq \frac{1200}{1,38} 53,3 \leq 46347,82 \text{ Kg}$$

¹³ Véase Tipo de Tablas de Coeficientes w en Anexo 4.

TEMA 4

TORSIÓN

ÍNDICE

- 4.1. Introducción.
- 4.2. Teoría elemental de la torsión pura en barras cilíndricas.
- 4.3. Tensión cortante en la torsión.
- 4.4. Cálculo de árboles de transmisión.
- 4.5. Torsión acompañada de flexión.

4.1. INTRODUCCIÓN

PRESENTACIÓN

Este tema está dedicado al estudio de la torsión en ejes o barras cilíndricas, y al cálculo de árboles de transmisión.

OBJETIVOS

Como objetivos académicos a conseguir con el aprovechamiento del tema tenemos:

- Comprender la Teoría Elemental de la Torsión, con todos los parámetros que intervienen en la misma (ángulos, tensiones, etc.)
- Entender la relación entre tensión cortante y momento torsor (valor, localización, distribución, etc.)
- Saber calcular un árbol de transmisión ya sea macizo o hueco, sometido a torsión pura o a flexotorsión.

INTRODUCCIÓN CONCEPTUAL

Definiciones de Torsión

- ✗ “acción de retorcerse”, “girar sobre sí mismo”
- ✗ “efecto de aplicarle a un eje dos pares iguales y opuestos en cada uno de los extremos”

Momento o Par torsor

M_T es un momento de paralelo al eje longitudinal, de sentido según regla del sacacorchos, y cuyo módulo vale como veremos:

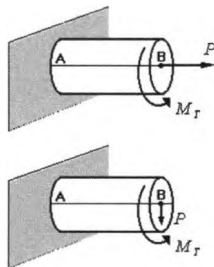
$$M_T = \frac{H}{w} = G \cdot \theta \cdot \frac{\pi D^4}{32}$$

Elementos sometidos a torsión

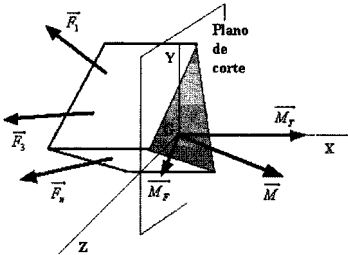
- ✗ Árboles de máquinas que transmiten potencia (Cigüeñales, árbol de la hélice del barco, etc.)
- ✗ Elementos estructurales con cargas que no actúan en ejes de simetría

Solicitaciones que acompañan a la torsión

- ✗ Flexotracción ó flexocompresión
- ✗ Flexotorsión (muy frecuente en árboles)



⇒ P.e. árbol que transmite potencia apoyado sobre cojinetes.



- La transmisión de potencia causa torsión
- El propio peso causa flexión

Reducción de fuerzas a G (cdg)

$$\vec{M}_G = \vec{M}_{FZ} + \vec{M}_{FY} + \vec{M}_{TX}$$

Aplicación a ejes circulares (simetría que simplifica los cálculos) ⇒ análisis de ejes en el diseño mecánico para su posterior empleo en mecanismos

4.2. TEORÍA ELEMENTAL DE LA TORSIÓN PURA EN BARRAS CILÍNDRICAS

Sea barra cilíndrica empotrada:

- ✗ γ es la distorsión angular o ángulo girado por las generatrices.

En la barra y durante la torsión con γ muy pequeño:

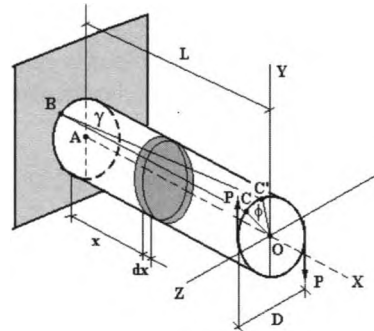
- ✗ las secciones circulares del eje se mantienen circulares
- ✗ dos secciones planas circulares conservan los mismos planos

en estas condiciones:

- ✓ OC girará ϕ (ángulo de torsión, giro radial) hasta situarse en OC'

$$\text{Si } L \uparrow \Rightarrow \phi \uparrow$$

- ✓ Sin embargo g (ángulo girado por las generatrices) no depende de la longitud de la barra



ANÁLISIS DEL FENÓMENO TORSIONAL

Sea un disco transversal aislado de la barra sometido a torsión, donde:

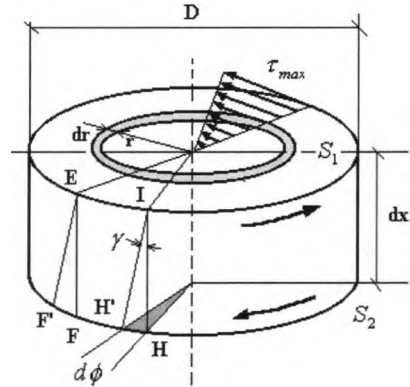
dx - Altura elemental

D - diámetro eje

$d\phi$ - ángulo de torsión girado entre S_2 y S_1

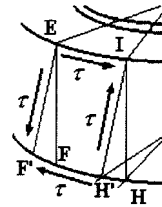
θ - ángulo de torsión girado por los radios por unidad de longitud de eje

γ - ángulo de torsión, rotado por la generatriz EF al pasar a EF' (todas las generatrices realizan el mismo giro)



ESTADO DE TENSIONES EXTERIOR

El elemento $EIF'H'$ se encontrará sometido al estado de tensiones tangenciales mostrado¹⁴



Recordando la Ley de Hooke para deformaciones angulares¹ y para γ muy pequeño tenemos,

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \operatorname{tg} \gamma = \frac{HH'}{HI} = \frac{D}{2} \frac{d\phi}{dx} \\ \frac{d\phi}{dx} &= \frac{\phi}{L} = \theta = \text{constante} \\ HH' &= \frac{D}{2} d\phi \quad HI = dx \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \tau &= \tau_{\max} = \gamma \cdot G = \theta \frac{D}{2} G \\ \gamma &\text{ en rads} \end{aligned}$$

G = módulo de torsión o de elasticidad transversal¹⁵

¹⁴ Según se vio en el apartado 1.14 Tensión Cortante Pura

¹⁵ Ver valores en Anexo 5

4.3. TENSIÓN CORTANTE EN LA TORSIÓN

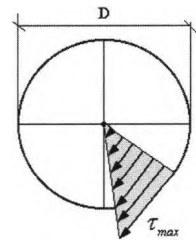
Suponiendo que todo diámetro de cualquier sección recta permanece recto y gira lo mismo con la torsión



el estudio realizado al elemento EIH'F para el estado de tensiones exterior será valido para un elemento de superficie interior cuyo radio r reemplaza a D/2, obteniendo:

$$\tau = \gamma \cdot G = \theta \cdot r \cdot G$$

τ varía linealmente con r, siendo máxima en la periferia y nula en el centro, siendo igual su distribución para cualquier radio



Tensión tangencial máxima y ángulo de giro en función del momento torsor

las τ deben anular al momento M_T que produce torsión en cada una de las secciones rectas del eje

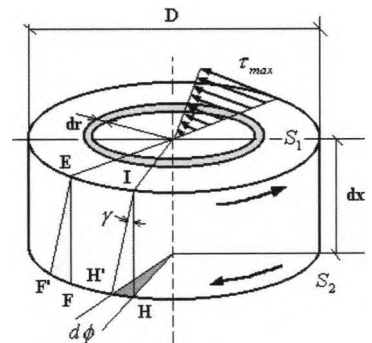
sea un anillo circular: radio r, espesor

$dr \rightarrow$ las τ producirán un momento torsor:

$$\begin{aligned} dM_T &= dT \cdot r = \tau dA \cdot r = \\ &G \cdot \theta \cdot r \cdot dA \cdot r = G \cdot \theta \cdot r^2 \cdot dA \end{aligned}$$

Extendiendo la suma a toda la superficie circular (de 0 a D/2):

$$M_T = \int_0^{D/2} G \cdot \theta \cdot r^2 \cdot dA = G \cdot \theta \int_0^{D/2} r^2 \cdot dA = G \cdot \theta \cdot I_p$$



Sustituyendo mdi polar, para un círculo:

$$I_r = \int_0^{D/2} r^2 \cdot dA = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$M_T = G \cdot \theta \cdot \frac{\pi D^4}{32}$$

De este modo, despejando θ y sustituyendo, el ángulo girado por el eje será:

(ángulos en rads.)

$$\phi = \theta \cdot L = \frac{32M_T \cdot L}{\pi G \cdot D^4}$$

La relación entre τ_{max} y M_T es:

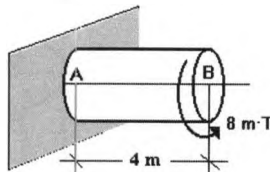
$$\left. \begin{array}{l} \tau = \gamma \cdot G = \theta \cdot G \cdot \frac{D}{2} \\ M_T = G \cdot \theta \cdot \frac{\pi D^4}{32} \end{array} \right\} \tau_{max} = \frac{16M_T}{\pi D^3}$$

Expresión para cálculo de tensiones cortantes en ejes sometidos a torsión pura

Ejemplo 4.1.

Para el eje cilíndrico de acero de 50 mm de diámetro de la figura, determinar:

- Ángulo girado por el eje ϕ
 - Valor y localización tensión tangencial por cortante máxima τ_{max}
- $G_{acero} = 7,7 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$



a) Operando en Kg y cm, tenemos:

$$\phi = \frac{32M_T \cdot L}{\pi G \cdot D^4} = \frac{32 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 400}{\pi \cdot 7,7 \cdot 10^6 \cdot 5^4} = 0,67 \text{ rads}$$

b) Operando en Kg y cm tenemos,

$$\tau_{\max} = \frac{16M_T}{\pi D^3} = \frac{16 \cdot 8 \cdot 10^5}{\pi 5^3} = 32594,93 \text{ Kg/cm}^2$$

4.4. CÁLCULO DE ÁRBOLES DE TRANSMISIÓN

☞ Ejes: sostienen órgano de máquina permitiendo giro alrededor suyo. Sufren flexión. No trabajan a torsión.

Bulón: eje de corta longitud. Se calcula a cortante o a aplastamiento.

☞ Árboles: transmiten momentos de rotación a distancia. Trabajan a torsión acompañada normalmente de flexión.

Se suele dar H en vatios (ó c.v.) y n en r.p.m.

❖ Veremos como se calculan los árboles (D, d)

❖ Distinguiremos entre

ÁRBOL MACIZO	D
ÁRBOL HUECO	D _{ext} , d _{int}

$$H = M_T \cdot w \quad \left\{ \begin{array}{l} H - \text{potencia transmitida (w)} \\ M_T - \text{par torsor aplicado (N·m)} \\ w - \text{velocidad de giro (rad/s)} \end{array} \right.$$

A. ÁRBOL MACIZO.

Expresión más usada:

$$M_T = 97,44 \frac{H}{n} = P \cdot D$$

H - w (vatios)
P - fuerza (Kg)
D - diámetro (cm)
M _T (Kg·cm)
n (r.p.m.)

Por otro lado,

$$\tau_{max} = \frac{16M_T}{\pi \cdot D^3} \quad \rightarrow \quad D = 7,92 \sqrt[3]{\frac{H}{n \cdot \tau_{max}}}$$

$\tau_{m\acute{a}x}$ - tensión máxima a torsión (kg/cm²)

Expresión para potencias grandes (se emplean caballos de vapor):

$$M_T = 71620,72 \frac{H}{n} = P \cdot D$$

H - c.v. (caballos de vapor)
 P - fuerza (Kg)
 D - diámetro (cm)
 M_T (Kg·cm)
 n (r.p.m.)

Por otro lado,

$$\tau_{max} = \frac{16M_T}{\pi \cdot D^3} \quad \rightarrow \quad D = 71,45 \sqrt[3]{\frac{H}{n \cdot \tau_{max}}}$$

$\tau_{m\acute{a}x}$ - tensión máxima a torsión (kg/cm²)

Para la demostración de las expresiones anteriores tener en cuenta que:

$$1 \frac{Kg \cdot m}{s} = 9,8w \quad 1 \frac{Kg \cdot cm}{s} = 0,098w$$

$$1cv = 735w \quad 1cv = 75 \frac{Kg \cdot m}{s} = 7500 \frac{Kg \cdot cm}{s}$$

Ejemplo 4.2.

Un eje de máquina que desarrolla 200 c.v. a 120 r.p.m. Si la tensión de trabajo máxima no debe superar $\tau_{trab} = 400 \text{ Kg/cm}^2$, determinar el diámetro adecuado.

Operando en las unidades del enunciado tenemos,

$$D = 71,5 \sqrt[3]{\frac{200}{120 \cdot 400}} = 11,5 \text{ cm}$$

B. EJE HUECO.

D_{ext} - diámetro exterior

d_{int} - diámetro interior

I_p - m.d.i. polar corona circular

$$\left. \begin{aligned} I_p &= \pi \frac{D_{ext}^4 - d_{int}^4}{32} \\ M_T &= G \cdot \theta \cdot I_p \end{aligned} \right\} M_T = G \cdot \theta \cdot \pi \frac{D_{ext}^4 - d_{int}^4}{32}$$

Como,

$$\tau_{max} = \gamma \cdot G = \theta \cdot G \cdot D/2$$

despejando θ en las 2 últimas ecuaciones e igualando tenemos,

$$\tau_{max} = \frac{16M_T \cdot D_{ext}}{\pi (D_{ext}^4 - d_{int}^4)}$$

Si llamamos $\delta = d_{int} / D_{ext}$, tendremos,

$$\tau_{max} = \frac{16M_T}{\pi D_{ext}^3 (1 - \delta^4)} \longrightarrow D_{ext} = \sqrt[3]{\frac{16M_T}{\pi (1 - \delta^4) \tau_{max}}}$$

Ejemplo 4.3.

Un eje cilíndrico hueco trabaja a 1600 c.v. girando a 500 r.p.m.. Si el material soporta una tensión cortante máxima de 450 Kg/cm², y la relación entre sus diámetros exterior e interior es 2, obtener el valor de:

- a) diámetro exterior D
- b) diámetro interior d

Conocemos todos los valores necesarios para conocer D_{ext} excepto el M_T que lo calculamos como,

$$M_T = 71620 \frac{1600}{500} = 229184 \text{ Kg} \cdot \text{cm}$$

Operando en Kg y cm tenemos,

$$D_{ext} = \sqrt[3]{\frac{16M_T}{\pi(1-\delta^4)\tau_{max}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 229184}{\pi(1-0,5^4)450}} = 14,04 \text{ cm}$$

$$d_{int} = \frac{D_{ext}}{2} = 7,02 \text{ cm}$$

4.5. TORSIÓN ACOMPAÑADA DE FLEXIÓN

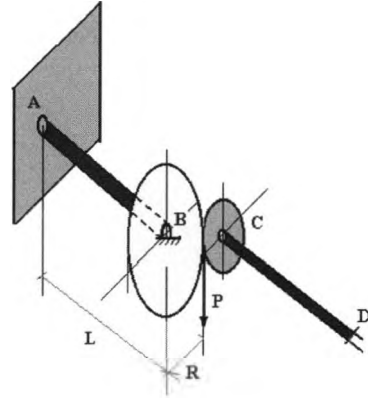
El par torsor se transmite de forma que junto a la torsión se produce flexión en el árbol.

Sistemas equivalentes:

$P \rightarrow M_T + P$ (flexión)

$P \cdot D / 2$

$M_{\text{máx}} = -P \cdot L$
(punto C)



Solicitaciones y efectos:

- M_T producirá tensiones de torsión de valor:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{16 M_T}{\pi D^3}$$

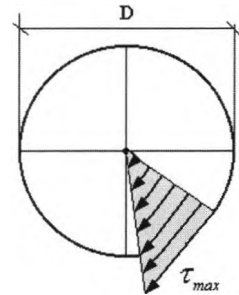
(máxima en periferia del eje)

- M_F producirá tensiones de flexión de valor:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_F}{W} = \frac{32 M_F}{\pi D^3}$$

nula en línea neutra
máxima en fibras extremas del empotramiento

- V producirá tensión cortante máxima en la línea neutra



M_T y M_F suman sus efectos haciendo que la tensión combinada máxima se localice en los puntos más alto y bajo del empotramiento, despreciándose por tanto el efecto del cortante (tensión cortante máxima en la línea neutra, nula en los puntos entredichos)

Aplicando esto al empotramiento del voladizo en la figura tendremos:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{8 P \cdot D}{\pi D^3}$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{32 P \cdot L}{\pi D^3}$$

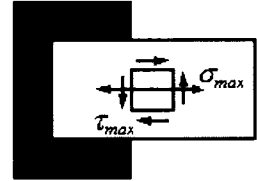
Mediante el Círculo de Mohr para un elemento de la parte más alta de la sección de empotramiento tendremos

Tensión principal máxima

$$\sigma_{maxP} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Radio círculo de Mohr

$$\tau_{maxP} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$



Sustituyendo en las ecuaciones anteriores los valores obtenidos de

$$\tau = \frac{8P \cdot D}{\pi D^3} \quad \sigma = \frac{32P \cdot L}{\pi D^3}$$

tenemos,

$$\tau_{maxP} = \frac{16}{\pi D^3} \sqrt{M_F^2 + M_T^2} \quad \sigma_{maxP} = \frac{16}{\pi D^3} \left(M_F + \sqrt{M_F^2 + M_T^2} \right)$$

Lo normal es usar esta última expresión de τ_{max} para hallar el diámetro del eje limitando $\tau_{m\acute{a}x} \leq \tau_{adm}$, obtenemos la expresión:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \tau_{adm}} \sqrt{M_F^2 + M_T^2}}$$

Luego lo comprobaremos a flexión. Nos quedamos con D mayor.

Si el eje es hueco sustituimos en las expresiones del eje macizo anteriores d^3 por $d^3 (1 - \delta^4)$, siendo $\delta = d_{int} / D_{ext}$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \tau_{adm} (1 - \delta^4)} \sqrt{M_F^2 + M_T^2}}$$

Ejemplo 4.4.

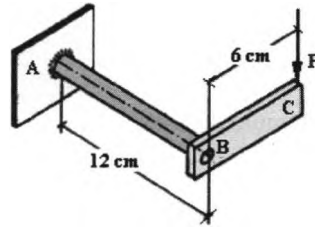
El eje de la figura está sometido a un par torsor debido a la carga P de 200 Kg aplicada en C. El material admite una tensión máxima a flexión de 1000 Kg/cm², y cortante de 500 Kg/cm². Determinar el diámetro "D" del eje.

El momento torsor será,

$$M_T = P \cdot 6 = 200 \cdot 6 = 1200 \text{ Kg} \cdot \text{cm}$$

A su vez el momento flector es,

$$M = P \cdot 12 = 200 \cdot 12 = 2400 \text{ Kg} \cdot \text{cm}$$



El diámetro "D" del eje será,

A cortante:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \tau_{adm}} \sqrt{M_F^2 + M_T^2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \cdot 500} \sqrt{2400^2 + 1200^2}} = 3,01 \text{ cm}$$

Comprobación a flexión:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \sigma_{maxP}} \left(M_F + \sqrt{M_F^2 + M_T^2} \right)} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \cdot 1000} \left(2400 + \sqrt{2400^2 + 1200^2} \right)} = 2,96 \text{ cm}$$

Luego la solución es el mayor de los dos casos, esto es $D = 3,01 \text{ cm}$

OBSERVACIÓN FINAL:

Cuando el elemento sometido a flexotorsión es un árbol, éste sufre también fatiga. Las tensiones admisibles deberán estar en relación con las resistencias a fatiga, bastantes inferiores a la fluencia.

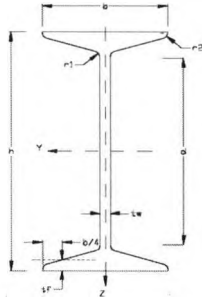
ANEXOS

ANEXO 1. Propiedades mecánicas de los materiales.

Material	Tensión admisible en MPa
Aluminio 2014-T6	276
Aluminio 6061-T6	183,33
Latón-C36000, Hard	206,667
Latón-C83400	52,667
Bronce C86100	230
Concrete-Low Strength	14
Concrete-Medium Strength	27,6
Fundición Gris-A48 Gr.20	92
Magnesium Am 1004-T6I	101,333
Monel, wrought, HR	226,667
Acero-A36 Structural	166,667
Acero-AISI 1020 HR	220,667
Acero-AISI 1040 CR	376,667
Acero-SAE 4340, HT	606,667
Acero-Stainless 18-8 CR	733,333
Acero-Stainless 304 CR	138
Titanio Ti-6Al-4V	733,333
Madera-Douglas fir	8,733
Madera-Southern Pine	8,733
Madera-White Spruce	6,433

ANEXO 2. Tablas de perfiles constructivos.

IPN



A = área de la sección
 I = momento de inercia
 W = módulo resistente
 i = radio de giro
 S_y = momento estático de media sección
 u = superficie lateral por metro lineal

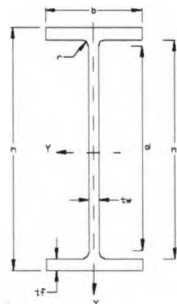
DOBLE PERFIL NORMAL

Designación	Peso G kg/m	Dimensiones						Sección A cm ²	Referido al eje y-y				Referido al eje z-z			
		h mm	b mm	$t_w = r_1$ mm	t_f mm	r_2 mm	d mm		I_y cm ⁴	W_y cm ³	i_y cm	I_z cm ⁴	W_z cm ³	i_z cm	S_y cm ²	u m ² /m
IPN 80	5.98	80	42	3.9	5.9	2.3	59	7.58	77.8	19.5	3.2	6.29	3	0.91	11.4	0.304
IPN 100	8.34	100	50	4.5	6.8	2.7	75.7	10.6	171	34.2	4.01	12.2	4.88	1.07	19.9	0.37
IPN 120	11.1	120	58	5.1	7.7	3.1	92.4	14.2	328	54.7	4.81	21.5	7.41	1.23	31.8	0.439
IPN 140	14.3	140	66	5.7	8.6	3.4	109.1	18.3	573	81.9	5.61	35.2	10.7	1.4	47.7	0.502
IPN 160	17.9	160	74	6.3	9.5	3.8	125.8	22.8	935	117	6.4	54.7	14.8	1.55	68	0.678
IPN 180	21.9	180	82	6.9	10.4	4.1	142.4	27.9	1450	161	7.2	81.3	19.8	1.71	93.4	0.84
IPN 200	26.2	200	90	7.5	11.3	4.5	159.1	33.4	2140	214	8	117	26	1.87	125	0.709
IPN 220	31.1	220	98	8.1	12.2	4.9	175.8	39.5	3060	278	8.8	162	33.1	2.02	162	0.775
IPN 240	36.2	240	106	8.7	13.1	5.2	192.5	46.1	4250	354	9.59	221	41.7	2.2	206	0.844

IPN 260	41.9	260	113	9.4	14.1	5.6	208.9	53.3
IPN 280	47.9	280	119	10.1	15.2	6.1	225.1	61
IPN 300	54.2	300	125	10.8	16.2	6.5	241.6	69
IPN 320	61.0	320	131	11.5	17.3	6.9	257.9	77.7
IPN 340	68.0	340	137	12.2	18.3	7.3	274.3	86.7
IPN 360	76.1	360	143	13	19.5	7.8	290.2	97
IPN 380	84.0	380	149	13.7	20.5	8.2	306.7	107
IPN 400	92.4	400	155	14.4	21.6	8.6	322.9	118
IPN 450	115	450	170	16.2	24.3	9.7	363.6	147
IPN 500	141	500	185	18	27	10.8	404.3	179
IPN 550	166	550	200	19	30	11.9	445.6	212
IPN 600	198	600	215	21.6	32.4	13	485	254

5740	442	10.4	288	51	2.32	257	0.906
7590	542	11.1	364	61.2	2.45	316	0.966
9800	653	11.9	451	72.2	2.56	381	1.03
12510	782	12.7	555	84.7	2.67		0.9
15700	923	13.5	674	98.4	2.8	540	1.15
19610	1090	14.2	818	114	2.9	638	1.21
24010	1260	15	975	131	3.02	741	1.27
29210	1460	15.7	1160	149	3.13	857	1.33
45850	2040	17.7	1730	203	3.43	1200	1.48
68740	2750	19.6	2480	268	3.72	1620	1.83
99180	3610	21.6	3490	349	4.02	2120	1.8
139000	4630	23.4	4670	434	4.3	2730	1.9

IPE



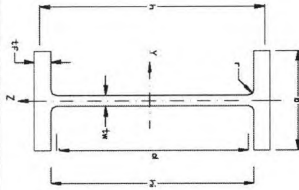
A = área de la sección
 I = momento de inercia
 W = módulo resistente
 i = radio de giro
 S_x = momento estático de media sección
 u = superficie lateral por metro lineal

DOBLE T
PERFIL EUROPEO

Designación	Dimensiones								Sección	Referido al eje y-y			Referido al eje z-z			S_x mm	u m ² /m
	G kg/m	h mm	b mm	t_w mm	t_f mm	h_1 mm	d mm	r mm		I_y cm ⁴	W_y cm ³	i_y cm	I_z cm ⁴	W_z cm ³	i_z cm		
IPE 80	6.0	80	46	3.8	5.2	69.6	59.6	5	7.64	80.14	20.03	3.24	8.49	3.69	1.05	20.1	0.328
IPE 100	8.1	100	55	4.1	5.7	88.6	74.6	7	10.32	171	34.2	4.07	15.92	5.79	1.24	23.7	0.4
IPE 120	10.4	120	84	4.4	6.3	107.4	93.4	7	13.21	317.8	52.96	4.9	27.67	8.65	1.45	25.2	0.475
IPE 140	12.9	140	73	4.7	6.9	126.2	112.2	7	16.43	541.2	77.32	5.74	44.92	12.31	1.65	26.7	0.551
IPE 160	15.8	160	82	5	7.4	145.2	127.2	9	20.09	869.3	108.7	6.58	68.31	16.66	1.84	30.3	0.623
IPE 180	18.8	180	91	5.3	8	164	146	9	23.95	1317	146.3	7.42	100.9	22.16	2.05	31.8	0.698
IPE 200	22.4	200	100	5.6	8.5	183	159	12	28.48	1943	194.3	8.26	142.4	28.47	2.24	36.7	0.768
IPE 220	26.2	220	110	5.9	9.2	201.6	177.6	12	33.37	2772	252	9.11	204.9	37.25	2.48	38.4	0.848
IPE 240	30.7	240	120	6.2	9.8	220.4	190.4	15	39.12	3892	324.3	9.97	283.6	47.27	2.69	43.4	0.922
IPE 270	36.1	270	135	6.6	10.2	249.6	219.6	15	45.94	5790	428.9	11.23	419.9	62.2	3.02	44.6	1.041
IPE 300	42.2	300	150	7.1	10.7	278.6	248.6	15	53.81	8358	557.1	12.46	603.8	80.5	3.35	46.1	1.16

IPE 330	48.1	330	160	7.5	11.5	307	271	18	62.81	11770	713.1	13.71	788.1	98.52	3.55	51.6	1.254
IPE 360	57.1	360	170	8	12.7	334.6	298.8	18	72.73	16270	903.6	14.95	1043	122.8	3.79	54.5	1.353
IPE 400	66.3	400	180	8.6	13.5	373	331	21	84.46	23130	1156	16.55	1318	146.4	3.95	60.2	1.487
IPE 450	77.6	450	190	9.4	14.6	420.8	378.8	21	98.82	33740	1500	18.48	1676	176.4	4.12	63.2	1.605
IPE 500	90.7	500	200	10.2	16	468	426	21	115.5	48200	1928	20.43	2142	214.2	4.31	68.8	1.744
IPE 550	106	550	210	11.1	17.2	515.6	467.6	24	134.4	67120	2441	22.35	2668	254.1	4.45	73.6	1.877
IPE 600	122	600	220	12	19	562	514	24	156	92080	3069	24.3	3387	307.9	4.66	78.1	2.015

HE



A = área de la sección
 I = momento de inercia
 W = módulo resistente
 i = radio de giro
 S_s = momento estático de media sección
 u = superficie lateral por metro lineal

DOBLE T ALA ANCHA
 HEA - SERIE LIGERADOBLE
 HEB - SERIE MEDIA
 HEM - SERIE PESADA

Designación	Peso G kg/m	Dimensiones											Sección A cm ²	Referido al eje y-y				Referido al eje z-z			S _s mm	u m ² /m
		h mm	b mm	t _f mm	t _w mm	h _f mm	d mm	r mm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _z cm ⁴		W _z cm ³	i _z cm							
HE 100 A	16,7	96	100	5	8	80	56	12	21,24	349,2	72,76	4,08	133,8	26,76	2,51	35,1	0,561					
HE 100 B	20,4	100	100	6	10	80	56	12	26,04	449,5	89,91	4,16	167,3	33,45	2,53	40,1	0,567					
HE 100 M	41,8	120	106	12	20	80	56	12	53,24	1143	190,4	4,63	399,2	75,31	2,74	66,1	0,619					
HE 120 A	19,9	114	120	5	8	98	74	12	25,34	606,2	106,3	4,89	230,9	38,48	3,02	35,1	0,677					
HE 120 B	26,7	120	120	6,5	11	98	74	12	34,01	864,4	144,1	5,04	317,5	52,92	3,06	42,6	0,686					
HE 120 M	52,1	140	126	12,5	21	98	74	12	66,41	2018	288,2	5,51	702,8	111,6	3,25	68,6	0,738					
HE 140 A	24,7	133	140	5,5	8,5	116	92	12	31,42	1033	155,4	5,73	389,3	55,62	3,52	36,6	0,794					
HE 140 B	33,7	140	140	7	12	116	92	12	42,96	1509	215,6	5,93	549,7	78,52	3,58	45,1	0,805					
HE 140 M	63,2	160	146	13	22	116	92	12	80,56	3291	411,4	6,39	1144	156,8	3,77	71,1	0,857					
HE 160 A	30,4	152	160	6	9	134	104	15	38,77	1673	220,1	6,57	615,6	76,95	3,98	41,6	0,906					
HE 160 B	42,6	160	160	8	13	134	104	15	54,25	2492	311,5	6,78	889,2	111,2	4,05	51,6	0,918					

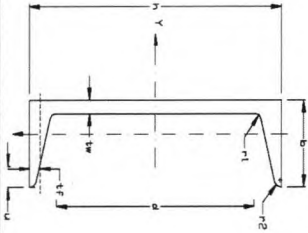
HE 160 M	76.2	180	186	14	23	134	104	15	97.05	5098	586.5	7.25	1759	211.9	4.26	77.6	0.97
HE 180 A	35.5	171	180	6	9.5	152	122	15	45.25	2510	293.6	7.45	924.6	102.7	4.52	42.8	1.024
HE 180 B	51.2	180	180	8.5	14	152	122	15	65.25	3831	425.7	7.66	1363	151.4	4.57	54.1	1.037
HE 180 M	88.9	200	186	14.5	24	152	122	15	113.3	7483	748.3	8.13	2580	277.4	4.77	80.1	1.089
HE 200 A	42.3	190	200	6.5	10	170	134	18	53.83	3692	388.6	8.28	1336	133.6	4.98	47.6	1.136
HE 200 B	61.3	200	200	9	15	170	134	18	78.08	5696	569.6	8.54	2003	200.3	5.07	60.1	1.151
HE 200 M	103	220	208	15	25	170	134	18	131.3	10640	987.4	9	3651	354.5	5.27	86.1	1.203
HE 220 A	50.5	210	220	7	11	188	152	18	64.34	5410	515.2	9.17	1955	177.7	5.51	50.1	1.255
HE 220 B	71.5	220	220	9.5	16	188	152	18	91.04	8091	735.5	9.43	2843	258.5	5.59	62.6	1.27
HE 220 M	117	240	226	15.5	26	188	152	18	149.4	14600	1217	9.89	5012	443.5	5.79	88.6	1.322
HE 240 A	60.3	230	240	7.5	12	206	164	21	76.84	7763	675.1	10.05	2769	230.7	6	56.1	1.369
HE 240 B	83.2	240	240	10	17	206	164	21	106	11260	938.3	10.31	3923	326.9	6.08	68.6	1.384
HE 240 M	157	270	248	18	32	206	164	21	199.6	24290	1789	11.03	8153	657.5	6.39	106.6	1.46
HE 260 A	68.2	250	260	7.5	12.5	225	177	24	86.82	10450	836.4	10.97	3688	282.1	6.5	60.6	1.484
HE 260 B	93.0	260	260	10	17.5	225	177	24	118.4	14920	1148	11.22	5135	395	6.58	73.1	1.499
HE 260 M	172	290	268	18	32.5	225	177	24	219.6	31310	2159	11.94	10450	779.7	6.9	111.1	1.575
HE 280 A	76.4	270	280	8	13	244	196	24	97.26	13870	1013	11.86	4763	340.2	7	62.1	1.603
HE 280 B	103	280	280	10.5	18	244	196	24	131.4	19270	1376	12.11	6595	471	7.09	74.6	1.694
HE 300 A	88.3	290	300	8.5	14	262	208	27	112.5	18260	1260	12.74	6310	420.6	7.49	88.1	1.717
HE 300 B	117	300	300	11	19	262	208	27	149.1	25170	1678	12.99	8563	570.9	7.58	80.6	1.732
HE 300 M	238	340	310	21	39	262	208	27	303.1	59200	3482	13.98	19400	1252	8	130.6	1.832
HE 320 A	97.6	310	300	9	15.5	279	225	27	124.4	22930	1479	13.58	6985	465.7	7.49	71.8	1.756
HE 320 B	127	320	300	11.5	20.5	279	225	27	161.3	30820	1926	13.82	9239	615.9	7.57	84.1	1.771
HE 320 M	245	359	309	21	40	279	225	27	312	68130	3796	14.78	19710	1276	7.95	132.6	1.866

HE 340 A	105	330	300	9.5	16.5	297	243	27	133.5	27690	1678	14.4	7436	495.7	7.46	74.1	1.795
HE 340 B	134	340	300	12	21.5	297	243	27	170.9	36680	2156	14.65	9690	646	7.53	86.6	1.81
HE 340 M	248	377	309	21	40	297	243	27	315.8	76370	4052	15.55	19710	1276	7.9	132.6	1.992
HE 360 A	112	350	300	10	17.5	315	261	27	142.8	33090	1891	15.22	7887	525.8	7.43	76.6	1.834
HE 360 B	142	360	300	12.5	22.5	315	261	27	180.6	43190	2400	15.46	10140	676.1	7.49	89.1	1.849
HE 360 M	250	395	308	21	40	315	261	27	318.8	84870	4297	16.32	19520	1268	7.83	132.6	1.934
HE 400 A	125	390	300	11	19	352	298	27	159	45070	2311	16.84	8564	570.9	7.34	80.6	1.912
HE 400 B	155	400	300	13.5	24	352	298	27	197.8	57680	2884	17.08	10820	721.3	7.4	93.1	1.927
HE 400 M	266	432	307	21	40	352	298	27	325.8	104100	4820	17.88	19340	1260	7.7	132.6	2.004
HE 450 A	140	440	300	11.5	21	398	344	27	178	63720	2896	18.92	9465	631	7.29	85.1	2.011
HE 450 B	171	450	300	14	26	398	344	27	218	78890	3551	19.14	11720	781.4	7.33	97.6	2.026
HE 450 M	283	478	307	21	40	398	344	27	335.4	131500	5501	19.8	19340	1260	7.59	132.6	2.096
HE 500 A	155	490	300	12	23	444	390	27	197.5	86970	3550	20.98	10370	691.1	7.24	89.6	2.11
HE 500 B	187	500	300	14.5	28	444	390	27	238.6	107200	4287	21.19	12620	841.6	7.27	102.1	2.125
HE 500 M	270	524	306	21	40	444	390	27	344.3	161900	6180	21.99	19150	1252	7.46	132.6	2.184
HE 550 A	166	540	300	12.5	24	492	438	27	211.8	111900	4146	22.99	10820	721.3	7.15	92.1	2.209
HE 550 B	199	550	300	15	29	492	438	27	254.1	136700	4971	23.2	13080	871.8	7.17	104.6	2.224
HE 550 M	278	572	306	21	40	492	438	27	354.4	198000	6923	23.64	19160	1252	7.35	132.6	2.26
HE 600 A	178	590	300	13	25	540	486	27	226.5	141200	4787	24.97	11270	751.4	7.05	94.6	2.308
HE 600 B	212	600	300	15.5	30	540	486	27	270	171000	5701	25.17	13530	902	7.08	107.1	2.323
HE 600 M	285	620	305	21	40	540	486	27	363.7	237400	7660	26.55	18980	1244	7.22	132.6	2.372
HE 650 A	190	640	300	13.5	26	588	534	27	241.6	175200	5474	26.93	11720	781.6	6.97	97.1	2.407
HE 650 B	225	650	300	16	31	588	534	27	286.3	210800	6480	27.12	13980	932.3	6.99	109.6	2.422
HE 650 M	293	668	305	21	40	588	534	27	373.7	281700	8433	27.45	18980	1245	7.13	132.6	2.468

HE 700 A	204	690	300	14.5	27	636	582	27	260.5	215300	6241	28.75	12180	811.9	6.84	100.1	2.505
HE 700 B	241	700	300	17	32	636	582	27	306.4	256900	7340	28.96	14440	962.7	6.87	112.8	2.52
HE 700 M	301	716	304	21	40	636	582	27	383	329300	9198	29.32	18800	1237	7.01	132.8	2.56
HE 800 A	224	780	300	15	28	734	674	30	285.8	303400	7682	32.58	12640	842.6	6.65	106.1	2.698
HE 800 B	262	800	300	17.5	33	734	674	30	334.2	359100	8977	32.78	14900	993.6	6.68	118.6	2.713
HE 800 M	317	814	303	21	40	734	674	30	404.3	442600	10870	33.09	18630	1230	6.79	136.1	2.746
HE 900 A	252	890	300	16	30	830	770	30	320.5	422100	9485	36.29	13550	903.2	6.5	111.1	2.896
HE 900 B	291	900	300	18.5	35	830	770	30	371.3	494100	10980	36.48	15820	1054	6.53	123.6	2.911
HE 900 M	333	910	302	21	40	830	770	30	423.6	570400	12540	36.7	18450	1222	6.6	136.1	2.934
HE 1000 A	272	990	300	16.5	31	928	868	30	346.8	553800	11190	39.96	14000	933.6	6.35	113.6	3.095
HE 1000 B	314	1000	300	19	36	928	868	30	400	644700	12890	40.15	16280	1085	6.38	126.1	3.11
HE 1000 M	349	1008	302	21	40	928	868	30	444.2	722300	14330	40.32	18460	1222	6.45	136.1	3.13

UPN

PERFIL EN "U" NORMAL

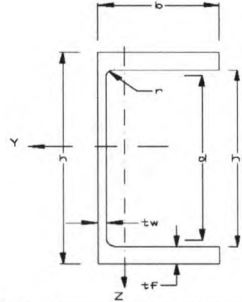


- A = área de la sección
- I = momento de inercia
- W = módulo resistente
- i = radio de giro
- S_u = momento estático de media sección
- u = superficie lateral por metro lineal

Designación	Peso		Dimensiones										Sección		Referido al eje y-y			Referido al eje z-z			S _u mm	u m ² /m
	G kg/m	h mm	b mm	t _w mm	t _f = r ₁ mm	d mm	r ₂ mm	A cm ²	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _z cm ⁴	W _z cm ³	i _z cm								
UPN 80	8,64	80	45	6	8	46	4	11	106	28,5	3,1	19,4	6,36	1,33	19,4	0,312						
UPN 100	10,6	100	50	6	8,5	64	4,5	13,5	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	20,3	0,372						
UPN 120	13,4	120	55	7	9	82	4,5	17	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	22,2	0,434						
UPN 140	16,0	140	60	7	10	98	5	20,4	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	23,9	0,489						
UPN 160	18,8	160	65	7,5	10,5	115	5,5	24	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	25,3	0,546						
UPN 180	22,0	180	70	8	11	133	5,5	28	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	26,7	0,611						
UPN 200	25,3	200	75	8,5	11,5	151	6	32,2	1910	191	7,7	148	27	2,14	28,1	0,661						
UPN 220	29,4	220	80	9	12,5	167	6,5	37,4	2690	245	8,48	197	33,6	2,3	30,3	0,718						
UPN 240	33,2	240	85	9,5	13	184	6,5	42,3	3600	300	9,22	248	39,6	2,42	31,7	0,775						
UPN 260	37,9	260	90	10	14	200	7	48,3	4820	371	9,99	317	47,7	2,56	33,9	0,834						
UPN 280	41,8	280	95	10	15	216	7,5	53,3	6280	448	10,9	399	57,2	2,74	35,6	0,89						

UPN 300	0.2	300	100	10	16	232	8	0.0	8030	535	11.7	495	67.8	2.9	0.0	0.95
UPN 300	0.5	320	100	14	17.5	246	8.75	0.0	10870	679	12.1	597	80.6	2.81	0.0	0.982
UPN 300	0.0	350	100	14	16	282	8	0.0	12840	734	12.9	570	75	2.72	0.0	1.047
UPN 300	0.1	380	102	13.5	16	313	8	0.4	15780	829	14	615	78.7	2.77	0.3	1.11
UPN 300	0.0															
UPN 300	0.5	400	110	14	18	324	9	0.5	20350	1020	14.9	846	102	3.04	0.0	1.182

UAP

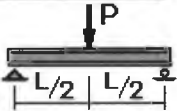
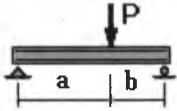
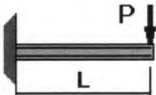
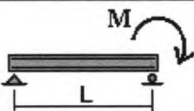
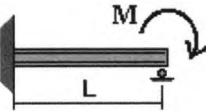
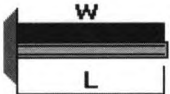



A = área de la sección
 I = momento de inercia
 W = módulo resistente
 i = radio de giro
 S_x = momento estático de media sección
 u = superficie lateral por metro lineal

CANALES O PERFILES EN "U" DE CARAS PARALELAS

Designación	Peso G kg/m	Dimensiones						Sección A cm ²	Referido al eje y-y			Referido al eje z-z			S_x mm	u m ² /m
		h mm	b mm	t_w mm	h_1 mm	d mm	$t_f = r$ mm		I_y cm ⁴	W_y cm ³	i_y cm	I_z cm ⁴	W_z cm ³	i_z cm		
UAP 80	8.38	80	45	5	84	48	8	10.68	107.1	26.78	3.17	21.33	7.38	1.41	17.7	0.323
UAP 100	10.5	100	50	5.5	83	68	8.5	13.38	209.5	41.9	3.98	32.83	9.95	1.57	19	0.382
UAP 130	13.7	130	55	6	111	92	9.5	17.5	459.6	70.7	5.12	51.34	13.78	1.71	21.1	0.46
UAP 150	17.9	150	65	7	129.5	109	10.25	22.84	796.1	106.1	5.9	93.26	20.97	2.02	23.3	0.537
UAP 176	21.2	175	70	7.5	153.5	132	10.75	27.06	1270	145.1	6.85	126.4	25.92	2.16	24.5	0.606
UAP 200	25.1	200	75	8	177	154	11.5	31.98	1946	194.6	7.8	169.7	32.13	2.3	26.2	0.674
UAP 220	28.5	220	80	8	195	170	12.5	36.27	2710	246.4	8.64	222.3	39.68	2.48	27.8	0.733
UAP 250	34.4	250	85	9	223	196	13.5	43.8	4137	330.9	9.72	295.4	48.87	2.6	30.4	0.81
UAP 300	46.0	300	100	9.5	268	236	16	58.56	8171	544.7	11.81	562.1	79.88	3.1	34.9	0.967

ANEXO 3 . Deflexiones Máximas en Sistemas de Viga-Carga.

Sistema Viga-Carga	Flecha Máxima
	$y_{max} = -\frac{P \cdot L^3}{48E \cdot I}$
	$y_{max} = -\frac{Pb \cdot (L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3} E \cdot I \cdot L}$ <p>$a > b$</p>
	$y_{max} = -\frac{P \cdot L^3}{3E \cdot I}$
	$y_{max} = -\frac{M \cdot L^2}{9\sqrt{3} E \cdot I}$
	$y_{max} = -\frac{M \cdot L^2}{2E \cdot I}$
	$y_{max} = -\frac{w \cdot L^4}{8E \cdot I}$
	$y_{max} = -\frac{5w \cdot L^4}{384E \cdot I}$

ANEXO 4. Tabla de Coeficientes w para aceros F622 y F612.

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
20	1.01	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	20
30	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	30
40	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	40
50	1.12	1.12	1.13	1.14	1.14	1.15	1.16	1.17	1.17	1.18	50
60	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25	1.26	1.28	1.29	60
70	1.30	1.31	1.33	1.34	1.36	1.37	1.39	1.40	1.42	1.44	70
80	1.45	1.47	1.49	1.51	1.53	1.55	1.57	1.59	1.61	1.63	80
90	1.65	1.67	1.70	1.72	1.74	1.77	1.79	1.82	1.84	1.87	90
100	1.89	1.92	1.95	1.97	2.00	2.03	2.06	2.09	2.12	2.15	100
110	2.18	2.21	2.24	2.27	2.30	2.33	2.37	2.40	2.43	2.47	110
120	2.50	2.53	2.57	2.60	2.64	2.68	2.71	2.75	2.78	2.82	120
130	2.86	2.90	2.94	2.97	3.01	3.05	3.09	3.13	3.17	3.21	130
140	3.25	3.29	3.33	3.38	3.42	3.46	3.50	3.55	3.59	3.63	140
150	3.68	3.72	3.77	3.81	3.86	3.90	3.95	4.00	4.04	4.09	150
160	4.14	4.18	4.23	4.28	4.33	4.38	4.43	4.48	4.53	4.58	160
170	4.63	4.68	4.73	4.78	4.83	4.88	4.94	4.99	5.04	5.09	170
180	5.15	5.20	5.26	5.31	5.36	5.42	5.48	5.53	5.59	5.64	180
190	5.70	5.76	5.81	5.87	5.93	5.99	6.05	6.11	6.16	6.22	190
200	6.28	6.34	6.40	6.46	6.53	6.59	6.65	6.71	6.77	6.84	200
210	6.90	6.96	7.03	7.09	7.15	7.22	7.28	7.35	7.41	7.48	210
220	7.54	7.61	7.67	7.74	7.81	7.88	7.94	8.01	8.08	8.15	220
230	8.22	8.29	8.36	8.43	8.49	8.57	8.64	8.71	8.78	8.85	230
240	8.92	8.99	9.07	9.14	9.21	9.29	9.36	9.43	9.51	9.58	240
250	9.66	Estos coeficientes son aplicables también a los aceros europeos 33 y 37									

ANEXO 5. Módulos de torsión¹⁶.

EJEMPLOS DE MÓDULOS DE TORSIÓN O DE ELASTICIDAD TRANSVERSAL G (Gpa)	
Acero común	75.46
Acero estructural	76
Acero inoxidable 304 CR	75
Acero AISI 1020 HR	80
Titanio 64I-4V	42
Fundición gris A48 Gr.20	33.60
Bronce C86100	38
Latón C83400	37
Aluminio 2014- T6	28

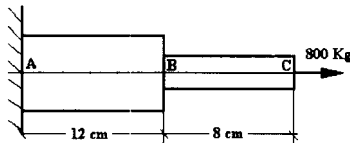
¹⁶ Valores obtenidos del programa informático o MDSolids.

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 1

La fuerza extensora de 800 Kg actúa como muestra la figura sobre la barra escalonada de Acero Estructural A36 y de sección circular. Si la superficie mayor es de 2 cm^2 y la menor de 1 cm^2 , determinar en ambos trozo de barra:

- Tensiones de trabajo.
- Alargamientos parciales y total.
- Tensiones de trabajo si se aplica una nueva carga horizontal de 800 Kg en el punto B hacia la izquierda.
- Nuevos alargamientos parciales y total considerando la carga adicional.

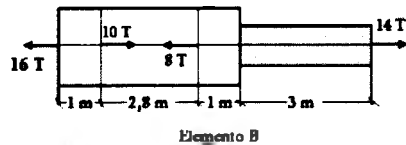


EJERCICIO 2

Para el elemento B de máquina sometido al estado de cargas mostrado en la figura y cuyas secciones mayor y menor toman los valores de 10 y 5 cm^2 respectivamente, determinar:

- Valores que toma el esfuerzo normal N.
- Valores que de la tensión normal s_x .
- ¿Resisten los elementos sus cargas?.

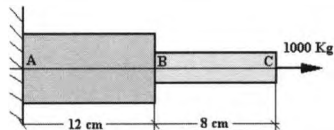
$$\sigma_{adm} = 260 \text{ MPa}$$



EJERCICIO 3

A la barra cilíndrica escalonada de la figura se la somete en su extremo a 1000 Kg. El tramo AB es de Acero Estructural A36 y tiene una sección de 200 mm^2 . El tramo BC es de Fundición Gris A48-Gr.20 y de sección 100 mm^2 . Determinar para cada tramo:

- Esfuerzos internos.
- Tensiones internas.
- Alargamientos.
- Si la pieza se calienta 20° , ¿Cómo afecta a los alargamientos?.



Datos:

$$E_{A36} = 200 \text{ GPa}, E_{A48} = 84 \text{ GPa}$$

$$\alpha_{A36} = 125 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \alpha_{A48} = 108 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

EJERCICIO 4

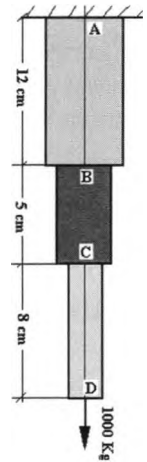
Para el pilar cilíndrico triescalonado que muestra la figura fabricado de Acero Estructural A36 determinar:

- Esfuerzos y tensiones en cada uno de los tramos.
- Alargamientos parciales y total.
- Alargamiento total considerando el peso.

Datos:

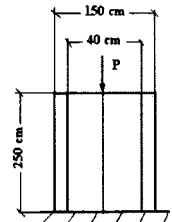
$$\gamma_{\text{acero}} = 7,8 \text{ Kg/dm}^3$$

$$S_{AB} = 10 \text{ cm}^2, S_{BC} = 8 \text{ cm}^2, S_{CD} = 5 \text{ cm}^2$$

**EJERCICIO 5**

La figura muestra un montaje de dos tubos en contacto. El tubo exterior es de Bronce 86000 y el interior de Fundición Gris A48 Gr. 20. La carga P se aplica sobre una tapadera horizontal superior que cubre los dos tubos y toma el valor de 10000 kN. Determinar para cada tubo:

- Esfuerzos y tensiones.
- Esfuerzos y tensiones si calentamos los tubos 20 °C.

**EJERCICIO 6**

Determinar para los cables de 1 m de longitud que soportan la viga de la figura siendo la carga P de 1850 kg,

- Esfuerzos.
- Tensiones.
- Alargamientos.

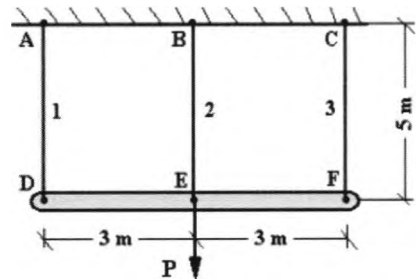
Datos:

$$S_1 = S_3 = 6 \text{ cm}^2, S_2 = 4 \text{ cm}^2$$

$$E_{\text{acero}} = 2,10 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$E_{\text{bronce}} = 1,05 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

Las barras extremas son de acero y la intermedia de bronce.



EJERCICIO 7

Una viga rígida e indeformable de peso despreciable y sometida a la carga de 1000 Kp está suspendida por cuatro cables de acero verticales de 1,5 m de longitud, 4 cm² de sección, situados en un mismo plano vertical como se muestra en la figura. Determinar para cada cable:

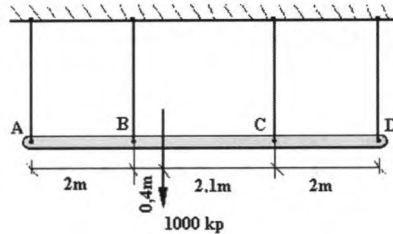
- Esfuerzos.
- Alargamientos.

Datos:

$$E_{\text{acero}} = 2,10 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$S_{\text{cables}} = 2 \text{ cm}^2$$

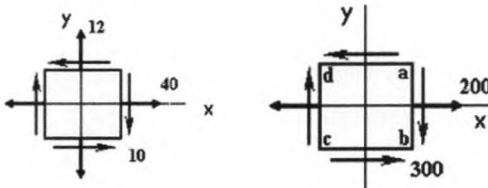
$$L_{\text{cables}} = 1,2 \text{ m}$$



EJERCICIO 8

Para los dos estados de tensiones en Kg/cm² representados (elemento 1 y elemento 2 a izquierda y derecha respectivamente), determinar empleando el Círculo de Mohr:

- Tensiones para cada uno de los cuatro caras perpendiculares: superior, inferior, izquierda y derecha.
- Tensión cortante máxima.
- Tensiones y direcciones principales.



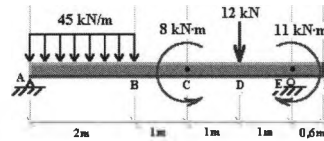
EJERCICIO 9

Para la viga representada en la figura de Acero SAE 4340 HT, y suponiendo una tensión cortante admisible igual un 20% de la tensión normal admisible determinar:

- Diagrama de solicitaciones y deformada
- Dimensionar el diámetro D correspondiente a una sección circular
- Dimensionar la base b de una sección rectangular de altura $h = 4b$
- Seleccionar perfiles IPN, IPE y HEB.
- Valores máximos y su localización de tensiones normales y tangenciales para la sección circular.

Dato:

$$\sigma_{adm} = 606,67 \text{ MPa}$$



EJERCICIO 10

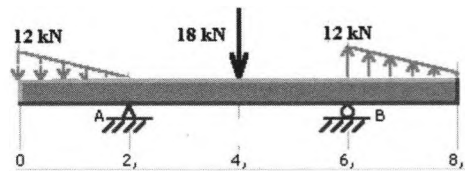
Para la viga de acero AISI 1020 HR mostrada en la figura de sección uniforme y con las cotas representadas en metros, se pide calcular:

- Diagrama de solicitaciones normal, flector y cortante, y deformada.
- Dimensionar la sección circular con un diámetro D (comprobarlo a cortante).
- Dimensionar la base b de una sección rectangular de altura $h = 2,5b$.
- Seleccionar perfiles IPE, HEB y UPN.
- Valores máximos y su localización de tensiones normales y tangenciales para la sección circular.

Dato:

$$\sigma_{adm} = 220,67 \text{ MPa}$$

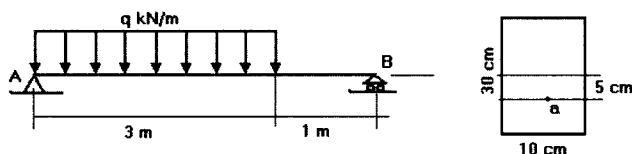
$$\tau_{adm} = 15 \text{ MPa}$$



EJERCICIO 11

Se representa una viga con su sección recta constante de base 10 cm. Se sabe que en la sección S localizada a 1m del apoyo A, y en la fibra localizada a 5 cm por debajo de la fibra neutra, la tensión tangencial toma el valor $\tau_a = 2 \text{ Kg/cm}^2$. Determinar:

- Carga q (KN/m) a la cual se encuentra sometida la viga.
- Carga q_{max} admisible, sabiendo que $\sigma_{adm} = 7,5 \text{ kN/cm}^2$ y $t_{adm} = 7,5 \text{ kN/cm}^2$. Asimismo comprobar si está bien dimensionada la viga.
- En el caso anterior con $q = q_{max}$, obtener las tensiones principales correspondientes a la sección más peligrosa para el momento flector.



EJERCICIO 12

Determinar para la vigueta de acero en voladizo de la figura cuya sección es un perfil IPN 200,

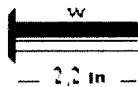
- La máxima carga distribuida uniforme “w” que puede soportar.
- Nuevo perfil IPN si se añade una carga de 2000 Kg en el extremo.

Datos:

$$\sigma_{adm} = 2400 \text{ Kg/cm}^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{Relación flecha/luz} = 1/200$$



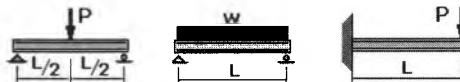
EJERCICIO 13

Determinar empleando el Método de la Flecha Máxima, la carga máxima que puede soportar cada una de las vigas representadas, sabiendo que el material es Titanio Ti-6Al 4V, la longitud es 250 mm, y la sección es un círculo de 4 mm de radio.

Dato:

$$\sigma_{admTi} = 114000 \text{ MPa}$$

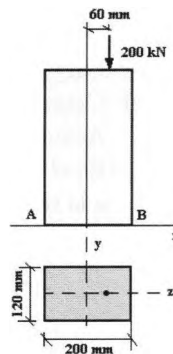
$$\text{Relación flecha/luz} = 1/200$$



EJERCICIO 14

La figura muestra un pilar de acero empotrado de longitud lo suficientemente corto como para no pandear. Si la carga se encuentra aplicada con la excentricidad mostrada, se pide hallar:

- Tensión normal máxima σ_{max} indicando su carácter y localización.
- Tensión normal mínima σ_{min} indicando su carácter y localización.
- Máxima excentricidad de la carga para que todo el pilar trabaje a compresión.



EJERCICIO 15

Dimensionar un pilar rectangular para que trabaje a tensiones de compresión inferiores a 70 Kg/cm^2 . Éste lleva aplicada una carga de 18000 Kg con una excentricidad de 4 cm . Las dimensiones de la sección se disponen: "h" en el eje OX, "b" de valor 16 cm en el eje OZ. La altura se dispone en el eje OY.

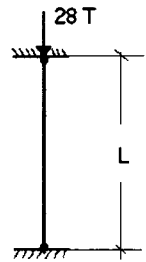
EJERCICIO 16

Para el pilar de la figura formado por un perfil HEB 200, determinar la máxima longitud L que puede tener para que no pandee.

Datos:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$n = 3,5$$

**EJERCICIO 17**

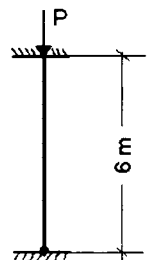
Para el pilar de la figura formado por un perfil IPN 260, determinar la máxima carga de compresión admisible para que no pandee con:

- La longitud representada de 6 m .
- Una nueva longitud de $3,5 \text{ m}$.

Datos:

$$\sigma_{adm} = 1200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

**EJERCICIO 18**

Tenemos una columna biarticulada de 120 mm de longitud, de sección circular de 6 mm de diámetro y material fundición gris A48 - Gr.20. Hallar la máxima carga que soporta a compresión sin que pandee en los siguientes casos de extremos:

- a) Biempotrado.
- b) Fijo – Libre.
- c) Biarticulado.

Datos:

$$\sigma_{FundA48} = 84116,4 \text{ MPa}$$

$$E_{FundA48} = 92 \text{ MPa}$$

EJERCICIO 19

Hallar la carga crítica de pandeo para un tubo hueco de Aluminio 6061-T6 de 1185 mm de longitud y diámetros exterior e interior de 39,5 mm y 29,5 mm respectivamente, en los siguientes casos de extremos:

- a) Fijo – Libre.
- b) Biarticulado.
- c) Fijo – Fijo.
- d) Fijo – Guiado.
- e) Fijo – Articulado.
- f) Articulado – Guiado.

Dato:

$$\sigma_{Al6061-T6} = 180 \text{ MPa}$$

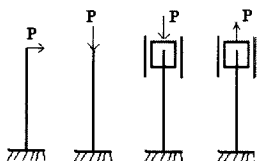
$$E_{Al2014-T6} = 68900 \text{ Mpa}$$

$$\lambda < 62 \text{ para aplicar Euler}$$

EJERCICIO 20

Para las columnas mostradas y suponiendo que no varía la carga, la longitud, ni las condiciones de apoyo, responda a las siguientes cuestiones:

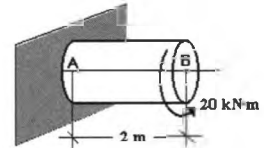
- a) ¿Qué columna presenta mayor riesgo de pandeo?
- b) ¿Cómo aumentaría la seguridad frente al pandeo?



EJERCICIO 21

Para el eje de Acero Estructura A36 y de 40 mm de diámetro de la figura, determinar:

- Máxima tensión tangencial τ_{\max} y localización.
- Ángulo girado por el eje ϕ .
- Nuevos valores de τ_{\max} y de ϕ_{\max} Si se añade una fuerza axial en B de 20 kN.



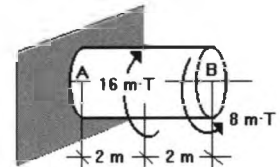
Dato:

$$G_{A36} = 76000 \text{ MPa}$$

EJERCICIO 22

Para el eje de Acero Estructural A36 empotrado en voladizo, de 60 mm de diámetro, determinar:

- Máxima tensión tangencial τ_{\max} .
- Ángulo de torsión máximo ϕ_{\max} y localización.

**EJERCICIO 23**

Un árbol de acero con $\tau_{\max} = 850 \text{ Kg/cm}^2$ transmite 200 c.v. a 250 r.p.m. Hallar:

- diámetro del árbol considerado macizo árbol considerado macizo.
- diámetros exterior e interior del árbol considerado hueco, con $d/D = 0,75$.
- relación de pesos entre los árboles macizo y hueco.
- relación entre los ángulos de torsión por unidad de longitud para ambos casos.

EJERCICIO 24

Un eje cilíndrico hueco tiene 1,5 m de longitud y diámetros interno y externo de 40 y 60 mm, respectivamente. Determinar:

- ¿Cuál es el mayor par torsor que puede aplicársele si la tensión cortante máxima no debe pasar de 120 MPa?.
- Suponiendo que el material es Acero Estructural A36, ¿cuál será el ángulo de torsión del eje?.

Dato: $G = 76.000 \text{ MPa}$ para el acero A36.

EJERCICIO 25

Los datos del ejercicio anterior se refieren a un eje de transmisión, girando a 50 rpm. Determinar la máxima potencia que puede transmitir.

EJERCICIO 26

Una barra biempotrada de acero inoxidable y 2 m de longitud, se somete a un par torsor de 30 kN·m en su centro. Determinar:

- Máxima tensión tangencial τ_{\max} y localización
- Ángulo girado por el eje ϕ

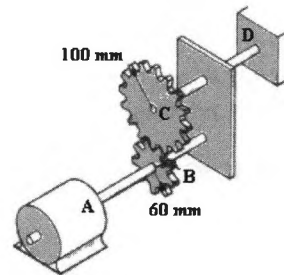
EJERCICIO 27

El eje de cola de un barco de 40 cm de diámetro gira a 80 r.p.m.. Medido el ángulo de torsión entre dos secciones rectas distantes 6,2 m este resulta ser 0,15 rads. ¿Qué potencia está desarrollando el eje para mover la hélice?.

EJERCICIO 28

El diseño preliminar de un árbol grande que conecta un motor a un generador exige el uso de un árbol hueco cuyos diámetros interior y exterior miden 600 y 390 mm, respectivamente. Sabiendo que el cortante admisible es de 200 MPa, determine el máximo par que puede transmitirse:

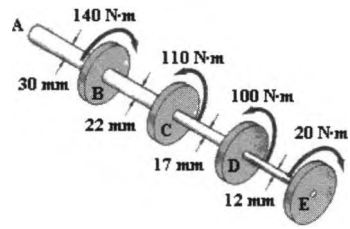
- Por el árbol propuesto
- Por un árbol sólido del mismo peso



EJERCICIO 29

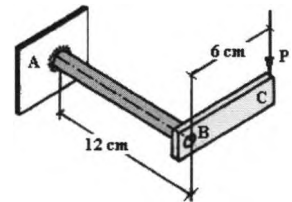
Los momentos torsores equidistantes mostrados se aplican sobre las poleas B, C, D y E del eje empotrado en A. Sabiendo que todos los tramos de ejes son macizos, determinar:

- El eje en el cual ocurre la máxima tensión cortante.
- La magnitud de dicha tensión.
- Suponiendo una distancia entre tramos de 50 mm y que el material soporta un cortante de 86000 MPa localizar el ángulo de torsión máximo y su valor.



EJERCICIO 30

El eje AB macizo de la figura admite una tensión máxima de trabajo a flexión de 1100 Kg/cm² y a cortante de 800 Kg/cm². Si la carga que se aplica a la vigueta BC es de 600 Kg, determinar el diámetro del eje AB.



SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

EJERCICIO 1

- a) $\sigma_{AB} = 39,2 \text{ MPa}$, $\sigma_{BC} = 78,4 \text{ MPa}$
- b) $\delta_{AB} = 0,023 \text{ mm}$, $\delta_{AC} = 0,055 \text{ mm}$
- c) $\sigma_{AB} = 0 \text{ MPa}$, $\sigma_{BC} = 78,4 \text{ MPa}$
- d) $\delta_{AB} = 0 \text{ mm}$, $\delta_{AC} = 0,031 \text{ mm}$

EJERCICIO 2

- a) De Izquierda a derecha por tramos:
 - Tramo 1: $N_1 = 156,8 \text{ kN}$, $\sigma_1 = 156,8 \text{ MPa}$
 - Tramo 2: $N_2 = 58,8 \text{ kN}$, $\sigma_2 = 58,8 \text{ MPa}$
 - Tramo 3: $N_3 = 137,2 \text{ kN}$, $\sigma_3 = 137,2 \text{ MPa}$
 - Tramo 4: $N_4 = 137,2 \text{ kN}$, $\sigma_4 = 274,4 \text{ MPa}$
- b) De izquierda a derecha por tramos:
 - Tramo 1: $\sigma_1 = 156,8 \text{ MPa}$
 - Tramo 2: $\sigma_2 = 58,8 \text{ MPa}$
 - Tramo 3: $\sigma_3 = 137,2 \text{ MPa}$
 - Tramo 4: $\sigma_4 = 274,4 \text{ MPa}$
- c) El tramo 4 no resiste la carga, por superar la tensión máxima admisible de 260 Mpa

EJERCICIO 3

- a) $N_{AB} = N_{BC} = 9,8 \text{ kN}$
- b) $\sigma_{AB} = 49 \text{ MPa}$, $\sigma_{BC} = 98 \text{ MPa}$
- c) $\delta_{AB} = 0,0294 \text{ mm}$, $\delta_{AC} = 0,1227 \text{ mm}$
- d) $\delta_{AB} = 0,0594 \text{ mm}$, $\delta_{AC} = 0,1700 \text{ mm}$

EJERCICIO 4

- a) $N_{AB} = N_{BC} = N_{CD} = 98 \text{ kN}$; $\sigma_{AB} = 98 \text{ MPa}$, $\sigma_{BC} = 122,5 \text{ MPa}$, $\sigma_{CD} = 196 \text{ MPa}$
- b) $\delta_{AB} = 0,00588 \text{ mm}$, $\delta_{AC} = 0,00894 \text{ mm}$, $\delta_{AD} = 0,01678 \text{ mm}$
- c) $\delta_T = 0,01678 \text{ mm}$ (apenas influye el peso por ser despreciable frente a la carga)

EJERCICIO 5

- a) $N_{\text{Bronce}} = 9026,58 \text{ kN}$, $N_{A48} = 973,73 \text{ kN}$; $\sigma_{\text{Bronce}} = 2,37 \text{ MPa}$, $\sigma_{A48} = 1,94 \text{ MPa}$
- b) $N_{\text{Bronce}} = 13752,12 \text{ kN}$, $N_{A48} = 3752,12 \text{ kN}$; $\sigma_{\text{Bronce}} = 3,62 \text{ MPa}$, $\sigma_{A48} = 7,46 \text{ MPa}$

EJERCICIO 6

- a) $N_1 = N_3 = 792,86 \text{ Kg}$, $N_2 = 264,29 \text{ Kg}$
- b) $\sigma_1 = \sigma_3 = 132,14 \text{ Kg/cm}^2$, $\sigma_2 = 66,07 \text{ Kg/cm}^2$
- c) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,0063 \text{ mm}$

EJERCICIO 7

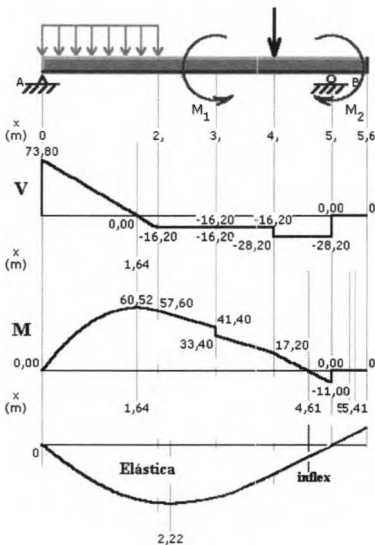
- a) $N_A = 363,92 \text{ Kp}$, $N_B = 293,81 \text{ Kp}$, $N_C = 206,19 \text{ Kp}$, $N_D = 136,08 \text{ Kp}$
- b) $\delta_A = 0,104 \text{ mm}$, $\delta_B = 0,084 \text{ mm}$, $\delta_C = 0,059 \text{ mm}$, $\delta_D = 0,0038 \text{ mm}$

EJERCICIO 8

- a) Elemento 1: $\sigma_{\text{sup}} = 16 \text{ Kg/cm}^2$, $\tau_{\text{sup}} = 14 \text{ Kg/cm}^2$, $\sigma_{\text{izq}} = 12 \text{ Kg/cm}^2$, $\tau_{\text{izq}} = -10 \text{ Kg/cm}^2$,
 $\sigma_{\text{inf}} = 36 \text{ Kg/cm}^2$, $\tau_{\text{inf}} = -14 \text{ Kg/cm}^2$, $\sigma_{\text{der}} = 40 \text{ Kg/cm}^2$, $\tau_{\text{der}} = 10 \text{ Kg/cm}^2$.
 Elemento 2: $\sigma_{\text{sup}} = -200 \text{ Kg/cm}^2$, $\tau_{\text{sup}} = 100 \text{ Kg/cm}^2$, $\sigma_{\text{izq}} = 0 \text{ Kg/cm}^2$, $\tau_{\text{izq}} = -300 \text{ Kg/cm}^2$,
 $\sigma_{\text{inf}} = 400$, $\tau_{\text{inf}} = 100$, $\sigma_{\text{der}} = 200 \text{ Kg/cm}^2$, $\tau_{\text{der}} = 300 \text{ Kg/cm}^2$
- b) Elemento 1: $\tau_{\text{max}} = 17,20 \text{ Kg/cm}^2$
 Elemento 2: $\tau_{\text{max}} = 316,23 \text{ Kg/cm}^2$
- c) Elemento 1: $\sigma_1 = 43,20 \text{ Kg/cm}^2$, $\sigma_2 = 8,79 \text{ Kg/cm}^2$, $\alpha_1 = -17,77^\circ$, $\alpha_2 = -107,77^\circ$
 Elemento 2: $\sigma_1 = 416,23 \text{ Kg/cm}^2$, $\sigma_2 = -216,28 \text{ Kg/cm}^2$, $\alpha_1 = -35,78^\circ$, $\alpha_2 = -125,78^\circ$

EJERCICIO 9

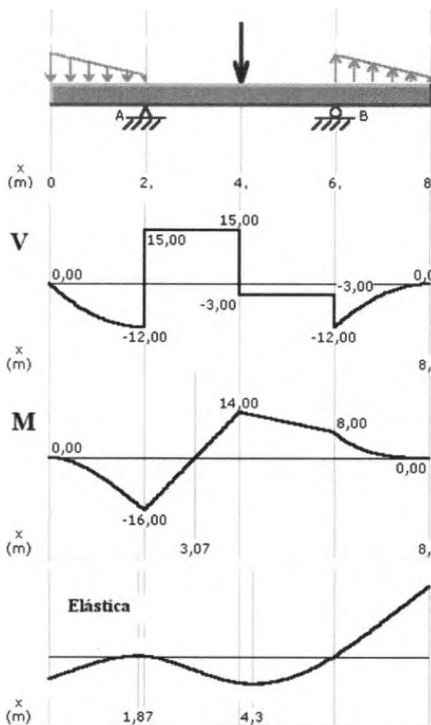
- a) Diagrama de solicitaciones y deformada



- b) $D = 100,533 \text{ mm}$
- c) $b = 33,444 \text{ mm}$, $h = 133,776 \text{ mm}$
- d) $W = 99,751 \text{ cm}^3$ (tablas) \rightarrow Perfil IPN 160, IPE 160 y HEB 120
- e) $\sigma_{\max} = 606,67 \text{ MPa}$ localizada en la sección a 1,64 m del apoyo A, en la fibra extrema superior ($y = 66,888 \text{ mm}$) a tracción, y en la fibra extrema inferior ($y = -66,888 \text{ mm}$) a compresión, $\tau_{\max} = 24,74 \text{ MPa}$ localizada en la fibra neutra de la sección del apoyo A.

EJERCICIO 10

- a) Diagrama de solicitaciones y deformada



- b) $D = 90,392 \text{ mm}$
- c) $b = 41,136 \text{ mm}$, $h = 102,839 \text{ mm}$
- d) $W = 72507,46 \text{ cm}^3$ (tablas) \rightarrow Perfil IPE 140 y HEA100 y UPN 140
- e) $\sigma_{\max} = 220,67 \text{ MPa}$ localizada en la sección del apoyo A, en la fibra extrema superior ($y = 66,888 \text{ mm}$) a tracción, y en la fibra extrema inferior ($y = -66,888 \text{ mm}$) a compresión, $\tau_{\max} = 3,117 \text{ MPa}$ localizada en la fibra neutra de cualquier sección ente 0 y 2 m del apoyo izquierdo.

EJERCICIO 11

- a) $q = 514 \text{ kN/cm}$
- b) $q_{\max} = 640 \text{ kN/cm}$
- c) $\sigma_1 = 0 \text{ kN/cm}^2$ y $\sigma_2 = 75 \text{ kN/cm}^2$

EJERCICIO 12

- a) $w = 2,81 \text{ Kg/m}$
- b) IPN 260

EJERCICIO 13

$$P = 16,76 \text{ N}, w = 30,46 \text{ N/m}, P = 4,189 \text{ N}$$

EJERCICIO 14

- a) $\sigma_{\max} = -23,33 \text{ MPa}$ (compresión), localizada en punto B
- b) $\sigma_{\min} = 6,67 \text{ MPa}$ (tracción) localizada en punto A
- c) $e = 33,33 \text{ mm}$
Ambas tensiones obtenidas en a) y b) son principales ($\tau = 0$)

EJERCICIO 15

$$h = 29,25 \text{ mm}$$

EJERCICIO 16

$$L = 650,86 \text{ cm}$$

EJERCICIO 17

- a) $P_{\text{adm}} = 65694,75 \text{ Kg}$
- b) $P_{\text{adm}} = 46347,82 \text{ Kg}$

EJERCICIO 18

- a) $1,401 \text{ kN}$
- b) $0,478 \text{ kN}$
- c) $1,148 \text{ kN}$

EJERCICIO 19

- a) 9,72 kN
- b) 38,875 kN
- c) 79,53 kN
- d) 38,875 kN
- e) 79,53 kN
- f) 9,72 kN

EJERCICIO 20

- a) La columna segunda por tener el menor coeficiente K
- b) Con arriostramientos o cambiando la sujeción de los extremos

EJERCICIO 21

- a) $\tau_{\max} = 1591,55$ MPa, situación en la periferia de cualquier sección del eje.
- b) $\phi = 120^\circ$
- c) Se obtienen los mismos valores ya que la fuerza axial no afecta a la tensión cortante ni al ángulo de torsión

EJERCICIO 22

- a) $\tau_{\max} = \pm 636,62$ MPa según mitad izquierda o derecha del eje
- b) $\phi_{\max} = -48^\circ$ en el centro

EJERCICIO 23

- a) $D = 71$ mm
- b) $D_{\text{ext}} = 79,5$ mm, $d_{\text{int}} = 59,6$ mm
- c) $P_{\text{macizo}}/P_{\text{hueco}} = 1,77$
- d) $\theta_{\text{macizo}}/\theta_{\text{hueco}} = 1,14$

EJERCICIO 24

- a) $M_t = 4,083$ kN·m
- b) $\phi = 4,53^\circ$

EJERCICIO 25

$$H = 34,205 \text{ kW}$$

EJERCICIO 26

- a) $\tau_{\max} = 1193,662 \text{ MPa}$ localizada en la periferia de la sección en mitad del eje
- b) $\phi_{\max} = 79,53^\circ$ en mitad del eje

EJERCICIO 27

38,714 kW

EJERCICIO 28

- a) $Mt = 6968,155 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- b) $Mt = 3723,525 \text{ kN}\cdot\text{m}$

EJERCICIO 29

- a) Tramo BC
- b) $\tau_{\max} = 90,88 \text{ MPa}$

EJERCICIO 30

$D = 8,4 \text{ cm}$



Este libro se terminó de imprimir el 15 de octubre de 2003, cuarenta y cuatro años después de que el científico español Severo Ochoa obtuviera el Premio Nobel de Fisiología y Medicina por sus trabajos sobre la química de la vida.

textos básicos
UNIVERSITARIOS

21



UCA

Universidad
de Cádiz

Servicio de Publicaciones
2003

ISBN 84-7786-866-2



9 788477 868668