

**Aportes Didácticos que Ofrece el uso de los MOOC en la Enseñanza de la Función
Seno con Estudiantes de Matemáticas I, Referente al uso y Creación de Material Educativo
Adaptado al Contexto de la Universidad Tecnológica de Pereira**

Daniel A. López

Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de Pereira

54C49: Trabajo de Grado de Investigación

PhD. José Francisco Amador Montaña

15 de diciembre De 2022

**Aportes Didácticos que Ofrece el uso de los MOOC en la Enseñanza de la Función
Seno con Estudiantes de Matemáticas I, Referente al uso y Creación de Material Educativo
Adaptado al Contexto de la Universidad Tecnológica de Pereira**

Daniel A. López

Director: PhD. José Francisco Amador Montaña

Trabajo de grado para optar al título de: Magister en Enseñanza de las Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Ciencias Básicas

2022

Nota de Aceptación

Firma del jurado

Firma del jurado

Firma del director

Resumen

Este artículo presenta una investigación a cerca de los aportes didácticos que ofrece el uso de los Cursos En-línea Masivos y Abiertos (MOOC) en la enseñanza de la función seno en un contexto específico. Se diseñó una propuesta pedagógica que combina el enfoque pedagógico Socio-Constructivista y las teorías del Aprendizaje Autónomo, Colaborativo y Basado en Problemas, junto con la teoría de los niveles de Van Hiele. El MOOC fue creado y utilizado como parte de una secuencia didáctica implementada en un entorno virtual de aprendizaje. Las sesiones de clase fueron observadas y analizadas a la luz de teorías de la enseñanza como el Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK), Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) y el Quartet Knowledge (KQ) con el fin de analizar la aplicación de la secuencia didáctica explorando los beneficios de la enseñanza con ayuda de los MOOC en la comprensión y aplicación de la función seno.

Palabras clave: MOOC, Socio-Constructivismo, Van Hiele, Aprendizaje Autónomo, Aprendizaje Colaborativo y Aprendizaje Basando en Problemas.

Abstract

This article presents a study that examines the didactic contributions of Massive Open Online Courses (MOOCs) in teaching the sine function in a specific context. The research was based on a pedagogical proposal that combined the Socio-Constructivist approach and the theories of Autonomous, Collaborative, and Problem-Based Learning, along with Van Hiele's levels of understanding theory. A MOOC was implemented as part of a didactic sequence in a virtual learning environment. Classroom sessions were observed and analyzed using approaches such as Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK), Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), and Quartet Knowledge (KQ) to assess the implementation of the didactic sequence and explore the benefits of using MOOCs in understanding and applying the sine function.

Keywords: MOOC, Socio-Constructivism, Van Hiele, Autonomous Learning, Collaborative Learning, Problem-Based Learning, TPACK, MKT, KQ.

Tabla de Contenido

1	Descripción del Proyecto.....	10
1.1	Pregunta de Investigación.....	10
1.2	Objetivos.....	10
1.2.1	Objetivo General.....	10
1.2.2	Objetivos Específicos.....	10
1.3	Justificación.....	11
1.4	Estado del Arte.....	12
2	Marco Teórico.....	17
2.1	Socio-Constructivismo.....	17
2.1.1	Procesos De Internalización En La Autorregulación.....	19
2.1.2	Zona de Desarrollo Próximo (ZDP).....	20
2.1.3	El Lenguaje.....	20
2.1.4	Mediación.....	20
2.1.5	Andamiaje.....	21
2.1.6	Ayuda Ajustada.....	21
2.1.7	Construcción Conjunta De Significados.....	21
2.2	Teorías del Aprendizaje.....	22
2.2.1	Aprendizaje Autónomo (AA).....	23
2.2.2	Aprendizaje Basado en Problemas (ABP).....	35
2.3	Teoría de Van Hiele.....	40
2.3.1	Nivel 1 (Visualización o Reconocimiento).....	42
2.3.2	Nivel 2 (Análisis).....	42
2.3.3	Nivel 3 (Ordenación o Clasificación).....	42
2.3.4	Nivel 4 (Deducción formal).....	42
2.3.5	Nivel 5 (Rigor).....	43
2.3.6	Fase 1: Información.....	43
2.3.7	Fase 2: Orientación dirigida.....	44
2.3.8	Fase 3: Explicitación.....	45
2.3.9	Fase 4: Orientación libre.....	45
2.3.10	Fase 5: Integración.....	46
2.3.11	Propiedades del modelo de Van Hiele.....	46

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

2.3.12	Evaluación en el modelo de Van Hiele.....	48
2.4	El uso de las TIC en el Apoyo de la Enseñanza de las Matemáticas	49
2.4.1	El Conectivismo y los MOOC	51
2.5	El Modelo TPACK	54
2.5.1	Conocimiento de Contenido (CK)	54
2.5.2	Conocimiento Pedagógico (PK)	55
2.5.3	Conocimiento Tecnológico (TK).....	55
2.5.4	Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)	55
2.5.1	Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK).....	55
2.5.2	Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK)	55
2.5.3	Conocimiento de Contenido Tecnológico Pedagógico (TPCK).....	56
2.6	Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)	56
2.6.1	Conocimiento común del contenido (CCK)	57
2.6.2	Conocimiento especializado del contenido (SCK)	58
2.6.3	Conocimiento del contenido de horizonte (HCK)	58
2.6.4	Conocimiento de Contenidos y Enseñanza (KCT)	59
2.6.5	Conocimiento de Contenido y Estudiantes (KCS).....	59
2.6.6	Conocimiento de Contenido y Currículo (KCC)	60
2.7	El Cuarteto del Conocimiento (KQ)	61
2.7.1	Fundamentación.....	61
2.7.2	Transformación	62
2.7.3	Conexión.....	63
2.7.4	Contingencia	63
2.8	Contenido Específico Sobre la Función Seno.....	64
2.8.1	Importancia de la Historia de las Funciones Trigonómicas En la secuencia didáctica64	
2.8.2	Secuencia del Contenido Especifico Sobre de la Función seno	66
3	Metodología.....	68
3.1	Diseño de la Investigación Cualitativa	71
3.1.1	Enfoque Analítico Interpretativo	72
3.2	Contexto de la Investigación.....	73
3.3	Instrumentos Utilizados en la Investigación	73
3.3.1	Observación Directa.....	73

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

3.3.2	Registros en Video.....	74
3.3.3	Fase Analítica.....	74
3.3.4	Fase Informativa.	75
3.4	Diseño del Modelo Pedagógico Para la Enseñanza de la Función Seno.	75
3.5	Diseño y Creación del MOOC.....	82
3.6	Secuencia didáctica.....	85
4	Análisis e Interpretación.....	86
5	Conclusiones.....	123
6	Referencias	126

Tabla de Anexos

Anexo A.	Secuencia Didáctica.	134
Anexo B.	Imágenes de la Evaluación Inicial.	144
Anexo C.	Resultado Evaluación Inicial.	163
Anexo D.	Capturas de pantalla del MOOC.	164
Anexo E.	Fotos de Pantalla de la Exposición de la Primera Actividad.	170
Anexo F.	Fotos De Pantalla De la Segunda Actividad.	174
Anexo G.	Imágenes De La Evaluación Final.....	178
Anexo H.	Resultados de la Evaluación Final.....	190
Anexo I.	Contenido Específico Guía del Libro Trascendentes Tempranas.....	191

Tabla de Figuras

Tabla 1	<i>Modelo pedagógico.....</i>	73
Tabla 2	<i>Análisis e interpretación de cada una de las actividades de esta investigación en la fase inicial</i>	86
Tabla 3	<i>Análisis e interpretación de cada una de las actividades de esta investigación en la fase de aplicación de la secuencia didáctica</i>	89
Tabla 4	Tabla en la cual se hace un análisis de las interpretaciones y se relacionan con cada objetivo planteado.....	122

Introducción

Este macroproyecto de investigación busca determinar los aportes didácticos de los MOOC (Cursos Abiertos Masivos en Línea) en la enseñanza de las matemáticas con estudiantes de primer semestre de universidad en lo referente a uso y creación de material educativo, adaptación de recursos para la enseñanza y aprendizaje al contexto en el aula de clase. Quien está a cargo de este macroproyecto es el grupo de investigación GIPEMAC, encargados de realizar estudios sobre diversos aspectos vinculados al avance del pensamiento matemático en distintos entornos sociales, además de elaborar y aplicar estrategias educativas que facilitan, en cierto grado, la solución de dificultades asociadas a la interacción entre los actores que influyen en el proceso educativo. Las líneas de investigación que se trabajan en este grupo son la Etnomatemática, teoría cognitiva de la matemática, modelación matemática en el aula, didáctica de la matemática mediada por TIC y teoría etnocognitiva del conocimiento matemático.

Para tales efectos, cada coinvestigador determinará un tema de clase del área de matemáticas donde los docentes hayan encontrado dificultades para orientar la clase, con el objetivo de lograr las competencias correspondientes. Partiendo de este análisis previo, se dará lugar a la creación de un MOOC para el apoyo de cada clase de matemáticas, desde un enfoque Socio-Constructivista, teniendo en cuenta las teorías de aprendizaje; autónomo, basado en problemas y colaborativo.

Una vez creado el MOOC, se utilizará con sus estudiantes en un contexto determinado y se valorará su uso y pertinencia en la enseñanza de las matemáticas en ese contexto a partir de las teorías de la enseñanza: TPACK, MKT y KQ. Se espera que este ejercicio de investigación teórico-práctica, permita el alcance del objetivo principal de la misma, el cual se centra en el manejo de la función seno en estudiantes de matemáticas 1 de la Universidad Tecnológica de

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

Pereira, el impacto generado en la población estudiantil y sus posibles repercusiones en la vida universitaria y profesional.

1 Descripción del Proyecto

1.1 Pregunta de Investigación

¿Qué aportes didácticos ofrece el uso de los MOOC en la enseñanza de función seno, en estudiantes de primer semestre de educación superior en lo referente al uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto en el aula de clases?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Determinar los aportes didácticos que ofrece el uso de ayudas como los MOOC en la enseñanza de la función seno a estudiantes de Matemáticas I de la Universidad Tecnológica de Pereira, en lo referente al uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto en el aula de clase.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Elaborar un diseño pedagógico para la enseñanza de la función seno con ayuda de un MOOC.
- Crear un MOOC para apoyar la enseñanza de la función seno.
- Crear una secuencia didáctica con uso de los MOOC para la enseñanza de la función seno y desarrollarla para valorar sus aportes didácticos.

1.3 Justificación.

Los profesores deben utilizar metodologías que promuevan la participación activa de los estudiantes, dándoles un papel central en el proceso de aprendizaje. Estas metodologías deben adaptarse según la organización de los contenidos y las competencias que se desean desarrollar. La aplicación de estas metodologías implica la integración armoniosa de diversas estrategias, las cuales deben estar en sintonía con los intereses y necesidades de los alumnos. Esto garantizará un aprendizaje más efectivo y significativo (Rodicio, 2015). En la actualidad la masificación de los sistemas tecnológicos digitales de la información, es un fenómeno que va en aumento junto con las alternativas que estas ofrecen para la enseñanza, entre las cuales se encuentran los Cursos En línea Masivos y Abierto, estas tecnologías tienen la ventaja de estar estrechamente relacionadas con los jóvenes, debido a su uso en la cotidianidad, proporcionando un contexto en el cual el estudiante se sienta familiarizado con los diferentes medios digitales y formatos que se utilizan en estos cursos y es coherente con los intereses y necesidades del alumno. Los estudiantes de primeros semestres presentan dificultades la hora de trabajar con funciones cíclicas como la función seno, según Penagos (2017) los problemas pueden ser de abstracción y generalización en matemáticas, dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas, dificultades relacionadas con la motivación de los estudiantes, dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico de los estudiantes, dificultades relacionadas con la falta de dominio de contenidos previos esto crea una brecha entre el nuevo contenido y el conocimiento previo del alumno.

Además, cuentan con recursos digitales para explorar y experimentar con sus conocimientos matemáticos, tanto de manera sincrónica como asincrónica. En la categoría de asincrónica se han explorado muchas alternativas, entre las cuales se encuentran los cursos en-

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

línea, masivos y abiertos (MOOC).

En este contexto, los Cursos En-línea Masivos y Abiertos, en adelante los “MOOC”, muestran su potencial en el proceso de enseñanza de las matemáticas, en especial la de nuestro objeto matemático, función seno con estudiantes en estudiantes de primer semestre de universidad; empleando un enfoque Socio-Constructivista de Vygotsky y teorías de aprendizaje como lo son el Aprendizaje Autónomo, Aprendizaje Colaborativo y Aprendizaje Basado en Problemas, así también la teoría Van Hiele para la realización de la secuencia de didáctica.

1.4 Estado del Arte

El artículo de Downes (2019) del International Council For Open And Distance Education «Are MOOC Open Educational Resources? A Literature Review on History, Definitions and Typologies of OER and MOOC» El cual trata sobre una reseña histórica de los recursos educativos abiertos (OER) con énfasis en los MOOC y a su vez habla sobre la calidad e importancia que tienen los diferentes tipos de MOOC en relación con sus objetivos y cómo los MOOC apoyan el aprendizaje desde distintas perspectivas, con el fin de entregar a los alumnos oportunidades de aprendizaje y entornos suficientes para el desarrollo del aprendizaje autorregulado y colaborativo. Este artículo es importante en este trabajo de grado, ya que ofrece algunas pautas para la creación de un MOOC teniendo en cuenta, los componentes psicológicos y como este nos lleve al aprendizaje autorregulado y colaborativo por parte del estudiante.

En el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, los Massive Open Online Courses (MOOC) han emergido como una herramienta educativa de gran relevancia. En este contexto, el artículo «How Video Production Affects Student Engagement: An Empirical Study of MOOC Videos» de Guo, Kim y Rubin (2014) proporciona un valioso análisis sobre el impacto de los videos en la participación y el compromiso de los estudiantes. El estudio revela que los videos

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

tienen una alta tasa de visualización inicial, pero la atención de los estudiantes disminuye a medida que avanza el curso (Guo, Kim y Rubin, 2014, p. 203). Esto destaca la necesidad de explorar estrategias para mejorar la eficacia de los videos y mantener el interés de los participantes a lo largo del curso. Además, el artículo sugiere que los videos pueden ser una herramienta crucial para presentar conceptos clave y explicar el contenido de manera visualmente atractiva para el estudiante (Guo, Kim y Rubin, 2014, p. 207). Sin embargo, se requiere una cuidadosa planificación y diseño para garantizar que los videos sean efectivos en el proceso de enseñanza de la función seno. Estos hallazgos resaltan la importancia de considerar el uso adecuado de los videos en los MOOC como parte de una estrategia pedagógica integral para la enseñanza de la función seno.

El artículo «Deconstructing Disengagement: Analyzing Learner Subpopulations in Massive Open Online Courses» de Kizilcec, Piech y Schneider (2013) es relevante para la enseñanza de las matemáticas con MOOC, ya que proporciona una comprensión más profunda de los factores que influyen en el éxito de los estudiantes en estos cursos en línea. Algunos de estos factores incluyen el nivel de motivación intrínseca del estudiante, la relevancia percibida del curso, la participación en actividades interactivas y la interacción con otros estudiantes y el instructor. El estudio también destaca la importancia de la retroalimentación efectiva y la adaptación del contenido del curso a las necesidades individuales de los estudiantes. Estos factores pueden influir en el grado de compromiso y participación de los estudiantes en los MOOC, y comprenderlos mejor es crucial para diseñar intervenciones educativas más efectivas y mejorar la experiencia de aprendizaje en línea. A través del análisis de datos, el estudio identifica perfiles de estudiantes desvinculados y examina las variables asociadas con su falta de compromiso. Estos hallazgos son de gran utilidad para los diseñadores de cursos y educadores,

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

ya que les permite implementar estrategias más efectivas para fomentar el compromiso y la participación de los estudiantes, mejorando así sus posibilidades de éxito en los MOOC de matemáticas. Además, la presentación del artículo en una conferencia internacional de analítica del aprendizaje destaca su relevancia en el campo de la investigación educativa en línea.

El artículo «MOOC: Un Estudio Sistemático de la Literatura Publicada 2008-2012» realizado por Liyanagunawardena, Adams y Williams (2013) es una investigación exhaustiva que analiza la literatura existente sobre los MOOC durante ese período de tiempo. Este estudio proporciona valiosos conocimientos sobre el desarrollo temprano de los MOOC y constituye una referencia fundamental en el campo de la enseñanza matemática con MOOC. Los autores llevaron a cabo una revisión sistemática de una amplia variedad de fuentes, como artículos de investigación, ponencias de conferencias e informes, con el objetivo de identificar las tendencias, temáticas y problemáticas más relevantes en torno a los MOOC. Este análisis permitió identificar temas clave, como la pedagogía de los MOOC, el perfil de los participantes, las tasas de finalización y el papel de la interacción social en el aprendizaje en línea. El estudio de Liyanagunawardena, Adams y Williams (2013) constituye un punto de partida crucial para comprender el panorama de los MOOC y su aplicación en la enseñanza de las matemáticas. Sus hallazgos y conclusiones han sido ampliamente citados en investigaciones posteriores y ofrecen una base sólida para futuros trabajos en este ámbito.

El estudio de Poveda-Fernández y Gómez-Arciga (2017) titulado «MOOC Resolución de Problemas Matemáticos y Uso de Tecnologías Digitales: Su Diseño e Implementación» (p. 95) constituye una contribución relevante al estado del arte en la enseñanza de las matemáticas mediante MOOC. En este artículo, los autores exploran el diseño y la implementación de un MOOC centrado en la resolución de problemas matemáticos, haciendo hincapié en el

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

aprovechamiento de las tecnologías digitales. El estudio analiza en detalle la estructura del MOOC, las estrategias pedagógicas empleadas y los resultados obtenidos por los participantes. Los hallazgos resaltan la importancia de los MOOC como herramientas efectivas para promover la resolución de problemas matemáticos, así como el papel crucial de las tecnologías digitales en este proceso de enseñanza-aprendizaje. Este trabajo enriquece el estado del arte al proporcionar una perspectiva fundamentada sobre cómo diseñar e implementar MOOC que favorezcan el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas matemáticos. Además, su enfoque en la enseñanza de las matemáticas y el uso de tecnologías digitales en el contexto de los MOOC es relevante para los investigadores y profesionales interesados en la mejora de la educación matemática a través de entornos virtuales de aprendizaje.

El artículo de (Jenny Mackness, 2014) del Departamento de Matemáticas, Universidad de Portsmouth «The Ideals and Reality of Participating in a MOOC» en el cual se hace un análisis detallado del curso pionero y además uno de los estudios más grandes que se han hecho sobre los MOOC. Utilizando el primer MOOC oficial llamado “CCK08”. Se realizó un estudio con más de participantes 2000 (El más masivo hasta la fecha); dirigido por los pioneros de este medio de aprendizaje, Stephen Downes y George Siemens, a través de la Universidad de Manitoba, Canadá. Este artículo es de importancia para este trabajo debido a que hace un excelente análisis de uno de los estudios referentes en cuanto a conectividad y los MOOC, en donde muestran los diferentes elementos y características del aprendizaje por medio de MOOC de manera experimental, teniendo en cuenta diferentes contextos educativos y diferentes teorías del aprendizaje y la didáctica, como: el Aprendizaje a Autónomo y el Socio-Constructivista.

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

La tesis para optar al título de Magíster de Julián A. Herrera, (2019) de la UTP «Creación de un MOOC, Como Estrategia Didáctica para la Enseñanza de las Identidades Trigonómicas Pitagóricas, con Estudiantes de Grado Décimo, en la Institución Educativa Liceo Quindío de Salento» Es de importancia para esta investigación, ya que se trata de un trabajo el cual se fundamenta en la enseñanza de las razones trigonométricas por medio de un MOOC elaborado a manera de guía, en el cual se tienen en cuenta las 4 identidades y demás conceptos que están dentro de este objeto matemático, utilizando las TIC para y aprovechando el T-Pack para la creación de material educativo basado en modelos pedagógicos y en teorías de aprendizaje, para este caso se utilizó el modelo Socio-Constructivista y las teorías de Aprendizaje Colaborativo, Aprendizaje Basado en Problemas y Aprendizaje Autónomo, al mismo tiempo, se utilizó la teoría de aprendizaje por niveles de Van Hiele para la elaboración de una secuencia didáctica.

Se encuentra el artículo de la revista Big Bang Faustiniiano de la Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión de Huacho, Perú, «Construcción de las Gráficas Trigonómicas Usando GeoGebra» (Jorge Luis Rojas Paz, 2016), Hace referencia a la construcción de las principales funciones trigonométricas en ambiente GeoGebra paso a paso y a su vez mostrando la importancia de esta interfaz visual en la actualidad gracias a su gran cantidad de herramientas y su dinamismo. Este trabajo es útil para esta investigación, ya que se va a hacer uso de la interfaz visual como medio para desarrollar la secuencia didáctica.

En el repositorio de investigaciones de la UTP se encuentra el trabajo de grado para optar al título de magíster «MOOC para la Enseñanza de las Áreas de Prismas Rectangulares, a Estudiantes de Grado Noveno de la Institución Educativa Rodrigo Arenas Betancout de Pereira» (Raigoza Flórez, 2018), la cual hace referencia a una adaptación de recursos educativos al contexto en el aula de clase. Utilizando las TIC y la construcción de herramientas que se basan

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

en modelos pedagógicos y en teorías del aprendizaje. En este caso se empleó el modelo Socio-Constructivista y las teorías de Aprendizaje Colaborativo, Aprendizaje Basado en Problemas y Aprendizaje Autónomo, y al mismo tiempo se usó la teoría de aprendizaje de los niveles de Van Hiele para la creación de una secuencia didáctica. Este trabajo, además de estar sujeto al macroproyecto GIPEMAC del cual se desprende la presente investigación, también es útil para este trabajo de grado porque tiene en cuenta las TIC para el desarrollo de una secuencia didáctica por medio de un MOOC.

2 Marco Teórico

2.1 Socio-Constructivismo

El Socio-Constructivismo es una teoría propuesta por el pedagogo y escritor soviético, Lev Siminovach Vygotsky; es una teoría psicopedagógica que entiende el proceso del desarrollo cognitivo como un proceso de aprendizaje de manera gradual, en el que el estudiante cumple un rol dinámico durante todo el proceso de aprendizaje el cual se divide en tres zonas (real, potencia y próximo) y que se da a través del intercambio social entre los actores del aprendizaje, siempre teniendo en cuenta elementos del contexto que pueden afectar el proceso de aprendizaje.

El Socio-Constructivismo se basa en la teoría del Constructivismo, que ha sido objeto de numerosas investigaciones y contribuciones de destacados autores a lo largo del siglo pasado. Esta perspectiva teórica enfatiza la importancia de la interacción social y el papel activo del individuo en la construcción del conocimiento. Estudios previos han destacado la relevancia de considerar el entorno social y cultural en los procesos educativos, así como la influencia de las interacciones sociales en el desarrollo de habilidades cognitivas superiores. Estas investigaciones respaldan la importancia del enfoque Socio-Constructivista en la comprensión y mejora de los procesos de aprendizaje y enseñanza; existen investigadores como Castellaro, M., & Peralta, N.

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

S. (2020) que tratan el Constructivismo en su aspecto social, como una alternativa al concepto en sí de conocimiento, no como un objeto de estudio, sino más bien como una acción o serie de acciones que se circunscriben a un proceso de construcción situado y social, es decir, que el conocimiento se construye, no sobre la base de los saberes, sino en la medida que este se enriquece con y desde la interacción del individuo con otros. (p. 45). Incluso más adelante, en sus artículos, enfatizan el carácter social del Constructivismo al expresar que, en este, el fin u objetivo no es necesariamente el conocimiento, sino todas las relaciones epistemológicas que se generan en el seno de una comunidad a través de la interacción social como lo menciona Schunk (2012).

Según las interpretaciones de Gutiérrez (2021) sobre las ideas de Vygotsky, el Socio-Constructivismo se define en los siguientes términos:

- El Socio-Constructivismo se enmarca dentro de un contexto cultural, ya que se trata de un proceso social.
- La construcción del aprendizaje requiere de la interacción con otros individuos y con el entorno.
- El conocimiento generado, por consiguiente, refleja el contexto influenciado por aspectos culturales, lingüísticos, creencias, prácticas educativas directas y relaciones interpersonales.

En este contexto, Gutiérrez (2021) proporciona interpretaciones y perspectivas adicionales sobre las ideas de Vygotsky en relación con el Socio-Constructivismo, en consonancia con la investigación científica en el campo educativo.

2.1.1 Procesos De Internalización En La Autorregulación

De acuerdo con la teoría de Vygotsky, se postula que las funciones psicológicas superiores se originan externamente, ya que se desarrollan en el ámbito social antes de convertirse en funciones psicológicas individuales Stasiejko (2018). Investigaciones en los campos de la psicología y la educación han respaldado esta perspectiva.

Según Stasiejko (2018) y otros autores, las interacciones sociales y la participación en actividades compartidas desempeñan un papel fundamental en el desarrollo de funciones mentales superiores. Estas interacciones sociales permiten la adquisición y desarrollo de habilidades cognitivas complejas, tales como el lenguaje, el razonamiento y la resolución de problemas, a través de la participación en prácticas culturales compartidas.

Además, Stasiejko (2018) ha destacado la importancia del aprendizaje guiado por adultos o compañeros más competentes en el desarrollo de funciones cognitivas superiores. La participación en interacciones sociales estructuradas facilita la internalización de estas funciones a medida que los individuos adquieren mayores competencias.

En resumen, la teoría de Vygotsky respalda la noción de que las funciones psicológicas superiores tienen un origen externo, y su desarrollo se produce a través de la interacción social y la participación guiada en contextos culturales, Stasiejko (2018). Estos hallazgos destacan la importancia de considerar el contexto social y cultural en el proceso de desarrollo cognitivo y educativo Stasiejko (2018).

Es decir, que los procesos de internalización, conducen a la autorregulación, teniendo como punto de partida los procesos sociales hasta llegar a los procesos individuales. Casi todos los procesos cognitivos y metacognitivos están directamente relacionados con la comunicación y generalmente se da a través del lenguaje en todas sus variantes, cuando el individuo interioriza

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

esta serie de signos, los convierte en instrumentos propios del pensamiento, es decir en medios de autorregulación.

2.1.2 Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)

«La ZDP es la distancia entre el nivel de desarrollo real, determinado por la resolución independiente de problemas, y el nivel de desarrollo potencial determinado mediante la resolución de problemas bajo la guía de adultos o en colaboración con otros más capaces.»

Gamboa, M. (2019) En otros términos, son las distintas aptitudes que una persona es capaz de desarrollar con acompañamiento, pero todavía no puede desarrollar de manera individual.

Vygotsky menciona en sus investigaciones que el intercambio de ideas con otros juega un rol positivo en el desarrollo de competencias y estrategias que ayudan a los procesos cognitivos.

2.1.3 El Lenguaje

Durante el proceso de adquisición de nuevas competencias, Vygotsky otorgaba al lenguaje un papel prioritario, ya que desde su perspectiva, el lenguaje es el que permite y facilita el fortalecimiento del desarrollo cognitivo gracias a poder compartir las experiencias necesarias. Por ello, dentro del proceso de observación por parte del docente, el cuidadoso análisis de las palabras y conversaciones de los estudiantes resulta de gran importancia a la hora de establecer sus necesidades y habilidades.

2.1.4 Mediación

Según Vygotsky la mediación son las herramientas y signos que sirven de soporte para el desarrollo cognitivo por medio de la interacción social, el cual inicia en el nacimiento y es asistido por adultos u otros agentes considerados más competentes en cuanto al manejo del lenguaje.

La mediación en el Socio-Constructivismo puede también ser de tipo instrumental,

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

partiendo del «cómo se operacionaliza» la adquisición de conocimientos. La mediación instrumental son las herramientas que usa el docente para que el aprendizaje se lleve a cabo. Puede ser externa, esto es, los instrumentos necesarios para llevar a cabo la mediación, incluyendo evidentemente las tecnologías de información y comunicación; o una mediación instrumental interna sustentada en los signos y símbolos que preparan el escenario de aprendizaje.

2.1.5 Andamiaje

Es el conjunto de ayudas, orientaciones e información que un individuo recibe durante su desarrollo cognitivo. Estas ayudas facilitan el acceso a nuevos aprendizajes que aportan a su desarrollo mental.

El andamiaje es una estrategia pedagógica que busca promover la capacidad de autorregulación en los estudiantes. Este enfoque implica que el profesor brinde apoyo y control en aquellos aspectos de la tarea que están por encima de las habilidades actuales del alumno. De esta manera, el estudiante puede centrarse en dominar rápidamente los aspectos relevantes de una estrategia o habilidad a través de la retroalimentación y el apoyo social, cuando sea necesario.

2.1.6 Ayuda Ajustada

Una ayuda ajustada es cuando la ayuda se adapta a las al estudiante a través del diálogo y presentación de materiales de distinto tipo con el fin de desarrollar determinadas capacidades. Lo contrario ocurre si la intervención docente apunta a capacidades ya adquiridas o que exceden su ZDP, a esto no se le considera ayuda ajustada.

2.1.7 Construcción Conjunta De Significados

La construcción de significados y sentidos compartidos, es el proceso en el cual se llega a una interpretación común del contexto y los elementos que intervienen en el aprendizaje.

La preocupación por las diferencias culturales y la respuesta educativa a determinadas minorías lingüísticas, genera obstáculos epistemológicos, así mismo, en algunos casos, las dificultades vienen de las propias características formales y estructurales del lenguaje como código, en otros los patrones de interacción social y las reglas comunicativas en el aula, y en otros la relación entre habla y aprendizaje de los alumnos. Es por esto que el proceso de construcción de significados y sentidos compartidos es de interés para el análisis del trabajo en el aula.

El Socio-Constructivismo se necesitará en este trabajo de grado porque los procesos de enseñanza y aprendizaje mediado por MOOC, están en medio de un contexto que debe contemplar las características principales descritas por esta teoría referentes a la construcción del conocimiento por medio de la interacción social, que el Socio-Constructivismo aporta.

2.2 Teorías del Aprendizaje

Existen infinidad de teorías del aprendizaje, todas con distintos enfoques, los cuales pueden, o no diferir en sus características clave; sin embargo, al llevarlas a un determinado contexto, pueden aplicarse en diferentes etapas de un mismo proyecto y su importancia radica en que enlazan las investigaciones y los análisis teóricos que se producen a través de la experimentación con las prácticas en el aula, convirtiéndose estas, en herramientas esenciales, para gestionar los descubrimientos relevantes en la enseñanza y/o aprendizaje convirtiéndolas en parámetros para la docencia (Shunk, 2012). En la presente investigación se utilizarán las teorías que más se adaptan a las necesidades según el contexto y a los objetivos propuestos, tanto el general como los específicos.

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

A continuación, presentamos las tres teorías de aprendizaje que se tendrán en cuenta para la construcción del MOOC para la enseñanza de la función seno:

2.2.1 Aprendizaje Autónomo (AA)

El Aprendizaje Autónomo o AA por sus siglas, es la capacidad de aprender por uno mismo y de gestión propia, a lo largo del desarrollo cognitivo, sin necesidad de intervención pedagógica, pues se trata del conocimiento adquirido por cuenta propia.

2.2.1.1 Fundamentos del Aprendizaje Autónomo. Los fundamentos del aprendizaje autónomo son los siguientes:

- La información por sí sola no es conocimiento, antes debe haber un proceso de codificación para poder convertirse en aprendizaje.
- Requiere un papel activo por parte del estudiante y asumir una actitud responsable con su aprendizaje.
- La responsabilidad del aprendizaje se traslada al estudiante.
- El Aprendizaje Autónomo no es arbitrario, se fundamenta en la lógica aplicada al proceso, en el raciocinio, la reflexión y el análisis

2.2.1.2 Características del Aprendizaje Autónomo. El AA se divide tiene varias características, vamos a nombrar las más importantes:

Responsabilidad. Existe un gran compromiso por el aprendizaje propio. La importancia radica en que el sujeto se somete a un proceso de aprendizaje por iniciativa propia, siendo conscientes de que la adquisición de nuevo conocimiento depende únicamente de su esfuerzo para conseguirlo.

Autorregulación. La autorregulación es la capacidad de sintetizar el Aprendizaje Autónomo, dominando ciertos procesos cognitivos relacionados con la autogestión del

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

conocimiento y su aplicación, para así poder alcanzar objetivos bajo diferentes contextos. La autorregulación conlleva a pensar con anticipación, prepararse para la tarea y planificar ¿cómo la va a ejecutar? Revisar las características de la tarea, los propios procesos mentales, así como la relación entre acciones ejecutadas y resultados; controlar en qué medida los pensamientos, sentimientos, acciones y variables ambientales favorecen o entorpecen la consecución de sus objetivos. La autorregulación del aprendizaje fundamentado en el Socio-Constructivismo es considerada como un proceso en el cual el estudiante se involucra en las actividades de una manera consiente y reflexiva. Este nivel de consciencia está en el campo de que el mismo estudiante identifica sus posibilidades y sus limitaciones frente a la realización de la tarea. La autorregulación se entiende como la capacidad de generar pensamientos, sentimientos y actuaciones por parte del estudiante, orientados a conseguir objetivos. La autorregulación más que una capacidad mental o una habilidad académica, es un proceso de autodirección mediante el cual los estudiantes transforman sus capacidades en habilidades académicas. (Rosales, M. S., 2013)

Planificación personalizada. Es importante que el estudiante asimile bien los conceptos. Para ello, una planificación adecuada es básica, adaptándose a su nivel y progresión.

Planeación. La planeación, la evaluación y las actividades que realice el alumno, deben estar alineadas, lo que llama Crispín (2011) *Alineamiento Constructivo*. Cuando el profesor diseña los objetivos de aprendizaje debe contextualizarlos, es decir, pensar quiénes son los estudiantes, qué deben aprender y por qué. Necesita ubicar la materia dentro del plan de estudios y aclarar qué conocimientos previos tienen los estudiantes y de qué manera lo que aprenderán contribuirá a la formación del egresado. Lo recomendable es que antes de diseñar las actividades de aprendizaje, el profesor diseñe la evaluación, preguntándose, ¿cómo me daré cuenta de que

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

lograron los objetivos? Cuando el profesor hace este ejercicio logra que exista coherencia entre los objetivos y la evaluación, esto además le permitirá diseñar las actividades más adecuadas para el logro de los objetivos y de esta manera, se alcanzará el alineamiento constructivo.

La evaluación y la retroalimentación. Son elementos esenciales para alcanzar un nivel de aprendizaje profundo y significativo. Como señala Crispín (2011), es crucial que los estudiantes tengan una comprensión clara de las expectativas y metas que deben alcanzar, ya que esto les permitirá seleccionar las estrategias más efectivas para su aprendizaje. Es importante destacar que, si los docentes establecen metas superficiales, es probable que los estudiantes adopten un enfoque superficial en su proceso de aprendizaje. Por el contrario, si las metas promueven el procesamiento profundo de la información y la construcción del conocimiento, los estudiantes se involucrarán en un estudio más profundo. La evaluación debe ser coherente con estas metas, y la retroalimentación desempeña un papel crucial, ya que ayuda a los estudiantes a reconocer sus logros, fortalece su sentido de autoeficacia y les brinda información sobre las áreas en las que pueden mejorar.

Autocontrol y seguimiento. Cuando el estudiante logra internalizar el enfoque estratégico, es decir, adquiere la comprensión y asimilación de habilidades que le permiten planificar, resolver problemas y tomar decisiones de forma autónoma y adaptada al contexto de aprendizaje, se promueve un aprendizaje más efectivo (Crispín, 2011). La enseñanza estratégica requiere que el docente también se involucre en este proceso, siendo consciente de cómo aprende, de sus propios procesos cognitivos y de las estrategias que utiliza, para poder guiar a sus alumnos en una experiencia similar. Es fundamental que el profesor tenga un conocimiento profundo de los procesos de aprendizaje y las estrategias para poder brindar una orientación adecuada y apoyar a sus estudiantes en el desarrollo de habilidades estratégicas que les permitan enfrentar de manera

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

autónoma los desafíos académicos. Al fomentar la enseñanza estratégica, se empodera a los estudiantes para que se conviertan en aprendices activos y autónomos, capaces de aplicar estrategias efectivas para el aprendizaje y la resolución de problemas en diversos contextos.

Otras características a tener en cuenta según el artículo son:

Centrado en el estudio, pues el profesor solo tiene el papel de facilitador ya que el alumno juega el papel protagónico en su aprendizaje; *creativo* ya que el estudiante crea estrategias para enriquecer el aprendizaje; *auto motivador*. La motivación viene del estudiante y no de terceros; *independiente*, teniendo en cuenta que el estudiante puede solicitar asesoría al facilitador, pero no requiere supervisión; *desarrolla capacidades* mientras busca y soluciona problemas, desarrolla la habilidad de análisis, síntesis y capacidad de trabajar en equipo.

2.2.1.3 La Enseñanza Estratégica Para la Autonomía.

La enseñanza para la autonomía o método didáctico de enseñanza estratégica consiste en ceder o transferir progresivamente el control de la estrategia, que en un primer momento ejerce de manera absoluta el profesor, al estudiante, a fin de que se apropie de ella y pueda empezar a utilizarla de manera autónoma. (Rosales, M. S., 2013)

2.2.1.4 Uso Estratégico de Procedimientos.

El uso estratégico de procedimientos, es responsabilidad fundamental de una enseñanza estratégica; en ella se transita desde un control externo y centrado en el profesor, cuando en un primer momento se presenta la estrategia, una segunda etapa en la que el alumno puede practicar la estrategia aprendida con la guía y orientación del docente, para finalmente pasar a una autorregulación interna, centrada en el alumno, cuando este, demuestre poco a poco un dominio cada vez más autónomo de la estrategia aprendida. (Rosales, M. S., 2013)

2.2.1.5 Elementos del Aprendizaje Estratégico. A partir de las ideas de Rosales (2013) quien sostiene que «el aprendizaje estratégico se refiere a aquellos procesos internos» constituidos por los procesos cognitivos, procesos metacognitivos y los afectivos emocionales, los cuales definimos:

Los procesos cognitivos son procesos internos que permiten la activación sináptica a través de la cual se procesa la información y el conocimiento. El desarrollo de estrategias cognitivas, favorecer el conocimiento y el análisis de las condiciones en que se produce la resolución de un determinado tipo de tareas o el aprendizaje.

Los procesos metacognitivos son procesos mediante los cuales el sujeto es capaz de analizar y comprender cómo ocurren sus propios procesos y productos cognitivos. La adquisición de estrategias metacognitivas permite desarrollar la toma de conciencia y control de los procesos y productos cognitivos.

Procesos afectivos emocionales. Están referidos a todos aquellos procesos motivacionales, el querer aprender; los sentimientos afectivos, placer por aprender; orientados a favorecer una predisposición emocional para optimizar la calidad del aprendizaje. El control de respuestas afectivo-emocionales favorables hacia el aprendizaje, permite aumentar la conciencia del estudiante sobre su estado afectivo motivacional. (Rosales, M. S., 2013)

La Teoría de la Autodeterminación se relaciona estrechamente con los procesos metacognitivos, que involucran la capacidad de reflexionar sobre el propio pensamiento y controlar y regular el proceso de aprendizaje. Richard M. Ryan y Edward L. Deci han abordado esta relación en sus investigaciones.

En un estudio realizado por Ryan y Deci, se destaca la importancia de la autonomía en el desarrollo de la autorregulación metacognitiva en el aprendizaje autónomo. Afirman que «a

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

autonomía es fundamental para la autorregulación metacognitiva, ya que los estudiantes deben sentirse libres de tomar decisiones sobre cómo gestionar su aprendizaje y monitorizar su progreso» (Ryan & Deci, 2012, p. 421).

Además, en otro estudio, Ryan y Deci (2012) señalan que la satisfacción de las necesidades de autonomía, competencia y relación promueve la autorregulación y la metacognición en el aprendizaje. Afirman que "los estudiantes que se sienten autónomos, competentes y conectados socialmente son más propensos a implicarse en procesos de su propio aprendizaje, como la *planificación estratégica*, el monitoreo y la evaluación de su propio aprendizaje" (Ryan & Deci, 2012, p. 425).

Estas citas resaltan la estrecha relación entre la Teoría de la Autodeterminación y los procesos metacognitivos en el aprendizaje autónomo. La autonomía proporciona a los estudiantes la libertad de tomar decisiones y controlar su proceso de aprendizaje, lo que a su vez fomenta la autorregulación metacognitiva. Al sentirse competentes y conectados socialmente, los estudiantes son más propensos a participar en procesos metacognitivos, como la planificación, el monitoreo y la evaluación de su propio aprendizaje. Esto demuestra cómo el enfoque de la autodeterminación y los procesos metacognitivos se entrelazan y se complementan en el contexto del aprendizaje autónomo.

2.2.1.6 Dimensiones del Aprendizaje Autónomo. Según Rosales (2013), se propone un enfoque basado en las Dimensiones del Aprendizaje Autónomo (DAA), que abarca cuatro dimensiones esenciales para regular el proceso de aprendizaje. Estas dimensiones deben ser consideradas desde el diseño curricular, hasta su implementación en entornos presenciales o virtuales, así como en la creación de materiales educativos y la labor del mediador o tutor. Además, estas dimensiones deben estar presentes a lo largo de todo el proceso de aprendizaje. El

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

autor enfatiza la importancia de tener en cuenta estas dimensiones en la planificación y diseño de experiencias educativas, ya que permiten promover un aprendizaje autónomo y significativo. Al considerar estas dimensiones, se brinda a los estudiantes las herramientas y habilidades necesarias para que puedan asumir un rol activo en su proceso de aprendizaje, tomando decisiones informadas y desarrollando su autonomía. De esta manera, se promueve una educación más centrada en el estudiante, que fomenta su participación activa y su capacidad de autorregulación.

A partir de algunos autores, Herrera (2019) menciona como se replante el AA y se proponen las cuatro dimensiones que deben estar presentes para el alcance de la autonomía de aprendizaje en el estudiante:

- *De aprendiz a experto.* Se refiere al nivel de dominio que va demostrando el estudiante en el manejo de estrategias metacognitivas. Una acción estratégica se caracteriza por: consciencia, adaptabilidad, eficacia y sofisticación.
- *De un dominio técnico a un uso estratégico de los procedimientos de aprendizaje.*
Es necesario que el estudiante se ejercite en los procedimientos necesarios para aprender en las condiciones específicas de la educación a distancia.
- *De una regulación externa hacia la autorregulación en los procesos de Aprendizaje.*
En las primeras etapas de estudio el alumno necesitará de mayor presencia y guía del docente o tutor, así como de compañeros más expertos.
- *De la Interiorización a la exteriorización de los procesos seguidos antes, durante y después del aprendizaje.* El estudiante al inicio desarrollará una serie de acciones y tareas que irá aprendiendo y de manera creciente se hará más consciente de cómo aprende. (pp. 328-330)

2.2.1.7 El Aprendizaje Autónomo y las TIC. Con los grandes cambios tecnológicos y la aparición del internet, es fácil acceder a cualquier tipo de información de manera inmediata. Lo cual ha tenido un gran efecto en la docencia, ya que gracias a las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) se han creado infinidad de herramientas a disposición de profesores y alumnos con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje y potenciar la aplicación de los enfoques metodológicos más recientes.

La teoría del aprendizaje autónomo es de gran importancia en este trabajo de grado porque desde el marco metodológico que se va a aplicar, se manejan distintas características para la posterior creación del MOOC el cual se aplicará en la respectiva secuencia didáctica y es evidente que uno de los aspectos más importantes de un MOOC es que requiere de un proceso de autonomía por parte del alumno, llevando a que muchos aspectos del aprendizaje autónomo se puedan aplicar.

2.2.1.8 Aprendizaje Colaborativo (AC)

El aprendizaje colaborativo es una estrategia didáctica en la cual los alumnos trabajan en pequeños grupos que recibirán instrucciones del facilitador; dentro de cada equipo se da un intercambio de información hasta que cada miembro del grupo alcanza los objetivos trazados gracias a la colaboración. El punto de partida del Aprendizaje Colaborativo es el principio básico de la teoría cognitiva moderna, los alumnos deben ser participantes activos durante el proceso de aprendizaje.

El objetivo del AC es inducir a los alumnos a la construcción del conocimiento mediante exploración, discusión, negociación y debate.

En el artículo de Estrada et al. (2016), se cita a Spencer Kagan «La suma de las partes interactuando es mejor que la suma de las partes solas» lo que aplica tanto para la sociedad en

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

general como para la construcción del conocimiento.

Las principales ideas en el AC son las siguientes:

Los grupos. Deben ser heterogéneos, de alrededor de 4 miembros con diferentes habilidades y competencia, donde se sientan cómodos y puedan sentir pertenencia y esto incentive la colaboración entre los miembros y poder conseguir una sinergia.

Interdependencia positiva. Es necesario promover la capacidad de comunicación adecuada entre el grupo, para el entendimiento de que el objetivo es la realización de producciones y que estas deben realizarse de forma colectiva, en ese sentido la *interdependencia positiva* es un elemento clave en el aprendizaje colaborativo, ya que fomenta la colaboración y el trabajo en equipo para lograr un objetivo común. Según Johnson y Johnson (2014), «la interdependencia positiva se refiere a la percepción de que los miembros del grupo están vinculados entre sí de tal manera que el éxito individual depende del éxito del grupo» (p. 23). Lo que puede mejorar significativamente el rendimiento académico y la satisfacción de los estudiantes con su experiencia educativa.

Responsabilidad individual. El resultado como grupo será finalmente la consecuencia de la investigación individual de los miembros. Esta se apreciará en la presentación pública de la tarea ejecutada.

Participación equitativa. El trabajo que hay que hacer se distribuye entre todos los componentes del equipo de forma equitativa (proporcional a las posibilidades de cada uno).

Interacción simultánea. En la resolución de la tarea todos los estudiantes dialogan, contrastan sus pareceres y toman decisiones consensuadas.

Tutorización en el aprendizaje colaborativo. Las interacciones entre los alumnos en un mismo nivel, entre el alumno y un compañero experto, y entre el alumno y el maestro son

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

elementos clave que respaldan el aprendizaje. Existen múltiples métodos de tutoría disponibles que pueden brindar apoyo adicional en el aprendizaje colaborativo: tutorización entre iguales, aprender enseñando, aprendizaje a través de la negociación. Johnson y Johnson (2014), «el papel del tutor en el aprendizaje colaborativo es proporcionar orientación y apoyo a los estudiantes, pero no dirigir el proceso de aprendizaje. El tutor debe actuar como un facilitador del aprendizaje, ayudando a los estudiantes a trabajar juntos para lograr un objetivo común» (p. 78). Esto significa que el tutor debe fomentar la interacción entre los estudiantes y proporcionar retroalimentación constructiva para mejorar su desempeño. La tutorización en el aprendizaje colaborativo puede mejorar significativamente la calidad del aprendizaje y la satisfacción de los estudiantes con su experiencia educativa.

Colaboración mediante apoyo tecnológico. El uso de la tecnología como medio de aprendizaje colaborativo ha tenido cambios muy sustanciales en las dos últimas décadas. «Ya sea de comunicación sincrónica o asincrónica, haciendo uso de chat, correo electrónico o foros de discusión». (Rimada, A., 2014)

Para que todo lo anterior funcione, es necesario que el docente con las competencias necesarias para las actividades basadas en el AC que se vayan a manejar. Estas son: anticipar; conocer a cabalidad todo el proceso para la realización de la actividad en cualquiera de las etapas del trabajo.

Se debe tener en cuenta que la importancia del AC no radica en la ayuda mutua porque esta no mejora al aprendizaje en grupo, sino en la necesidad de ayuda en los procesos de comunicación de esta necesidad y como esta se relaciona con el propio trabajo. Es así como el trabajo cooperativo contribuye en el desarrollo de habilidades comunicativas, trabajo en grupo y flexibilidad en el pensamiento.

2.2.1.9 Aprendizaje Colaborativo en la Virtualidad. «Uno de los principales desafíos que enfrenta hoy en día la sociedad del conocimiento se relaciona con la posibilidad de emplear las tecnologías de la información y comunicación (TIC) para promover la construcción colaborativa del conocimiento» (Chávez, 2014, p. 13). La importancia radica en la superación de los desafíos que ofrece la virtualidad para el individuo, ya que:

La introducción temprana de las computadoras en entornos educativos y de capacitación laboral, que se basaba en la idea de un individuo en la red que trabajaba de manera aislada, sin interacción humana y que elegía y gestionaba por sí mismo contenido informático sin contexto, ha sido objeto de críticas tanto por sus limitados resultados educativos como por su falta de relevancia en términos humanos y sociales. (Chávez, 2014).

Como es bien sabido, el contexto educativo debe acercarse más al estudiante y tener presente en todas sus interacciones el aspecto humano, tanto la virtualidad como en el aula.

Al igual que Ruiz (2015), se aproxima a al concepto de Aprendizaje colaborativo, al decir que este es «un proceso donde interactúan dos o más sujetos para construir aprendizaje, a través de la discusión, reflexión y toma de decisiones». (p.14). Lo anterior implica una relación entre la virtualidad y el aula, confirmándolo con su mención sobre como «los recursos informáticos actúan como mediadores psicológicos, eliminando las barreras espaciotiempo» y con esto aclara seguidamente que este proceso va más allá de compartir información, ya que propende porque «no solo los participantes compartan información, sino que trabajen con documentos conjuntos, participen en proyectos de interés común, y se facilite la solución de problemas y la toma de decisiones». (Chávez, 2014)

2.2.1.10 Aprendizaje colaborativo en la virtualidad. CSCL por sus siglas en inglés: Computer Supported Collaborative Learning. Según Chávez (2014) se busca que no solo haya

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

intercambio de saberes en torno al tema, sino que se genere en el grupo de estudiantes una interacción directa, tanto en el aula como en el entorno virtual, para aprovechar al máximo las ventajas que ofrecen los distintos mediadores.

Según diversos estudios en este campo, se ha examinado cómo el aprendizaje colaborativo respaldado por tecnologías de la información y la comunicación (TIC) mejora la colaboración y la interacción entre pares. Además, se ha investigado cómo la colaboración y la tecnología pueden facilitar la distribución del conocimiento y las habilidades dentro de una comunidad virtual. De acuerdo con Herrera (2019), las interacciones en el ámbito educativo pueden ser síncronas o asíncronas, pero es crucial que existan metas y perspectivas compartidas entre los participantes. Esto les permite generar conocimiento, desarrollar productos, resolver problemas relevantes y adquirir competencias específicas establecidas en un contexto de enseñanza.

A partir de lo analizado, un aprendizaje colaborativo mediado en un entorno virtual o presencial, posee, en palabras de Chávez (2014), miradas que son fundamentales para construir y situar el conocimiento de manera efectiva:

- La perspectiva personal del usuario o estudiante, la cual debe recuperar sus pensamientos y experiencias iniciales, pero que resultará enriquecida con las ideas de los otros (los demás participantes, el tutor, las ideas de los materiales disponibles en la Web, etc.).
- La perspectiva del grupo, que se construye y comparte en los episodios de trabajo grupal conjunto.
- La perspectiva del curso, donde los materiales curriculares o pertinentes al proceso educativo se discuten entre todos los participantes.

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

- La perspectiva de otros agentes involucrados en la tarea (proceso de indagación o situación-problema) en torno a la cual giran las discusiones y propuestas de los participantes. (pp. 5-7)

La teoría del Aprendizaje Colaborativa es de importancia en este trabajo de grado porque aparte de dar unas pautas puntuales para la interacción en un ambiente de aprendizaje, se adapta muy bien a los entornos virtuales dadas las herramientas que se va a usar en el MOOC, también incentiva el trabajo colaborativo para llegar a un objetivo común lo cual es importante porque es necesario contrastar el conocimiento propio con el de los pares a través del uso de mediadores como GeoGebra y con la utilización una MOOC.

2.2.2 Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

El aprendizaje basado en problema o por sus siglas ABP, es un método de enseñanza-aprendizaje y puede definirse como un proceso de investigación con varias fases y en el que intervienen varios actores, siendo el estudiante el protagonista de este proceso y el profesor solo es quien guía todo para encontrar la respuesta a determinado problema, dicho en otras palabras, un grupo de estudiantes son guiados por un profesor para encontrar la respuesta a un problema. Esta metodología es útil para el desarrollo de las habilidades cognitivas y así mismo lograr resultados frente al objeto de aprendizaje, el cual consiste en la resolución de problemas sobre fenómenos complejos de la vida. Esta metodología ayuda a que el estudiante aprenda a aprender, mostrando el proceso de aprendizaje desde otra perspectiva.

Mientras que en la enseñanza tradicional el alumno suele trabajar de manera individual y tiene un rol pasivo con respecto a la información que recibe del maestro (quien toma el rol de facilitador); en el ABP los alumnos en pequeños grupos tienen la responsabilidad de aprender y los profesores tienen un rol menos activo en la parte explicativa, pero más activo en la parte

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

metodológica, ya que en él recae la responsabilidad de guía y de buscar la motivación del estudiante.

Según Luis (2016), Barrow, propuso dos variantes principales que determinan el ABP, estos son:

- *Grado de estructuración del problema.* Donde el problema puede ser muy detallado y estructurado hasta otros más simples.
- *Grado de dirección del profesor.* Nos podemos encontrar un profesor o maestro el cual controla al detalle toda la información que se va a manejar, hasta aquel que actúa como un guía que aporta información que invitan a la reflexión.

Aun así, según Barrow a pesar de las variables, todas las versiones de ABP tiene una serie de objetivos que se deben tener en cuenta:

- *Estructurar el conocimiento.*
- *Desarrollar procesos de razonamiento de manera eficaz.*
- *Desarrollar destrezas para el aprendizaje autodirigido.*
- *Motivación para el aprendizaje.*
- *Desarrollar y fomentar el trabajo cooperativo*

2.2.2.1 Fases del ABP. Según Fernández y Duarte (2013) el proceso para el ABP se puede dividir en 4 diferentes fases, cada una con su respectiva característica y relevancia a través de los procesos cognitivos durante el ABP: Productiva, soluciónica, investigativa-formativa y problémica.

Las fases por las cuales se realiza el proceso de aprendizaje basado en problemas son de suma importancia porque estas tienen en cuenta las metas del aprendizaje y las metas de la actividad, las cuales son dos características que se deben tener en cuenta a la hora de diseñar

determinada actividad.

La descripción de las fases a continuación:

En la primera fase de la metodología propuesta, conocida como la fase *Problémica*, los estudiantes se enfrentan a un problema real relacionado con su campo profesional. Trabajando en grupos pequeños de seis a ocho alumnos, se les presenta el problema a través de diversos medios, como videos, informes de investigación o entrevistas. Utilizando su conocimiento previo, se les solicita que definan y delimiten el problema, y que organicen las ideas y el conocimiento que pueden estar relacionados con él. Cuando llegan a un punto en el que sus conocimientos existentes ya no les permiten avanzar, deben identificar las competencias y los nuevos conocimientos necesarios para encontrar una solución al problema, y determinar dónde pueden adquirirlos (bases de datos, redes en línea, entrevistas, etc.). Se les sugiere que analicen y comprendan el contexto del problema, realicen una lluvia de ideas para generar ideas y perspectivas sobre el problema, hagan una lista de lo que ya conocen, una lista de lo que desconocen y una lista de las acciones necesarias para resolver el problema. Esta fase inicial es fundamental para establecer el marco de trabajo y las metas que guiarán el proceso de resolución del problema. (Fernández & Duarte, 2013)

La segunda fase del proceso, conocida como fase *Investigativa y Formativa*, se centra en el estudio autodirigido, donde los estudiantes asumen la responsabilidad de organizar sus propias tareas y distribuir el trabajo dentro del grupo. En esta etapa, el tutor colabora con los estudiantes para establecer el tiempo asignado a esta fase y proporcionarles los recursos necesarios, como acceso a la información y salas de reuniones, para que puedan alcanzar sus objetivos. Se sugiere que el problema inicial se divida en subproblemas o sub metas más manejables, lo que facilita la asignación de responsabilidades dentro del grupo. Durante esta fase, los estudiantes se dedican a

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

obtener información relevante para abordar el problema y la sistematizan de manera organizada y coherente. Esta fase es crucial para fomentar la autonomía y el desarrollo de habilidades de investigación y organización en los estudiantes, ya que les permite asumir un papel activo en su propio aprendizaje y promover el trabajo en equipo- (Fernández & Duarte, 2013)

En la tercera fase, conocida como fase *Soluciónica*, los estudiantes se reúnen para analizar y aplicar la información recopilada, mejorar su comprensión del problema y buscar diferentes soluciones. Durante esta etapa, algunos estudiosos argumentan que los estudiantes deben comparar su conocimiento previo sobre el problema antes de comenzar el trabajo con lo que han aprendido hasta el momento. También deben identificar qué nueva información necesitarán o qué preguntas aún quedan sin respuesta. Además, es importante que reflexionen sobre su desempeño para evitar cometer errores al enfrentarse a situaciones similares y desarrollar conceptos y conductas que puedan aplicarse a nuevos problemas. En esta fase, los estudiantes elaboran un informe preliminar que presentarán en la última etapa del proceso, cuando se evalúe el trabajo realizado. Se recomienda que los estudiantes desarrollen los productos requeridos y compartan los resultados con todo el grupo, promoviendo así la socialización y retroalimentación entre los compañeros. Esta fase es esencial para consolidar el aprendizaje, la resolución de problemas y la capacidad de comunicar los resultados obtenidos de manera efectiva. (Fernández & Duarte, 2013)

En la fase *Productiva*, los estudiantes ejecutan una evaluación personal en relación con varios aspectos, incluyendo su habilidad para resolver problemas, los conocimientos adquiridos y su capacidad para llevar a cabo el estudio autónomo. Además de estas evaluaciones individuales, los compañeros proporcionan comentarios y retroalimentación. Los tutores también participan en esta fase al evaluar a cada miembro del grupo durante la misma sesión. Si lo desean, los grupos

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

tienen la opción de planificar actividades adicionales para complementar su aprendizaje y proponer soluciones al problema planteado. (Fernández & Duarte, 2013)

2.2.2.2 Evaluación del ABP. El modelo Aprendizaje Basado en Problemas, se aleja de los tipos de evaluación típicos y se acerca más al tipo de evaluación en la cual el alumno de manera autónoma haya pasado de la ZDP a la ZDR. Por según lo descrito por Pérez (2015), estas son algunas maneras que se pueden utilizar para hacer una:

- *Caso práctico.* En el que los estudiantes pongan a prueba todo el conocimiento adquirido.
- *Un examen que no esté basado en la reproducción automática.* Un examen que implique que gestione los saberes adquiridos a través de la secuencia didáctica para alcanzar las competencias necesarias. Aunque para esto se requiere cierto nivel de abstracción de los contenidos.
- *Autoevaluación.* La autoconciencia de los procesos cognitivos o metacognición. Nadie mejor que él mismo conoce todo lo que ha aprendido y todo lo que se ha esforzado. Se pueden establecer algunos aspectos para que el alumno se autoevalúe: aprendizaje logrado, tiempo invertido, proceso seguido, etc.
- *Evaluación realizada entre pares (coevaluación).* El alumno, durante su proceso de aprendizaje, ha trabajado con sus compañeros cooperativamente. Por tanto, conocer la opinión de los compañeros también resulta interesante. Los aspectos sobre los que se pueden preguntar pueden ser: ambiente cooperativo dentro del grupo, reparto de tareas eficaz, cumplimiento de las expectativas como grupo, etc. (p.193)

El aprendizaje basado en problemas (ABP) es una metodología educativa que se centra en el estudiante y que se ha utilizado en diversos campos de la educación. La evaluación del

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

éxito de un grupo de ABP es un tema importante para los facilitadores, ya que les permite ajustar su estrategia de facilitación para satisfacer las necesidades de los estudiantes y mejorar la calidad del problema y el proceso de aprendizaje en general. Según la investigación, los estudiantes pueden evaluar su propio aprendizaje y rendimiento, y los facilitadores pueden evaluar el aprendizaje y el rendimiento de los estudiantes a través de la observación, la retroalimentación y la evaluación de los productos finales. Además, los facilitadores pueden utilizar esta información para fomentar la reflexión y la autorregulación en los estudiantes, proporcionar retroalimentación específica y constructiva, y mejorar la calidad del problema y el proceso de aprendizaje en general. La evaluación del éxito de un grupo de ABP también puede incluir la evaluación de la calidad del problema, la eficacia de la estrategia de facilitación y la satisfacción de los estudiantes con el proceso de aprendizaje. En general, la evaluación del éxito de un grupo de ABP es un proceso continuo que permite a los facilitadores mejorar su enfoque y promover el aprendizaje efectivo de los estudiantes (Hmelo-Silver et al., 2013).

El concepto del ABP se tendrá en cuenta porque se le da al alumno el rol protagónico en el proceso de aprendizaje, mostrando una participación más activa y colaborativa por parte del alumno, utilizando para este fin un MOOC y GeoGebra como herramientas mediadoras para la realización de actividades teniendo en cuenta las fases del ABP.

2.3 Teoría de Van Hiele.

La teoría o modelo Van Hiele es un enfoque educativo diseñado originalmente para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, y ha sido ampliamente estudiado, extendiéndose a otras áreas del conocimiento, particularmente en el ámbito de las matemáticas. Los Van Hiele adoptaron las matemáticas como una disciplina rigurosa y concibieron la enseñanza y el aprendizaje como procesos que moldean la comprensión del objeto matemático. Estos procesos

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

de aprendizaje atraviesan varios niveles, cada uno con características distintivas que se pueden observar claramente en la práctica. Según se expone en el artículo de Vargas (2013), surgieron de los trabajos doctorales presentados por los profesores holandeses de Matemáticas, Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele Geldof, en la Universidad de Utrech. Van Hiele proporciona pautas para mejorar la calidad del razonamiento de los estudiantes y ofrece orientación sobre cómo organizar el currículo educativo para facilitar la transición de un nivel a otro.

Los niveles propuestos por los Van Hiele son los siguientes: reconocimiento o visualización, análisis, deducción informal u orden, deducción y rigor. Cada uno de estos niveles implica una forma diferente de comprender y abordar los conceptos matemáticos. Para avanzar de un nivel a otro, los estudiantes deben superar cinco fases distintas: informativa, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración. Estas fases representan etapas clave en el proceso de aprendizaje, donde se promueve la interacción activa del estudiante con los conceptos matemáticos y se fomenta su capacidad para relacionar y aplicar los conocimientos adquiridos.

La teoría Van Hiele ha tenido un impacto significativo en la educación matemática, ya que proporciona un marco estructurado para guiar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en términos de geometría. Al comprender las características de cada nivel y las etapas del proceso de aprendizaje, los educadores pueden adaptar sus estrategias de enseñanza para ayudar a los estudiantes a avanzar en su comprensión y dominio de los conceptos matemáticos de manera gradual y significativa.

A continuación, las competencias que el estudiante debe tener en los niveles de Van Hiele según Vargas (2013):

2.3.1 Nivel 1 (*Visualización o Reconocimiento*)

Reconoce formas geométricas como un todo sin tener en cuenta propiedades y características. Las explicaciones que se dan sobre la figura son de naturaleza visual y referencial sin tener aún conocimiento de lenguaje geométrico, aunque se pueden reproducir formas geométricas.

2.3.2 Nivel 2 (*Análisis*)

Comienza a reconocer las principales propiedades de las figuras geométricas, pero aún no relaciona las distintas figuras por medio de sus propiedades y características. Construye las principales propiedades de las figuras basado en la experimentación y manipulación, pero las definiciones aún no están claras.

2.3.3 Nivel 3 (*Ordenación o Clasificación*)

Se comienza a relacionar figuras geométricas por sus propiedades y a su vez se interrelaciona figuras y familias de figuras. Se establecen las condiciones que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado, aunque su lógica sigue basada en la experimentación y manipulación. Se comienza la comprensión de algunos conceptos a partir de sus demostraciones, aunque aún no se comprende el sistema axiomático que esto conlleva.

2.3.4 Nivel 4 (*Deducción formal*)

En este nivel ya es posible justificar deducciones y demostraciones de manera formal comprendiendo la necesidad de esto. Comprende la naturaleza axiomática de las Matemáticas. Maneja un cierto nivel de abstracción, lo que le hace comprender que haya distintas maneras de demostrar lo mismo. Tiene una visión global de las figuras y sus distintas relaciones matemáticas. Aún no reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.

2.3.5 Nivel 5 (Rigor)

Analiza el grado de rigor de varios sistemas deductivos y los compara entre sí. Puede apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría. Tiene un alto grado de abstracción respecto a los conceptos geométricos. (pp. 82-84)

Los Van Hiele propusieron cinco fases de aprendizaje que guían al docente en el diseño y organización de las experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante en su paso de un nivel a otro. Dentro del modelo, las fases no son exclusivas de un nivel, sino, en cada nivel, el estudiante comienza con actividades de la primera fase y continua así, de tal forma que al terminar la fase 5 debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente Vargas (2013).

Las fases de aprendizaje correspondientes al Modelo de Van Hiele son las siguientes:

Fase 1: Información.

Fase 2: Orientación dirigida.

Fase 3: Explicitación.

Fase 4: Orientación libre.

Fase 5: Integración.

Descripción de las fases, según el artículo de Vargas (2013):

2.3.6 Fase 1: Información

Durante esta fase inicial, se establece el primer contacto con el nuevo tema objeto de estudio. El profesor tiene la tarea de identificar los conocimientos previos y el nivel de razonamiento de los alumnos en relación con este campo específico. Esta etapa se fundamenta en la idea de que el aprendizaje se basa en los conocimientos y experiencias previas de los estudiantes. Según Hattie, «la activación de los conocimientos previos es crucial para el aprendizaje efectivo, ya que ayuda a los estudiantes a hacer conexiones significativas entre la información nueva y lo que ya saben»

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

(Hattie, 2012, p. 78). En este sentido, es esencial fomentar la activación y construcción del conocimiento previo de los estudiantes a través de estrategias como el aprendizaje basado en problemas y el aprendizaje colaborativo. Además, según Mayer, «la conexión de la nueva información con el conocimiento existente en la memoria a largo plazo mejora la comprensión y retención del aprendizaje» (Mayer, 2014, p. 112). Por lo tanto, se recomienda utilizar técnicas de organización y estructuración de la información, como mapas conceptuales y esquemas, para facilitar la integración de los nuevos conceptos en el conocimiento previo de los estudiantes Hattie (2012). En resumen, el reconocimiento y aprovechamiento de los conocimientos previos de los estudiantes son aspectos fundamentales en esta fase inicial del proceso de aprendizaje, ya que contribuyen a la construcción de una base sólida y significativa para el desarrollo del nuevo tema.

2.3.7 Fase 2: Orientación dirigida

Durante esta fase, se guía a los estudiantes a través de actividades y problemas cuidadosamente seleccionados con el propósito de que descubran y aprendan las relaciones y componentes básicos del conocimiento en construcción. Estos problemas deben conducir directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben comprender y asimilar. El papel del profesor en la selección de estas actividades es esencial para orientar a los estudiantes hacia la solución (Vargas, 2013). Según Johnson & Johnson (2014), la elección de actividades desafiantes y significativas en esta etapa es esencial para promover el pensamiento crítico y el aprendizaje profundo. Además, se destaca la importancia del papel del profesor en la selección de actividades apropiadas que permitan a los estudiantes adquirir los conceptos y definiciones fundamentales necesarios para avanzar en su nivel de razonamiento.

2.3.8 Fase 3: *Explicitación*

Durante esta etapa, se promueve que los estudiantes expresen y compartan verbalmente o por escrito los resultados obtenidos, intercambien experiencias y participen en discusiones con el profesor y sus compañeros. El objetivo es que los estudiantes adquieran plena conciencia de las características y relaciones descubiertas, así como fortalezcan el uso del lenguaje técnico asociado al tema de estudio. Es fundamental que los estudiantes utilicen el vocabulario apropiado para describir la estructura en la que han estado trabajando y se familiaricen con el vocabulario propio del nivel de aprendizaje. En esta fase, no se introduce nuevo conocimiento en términos de estructuras o contenidos, sino que se lleva a cabo una revisión del trabajo previo, basada en conclusiones, práctica y perfeccionamiento de la forma de expresión. Todo esto contribuye a consolidar la nueva red de conocimientos en formación. El tipo de trabajo requerido en esta etapa implica discusiones y comentarios sobre la resolución de ejercicios anteriores, así como el análisis de elementos, propiedades y relaciones observadas o empleadas.

2.3.9 Fase 4: *Orientación libre*

En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos. El profesor debe proponer a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que planteen nuevas relaciones o propiedades, que sean más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna. Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas. En palabras de Van Hiele, citado por Vargas (2013), «(...) los estudiantes aprenden a encontrar su camino en la red de relaciones por sí mismos, mediante actividades generales» (p.

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

11). Los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir en otras situaciones nuevas. Los problemas planteados en esta fase deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos y aplicarlos a situaciones diferentes de las propuestas anteriormente. La intervención del profesor en la resolución de las tareas debe ser mínima, pues son los alumnos quienes tienen que encontrar el camino adecuado a partir de lo aprendido en la segunda fase.

2.3.10 Fase 5: Integración

Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. El profesor debe dirigir resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración. Las actividades que les proponga no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino solo la organización de los ya adquiridos. Se trata de lograr una visión general de los contenidos del tema objeto de estudio, integrada por los nuevos conocimientos adquiridos en este nivel y los que ya tenían los estudiantes anteriormente. No hay un aprendizaje de elementos nuevos, sino una fusión de los nuevos conocimientos, algoritmos y formas de razonar con los anteriores. Las actividades de esta fase deben favorecer dicha integración y permitirle al profesor comprobar si ya se ha conseguido. (pp. 84-86)

El paso por cada una de estas fases y la observación de las mismas potencias, en gran medida, la posibilidad de que un estudiante avance del nivel en el que se encuentra y así pueda desarrollar sus habilidades y capacidad de razonamiento geométrico.

2.3.11 Propiedades del modelo de Van Hiele

Para comprender mejor el modelo de Van Hiele, es necesario analizar y tomar en cuenta las siguientes características (Vargas, 2013):

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

- *Recursividad.* El éxito en un nivel depende del grado de asimilación que tenga el estudiante de las estrategias del nivel anterior. Los objetos de un nivel se convierten en los objetos de estudio del siguiente, es decir, se hacen explícitos aquellos conocimientos que eran implícitos en el nivel anterior. Van Hiele, citado por Del Rincón (2018), afirma que «(...) el pensamiento del segundo nivel no es posible sin el del nivel básico; el pensamiento del tercer nivel no es posible sin el pensamiento del segundo nivel».
- *Secuencialidad.* No se puede alcanzar un nivel sin haber superado de forma ordenada todos los niveles inferiores, cada nivel de razonamiento se apoya en el nivel anterior, hay que tener cuidado ya que una mala instrucción o aprendizaje en un nivel anterior puede llevar a aparentar que ya están preparados para pasar al siguiente nivel, cuando no es así. Van Hiele decía que la edad no es un factor determinante para el paso de los niveles.
- *Especificidad del lenguaje.* Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los niveles de Van Hiele no solo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario. Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje y un significado específico del vocabulario matemático; por tanto, el docente debe ajustarse al nivel en que están sus estudiantes.
- *Continuidad.* Se refiere a la forma en cómo el individuo pasa de un nivel a otro. El paso en los niveles de Van Hiele se produce de forma continua y pausada, puede tardar varios años en los niveles 4 y 5. Se puede dar el caso de que el individuo no llegue a alcanzar el nivel 5.
- *Localidad.* Por localidad de los niveles se entiende que un individuo puede razonar en

diferentes niveles al trabajar en distintos campos de la geometría. Por lo general, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento. Una vez alcanzado un nivel en algún concepto o campo de la geometría, será más fácil para el individuo alcanzar ese mismo nivel para otros conceptos o áreas. (pp. 86-87)

2.3.12 *Evaluación en el modelo de Van Hiele*

De acuerdo con Vargas (2013), el punto clave en la utilización del modelo de Van Hiele es precisamente la evaluación. En el marco de este modelo interesa la valoración de un individuo tomando en cuenta las razones por las que dio determinada respuesta. A partir de esto, los mismos autores indican que lo más recomendable para la evaluación, a la luz de este modelo, es la combinación de la entrevista y el test; además, brindan las siguientes ideas previas a tomar en cuenta en la evaluación:

- El nivel de razonamiento de los alumnos depende del área de las matemáticas que se trate.
- Se debe evaluar cómo los alumnos contestan y el porqué de sus respuestas, más que lo que no contestan o contestan bien o mal.
- En las preguntas no está el nivel de los alumnos, sino en sus respuestas.
- En unos contenidos se puede estar en un nivel y, en otros diferentes, en un nivel distinto.

Cuando se encuentran en el paso de un nivel a otro, puede resultar difícil determinar la situación real en que se hallan.

En este caso, es importante resaltar el hecho de que lejos de la forma tradicional de evaluación a la que estamos ligados, dado el sistema en el que nos desenvolvemos día tras día, el

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

modelo de Van Hiele debe ser evaluado de forma distinta. En él, el porqué de una respuesta es más valiosa que resaltar si esta es correcta o incorrecta y, por lo tanto, los instrumentos que apliquemos para lograr evaluar los niveles de razonamiento en geometría, a la luz de este modelo, deben ser acordes con esta filosofía.

Esta teoría se necesitará en este trabajo, ya que da un orden gracias a los niveles de razonamiento y fases por las que el alumno deben pasar para obtener las competencias matemáticas esperadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje con apoyo del MOOC.

2.4 El uso de las TIC en el Apoyo de la Enseñanza de las Matemáticas

García (2017), publicó en su artículo las TIC brindan diversos beneficios, como que «pueden apoyar a las investigaciones de los alumnos en varias áreas de las matemáticas, como números, medida, geometría, estadística, álgebra, pues se espera que cuando dispongan de ellas logren concentrarse en tomar decisiones, razonar y resolver problemas». (García, J. 2017).

Además, es un hecho que «La existencia, versatilidad y poder de las TIC hacen posible y necesario reexaminar qué matemáticas deben aprender los alumnos, así como examinar la mejor forma en que puedan aprenderlas». (García, J. 2017). La autora plantea que existe una relación entre «el constructivismo y la matemática educativa asistida por las tecnologías de información y comunicación». Ante lo cual, hace la siguiente pregunta: «¿cómo usar las TIC con un enfoque constructivista en matemática educativa?». Para ello, cita a Sánchez, quien expresa los siguientes usos de las TIC:

Como herramientas de apoyo al aprender, con las cuales se pueden realizar actividades que fomenten el desarrollo de destrezas cognitivas superiores en los alumnos:

- Como medios de construcción que faciliten la integración de lo conocido y lo nuevo.
- Como extensoras y amplificadoras de la mente, a fin de que expandan las

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

potencialidades del procesamiento cognitivo y la memoria, lo cual facilita la construcción de aprendizajes significativos.

- Como medios transparentes o invisibles al usuario, que hagan visible lo que aprende e invisible, la tecnología.
- Como herramientas que participan en un conjunto metodológico orquestado, lo que potencia su uso con metodologías activas como proyectos, trabajo colaborativo, mapas conceptuales e inteligencias múltiples, donde aprendices y facilitadores coactúen y negocien significados y conocimientos, teniendo a la tecnología como socios en la cognición. (García, J. 2017)

La autora opina que conocer y aprender lo hacen y construyen los estudiantes, evidencia que tecnología es una herramienta útil que, cuando es manejada con un enfoque metodológico y un diseño adecuado, se convierte en medio para construir y crear. García (2017) en su artículo, también manifiesta que «luego de conocer los beneficios del uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas», y de «revisar cómo usarla con un enfoque constructivista», aparece otra pregunta: «¿Se puede construir conocimiento matemático usando las TIC?». Para esto, acude a otro teórico, quien afirma que, aunque existen tres medios de adquisición de información por parte de los individuos, como los son la familia, la escuela y los medios de comunicación, es labor del docente ayudarles a encauzar estas «tres corrientes de influencias en un mismo caudal», lo que permitirá, que estos potencien y desarrollen «su personalidad (afectiva, social y cognitiva) en forma más equilibrada e integral con el mundo que lo rodea». (García, J. 2017)

Lo que se debe propender desde las aulas es que, desde el saber, los estudiantes hagan construcción del saber mismo, pero «con reflexión y fórmulas de trabajo colaborativo», con

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

miras al mismo tiempo hacia «un pensamiento racional y científico» (Rosa, 2018). Para ello, es preciso contar con los pre saberes de cada individuo, productos de su interacción con la familia, los medios de comunicación y otros recursos tecnológicos García (2017). Según de Rosa (2018), «el conocimiento previo es uno de los principios del aprendizaje constructivista; entre sus características podemos señalar»:

- Implicación directa del alumnado en el aprendizaje y en la enseñanza al estar en contacto con situaciones del mundo real y cercano donde utilizan recursos tecnológicos.
- Surgimiento de nuevas temáticas en la investigación que despiertan el interés y la motivación del alumnado.
- Desarrollo de procesos y capacidades mentales de niveles superiores en proyectos informáticos. (García, J. 2017).

Estos aspectos mostrados deben implicar una mirada de las TIC más allá de su naturaleza como medios, deben observarse como «elementos motivadores, creadores, que facilitan los procesos cognitivos de manera integrada con los demás elementos del currículo», además, para García (2017) debe ser de vital índole el «contenido matemático que desarrollará el docente al ocupar las TIC», debido a que este hecho implica que «se debe abordar desde el punto de vista de los contenidos para que haya una comprensión del conocimiento matemático, mientras el docente usa las tecnologías de información y comunicación en sus prácticas pedagógicas». (p.186).

2.4.1 El Conectivismo y los MOOC

El conectivismo, es considerado como una teoría de aprendizaje en el contexto de la era digital. Según Rojas (2021) interpretando las ideas de Siemens, menciona en su artículo que «El aprendizaje puede residir fuera de nosotros (al interior de una organización o una base de datos),

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

por lo tanto el enfoque principal del conectivismo consiste en conectar conjuntos de información especializada teniendo en cuenta que hay conexiones que nos permiten aprender más, por ende estas tendrán mayor peso según este enfoque y ayudará a mejorar nuestro estado actual de conocimiento», Acá Siemens, habla de que el conocimiento puede existir externamente, en paquetes o conjuntos individuales de información y la perspectiva conectivista trata de conectar estos conjuntos de información, para que así se logre una evolución en el aprendizaje, en la cual se priorizan las conexiones que nos permiten alcanzar un mayor aprendizaje.

Algunos de los principios del conectivismo, según Rojas (2021) son:

- El aprendizaje y el conocimiento dependen de la diversidad de opiniones.
- El aprendizaje es un proceso de conectar nodos o fuentes de información especializados.
- El aprendizaje puede residir en dispositivos no humanos.
- La capacidad de saber más es más crítica que aquello que se sabe en un momento dado.
- La alimentación y mantenimiento de las conexiones es necesaria para facilitar el aprendizaje continuo.
- La habilidad de ver conexiones entre áreas, ideas y conceptos es una habilidad clave.
- La actualización (conocimiento preciso y actual) es la intención de todas las actividades conectivistas de aprendizaje.
- La toma de decisiones es, en sí misma, un proceso de aprendizaje. El acto de escoger qué aprender y el significado de la información que se recibe, es visto a través del lente de una realidad cambiante. (p. 83)

Gracias a esta perspectiva conectivista es posible darle un orden y un sentido a la enseñanza por medio de los MOOC, logrando un aprendizaje integral, preciso y actual. Un MOOC (Massive Open Online Course) es un Curso en Línea, Abierto y Masivo. Este acrónimo

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

entrega la siguiente definición de estos cursos:

- (*Massive*) *Masivos*. Ya que son cursos cuya temática y enfoque está dirigidos a la mayor cantidad de participantes posible gracias a la oportunidad de disfunción que ofrece la internet.
- (*Open*) *Abiertos*. Según la filosofía de los mismos cursos, estos deben ser de acceso libre y sus contenidos podrán ser compartidos, utilizados para diversos fines y en algunos casos modificados según las necesidades.
- (*Online*) *En línea*. Una de las grandes oportunidades de este curso es que se puede acceder a ellos por medio de la red lo cual favorece el aprendizaje asíncrono.
- (*Course*) *Cursos*. La finalidad de estos cursos es la enseñanza y por lo mismo sus estructuras guarda cierta similitud con los cursos de tipo presencial.

Downes (2019) define: «Los MOOC combinan el contenido abierto (Wiley) y la enseñanza abierta (Coursera), pero también son compatibles con la participación masiva. Eso se logra mediante la adopción de una pedagogía y una estructura conectivista» (p. 6).

Adicional a los principios enmarcados en el conectivismo, con la entrada en vigencia de los cursos MOOC se adicionan dos que vale la pena mencionar y atañen en términos generales a el movimiento educativo abierto los cuales son:

- Difundir el trabajo científico en todo tipo de medios de acceso abierto.
- Fomentar la movilización del conocimiento a través de la producción, distribución, uso y reutilización de recursos educativos abiertos (REA) para incidir en prácticas educativas.

El conectivismo se puede aplicar en la creación y diseño de un MOOC para la enseñanza de las matemáticas de varias maneras. En primer lugar, se puede enfocar en el aprendizaje

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

autónomo, proporcionando *recursos educativos abiertos* (REA) para que los estudiantes puedan acceder a ellos y aprender a su propio ritmo, practicando la *autorregulación* y favoreciendo los procesos *cognitivos* y *metacognitivos*. En segundo lugar, se puede fomentar el *aprendizaje colaborativo*, donde los estudiantes pueden interactuar entre sí y con el instructor cumpliendo un rol determinado dentro de la actividad y facilitar el proceso de construcción conjunta de significados durante el proceso. En tercer lugar, se pueden utilizar herramientas como WhatsApp, Google Meet y las herramientas de tipo foro para fomentar la interacción entre los estudiantes y el docente generando una retroalimentación constante durante las actividades. Por último, se puede promover el aprendizaje basado en problemas, donde los estudiantes trabajan juntos para resolver una situación problema del mundo real integrando herramientas didácticas como GeoGebra para presentar las. Al aplicar estos conceptos del conectivismo en un MOOC para la enseñanza de las matemáticas, se puede crear un ambiente de aprendizaje autónomo, colaborativo y basado en problemas que permita a los estudiantes adquirir conocimientos de manera efectiva y significativa.

2.5 El Modelo TPACK

Las siglas hacen referencias «Technological Pedagogical Content Knowledge», es un modelo que detalla los conocimientos por parte del docente que son necesarios para la enseñanza con el uso de las TIC y dar un sentido a la implementación de estas. El modelo propuesto por Punya Mishra y Matt Koehler está formado por el conocimiento tecnológico (TK), conocimiento pedagógico (PK) y conocimiento de contenido (CK). Según lo dicho por Mishra & Koehler (2015) la descripción de cada uno de los conocimientos es la siguiente:

2.5.1 Conocimiento de Contenido (CK)

El conocimiento del contenido es el dominio que el docente posee de su materia, debe ser

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

relevante de lo contrario esto generaría graves errores por parte estudiante del objeto de estudio.

2.5.2 Conocimiento Pedagógico (PK)

Esta forma amplia de conocimiento se utiliza para comprender los procesos de aprendizaje de los estudiantes, las habilidades de gestión de clase en su totalidad, la planificación de las lecciones y la evaluación de los alumnos. Es el conocimiento que debe tener impacto en el proceso de enseñanza, bajo diversos contextos, así como en la comprensión y organización de la cultura y la construcción del sujeto.

2.5.3 Conocimiento Tecnológico (TK)

El conocimiento tecnológico está basado en el dominio de las TIC en un contexto educativo, lo cual lo convierte en uno de los más relevantes en la actualidad. El docente debe estar en capacidad de lograr objetivos de aprendizaje mediados con TIC, las cuales deben ser acordes con los requerimientos y el contexto.

2.5.4 Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)

Según la idea se centra en la transformación del conocimiento del objeto de enseñanza adaptándolo al contexto educativo y las necesidades particulares del estudiante en materia de aprendizaje.

2.5.1 Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK)

Se debe tener un amplio conocimiento con respecto al contenido y que medios tecnológicos específicos convienen para la enseñanza de determinado objeto matemático.

2.5.2 Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK)

El TPK es el conocimiento la importancia de las TIC en el proceso de aprendizaje y el cómo éstas se pueden adaptar un contexto en el cual se mejoren los procesos de enseñanza y aprendizaje y cómo el uso de las TIC afecta la experiencia del estudiante. Es importante para el

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

docente conocer las diferentes herramientas tecnológicas que facilitan el proceso de enseñanza en temas particulares y como estos generan una mejor respuesta ante determinados problemas.

2.5.3 Conocimiento de Contenido Tecnológico Pedagógico (TPCK)

Es donde confluyen el TK, PK y CK. Esto implica un dominio integral del proceso de enseñanza mediada por herramientas tecnológicas. (pp. 9–23)

Este concepto se tendrá en cuenta en este trabajo de grado para valorar el conocimiento del docente referente al uso de las TIC en el proceso de transversalizar los conocimientos, GeoGebra y los MOOC como herramientas en la enseñanza del objeto matemático de esta investigación.

2.6 Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)

Según Godino (2014) a cerca del modelo desarrollado por Ball el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) comenzó con el estudio de instrucciones empíricas para la acción en el aula para identificar los tipos de conocimiento necesarios para la enseñanza de las matemáticas. La documentación, con una duración de un año, de la enseñanza de las matemáticas en el tercer grado, incluía cintas de video de la enseñanza, cintas de audio de las lecciones en el aula, transcripciones, copias del trabajo de clase escrito de los estudiantes, tareas y cuestionarios, así como los planes, notas y reflexiones del maestro.

El análisis de los tipos de conocimiento que implicaba la enseñanza de las matemáticas finalmente resultó en la creación de caracterizaciones hipotéticas de MKT. (Godino, J. 2014)

El marco MKT se inspira en la concepción de Shulman, aunque presenta una organización diferente de los dominios: tres dominios se enfocan en el conocimiento del contenido, mientras que los otros tres se centran en el conocimiento pedagógico del contenido. En este marco, el conocimiento del contenido no requiere necesariamente del conocimiento

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

pedagógico, pero el conocimiento pedagógico del contenido sí requiere del conocimiento del contenido.

Dentro del marco MKT, los dominios relacionados con el conocimiento del contenido se refieren al conocimiento de la materia en sí misma, incluyendo los conceptos, principios y teorías fundamentales. Estos dominios se centran en comprender profundamente el contenido específico que se enseña. Por otro lado, los dominios relacionados con el conocimiento pedagógico del contenido se enfocan en cómo enseñar ese contenido de manera efectiva a los estudiantes. Estos dominios abarcan estrategias de enseñanza, metodologías, evaluación del aprendizaje y comprensión de los desafíos y dificultades que los estudiantes pueden enfrentar al aprender dicho contenido. El marco MKT proporciona una estructura integral para el desarrollo profesional de los educadores, ya que reconoce la importancia tanto del conocimiento del contenido como del conocimiento pedagógico. Al comprender y dominar ambos aspectos, los educadores pueden diseñar e implementar experiencias de aprendizaje significativas y efectivas para sus estudiantes. Este enfoque integrado fortalece la capacidad de los educadores para transmitir el contenido de manera clara y facilitar el aprendizaje de los estudiantes en diferentes contextos educativos.

2.6.1 Conocimiento común del contenido (CCK)

Los profesores necesitan un amplio conocimiento de «matemáticas puras», es decir, conocimientos sobre teorías, conceptos, definiciones, resultados, reglas, demostraciones y símbolos matemáticos utilizados en diferentes áreas de las matemáticas. Este tipo de conocimiento se puede implementar en cualquier entorno, incluso más allá del campo de la enseñanza, e incluye el cálculo, la resolución de problemas y otros conocimientos matemáticos comunes que no son exclusivos de la enseñanza. Estos aspectos también son importantes en otras profesiones como la ingeniería y las matemáticas per se, por lo que se les ha denominado

Common Content Knowledge. (Godino, J. 2014)

2.6.2 Conocimiento especializado del contenido (SCK)

Los profesores necesitan conocimientos matemáticos exclusivos de la enseñanza, por ejemplo, para seleccionar ejemplos pertinentes, elegir ejercicios apropiados, evaluar tareas, diseñar problemas matemáticos y calificar exámenes. La corrección y calificación de exámenes son, por ejemplo, tareas de enseñanza específicas, pero esas tareas no requieren conocimiento del contenido pedagógico y, por lo tanto, requieren conocimiento del contenido especializado. Además, los profesores pueden usar su conocimiento de la historia de las matemáticas o el conocimiento de cómo se pueden aplicar las matemáticas en su enseñanza, que también son ejemplos de este tipo específico de conocimiento matemático Fauskanger (2015). Todos aquellos aspectos que requieren conocimientos matemáticos propios de la docencia se han denominado *Conocimientos de Contenidos Especializados*. Godino (2014) describen SCK como una competencia que «permite a los maestros participar en tareas de enseñanza particulares, incluida la forma de representar con precisión ideas matemáticas, proporcionar explicaciones matemáticas para reglas y procedimientos comunes, y examinar y comprender métodos de solución inusuales para problemas».

2.6.3 Conocimiento del contenido de horizonte (HCK)

Las matemáticas son una construcción única, compuesta y precisa, hecha de conceptos matemáticos y, por lo tanto, se puede decir que las matemáticas se ocupan de los conceptos y de las relaciones entre ellos. En consecuencia, los profesores deben saber cómo se interrelacionan los conceptos matemáticos, cómo los conceptos forman diferentes temas matemáticos y cómo se construye la estructura de las matemáticas dentro de diferentes temas matemáticos. Por otro lado, los conceptos matemáticos y sus definiciones se pueden representar de diferentes formas. En

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

términos generales, las definiciones de los conceptos matemáticos se vuelven más exactas y formales en los niveles superiores de educación. Un profesor debe saber, por ejemplo, cómo funciona el concepto de función se define en niveles escolares anteriores antes de que pueda adjuntar una nueva definición a una anterior. Así, una parte de este conocimiento es la conciencia de cómo los conceptos matemáticos y sus definiciones pueden asumir diferentes formas. Godino (2014) han sugerido que el conocimiento de este tipo incluye un sentido del entorno matemático que lo rodea, un tipo de conocimiento que ellos denominan Conocimiento de Contenido Horizonte.

2.6.4 Conocimiento de Contenidos y Enseñanza (KCT)

Los maestros deben elegir estrategias efectivas para cada situación y tema que enseñan. La planificación de la enseñanza, la elección de estrategias eficaces, la organización de las aulas, la promoción de la interacción y la comunicación con sus alumnos requieren un pensamiento pedagógico. Por ejemplo, si los estudiantes preguntan por la respuesta correcta a un problema dado, un maestro puede ocultar la respuesta y tratar de brindarles a los estudiantes la oportunidad de descubrir la respuesta por sí mismos. Por otro lado, a veces un estudiante puede plantear una pregunta que lleva a otro tema matemático, y en esas situaciones un profesor debe tomar decisiones sobre si debe favorecer o desviar el plan original. El conocimiento del contenido y la enseñanza se compone de una amalgama de conocimientos de matemáticas y de enseñanza Godino (2014).

2.6.5 Conocimiento de Contenido y Estudiantes (KCS)

Los maestros requieren un conocimiento de las teorías del aprendizaje para comprender cómo los estudiantes aprenden matemáticas. Por otro lado, un docente debe ser capaz de reconocer cómo los estudiantes aprenden matemáticas en la práctica o la naturaleza de los

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

desafíos que pueden enfrentar. Si los profesores saben qué problemas suelen ser difíciles para los estudiantes en teoría, o la naturaleza de los conceptos erróneos o las dificultades de aprendizaje que los estudiantes pueden experimentar, entonces podrán prevenir tales problemas y ayudar a sus estudiantes a superar los desafíos en la práctica. Además, si los profesores conocen a sus alumnos y el tipo de temas que les interesan, podrán motivarlos y hacer que su propia enseñanza sea más interesante. Estos aspectos requieren el conocimiento de cómo los estudiantes piensan o aprenden un contenido particular, y, por lo tanto, generalmente se denominan conocimiento del contenido y estudiantes. Godino (2014) sugieren que KCS es un elemento principal en PCK de Shulman.

Una parte de PCK de Shulman es una comprensión de lo que hace que el aprendizaje de temas específicos sea fácil o difícil: las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y antecedentes traen consigo al aprendizaje de los temas y lecciones que se enseñan con mayor frecuencia. (Godino, J. 2014)

2.6.6 Conocimiento de Contenido y Currículo (KCC)

El currículo nacional normalmente presenta los lineamientos y objetivos de la profesión docente de matemáticas, es decir, sobre el tipo de temas matemáticos que se deben enseñar y la naturaleza de los demás objetivos que atañen a la enseñanza escolar en los distintos niveles. Los docentes deben ser conscientes de las diversas directrices y objetivos involucrados en la profesión docente. Además, los docentes deben conocer la variedad y el uso de materiales didácticos (como libros de texto, otros materiales, etc.), instrumentos didácticos (pizarras, retroproyectores, etc.) y tecnología (computadoras, pizarras inteligentes, calculadoras, software, etc.) El uso de materiales, instrumentos o tecnología en la enseñanza requiere un conocimiento integrado del conocimiento de la materia, el conocimiento del contenido pedagógico y el

conocimiento sobre el equipo.

Este concepto se tendrá en cuenta en este trabajo de grado para valorar el conocimiento del docente referente al proceso de enseñanza de matemáticas, teniendo en cuenta cada uno de los conocimientos que el docente debe tener tanto del currículo durante el desarrollo de esta investigación. (Godino, J. 2014)

2.7 El Cuarteto del Conocimiento (KQ)

El Cuarteto del conocimiento, categoriza los eventos en las lecciones de matemáticas con referencia particular a la materia que se enseña y el conocimiento relacionado con las matemáticas que los maestros utilizan para sus lecciones. Si bien, la distinción de Shulman entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico lo sustenta esta consideración respecto a la enseñanza de las matemáticas, El cuarteto del conocimiento (KQ) identifica situaciones en las que dicho conocimiento puede verse en el acto de enseñar.

El modelo The Knowledge Quartet Rowland (2013) otorga mayor atención a realizar una caracterización más dinámica del conocimiento del profesor que se despliega en el aula. Su actividad central va mucho más allá de la transmisión de saberes, definiciones y algoritmos. Bajo las directrices de los nuevos enfoques didácticos, le corresponde diseñar y proponer secuencias de situaciones problemáticas adecuadas, con la finalidad de favorecer la construcción de los aprendizajes esperados en torno a los contenidos matemáticos escolares. Este modelo considera cuatro dimensiones o categorías del conocimiento profesional que el profesor requiere, para enseñar matemáticas. Dimensiones que a continuación se describen (Rowland, 2013):

2.7.1 Fundamentación

Esta categoría consiste en el conocimiento, las creencias y la comprensión de los alumnos adquiridos en la academia, en preparación (intencionalmente o no) para su papel en el aula. Tales

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

conocimientos y creencias informan las elecciones y estrategias pedagógicas de manera fundamental. Los componentes clave de esta base teórica son: el conocimiento y la comprensión de las matemáticas per se y el conocimiento de importantes extensiones de la literatura y el pensamiento que ha resultado de la investigación sistemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El componente de creencias se relaciona con las convicciones que tienen y los valores que defienden los futuros maestros. Tales creencias generalmente se refieren a diferentes posiciones filosóficas con respecto a la naturaleza del conocimiento matemático, los propósitos de la educación matemática y las condiciones bajo las cuales los alumnos aprenderán mejor las matemáticas.

- *Conciencia del propósito.*
- *Identificando errores.*
- *Conocimiento manifiesto de la materia.*
- *Sustento teórico de la pedagogía.*
- *Uso de terminología.*
- *Uso de libro de texto.*

2.7.2 Transformación

La categoría de conocimiento en acción se refiere al desempeño del docente tanto en la planificación de la enseñanza como en la ejecución misma de la enseñanza. Según Shulman, el conocimiento pedagógico del contenido implica la capacidad del maestro para transformar su conocimiento del contenido en formas pedagógicamente efectivas. Esta transformación implica la representación de ideas a través de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones (Rowland, 2013). Dentro de esta categoría, se destacan comportamientos como la demostración del maestro, el uso de materiales didácticos, la elección de representaciones y la

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

selección de ejemplos, que son fundamentales para apoyar el desarrollo de conceptos en los alumnos.

2.7.3 Conexión

Esta categoría une ciertas elecciones y decisiones que se toman para las partes más o menos discretas del contenido matemático. Se refiere a la coherencia de la planificación o la enseñanza mostrada a lo largo de un episodio, lección o serie de lecciones. Nuestra concepción de coherencia incluye la secuenciación de temas de instrucción dentro y entre lecciones, incluida la ordenación de tareas y ejercicios que reflejan deliberaciones y elecciones que implican tanto el conocimiento de las conexiones estructurales dentro de las matemáticas como la conciencia de las demandas cognitivas relativas de diferentes temas y tareas:

- *Hacer conexiones entre procedimientos*
- *Hacer conexiones entre conceptos.*
- *Anticipación de la complejidad*
- *Decisiones sobre la secuencia*
- *Reconocimiento de la adecuación conceptual*

2.7.4 Contingencia

La categoría de capacidad de "pensar sobre la marcha" se refiere a los eventos impredecibles que ocurren en el aula. En términos simples, implica la disposición del maestro a responder a las ideas de los niños y a estar preparado para desviarse de la agenda establecida en la planificación de la lección. Desde una perspectiva constructivista del aprendizaje, se reconoce el valor de las contribuciones de los niños dentro de las lecciones. Ignorar o descartar estas contribuciones como "incorrectas" puede ser interpretado como una falta de interés en el conocimiento que los

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

niños han adquirido como resultado de la enseñanza del maestro. Sin embargo, Rowland (2013) señala que nuestra capacidad de escuchar disminuye cuando experimentamos ansiedad.

Dentro de esta categoría, se destacan comportamientos como responder a las ideas de los niños, aprovechar las oportunidades que surgen, desviarse de la agenda establecida y tener una percepción receptiva como maestro.

Esta teoría sobre el KQ se tendrá en cuenta en este trabajo de grado para observar al docente durante las fases transformación, conexión y contingencia durante el proceso de enseñanza utilizando el MOOC.

2.8 Contenido Específico Sobre la Función Seno

La idea principal se encuentra en abarcar todo el contenido específico referente a la función seno, desde sus orígenes y desarrollo histórico a través de tres unidades didácticas, diseñadas en base al libro *Trascendentes Tempranas*.

2.8.1 Importancia de la Historia de las Funciones Trigonométricas En la secuencia didáctica

La historia de la trigonometría tiene una gran importancia en una secuencia didáctica sobre este tema. Al incorporar la historia de las matemáticas en la enseñanza de la trigonometría, se pueden lograr varios beneficios pedagógicos:

Contextualización. La historia de la trigonometría proporciona un contexto histórico y cultural que ayuda a los estudiantes a comprender cómo y por qué se desarrollaron las ideas y conceptos trigonométricos. Al conocer la evolución de la trigonometría a lo largo del tiempo, los estudiantes pueden apreciar mejor la importancia y relevancia de los conceptos que están aprendiendo.

Motivación. La historia de la trigonometría puede despertar la curiosidad y el interés de los estudiantes al mostrarles cómo los antiguos matemáticos y astrónomos se enfrentaron a

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

problemas y desafíos similares a los que ellos están abordando en su estudio actual. Los relatos de los logros y descubrimientos en la trigonometría pueden motivar a los estudiantes al mostrarles el poder y la aplicabilidad de esta rama de las matemáticas.

Conexiones interdisciplinarias. La historia de la trigonometría está estrechamente relacionada con otras áreas del conocimiento, como la astronomía, la física y la navegación. Al explorar la historia de la trigonometría, los estudiantes pueden comprender cómo las matemáticas se entrelazan con otras disciplinas y cómo la trigonometría ha sido fundamental para el desarrollo de estas áreas.

Desarrollo del pensamiento crítico. Al estudiar la historia de la trigonometría, los estudiantes pueden analizar y evaluar las diferentes teorías, métodos y enfoques propuestos por matemáticos y científicos a lo largo del tiempo. Esto fomenta el pensamiento crítico y la capacidad de evaluar y justificar conceptos y soluciones en trigonometría.

Reconocimiento del legado matemático. La historia de la trigonometría muestra cómo los avances en esta área han sido acumulativos y han sido construidos por muchas generaciones de matemáticos. Al conocer la historia de la trigonometría, los estudiantes pueden apreciar el legado matemático que han heredado y cómo los conceptos y técnicas que están aprendiendo han sido refinados y perfeccionados a lo largo del tiempo.

En resumen, la incorporación de la historia de la trigonometría en una secuencia didáctica permite contextualizar, motivar, establecer conexiones interdisciplinarias, desarrollar el pensamiento crítico y reconocer el legado matemático en el estudio de la trigonometría. Esto enriquece la experiencia de aprendizaje de los estudiantes y les ayuda a comprender y apreciar mejor los conceptos y aplicaciones de la trigonometría.

2.8.2 *Secuencia del Contenido Especifico Sobre de la Función seno*

El libro «Trascendentes Tempranas» puede ofrecer varias ventajas para la enseñanza de la función seno y su relación con las funciones trascendentes en general. Algunas de estas ventajas incluyen:

Secuencia de aprendizaje estructurada. El libro «Trascendentes Tempranas» generalmente sigue una secuencia de aprendizaje estructurada que permite a los estudiantes desarrollar gradualmente su comprensión de la función seno. Comienza presentando conceptos básicos y fundamentales, como los ángulos y los triángulos, y luego avanza hacia la introducción de la función seno y sus propiedades.

Enfoque conceptual. El libro puede poner énfasis en la comprensión conceptual de la función seno y su relación con los triángulos y los círculos unitarios. Esto permite a los estudiantes comprender mejor los fundamentos y las aplicaciones de la función seno, en lugar de simplemente memorizar fórmulas y procedimientos.

Aplicaciones y ejemplos prácticos. El libro puede proporcionar ejemplos y aplicaciones prácticas de la función seno en diversos contextos, como la física, la ingeniería o la música. Esto ayuda a los estudiantes a ver la relevancia y utilidad de la función seno en el mundo real y fortalece su comprensión de cómo se aplica en diferentes situaciones.

Problemas y ejercicios variados. El libro puede ofrecer una variedad de problemas y ejercicios relacionados con la función seno, lo que permite a los estudiantes practicar y aplicar sus conocimientos en diferentes situaciones. Estos problemas pueden incluir la resolución de triángulos, la determinación de amplitudes y periodos, y la interpretación de gráficas de la función seno.

Recursos complementarios. Además del contenido principal, el libro puede proporcionar

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

recursos complementarios, como gráficas, tablas trigonométricas y ejercicios adicionales, que ayudan a los estudiantes a profundizar en el estudio de la función seno y a fortalecer su dominio de este concepto.

En resumen, el libro «Trascendentes Tempranas» puede ofrecer una secuencia de aprendizaje estructurada, enfoque conceptual, aplicaciones prácticas, problemas variados y recursos complementarios que benefician la enseñanza de la función seno. Estas ventajas ayudan a los estudiantes a desarrollar una comprensión sólida y aplicar sus conocimientos de la función seno en diversos contextos.

2.8.2.1 Relación Entre el Contenido de la Función Seno. La función seno está estrechamente relacionada tanto con el concepto de función como con el concepto de razones trigonométricas.

En términos del concepto de función, la función seno se define como una función matemática que asigna a cada valor de ángulo en un triángulo rectángulo el valor de la razón trigonométrica seno correspondiente. La función seno se puede expresar algebraicamente como una relación entre los lados de un triángulo rectángulo, donde el seno de un ángulo se define como la longitud del cateto opuesto dividido por la longitud de la hipotenusa. En otras palabras, la función seno toma un ángulo como entrada y devuelve un número que representa la relación entre las longitudes de los lados del triángulo rectángulo asociado a ese ángulo.

En cuanto al concepto de razones trigonométricas, la función seno es una de las tres razones trigonométricas fundamentales, junto con el coseno y la tangente. Estas razones trigonométricas son relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo y se definen como sigue:

- *Seno (sin)*: se define como la longitud del cateto opuesto dividido por la longitud de la

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

hipotenusa.

- *Coseno (cos)*: se define como la longitud del cateto adyacente dividido por la longitud de la hipotenusa.
- *Tangente (tan)*: se define como la longitud del cateto opuesto dividido por la longitud del cateto adyacente.

En términos generales, una función es una relación que asigna un conjunto de entradas (dominio) a un conjunto correspondiente de salidas (rango). En el caso de las funciones trigonométricas, el dominio está compuesto por los valores de los ángulos y el rango está compuesto por los valores correspondientes de las razones trigonométricas.

Por ejemplo, la función seno (x) es una función trigonométrica que toma un ángulo x como entrada y devuelve el valor del seno correspondiente. La función coseno (x) toma un ángulo x como entrada y devuelve el valor del coseno correspondiente. De manera similar, la función tangente (x) toma un ángulo x como entrada y devuelve el valor de la tangente correspondiente.

Estas funciones trigonométricas son ejemplos específicos de funciones que se utilizan para describir y modelar fenómenos relacionados con los ángulos y las razones trigonométricas. Las funciones trigonométricas tienen propiedades y comportamientos específicos, como la periodicidad, simetría y relaciones trigonométricas, que se estudian en detalle en el campo de la trigonometría. (Ver Anexo I)

3 Metodología

Esta investigación se realiza en el marco de la didáctica de la Matemática. Es una investigación de tipo cualitativa con enfoque analítico interpretativo, basada en la enseñanza en función seno con estudiantes de 1° semestre de la Universidad Tecnológica de Pereira.

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

Adicionalmente, intervienen conceptos referentes al trabajo colaborativo, basado en el enfoque pedagógico Socio-Constructivista, donde el estudiante y sus interacciones sociales tienen el papel protagónico y el aprendizaje significativo se construye conforme los estudiantes confrontan diversas situaciones problema en la zona del desarrollo próximo.

El proceso metodológico es el siguiente:

En el contexto del grupo de investigación GIPEMAC y basado en la línea de investigación «didáctica de las matemáticas mediadas por TIC» en la cual se investigan distintas tecnologías de la información y la comunicación como herramientas para la enseñanza de las matemáticas bajo un contexto específico. Entre dichas herramientas está el MOOC el cual tiene la capacidad de integrar distintas herramientas digitales para la solución de un determinado problema de la enseñanza. Adicionalmente, durante el proceso de observación en el aula, se hallan problemas durante la enseñanza de la función seno.

Se consulta el estado del arte referente a los MOOC como estrategia didáctica para la enseñanza, lo que lleva al planteamiento de los objetivos y la justificación de esta investigación, los cuales están enmarcados dentro del macroproyecto.

Con ayuda del estado del arte se escoge un marco teórico y metodológico que abarque las necesidades de la investigación teniendo en cuenta el contexto de la misma.

En el marco metodológico para una investigación de tipo *cualitativo con enfoque analítico e interpretativo*, se habla de la elaboración de un diseño pedagógico basado en las teorías del Socio-Constructivismo (Vygotsky) y el modelo de Van Hiele (Matrimonio Van Hiele); contrastado con teorías del aprendizaje (Colaborativo, Autónomo y Basado en Problemas) encontradas relaciones entre las características relevantes de estas teorías para el contexto de esta investigación.

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

Teniendo en cuenta las relaciones más relevantes se crea una secuencia didáctica que permita analizar e interpretar dichas relaciones con ayuda de las herramientas de recolección de datos cualitativos descritas en el marco metodológico (observación directa, en video, formularios tipo test, pizarra digital y WhatsApp)

Para el contenido del curso MOOC se utiliza el libro «Trascendentes Tempranas» de Stewart porque es un texto ampliamente utilizado en la enseñanza universitaria de cálculo diferencial e integral debido a su enfoque claro y accesible para los estudiantes. Además de su uso en la creación de secuencias didácticas, este libro podría ser empleado como material de apoyo para la enseñanza y el aprendizaje autónomo de los conceptos matemáticos relacionados con el cálculo. Este libro incluye información detallada sobre la función seno y sus propiedades, lo cual podría funcionar como recurso adicional a los videos explicativos, simulaciones interactivas y actividades que se diseñen en la secuencia didáctica con el fin enriquecer la propuesta didáctica del docente. Con el fin de acercarse al contexto del estudiante de primer semestre de la UTP también se toma como guía el libro «Talleres De Matemáticas de la UTP»

Se crea la secuencia de los temas relacionados con el objeto matemático, la cual inicia con una prueba diagnóstica sobre el contenido, se continúa con el curso, el cual se divide en tres unidades, trigonometría, funciones y funciones trigonométricas; para terminar con una evaluación sobre todo lo visto en el curso. Con el material recolectado durante la secuencia didáctica se puede analizar e interpretar y sacar conclusiones sobre la aplicación del MOOC.

Teniendo en cuenta lo siguiente:

Al analizar las distintas plataformas para alojar cursos dentro del contexto de esta investigación se escoge Wix por facilidad, accesibilidad y la posibilidad de integrar diferentes herramientas útiles para la aplicación de la secuencia didáctica.

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

Acerca de la población objeto de esta investigación, es de destacar que son alumnos de primer semestre de la Universidad Tecnológica de Pereira. La cantidad de estudiantes será alrededor de 15, con edades de entre los 16 y 18 años y cuyos contextos son muy similares.

Todo esto con el fin de poder analizar los avances en cuanto al objeto matemático que hayan tenido los estudiantes. Adicionalmente, se contrastarán los resultados obtenidos con respecto a otras investigaciones similares, para enriquecer las conclusiones acerca de los hallazgos más relevantes de la investigación.

3.1 Diseño de la Investigación Cualitativa

El diseño de la investigación cualitativa constituye un método de investigación utilizado ampliamente por los científicos e investigadores que estudian el comportamiento y los hábitos humanos. Generalmente, la investigación cualitativa es considerada como precursora de la investigación cuantitativa, ya que a menudo se utiliza para generar posibles pistas e ideas que se pueden utilizar para formular una hipótesis verificable y realista. Luego, esta hipótesis puede ser probada exhaustivamente y analizada matemáticamente con los métodos de investigación cuantitativos estándares.

Por estas razones, estos métodos cualitativos suelen estar estrechamente relacionados con entrevistas, técnicas de diseño de encuestas y estudios de caso individuales, para reforzar y evaluar los resultados en una escala más amplia.

Los métodos cualitativos son, probablemente, los más antiguos de todas las técnicas científicas. Los antiguos filósofos griegos observaban cualitativamente el mundo a su alrededor, tratando de encontrar respuestas a lo que veían.

Para esta investigación se realizó un análisis a través de la observación directa y participante del docente, además de la recolección de información a través del registro de

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

experiencias en con ayuda de Google Meet y WhatsApp.

3.1.1 Enfoque Analítico Interpretativo

La investigación cualitativa sigue un proceso similar al de la investigación cuantitativa y consta de cinco fases: definición del problema de la enseñanza, diseño del trabajo (pregunta de investigación, consulta del estado del arte, justificación, planteamiento de objetivos general y específicos, elaboración de un marco teórico y metodológico, entre otros), recopilación de datos, análisis e interpretación y elaboración de conclusiones.

En el enfoque analítico interpretativo, se busca comprender y dar sentido a fenómenos sociales como los procesos de enseñanza y aprendizaje, en el cual se busca comprender en profundidad la situación o fenómeno a investigar, lo cual es fundamental en el enfoque analítico interpretativo para identificar los aspectos relevantes en una investigación con determinadas características situado en un contexto social. (Herrera, 2017)

El diseño de trabajo en la investigación cualitativa se alinea con el enfoque analítico interpretativo al permitir la flexibilidad necesaria para capturar la complejidad de los fenómenos sociales. El diseño debe adaptarse al contexto y permitir la interacción con los actores en el proceso de enseñanza y aprendizaje. (Herrera, 2017)

La recopilación de datos en la investigación cualitativa, a través de técnicas como la observación y la entrevista en profundidad. Estas técnicas permiten analizar las situaciones importantes en el aula en el contexto de la investigación para una posterior interpretación a la luz del marco teórico, desentrañando con ayuda de descripciones densas en contenido crucial para dar significado y su relevancia para comprender los aportes que ofrece dicha investigación a la sociedad. (Herrera, 2017)

En resumen, el proceso de investigación cualitativa, que incluye la definición del

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

problema, el diseño de trabajo, la recopilación y análisis de datos, así como el informe y validación de la información, se relaciona estrechamente con el enfoque de investigación analítico interpretativo manejado en esta investigación porque ambos buscan comprender y dar sentido a los fenómenos sociales desde la perspectiva de los participantes, utilizando técnicas flexibles y enfocándose en los procesos interpretativos.

3.2 Contexto de la Investigación

Es importante tener en cuenta que el contexto es el que debe enmarcar toda la investigación, por esto al investigar sobre *aportes didácticos* que ofrece una determinada herramienta, los objetivos y las respectivas conclusiones deben pensarse desde la perspectiva de la enseñanza. Sin embargo, el aprendizaje se considera implícitamente en el proceso de enseñanza, ya que las decisiones pedagógicas y el diseño de la secuencia didáctica se basan en un diseño pedagógico que tiene en cuenta características relevantes para esta investigación de teorías del aprendizaje como el Aprendizaje Autónomo, Colaborativo y Basado en Problemas.

Esta investigación se realizará con alumnos de primer semestre de la Universidad Tecnológica De Pereira del profesor Alberto López Alzate, de la asignatura Matemáticas 1 primera articulación, Grupo 105.

La investigación se realizará con un grupo de 15 estudiantes; se preguntará sobre el acceso a dispositivos como smartphones y el acceso a internet, con el fin definir el número real de participantes que podrán realizar la secuencia didáctica, el número inicial de estudiantes que participen puede variar.

3.3 Instrumentos Utilizados en la Investigación

3.3.1 Observación Directa

La observación para Tarrés (2013) es fundamental en la metodología de investigación

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

cualitativa. El autor considera que no se trata solo de mirar, que es necesario ir más allá en una búsqueda por respuestas objetivas y útiles, aunque para ello, expresa que es clave “educar los ojos para ver” lo que otros no captan a simple vista, es decir, la observación con fines investigativos requiere de preparación previa.

Por ello, citando a otros autores, Tarrés (2013), expresa que este tipo de actividad se desarrolla de una forma no solo deliberada y consciente, sino de un modo sistemático, ordenando las piezas, anotando los resultados de la observación, describiendo, relacionando, sistematizando y, sobre todo, tratando de interpretar y de captar su significado y alcance. Tarrés (2013).

3.3.2 Registros en Video.

Además de la observación del contexto, se requiere de la recopilación de datos que permitan dar registro y el análisis a posteriori de las situaciones en el aula durante la investigación, por lo cual se opta por utilizar la herramienta Google Meet para tener el registro audiovisual de las sesiones de desarrollo de la secuencia didáctica, los cuales captaron situaciones específicas durante el desarrollo de las sesiones de clase. La importancia de estos registros, queda de manifiesto en las palabras de Rodríguez citado por Díaz (2020): «Para recoger y registrar información, el investigador cualitativo se servirá de diferentes sistemas de observación (Grabaciones en vídeo, diarios, observaciones no estructuradas) de encuesta (entrevistas en profundidad, entrevistas en grupo) documentos de diverso tipo, materiales y utensilios, etc.» (p.5). Los autores a su vez explican que, al inicio del proceso, la cantidad de información debe ser amplia, para luego focalizarla y hacerla más reducida y que esta se ajuste hacia los objetivos propuestos.

3.3.3 Fase Analítica.

Para cumplir esta fase es necesario sintetizar los datos durante el proceso de observación

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

y posteriormente con los videos, luego hacer un proceso de transformación de los datos, para la posterior obtención de resultados, hallazgos que verifiquen las conclusiones finales de Rodríguez mencionadas en el artículo de Díaz (2020).

3.3.4 Fase Informativa.

Según el artículo de Díaz (2020), esta fase consiste en la creación de un registro escrito o informe que dé cuenta de los principales hallazgos y conclusiones del proceso: «El informe cualitativo debe ser un documento convincente presentando los datos sistemáticamente que apoyen el caso del investigador y refute las explicaciones alternativas» (p.6).

3.4 Diseño del Modelo Pedagógico Para la Enseñanza de la Función Seno.

Con el fin de contar con un derrotero pedagógico se acude a diferentes teorías de aprendizaje, a un enfoque pedagógico y a la teoría de Van Hiele para realizar un diseño pedagógico en el cual se contrastan las relaciones más relevantes para enfrentar el problema cuestión de este trabajo investigativo. Se dará una ponderación de 1 a 5 en las relaciones que ofrezcan mayor posibilidad de aportar desde la enseñanza de la función seno a su aprendizaje dado el problema determinado.

TABLA 1*Modelo pedagógico*

TEORÍAS DEL APRENDIZAJE		Socio-Constructivismo				Van Hiele	
		Andamiaje	Ayuda ajustada	ZDP	CCS	Nivel I	Nivel II
A.A.	Autorregulación	5	4	3	3	4	1
	Autocontrol y seguimiento	3	4	5	2	1	1
	La evaluación y la retroalimentación	2	4	3	5	4	4
A.C.	Interdependencia positiva	1	4	5	5	1	1
	Tutorización	1	5	5	3	1	1
	Colaboración mediante apoyo tecnológico	1	5	5	2	5	5
A.B.P.	Problémica	3	5	4	4	5	2
	Investigativa / Informativa	3	3	5	5	2	2
	Soluciónica	3	3	5	1	5	4
	Productiva	4	3	1	5	4	5

Nota. Diseño propio Tabla 1, creado en el grupo de investigación de la Maestría En Enseñanza de la Matemática. UTP (2020)

Como se observa, las relaciones que se valoran con 5 generan el diseño pedagógico a tener en cuenta en este contexto y en las condiciones que se diagnosticó en el problema motivo de esta investigación. Este diseño es el derrotero que orientará la construcción del MOOC y cada una de las actividades de aprendizaje de la secuencia didáctica, así como la misma dinámica de enseñar con uso del MOOC.

A continuación, se hace una breve explicación de las relaciones más relevantes del diseño

pedagógico:

Andamiaje y autorregulación. La importancia de la autorregulación radica en que permite al estudiante utilizar las herramientas y estrategias que se le han proporcionado durante la aplicación de la secuencia didáctica para avanzar hacia sus objetivos, desarrollando un nivel de consciencia en el cual el mismo estudiante identifica sus posibilidades y sus limitaciones frente a la realización de la actividad esto implica que el profesor debe brindar apoyo y control en aquellos aspectos de la actividad que están por encima de las habilidades actuales del alumno. De esta manera, el estudiante puede centrarse en dominar rápidamente los aspectos relevantes de una estrategia o habilidad a través de la retroalimentación y el apoyo social, cuando sea necesario.

ZDP y Autocontrol y seguimiento. El autocontrol y seguimiento se refiere a la capacidad del estudiante para internalizar el enfoque estratégico, es decir, adquirir la comprensión y asimilación de habilidades que le permiten planificar, resolver problemas y tomar decisiones de forma autónoma y adaptada al contexto de aprendizaje. El autocontrol y seguimiento pueden ayudar a los estudiantes a avanzar en su ZDP al permitirles adquirir habilidades y conocimientos que les permitan resolver problemas más complejos y avanzados con mayor autonomía. Al internalizar el enfoque estratégico, los estudiantes pueden aprender a planificar, resolver problemas y tomar decisiones de forma autónoma y adaptada al contexto de aprendizaje, lo que les permite avanzar en su ZDP.

Construcción conjunta de significados y evaluación y retroalimentación. La retroalimentación es un elemento esencial para alcanzar un nivel de aprendizaje profundo y significativo, y la construcción conjunta de significados puede ayudar a mejorar la calidad de la retroalimentación que se proporciona a los estudiantes. Al involucrar a los estudiantes en el proceso de construcción del conocimiento en un entorno social, se les da la oportunidad de

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

recibir retroalimentación constante sobre su comprensión y progreso por parte del docente y los compañeros, lo que les permite ajustar su enfoque de manera conjunta y mejorar su aprendizaje. Además, al diseñar la evaluación antes de las actividades de aprendizaje, se puede asegurar que los objetivos estén alineados con las actividades y que los estudiantes reciban una retroalimentación adecuada sobre su progreso hacia esos objetivos.

ZDP y la interdependencia positiva. La interdependencia positiva y la zona de desarrollo próximo (ZDP) están estrechamente relacionadas en el aprendizaje colaborativo. La interdependencia positiva se refiere a la percepción de que los miembros del grupo están vinculados entre sí de tal manera que el éxito individual depende del éxito del grupo. En el aprendizaje colaborativo, los estudiantes trabajan juntos para lograr un objetivo común, lo que fomenta la interdependencia positiva. Al trabajar juntos, los estudiantes pueden ayudarse mutuamente a avanzar en su ZDP, ya que pueden proporcionar apoyo y orientación para superar las dificultades que se presenten durante el desarrollo de las actividades, demostrando que se puede avanzar más allá de lo que podrían lograr individualmente. Además, al trabajar en equipo, los estudiantes pueden desarrollar habilidades sociales y emocionales importantes como la comunicación efectiva, la resolución de conflictos y el trabajo en equipo.

La interdependencia positiva y la construcción conjunta de significados. La construcción conjunta de significados se refiere al proceso en el cual los estudiantes trabajan juntos para crear un entendimiento compartido sobre un tema o concepto. En el aprendizaje colaborativo, los estudiantes trabajan juntos para lograr un objetivo común, lo que fomenta la interdependencia positiva. Al trabajar juntos, los estudiantes pueden compartir sus ideas y perspectivas para construir conjuntamente significados sobre un tema o concepto. Esto puede ser especialmente útil en áreas donde hay múltiples interpretaciones o perspectivas y permite fomentar el

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

pensamiento crítico y la resolución de problemas. Al trabajar juntos para construir significados, los estudiantes pueden cuestionar y desafiar las ideas de los demás, lo que puede llevar a una comprensión más profunda y crítica del tema o concepto en cuestión. También es importante destacar que la interdependencia positiva y la construcción conjunta de significados no solo benefician a los estudiantes en términos académicos, sino que también pueden tener un impacto positivo en su bienestar emocional y social. Al trabajar juntos en un ambiente colaborativo, los estudiantes pueden sentirse más conectados con sus compañeros y desarrollar habilidades sociales valiosas como la empatía, la cooperación y el liderazgo.

La ayuda ajustada y la tutorización. La ayuda ajustada se enfoca en adaptar la ayuda al estudiante para desarrollar habilidades dentro de su Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), mientras que la Tutorización implica proporcionar orientación y retroalimentación a los estudiantes para ayudarlos a alcanzar sus objetivos de aprendizaje. En ambos casos, el objetivo es proporcionar una ayuda personalizada y adaptada a las necesidades del estudiante, lo que puede mejorar significativamente su capacidad para aprender y desarrollarse. Además, tanto la Ayuda Ajustada como la Tutorización pueden ser utilizadas en contextos individuales o grupales, dependiendo de las necesidades específicas del estudiante del grupo.

ZDP y la tutorización. La tutorización se enfoca en proporcionar apoyo y orientación a los estudiantes para ayudarlos a desarrollar habilidades dentro de su ZDP. La tutorización puede ser empleada para identificar las habilidades que un estudiante aún no ha adquirido y que están dentro de su ZDP, y luego proporcionar la ayuda necesaria para desarrollar esas habilidades. Al trabajar con un tutor, el estudiante puede recibir retroalimentación y orientación personalizada que lo ayudará a avanzar en su aprendizaje.

La ayuda ajustada y la colaboración mediante apoyo tecnológico. La ayuda ajustada se

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

refiere a una estrategia pedagógica que busca adaptar la ayuda al estudiante a través del diálogo y la presentación de materiales de distinto tipo con el fin de desarrollar determinadas capacidades. Estos materiales pueden ser desarrollados a partir de las TIC para mejorar la colaboración y la interacción entre pares, facilitar la distribución del conocimiento y las habilidades dentro de una comunidad virtual, y permitir que los participantes generen conocimiento, desarrollen productos, resuelvan problemas relevantes y adquieran competencias específicas establecidas en un contexto de enseñanza.

Niveles 1 de Van Hiele y la fase problémica del ABP. Es posible que durante la fase problémica del ABP, los estudiantes puedan aplicar algunas características del nivel 1 de Van Hiele, como reconocer y analizar algunas propiedades particulares del problema. Además, el ABP puede ser una metodología efectiva para desarrollar habilidades cognitivas y avanzar en los niveles de comprensión de Van Hiele a medida que los estudiantes trabajan juntos para resolver problemas complejos.

ZDP y fase investigativa del ABP. En la fase investigativa del ABP, los estudiantes pueden utilizar diferentes métodos para recopilar información, como la investigación bibliográfica, entrevistas o encuestas. Durante este proceso, los estudiantes pueden trabajar en grupos y recibir orientación y apoyo del profesor o tutor para desarrollar habilidades de investigación y análisis crítico. Al trabajar en colaboración con otros más experimentados durante la fase investigativa del ABP, los estudiantes pueden aprovechar la ZDP para adquirir nuevos conocimientos y habilidades que les permitan abordar el problema de manera efectiva. Además, al recibir retroalimentación y guía durante esta fase, los estudiantes pueden desarrollar su capacidad de autorregulación y aprendizaje autónomo

La construcción conjunta de significados y fase investigativa del ABP. Durante este

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

proceso, los estudiantes pueden trabajar en grupos y compartir sus hallazgos e interpretaciones con otros miembros del grupo. Al hacerlo, pueden discutir diferentes perspectivas y construir significados compartidos a partir de la información recopilada. Además, durante la fase investigativa del ABP, el profesor o tutor puede desempeñar un papel importante en la construcción conjunta de significados al guiar las discusiones y proporcionar retroalimentación sobre las interpretaciones y conclusiones de los estudiantes.

ZDP y fase investigativa del ABP. Durante la fase soluciónica, los estudiantes pueden trabajar en colaboración para encontrar soluciones al problema planteado, lo que les permite interactuar socialmente y aprender unos de otros. Además, el profesor o tutor puede desempeñar un papel relevante en la guía y supervisión del proceso, lo que ayuda a los estudiantes a alcanzar su potencial de desarrollo.

Niveles 1 de Van Hiele y la fase soluciónica del ABP. La relación entre la fase Soluciónica del ABP y el Nivel 1 del modelo Van Hiele se encuentra en su enfoque compartido en el aprendizaje activo y constructivo, donde los estudiantes participan de manera activa en la construcción de su conocimiento y desarrollo de habilidades a través de la resolución de problemas y la exploración de conceptos. Ambas teorías promueven un enfoque centrado en el estudiante, fomentando su participación activa y su capacidad de relacionar el contenido con su contexto y experiencia

Construcción conjunta de significados y la fase productiva del ABP. En la fase productiva del ABP, los estudiantes trabajan juntos para identificar y definir el problema que van a abordar. Durante este proceso, es importante que los estudiantes colaboren y construyan conjuntamente significados para asegurarse de que todos tengan una comprensión común del problema y de lo que se espera de ellos. Además, a medida que avanzan en la fase productiva,

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

los estudiantes también deben trabajar juntos para identificar las metas de aprendizaje específicas que quieren lograr a través del proyecto. De nuevo, esto implica una construcción conjunta de significados para asegurarse de que todos estén trabajando hacia los mismos objetivos.

Niveles 1 de Van Hiele y la fase productiva del ABP. En general, el modelo de Van Hiele describe los niveles de pensamiento geométrico que los estudiantes pueden alcanzar a medida que avanzan en su aprendizaje. El nivel 1 se enfoca en la visualización y reconocimiento de formas y patrones básicos, mientras que el nivel 2 se enfoca en la identificación y análisis de propiedades geométricas más complejas. Dado que el ABP se basa en gran medida en el trabajo colaborativo y en la construcción conjunta de significados, es posible que esta metodología pueda ayudar a los estudiantes a avanzar del nivel 1 al nivel 2 de Van Hiele. Durante la fase productiva del ABP, los estudiantes trabajan juntos para identificar y definir un problema geométrico complejo, lo que puede requerir un análisis más profundo de las propiedades geométricas involucradas. Sin embargo, es importante tener en cuenta que esto dependerá en gran medida del diseño pedagógico específico utilizado para implementar el ABP y cómo se integra con otros elementos del plan de estudios. En resumen, aunque no hay una relación directa establecida entre la fase productiva del ABP y el paso del nivel 1 al 2 de Van Hiele mencionada explícitamente en las páginas proporcionadas, es posible que esta metodología pueda ayudar a los estudiantes a avanzar hacia niveles más altos de pensamiento geométrico.

3.5 Diseño y Creación del MOOC

Al contrastar información recolectada en el estado del arte, se toma la decisión de utilizar la plataforma *Thinkific.com*, para alojar el curso MOOC por su flexibilidad y personalización, porque permite la creación de cursos en línea altamente personalizados y adaptados a sus necesidades específicas, además, se tiene el control total sobre el contenido del curso, el diseño,

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

la estructura y la forma en que se entregan las lecciones. También tiene las herramientas necesarias para implementar las actividades de la secuencia didáctica. Como segunda opción y en caso de ser necesario se empleará *Wix* como plataforma para alojar el curso porque tienen, al igual que Thinkific, flexibilidad y la posibilidad de personalizar la interface visual y adaptar diferentes herramientas útiles para el desarrollo de la secuencia didáctica y su posterior análisis e interpretación.

El propósito del MOOC es utilizarlo como medio para que los estudiantes adquieran tanto de forma autónoma como de forma colaborativa conocimientos sobre la función seno. En este MOOC se van a desarrollar todas las actividades contempladas en la secuencia didáctica, estructurándolo de la siguiente manera:

En la página principal muestra el contenido del curso MOOC en un infograma elaborado en Canva y en la parte superior derecha se diseñaron cinco pestañas, que dan acceso a todo el material elaborado para la realización de la secuencia didáctica, en las cuales se encuentran: la evaluación inicial, las tres unidades con los temas razón de estudio basados en la secuencialidad sugerida en el libro *Talleres De Matemáticas I* de la UTP (2016) y *Cálculo. Trascendentes Tempranas Stewart* (2017) y por último la evaluación final. (Ver Anexo D)

- *Evaluación inicial.* En esta pestaña del MOOC se realiza una evaluación inicial con una serie de preguntas relacionadas con el objeto matemático con ayuda de Google Form, en el que se comienza por una serie de preguntas sobre razones trigonométrica, siguiendo con preguntas sobre funciones y terminando con preguntas sobre funciones trigonométricas, con el fin de tener información de los saberes previos de los estudiantes y basadas en el libro *Cálculo. Trascendentes Tempranas Stewart* (2017) (Ver Anexos B, C y D)

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

- *Unidad de razones trigonométricas.* En la primera unidad del MOOC, hay un texto introductorio, en el que se habla brevemente sobre la unidad. En la siguiente parte, hay un video explicativo elaborado por el docente mostrando conceptos relacionados con razones trigonométricas y sigue la explicación de la primera actividad, la cual es de tipo grupal, en la cual se definen los roles, la cual consiste en inventar una situación problema relacionado con razones trigonométricas utilizando GeoGebra para su solución y posterior exposición ante el grupo y por último se realiza un videotutorial sobre el manejo de GeoGebra elaborado por el profesor. Terminada la actividad se efectúa una puesta en común con ayuda de Google Meet para afianzar los conocimientos adquiridos. (Ver Anexo D y E)
- *Unidad de funciones.* La segunda unidad del MOOC tiene una estructura similar a la primera: hay un texto introductorio, un video sobre funciones elaborado por el docente, una actividad de tipo individual que consiste en hacer un video sobre un tema relacionado con funciones seleccionado por el docente, un video ejemplo de la actividad elaborado por el docente sobre funciones periódicas y una actividad final que consiste en hacer preguntas y comentarios relacionados con el tema de cada uno de los videos elaborados por los compañeros. (Ver Anexo D y F)
- *Unidad sobre funciones trigonométricas.* Para la última unidad del MOOC el docente elaboró 2 videos, el primero sobre el círculo trigonométrico y el segundo sobre la función seno y se planteó una actividad de tipo grupal con los mismos roles de la primera actividad que consiste en realizar un texto explicativo de como se construye la función seno en el plano cartesiano a partir del círculo trigonométrico con ayuda de GeoGebra. (Ver Anexo D y G)

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

- *Evaluación final.* En la última pestaña del MOOC el docente elaboró una evaluación similar a la inicial con el fin de tener información sobre los conocimientos adquiridos a lo largo de la aplicación de la secuencia didáctica. (Ver Anexo D, G y H)

3.6 Secuencia didáctica

Con ayuda del diseño pedagógico se estructura una secuencia didáctica, la cual es una secuencia de actividades ordenadas que deben estar justificadas por el marco teórico. La secuencia didáctica diseñada se divide en tres grandes momentos (Ver Anexo A):

- Actividades iniciales, que cuenta con la presentación del curso, la evaluación inicial y datos interesantes referentes al curso MOOC.
- Desarrollo, en el cual, el tema explicando el paso a paso de cada uno de los niveles, es de aclarar que, a nivel estructural, el MOOC se dividió en 4 niveles, y que cada nivel se construyó con la misma estructura metodológica, por lo cual la secuencia se organizó de forma que se pudiera aplicar a cualquiera de los niveles.
- El tercer momento fue las actividades de cierre, en donde se halla la evaluación final.

4 Análisis e Interpretación.

Tabla 2

Análisis e interpretación de cada una de las actividades de esta investigación en la fase inicial

<i>No</i>	<i>Análisis</i>	<i>Interpretación</i>
II	<p>Teniendo en cuenta, las líneas de investigación que ofrece el grupo de investigación GIPEMAC, entre las que se encuentra «Didáctica de las Matemáticas Mediada por TIC»; el contexto del estudiante, la facilidad de acceso y las diferentes tecnologías de la información y comunicación que se puedan integrar en una misma herramienta; se escoge el MOOC como estrategia didáctica para la enseñanza de la función seno.</p>	<p>Lo que significa que el docente comprende que es necesario enriquecer la propuesta pedagógica con ayuda de las TIC y como estas afecta el proceso de enseñanza y aprendizaje como lo afirma (Mishra Y Koehler, 2015)</p>
	<p>Se realiza un curso MOOC gratuito en Thinkific sobre el manejo de GeoGebra en el aula, con dos objetivos; conocer el programa, el cual es una de las herramientas digitales de fácil acceso más usadas para la enseñanza de la geometría plana y conocer el proceso de un curso MOOC en todas sus etapas en una página muy usada para alojar esta clase de cursos.</p> <p>Se realiza un curso MOOC de libre acceso, en Wix titulado «MOOC</p>	<p>Lo que significa que el docente realiza actividades que consisten en la adquisición de conocimientos pedagógicos tecnológicos, para mejorar su rol en aula de clases, según lo afirmado por (Mishra Y Koehler, 2015)</p>

Para la Enseñanza de las Inecuaciones y Desigualdades» elaborado como parte del proyecto de investigación del profesor Jeison Bukurú, quien hace parte del grupo de investigación GIPEMAC. Este curso muestra al docente como se estructura una secuencia didáctica con ayuda de un MOOC.

I3 Se hace un análisis del objeto matemático, las estructuras y formas de presentar los contenidos de los cursos que se hicieron y se toma la decisión de utilizar Thinkific como plataforma, por su interfaz intuitiva y la posibilidad de realizar actividades grupales tipo foro de discusión, la posibilidad de personalizar la interfaz y modificar el contenido de plantillas preexistentes, subir archivos y documentos y asignar diferentes tipos de tareas. La estructura del curso MOOC se basa tanto en textos de cálculo como «Trascendentes Tempranas» de Stewart (2017) y el libro «Talleres de Matemáticas» de la Universidad Tecnológica de Pereira, la estructura es la siguiente:

- *Evaluación Inicial.*
- *Unidad 1: Razones Trigonométricas.*
- *Unidad 2: Funciones.*

Lo que significa que el docente comprende la necesidad de ordenar los conocimientos con base a análisis objetivos del contenido durante la fase de Fundamentación descrita en la teoría del KQ de Rowland (2013). Lo que en conjunto con el conocimiento tecnológico del contenido para la enseñanza permita que se emplee la herramienta tecnológica, en este caso el MOOC con mayor eficiencia, según lo dicho Mishra Y Koehler (2015)

Lo que significa que el docente utiliza el conocimiento especializado del contenido para la elaboración de una estructura para la enseñanza de la función seno en un determinado contexto, como lo menciona Godino (2014)

- *Unidad 3: Funciones*

Trigonométricas.

- *Evaluación Final.*

I4

Con ayuda de un diseño pedagógico basado en algunas teorías de la enseñanza y aprendizaje presentes en el marco teórico de esta investigación y los textos «Trascendentes Tempranas» de Stewart (2017) y «Talleres de Matemáticas» de la Universidad Tecnológica de Pereira, se realiza una secuencia didáctica

Lo que significa que el docente investigó las bases teóricas necesarias para la comprensión de la función seno de x , lo cual está sustentado en la primera dimensión, conocida como fundamentación, definida por Rowland (2013) en el modelo pedagógico conocido como KQ

Lo que significa que el docente reconoce la importancia del hacer, en el proceso de enseñanza y aprendizaje elabora acciones para dominar el conocimiento pedagógico del contenido como lo enseña Godino (2014) parafraseando a Shulman.

Tabla 3

Análisis e interpretación de cada una de las actividades de esta investigación en la fase de aplicación de la secuencia didáctica

<i>No</i>	<i>Análisis</i>	<i>Interpretación</i>
	<p>Para comenzar con la secuencia didáctica se cita a los estudiantes por medio del correo institucional.</p>	
	<p>Las sesiones se hacen por medio de Google Meet, con el fin de tener registro en video de cada una de ellas para su posterior análisis.</p>	<p>1. Lo que significa que el docente a la hora de iniciar la secuencia didáctica, tiene presente “el saber cómo” en el proceso de enseñanza, por esto emplea diferentes herramientas tecnológicas, mientras que muestra la importancia del vínculo que existe entre la pedagogía y la tecnología con el fin de incentivar a los estudiantes antes de realizar el curso MOOC, como lo mencionan Mishra y Koehler (2015).</p>
1	<p>Durante los primeros 20 minutos el docente da una charla introductoria, en la cual habla de temas referentes a los MOOC: como la tecnología ha afectado la educación en diferentes aspectos y por qué el E-Learning y los MOOC se han convertido en una de las tendencias actuales en la educación a distintos niveles y con distintos propósitos. Esta charla se hace con el fin de motivar la participación de los estudiantes durante la realización de las actividades programadas en el MOOC</p>	

y también de compartir información básica que deben tener en cuenta para la realización de este tipo cursos.

El profesor inicia a grabar la sesión 20 minutos después de haber comenzado la charla, por lo cual no queda registro de esto.

Después de la charla inicial se les pide a los estudiantes realizar una evaluación inicial en el cual se encuentran una serie de preguntas relacionadas con el objeto matemático (función, seno de x), esto con el fin de tener un registro de los saberes previos de los estudiantes y tomar acciones como por ejemplo ubicarlos en la unidad 1, 2 o 3 del curso.

2

Los estudiantes hicieron el test en un tiempo de entre 40 y 50 minutos al cabo de los cuales manifestaron preocupación por el contenido de este, ya que muchos de los conceptos allí presentes son nuevos para ellos.

Por lo anterior, el docente toma la decisión de explicar que el test se hizo con el fin de llevar un control de los saberes de los estudiantes y que la

2. Lo que significa que el docente comienza el proceso de enseñanza adquiriendo la información necesaria de los conocimientos que poseen los alumnos sobre el objeto matemático, indagando sobre los saberes previos que tienen de la función seno de x con ayuda de una evaluación inicial y de ser necesario tener una herramienta para modificar la estrategia didáctica. Tras observar la evaluación inicial, el docente detecta que existen dificultades con respecto a los saberes previos relacionados con la función seno de x , notando errores de varios tipos, entre dichos errores se encuentran:

- La comprensión del lenguaje utilizado en lo referentes al objeto matemático (radianes, grados, periodo, frecuencia, amplitud... entre otros).
-

finalidad del curso MOOC es utilizarlo como estrategia didáctica para que ellos adquieran estos conocimientos y poder tomar acciones que permitan orientar de manera más efectiva este curso. El docente identifica en las intervenciones de los estudiantes que hay unos conocimientos previos desde los cuales pueden comenzar las actividades de aprendizaje.

Después de hacer un pequeño análisis de la evaluación inicial, se evidencia que todos los estudiantes tienen dificultades con los saberes relacionados con la función seno, tanto en la parte de razones trigonométricas, como en la parte de función, por lo cual, se opta porque todos los estudiantes realicen el curso MOOC desde el primer módulo.

- La comprensión de los gráficos, tanto en la parte de los triángulos rectángulos como en la parte de funciones.
- Problemas con el razonamiento para abordar los problemas que se plantean en la evaluación inicial.

3. Esta información le da herramientas al docente, para comenzar el curso y ajustar las actividades descritas en la secuencia didáctica, lo cual pertenece a la fase informativa como lo plantea el matrimonio Van Hiele según Vargas (2013).

4. Lo que significa que el docente identifica las necesidades de enseñanza correspondientes al contenido sobre función seno y por esto, crea conexiones entre las formas en que se puede representar dicho contenido y así estructura el curso, relacionando estos contenidos jerárquicamente en 3 unidades diferentes: la primera unidad sobre razones trigonométricas, la segunda sobre funciones y la última sobre funciones trigonométricas, evidenciando un conocimiento del

	<p>contenido matemático para la enseñanza como lo asegura Godino (2014)</p>
<p>Debido a inconvenientes con las suscripciones en la página elprofelopez.milaulas.com (web donde se alojó el curso en primera estancia), el docente decide utilizar otras herramientas y por medio de enlaces hizo llegar el contenido de la primera unidad del curso.</p>	<p>5. Lo que significa que el docente tomó acciones ante la contingencia que se presentó con respecto a el acceso al MOOC, con el fin de aprovechar la sesión, previendo los posibles inconvenientes, tomo acciones como guardar el material para las actividades del curso en otras plataformas y gracias a esto logró hacer las actividades previstas para la primera sesión, como lo insinúa Rowland (2013) cuando habla de las contingencias respecto a la disponibilidad de recursos.</p>
<p>3 Se realizó una presentación del curso haciendo una descripción de cada una de las unidades, a través de Google Meet con ayuda de un infograma hecho en Canva (como se puede apreciar en el minuto 46 del video de la primera sesión) Video de la primera sesión: https://drive.google.com/drive/folders/1tN33myQFNzCbIzcADgrvbeJj1OGcIJ4l?usp=drive link</p>	<p>6.Lo que significa que el docente sabe cómo se interrelacionan los diferentes conceptos matemáticos referentes a la función seno y como estos se deben presentar. De igual manera sabe cómo seleccionar los ejemplos y actividades para que abarque los conceptos necesarios para la comprensión del objeto matemático y cómo construir la estructura de enseñanza para que este proceso sea lo más productivo posible. A esto se le menciona como conocimiento especializado de</p>

	<p>contenido (SCK) como lo describe Godino (2014)</p> <p>7. Lo que significa que el docente tiene la capacidad de organizar el contenido sobre función seno de x transformado, teniendo en cuenta los alumnos, el contexto y el currículo de modo narrativo, en formas amplias que sean significativas y accesibles para los alumnos como los menciona Godino (2014) parafraseando a Shulman.</p>
<p>4 Después de la presentación del curso se les entrega el enlace de YouTube a un video sobre razones trigonométricas elaborado por el profesor, el cual se hizo con base a contenido actual de divulgación matemática de la plataforma YouTube, con el fin de acercar el contenido a un contexto con el cual los estudiantes se sientan más identificados y facilite su atención.</p> <p>Reprodujeron el video individualmente entre 8 y 10 minutos, al cabo de los cuales se les preguntó por el contenido del mismo manifestándose positivamente: algunos estudiantes, señalaron aspectos generales, minuto 67 del</p>	<p>8. Lo que significa que el docente apoyándose en diferentes herramientas tecnológicas elabora videos y actividades con el fin de transformar el conocimiento que tiene sobre las razones trigonométricas en una forma más accesible para los estudiantes como lo asegura Rowland (2013)</p> <p>9. Lo que significa que el docente posee conocimiento del contenido y de los estudiantes por esto aborda los diferentes aspectos del marco teórico de manera que pueda despertar el interés y motivación de los estudiantes, esto se consigue aprendiendo sobre las concepciones y preconcepciones que el estudiante tiene sobre el aprendizaje de este</p>

video de la primera sesión, un estudiante comenta “me pareció muy buen video, muy entendible” y aspectos más específicos en el minuto 68, un estudiante manifiesta que le pareció muy interesante como se presentó la clasificación de los triángulos y que no conocía estos conceptos y él otros estudiantes optaron por dar su opinión a través del chat de Google Meet.

Transcripción del Chat de Google Meet:

https://drive.google.com/drive/folders/1gvShtKTNBVhQQ851oJRIkOHa_xp_qZJje?usp=drive_link

objeto matemático e indagando sobre cómo estructurar y presentar el contenido teniendo en cuenta elementos del contexto de los estudiantes como lo aseguran Godino (2014)

10. Lo que significa que el docente hace un esfuerzo por encontrar un estrategia didáctica para presentar el contenido sobre razones trigonométricas de tal manera que despierte el interés de los estudiantes, realizando videos sobre el objeto matemático, en los cuales el docente, para su elaboración tuvo en cuenta las diferentes herramientas tecnológicas que a su consideración, son las más adecuadas para transmitir el contenido sobre el objeto matemático dado el contexto y a su vez enriquecer la propuesta pedagógica con ayuda de las TIC como lo mencionan Mishra y Koehler (2015).

11. Lo que significa que el docente permite que los estudiantes exploren a través herramientas tecnológicas como videos y material elaborado en GeoGebra sobre razones trigonométricas en las que pueden observar conceptos y propiedades de

los triángulos rectángulos como lo menciona el matrimonio Van Hiele según Vargas (2013)

<p>Después del primer video, se da inicio a la primera actividad. El docente después de subir el curso a milaulas anticipó posibles inconvenientes con la página que alojaba el curso, por lo cual decidió realizar la misma actividad con ayuda de GeoGebra, debido a esto envía un link por medio de Google Meet.</p> <p>5</p>	<p>12. Lo que significa que el docente determina acciones mediante parámetros de entrega de una situación problema y así permite a los estudiantes juzgar los resultados de sus acciones, obligándolos a mejorar y adaptar sus planteamientos de solución conforme a la retroalimentación, lo que se conoce como conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) descrita por Godino (2014).</p>
<p>En un principio se citó a 15 estudiantes de los cuales asistieron 12, el resto debido a dificultades con el acceso a internet no pudo asistir, por lo cual el docente decidió enviar a los tres estudiantes que faltaron, los</p>	<p>13. Lo que significa que el docente reconoce que mediadores como GeoGebra son especialmente útiles a la hora de abordar temas</p>

enlaces del video de Google Meet, el enlace la evaluación inicial y el enlace del curso, para que hiciesen todo de forma asincrónica a lo cual los estudiantes respondieron positivamente realizando la actividad observando los videos y realizando la evaluación inicial

<https://danalblopez.wixsite.com/mooc-funcion-seno/pretest>

Actividad en GeoGebra:

<https://danalblopez.wixsite.com/mooc-funcion-seno/razones-trigonometria>

Durante la sesión el docente lee detenidamente la actividad, explicando cada uno de sus puntos y ya que es una actividad de tipo grupal se explicó cada uno de los roles según la teoría del aprendizaje colaborativo. Con el fin de incentivar la participación el profesor va a hacer parte de cada uno de los grupos propuestos y se les menciona a los alumnos, la posibilidad de realizar preguntas al profesor.

Después de describir la actividad y debido a problemas con la planificación de la sesión el profesor

relacionados con trigonometría ya que permiten que el estudiante explore las diferentes propiedades de los triángulos, de manera dinámica e interactiva, lo que permite la observación de los efectos sobre la variación de las magnitudes de los segmentos o ángulos y cómo esta herramienta podría ser útil para la representación de situaciones problema, lo que se describe como conocimiento pedagógico y tecnológico mencionado por Mishra y Koehler (2015).

14. Lo que significa que el docente tiene presente cómo el concepto de variación de magnitudes y segmentos en los triángulos rectángulos puede servir para conectar los objetos matemáticos de razones trigonométricas y funciones lo que se conoce como conexión descrito por Rowland (2013)

decidió posponer la elaboración de esta para próxima sesión
Después de terminada la explicación de la actividad se da por terminada la primera sesión.

Durante la segunda sesión el profesor atendiendo la petición de algunos estudiantes decide volver a explicar la actividad.

6 Con el fin de que los estudiantes tuviesen una guía y adquirieran nociones básicas sobre el manejo de GeoGebra, se les proporcionó un tutorial en el cual el profesor elaboró una situación problema explicando cada una de las funciones básicas de GeoGebra y profundizando en los conceptos que se describieron en el primer video de esta unidad.

Después de esto el profesor elabora los grupos de trabajo en WhatsApp para tener registro sobre las interacciones entre los alumnos a lo largo del desarrollo de la actividad, cumpliendo sus respectivos roles y para hacer recomendaciones y servir

15. Lo que significa que el docente dados los eventos mencionados durante la sesión tuvo la capacidad de tomar acciones «sobre la marcha» modificando la secuencia didáctica en pro de conseguir los objetivos planteados, asignando tareas a los estudiantes para realizar la actividad de la mejor manera posible, lo que se le conoce como fase de contingencia descrita por Rowland (2013)

16. Lo que significa que el docente guía a los estudiantes mediante el tutorial elaborado en video con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones y componentes básicos de la red de conocimientos que deben formar para la comprensión del concepto de función seno de x . La situación problema que el docente planteó tiene que ver directamente con las propiedades y características que los estudiantes deben adquirir para darle

de apoyo durante posibles situaciones de contingencia realizando una ayuda ajustada que permita seguir la secuencia didáctica lo mejor posible.

Se crearon 3 grupos de 4 personas, ya que de los 15 estudiantes que presentaron el pretest, solo 12 asistieron a la segunda sesión.

Los grupos quedaron como: Grupo 1 módulo 1, Grupo 2 módulo 1 y Grupo 3 módulo 1.

A lo largo de toda la actividad se presentaron algunas situaciones que a consideración del docente es pertinente analizar:

El grupo 1 presentó un percance debido a que la alumna que cumplía el rol de expositora no se comunicó con sus compañeros de grupo por ninguno de los medios disponibles (correo o celular). Debido a esto el docente decidió tratar de comunicarse con ella y al no obtener respuesta, el docente procede a distribuir las labores del expositor entre los integrantes del grupo, realizando así, una ayuda ajustada,

forma al objeto matemático, incluyendo sus aplicaciones en una situación específica, desarrollando así la fase de orientación dirigida propuesta por el matrimonio Van Hiele y descrita por Vargas (2013). 17. Lo que significa que el docente tiene presente el contexto de los estudiantes para aplicar las TIC en el aula, desarrollando videos, que aparte de servir de orientación para los estudiantes en la actividad propuesta, enriquece la propuesta didáctica del docente ya que favorece la difusión de los contenidos de manera asíncrona y aprovecha esta herramienta tecnológica para afianzar el contenido curricular, demostrando el conocimiento tecnológico, pedagógico y del contenido descritos por Mishra y Koehler (2015).

durante el acompañamiento en la ZDP.

El grupo 2 decidió crear un grupo aparte y enviar el link en el grupo, a lo que el docente accede e incentiva dicha propuesta, ya que ve una oportunidad para que los integrantes de este grupo practiquen la autorregulación.

Durante la actividad el grupo 3 no realizó ninguna pregunta, realizando la actividad comunicándose por otros medios diferentes al grupo de trabajo. El profesor decidió preguntar por medio de WhatsApp a lo que los alumnos respondieron que no tenían ningún inconveniente hasta el momento.

7	<p>Después de terminado el tiempo para realizar la actividad (40 minutos), se les pide entrar a Google Meet para hacer una puesta en común de las tres situaciones problema, la intención del docente es incentivar la parte de sentidos y significados compartidos durante la fase de producción del aprendizaje basado en problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Grupo 1 (comienza en el minuto 41 del video de la sesión 2): 	<p>18. Lo que significa que el docente permite que los estudiantes bajo su supervisión compartan entre ellos, utilizando lenguaje propio del nivel correspondiente y apoyándose en mediadores como GeoGebra, para la explicación de la actividad propuesta, propiciando el intercambio de experiencias e interviniendo cada vez que lo consideró necesario, por ejemplo aclarando los enunciados y</p>
---	---	--

«Un francotirador está ubicado en un edificio el cual mide 40 m con un ángulo de visión hacia el frente de 65.06° y su objetivo está a 50 m al frente, suponiendo que la bala no tiene caída, calcular:

-Cuando el objetivo está a 50 m cuál es el ángulo que necesitaría el francotirador para acertar.

-Dado que el máximo del ángulo de visión es 65.06° , a los cuantos metros el objetivo desaparecerá del campo de visión.»

El docente notó que el enunciado tiene algunos aspectos que pudieron llegar a ser confusos para los estudiantes, por lo cual decidió aclarar los aspectos que considerar más confusos.

Después de la aclaración del profesor, los alumnos se apoyaron en una gráfica elaborada por ellos mismo con ayuda de las herramientas de Word, se puede apreciar en el minuto 43 del video (nivel 0 de Van Hiele).

En el cual se aclaran algunos puntos confusos de la situación problema, por ejemplo:

El francotirador se encuentra en la cima del edificio.

Cuando ellos se referían a

señalando características y propiedades de las razones trigonométricas, intentando así afianzar el contenido y el lenguaje técnico relacionado con la función seno de x para que los estudiantes estructuren mejor los contenidos relacionados con el objeto matemático, como se menciona en la Fase de explicitación descrita por el matrimonio Van Hiele y descrita por Vargas (2013)

19. Lo que significa que el docente tiene conocimiento sobre estrategias efectivas para la enseñanza de la función seno de x , Incentivando la interacción profesor estudiante y la interacción entre los propios estudiantes con ayuda de preguntas que tienen la intención de que puedan manejar conceptos que se han tratado a lo largo de la unidad. Y también incentivando las preguntas hechas por los mismos estudiantes con el fin enriquecer el conocimiento del contenido sobre la función seno de x como se describe en el conocimiento del contenido y la enseñanza que menciona Godino (2014)

«visión hacia el frente» probablemente querían decir ángulo de depresión.

Cuando mencionan que «la bala no tiene caída» probablemente se referían a que la trayectoria de la bala es “lineal”.

(La distancia a la que hacen mención en la segunda pregunta)

Después el estudiante procede a exponer la solución de la situación problema con ayuda de GeoGebra.

Para la solución ellos utilizan el concepto de seno como razón trigonométrica, para hallar el ángulo de elevación y adicionalmente también utilizaron el concepto de arcoseno para comprobar el resultado con la calculadora. Adicionalmente, anotaron las ecuaciones para coseno y tangente (al igual que en el videotutorial del profesor)

Para la exposición de la segunda parte del problema, el estudiante muestra la solución con ayuda del tanteo, ajustando la gráfica hasta obtener el resultado, sin emplear las razones trigonométricas. Y así termina la explicación de la solución de la situación problema.

Con el fin de dar claridad y fortalecer algunos conceptos que se

20. Lo que significa que el docente eligió hacer actividades y realizar preguntas que guardan coherencia con la planificación del contenido propuesto en el marco teórico, teniendo presente cómo la variación de magnitudes y segmentos en los triángulos rectángulos puede servir para conectar los objetos matemáticos de razones trigonométricas y funciones lo que se conoce como conexión descrito por Rowland (2013)

21. Lo que significa que el docente planteó problemas en los cuales los estudiantes combinaron sus conocimientos y los aplicaron a diversas situaciones. Los grupos trabajaron de manera autónoma en la realización de las actividades y la participación del docente se limitó a resolución de problemas de tipo técnico y el planteamiento de preguntas complementarias, permitiendo que los estudiantes utilicen los conocimientos adquiridos a lo largo de la unidad para dar solución a la situación problema como se describe en la fase de orientación dirigida mencionada por Vargas (2013)

han mostrado durante la secuencia didáctica, el profesor decide intenta apoyar la explicación de la segunda parte del problema:

Cuando el grupo planteó la pregunta «a los cuantos metros el “objetivo” desaparecerá del campo de visión.» Se refería a la distancia desde el objetivo a la base del edificio donde se encuentra el francotirador. Y adicionalmente el profesor planteó una pregunta al expositor: «¿cómo hallaría la distancia desde C hasta B, o sea, desde el objetivo hasta el francotirador?», con el fin de que los estudiantes relacionen la hipotenusa con las identidades trigonométricas, «aclarando que para la respuesta no debían usar el teorema de Pitágoras». La pregunta la responde un estudiante del grupo 1 de la siguiente manera:

«Se utilizaría la identidad trigonométrica seno o coseno, ya que esas son las que utilizan la hipotenusa» en la respuesta del estudiante se puede ver el paso del nivel 0 de Van Hiele al nivel 1, porque reconocer y analizar las partes y propiedades particulares del triángulo rectángulo (minuto 48).

22. Lo que significa que el docente propuso una actividad que permitió que los alumnos organizaran los conocimientos adquiridos a lo largo de la secuencia didáctica referentes a las razones trigonométricas.

Integrando los saberes previos y los conocimientos adquiridos durante las actividades de la primera Unidad, conocimientos propios del nivel 1 al 2 de Van Hiele. Aplicando algoritmos y modificando las formas de razonar ante las distintas situaciones planteadas a lo largo de esta actividad. Integrando el conocimiento con ayuda de una exposición hecha por y para los alumnos como lo menciona por Vargas (2013).

23. Lo que significa que el docente ante las preguntas de los estudiantes, ve la oportunidad de complementar los temas vistos durante la secuencia didáctica sobre la función seno de x , construyendo nuevas preguntas a partir de las hechas por los estudiantes, enfatizando en las implicaciones que tienen el cambio en las medidas de los ángulos o las medidas de los segmentos en las razones trigonométricas o qué razón

<p>Grupo 2 (comienza en el minuto 62 del video de la sesión 2):</p> <p>«Si un árbol que tiene una altura de 20 m de alto, genera una sombra de 41, en horas de la tarde cuando, el solo genera la sombra desde con un ángulo de 64°, con base en esto hallar los ángulos internos, la hipotenusa y las funciones del triángulo.»</p>	<p>trigonométrica es la más adecuada para hallar determinada medida, siempre mostrando interés en los aportes de los estudiantes e interpretando sus intervenciones de manera que sean lo más productivas posibles lo que se conoce como desviación de la agenda descrito por Rowland (2013)</p>
--	--

Este grupo optó por utilizar la plantilla elaborada por el docente durante el tutorial de GeoGebra adaptando los valores descritos en su situación problema y desarrollar la solución con ayuda de la suma de los ángulos internos del triángulo Pitágoras para hallar la hipotenusa, y por último calculan las razones trigonométricas como se puede ver en la siguiente transcripción: (nivel 1 de Van Hiele):

$$64+90=154$$

$$154-180=26$$

Para hallar la hipotenusa utilizamos Pitágoras que dice lo siguiente:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$h^2 = 20^2 + 41^2$$

$$h^2 = 400 + 1681$$

$$h^2 = 2081$$

$$h = \sqrt{2081}$$

$$h \cong 45.62$$

Ya por último hallamos las funciones utilizando nuevamente Pitágoras

seno= cateto opuesto sobre hipotenusa.

$$\text{seno} = 26/45.62$$

$$\text{seno} = 0.44$$

coseno= cateto adyacente sobre hipotenusa.

$$\text{coseno} = 41/45.62$$

$$\text{seno} = 0.44$$

tangente= cateto opuesto sobre cateto adyacente.

$$\text{tangente} = 26/41$$

$$\text{tangente} = 0.49''$$

Según la exposición del grupo 2 y la solución que dieron a su situación problema, se pueden apreciar

varias características del nivel 1 de Van Hiele, ya que reconocen y analizan algunas propiedades particulares del triángulo rectángulo.

Con el fin de que los alumnos tengan claras las relaciones trigonométricas y reforzar el tema de las razones trigonométricas el profesor pregunta a los estudiantes del grupo 2:

«¿Cómo haría para hallar el valor de la medida de la hipotenusa sin utilizar Pitágoras?», con el fin de que los estudiantes relacionen la hipotenusa con las identidades trigonométricas, La pregunta la responde un estudiante del grupo 2:

El estudiante menciona que con ayuda de la tangente se halla la hipotenusa, a lo que el profesor, notando la confusión del alumno, decide aplicar una ayuda ajustada hablando de la relación de la tangente con los catetos y de la posibilidad usar otras razones trigonométricas para hallar la medida de la hipotenusa (minuto 48).

Con el fin de incentivar la interacción entre los alumnos, el profesor pide a otros alumnos hacer preguntas sobre el ejercicio, por lo cual otro estudiante de otro grupo hace

otra pregunta:

«¿Cómo resolvería el ejercicio si no fuera en las horas de la tarde?»

El profesor ayuda a plantear la pregunta de la siguiente manera con el fin de proporcionar un andamiaje al utilizar una pregunta más

contextualizada: «¿Cómo resolvería el ejercicio si el solo estuviese encima del árbol o sea de B?» La pregunta la responde un estudiante del grupo 2:

«Desaparecería». Lo cual muestra que el alumno, conoce características del triángulo rectángulo, ya que se puede apreciar conocimiento de que la variación de la longitud de los catetos genera cambios de los ángulos que pueden hacer variar mucho las posibilidades del ejercicio. Logró visualizar un caso particular (si un cateto tiene longitud cero) mostrando características propias del nivel 1 de Van Hiele, porque reconocer y analizar las partes y algunas propiedades particulares del triángulo rectángulo de manera visual.

El profesor vio la oportunidad de hacer una pregunta para aclarar conceptos sobre los triángulos en cuanto a sus ángulos y su relación con los catetos, y la pregunta fue: «¿Qué

pasaría con los ángulos si la altura y la sombra fuesen de la misma medida?»

La pregunta la responde el mismo estudiante del grupo 2:

«Los ángulos del triángulo serían de 45° .» Mostrando una vez más dominio sobre la característica principales y propiedades de los triángulos rectángulos.

Grupo 3 (comienza en el minuto 75 del video de la sesión 2):

«Un gato se encuentra atrapado en un árbol de 24 m; los bomberos acuden a su rescate, Jaime uno de los bomberos realiza sus cálculos y se da cuenta de que la distancia entre el árbol y donde él se encuentra es igual a 8 m y el ángulo formado con el gato es igual a 68.2° , con base en esto hallar:

La altura a la que se encuentra el gato.

Los bomberos cuentan con una escalera de 21 m, en base esto hallar que distancia debe tener la base de esta (escalera) con la base del árbol y el ángulo formado»

Al igual que el grupo 1, el 3 elaboró la solución del problema en GeoGebra y adicionalmente, explica la solución con ayuda de Word.

Para el primer punto el grupo utilizó la tangente, explicando que esta relaciona el cateto opuesto y adyacente, lo cual muestra que los estudiantes reconocen las características y propiedades fundamentales de las razones trigonométricas y saben diferenciar entre ellas.

Para el segundo punto ellos emplean el concepto de seno, arcoseno y se apoyan en el teorema de Pitágoras y exponen la solución del problema, demostrando que se apropiaron de los conceptos descritos con ayuda de gráficos y propiedades, mostrando así la transición del nivel cero al nivel 1 de Van Hiele durante la zona de desarrollo próximo.

El profesor decide preguntarles, «si el gato baja a una rama en el árbol que se encuentra 10 m más abajo, ¿cuál sería la distancia entre las bases de la escalera y el árbol?»

Debido a que esta pregunta no fue contestada por el grupo, el profesor decidió orientar la respuesta con ayuda del ejercicio planteado en GeoGebra ajustando los parámetros para que así el grupo observará de

manera sencilla la distancia entre las bases.

Debido a que solo se contaba con una sesión de 2 horas para finalizar la secuencia didáctica y adicionalmente se presentaron algunos inconvenientes como:

Las actividades tomaron mucho más tiempo del planeado.

El grupo con el cual se estaba realizando la secuencia didáctica pertenecía a otro docente y las sesiones se estuvieron realizando durante el horario de clase de matemáticas y debido a esto no fue posible realizar sesiones adicionales.

El docente tomó la decisión de actuar las actividades de la unidad correspondiente a funciones de manera asíncrona, aprovechando la oportunidad que esta clase de cursos ofrecen en este aspecto y con el fin de evaluar aspectos como la autorregulación y el aprendizaje autónomo.

Para cerrar la segunda sesión se hizo lectura de la actividad correspondiente a la unidad dos y se entregó el enlace correspondiente:

<https://danalblopez.wixsite.com/mooc-funcion-seno/funciones>

Enlace al desarrollo de la actividad en GeoGebra del grupo 1:

<https://www.geogebra.org/m/wchft3dk>

Enlace al video de la segunda sesión:

https://drive.google.com/drive/folders/1tN33myQFNzCbIzcADgrvbeJj1OGclJ4l?usp=drive_link

<p>Con el fin de abarcar los temas relevantes sobre función para entrar en la última unidad y dada la extensión del mismo, el profesor decide que la actividad correspondiente a la unidad 2 consista en realizar un video relacionado con el con el contenido sobre funciones, a partir de un tema específico escogido por el profesor por el profesor, entre los cuales estaban:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Aplicaciones de la función - Formas gráficas de funciones - Traslación vertical y horizontal de funciones - Relaciones entre conjuntos 	<p>24. Lo que significa que el docente posee la capacidad de transformar sus conocimientos sobre «funciones» en una forma pedagógica de fácil entendimiento para los alumnos, con ayuda de videos en los cuales el docente utiliza un abanico de herramientas didácticas situadas en el contexto del estudiante como se menciona en la fase de transformación descrita por Rowland (2013).</p> <p>25. Lo que significa que el docente tiene presente como construir y comunicar el contenido de la segunda unidad correspondiente a función. Comprende que, utilizando mediadores tecnológicos como los videos, con un formato contemporáneo, utilizando recursos como diapositivas animadas y</p>
--	--

El profesor decidió escoger estos temas porque cada aportan considerablemente a la comprensión de la función seno.

El profesor a manera de ejemplo realizó un video sobre el tema que considero con mayor relevancia para la comprensión de la función seno de x , “Las Funciones Periódicas”. Al realizar el video, el profesor trata de realizar una ayuda ajustada frente a la contingencia debido al tiempo que se tenía para terminar el curso y además entregar otra herramienta útil a manera de andamiaje a los estudiantes para la resolución de la situación problema.

Después de entregado el video, los estudiantes debían realizar una segunda parte relacionada con la primera actividad, la cual consistía en hacer una pregunta específica sobre los temas tratados en cada uno de los videos elaborados para esta actividad (incluyendo el realizado por el docente) y estos se debían responder de forma clara, utilizando los conceptos aprendidos a lo largo de la segunda unidad. Cabe aclarar que en

explicación frente a cámara con ayuda de herramientas como micrófonos e iluminación, está cubriendo una necesidad pedagógica como lo es la representación de las funciones en forma dinámica y asertiva. como lo mencionan Mishra y Koehler (2015).

26. Lo que significa que el docente sabe diferenciar entre distintas herramientas tecnológicas y cómo las herramientas escogidas tienen ventajas con respecto a otras, ya que en los videos se puede usar muchas herramientas a la vez tanto en pre como en post producción. Todo lo anterior centrado en el contexto del estudiante, lo cual se puede apreciar a la hora de la elaboración del video en cuanto a contenido y forma, enriqueciendo así la propuesta pedagógica tecnológica del docente como lo mencionan Mishra y Koehler (2015).

27. Lo que significa que el docente dada la contingencia con respecto al tiempo toma acciones que consideró oportunas, aprovechando que los videos contenían todos los conceptos relacionados a función necesarios para su comprensión, incluyendo

la sesión 2, había 12 estudiantes, de los cuales solo 4 hicieron la actividad del video y ninguno efectuó la segunda parte de las preguntas, esto debido a que se estaba acercando el fin del semestre y como suele ocurrir había muchos trabajos y parciales que eran prioritarios para los estudiantes por lo cual el profesor decidió hablar con los estudiantes con el fin de que completaran la actividad, pero no fue posible.

El primer estudiante realizó un video sobre formas gráficas de funciones:

https://drive.google.com/file/d/1fMiwrREF6HNkFhRXyHP6dgXskwbtVcXk/view?usp=drive_link

El video muestra que, en la parte de autorregulación, el estudiante no realizó los pensamientos y actuaciones orientados a conseguir el objetivo de la actividad, por lo cual el profesor realizó los siguientes comentarios por medio de YouTube, con el fin de ayudar al estudiante a adquirir los conocimientos necesarios:

Se puede apreciar un

ejemplos con los cuales los alumnos podrían tener información de apoyo para la elaboración de las actividades. Además, el que los estudiantes+ hicieran esta unidad de manera asíncrona generó una oportunidad para que, a pesar de las limitaciones, los la oportunidad practicar la autorregulación. Lo que se conoce como contingencia de tipo «No Disponibilidad de herramientas o recursos» mencionada por Rowland (2013)

28. Lo que significa que el docente emplea el material en video con el fin de guiar a los estudiantes en el proceso de construcción de los elementos básicos de la red de relaciones con respecto a la función seno de x y selecciona una actividad, que ayuda a afianzar el tema y a conectar los conceptos vistos durante la segunda unidad de la secuencia didáctica y a su vez ayudar a avanzar al siguiente nivel de Van Hiele, ampliando los conceptos vistos durante el nivel anterior. Como se explica en la fase de orientación dirigida mencionada por Vargas (2013).

despliegue de edición interesante y mucha creatividad.

El tema lo aborda a partir de funciones trigonométricas, tema que corresponde a la última unidad de este curso.

La explicación se torna un poco confusa debido a la edición en algunas partes del video, por lo cual me gustaría aclarar ciertos conceptos que podrían prestarse para confusiones (se le envía un documento sobre los conceptos)

A pesar de que toca tangencialmente el tema de funciones periódica y lo define de manera no formal. Tiene algunas nociones de lo que es una función periódica. Le recomiendo volver a ver con detenimiento el video ejemplo sobre funciones periódicas elaborado por el docente.

La siguiente estudiante realizó un video sobre relaciones y conjuntos:

https://drive.google.com/file/d/1VXT43214vIf2giglNOMO_HlhcUx-voUu/view?usp=drive_link

29. Lo que significa que el docente reconoce qué conceptos se les dificultan a los estudiantes con respecto al tema de funciones, previniendo dichas dificultades con ayuda del material elaborado por ellos en video y ayudando a los estudiantes a la comprensión de los diferentes conceptos con respecto a la función. Además el docente hace un esfuerzo por reconocer el tipo de temas que le interesa a los estudiantes, como lo es la elaboración de material audio visual (videos de YouTube), con ayuda diferentes herramientas digitales que son propias de su entorno diario, con el fin de generar motivación y lograr que el proceso de enseñanza sea más asertivo. A esto se le suele conocer como conocimiento del contenido y estudiantes (KCS) descrito en la teoría del MKT descrita por Godino (2014).

Se puede apreciar que la estudiante logró el objetivo de manera autónoma, mostrando un proceso de autorregulación en el cual convirtió sus capacidades de investigación y observación en habilidades académicas, como lo asegura Zimmerman (2000) por lo cual el profesor realizó los siguientes comentarios por medio de YouTube:

Define bien el concepto de relación entre dos conjuntos.

Utilizó para su explicación una serie de ejemplos, en los cuales muestra los conceptos sobre relaciones entre conjuntos de manera muy creativa, dinámica y clara.

Empleando de manera correcta los conceptos vistos a lo largo de la unidad sobre funciones.

Identifica claramente cuando una relación es función y cuando no lo es.

Habló brevemente de los conceptos de existencia y unicidad,

tema que no se trató en ninguno de los videos e investigó de manera autónoma, lo que ayuda a complementar lo dicho por el profesor.

El siguiente estudiante realizó un video sobre aplicaciones de la función:

https://drive.google.com/file/d/1s2UJBqkPWS_hqtNkS82dfPJHu1mI5rET/view?usp=drive_link

El estudiante, con ayuda de los saberes previos adquiridos durante la primera unidad, como el manejo de GeoGebra y la explicación basada en una situación problema, realiza la actividad de manera autónoma, mostrando varias características de un buen proceso de autorregulación.

El profesor hace los siguientes comentarios:

Realizó el video apoyándose en GeoGebra, lo que permitió mostrar de forma mucho más clara la explicación

Se basó en una situación problema que inventó para explicar la

función lineal, de manera creativa y utilizando un ejemplo muy práctico.

Usa la definición de función de manera correcta para ayudar en la explicación de la situación problema.

Explica cada una de las características de la forma general de la función lineal, hallando la pendiente “m” y el punto de corte b.

Se apoya en la gráfica para demostrar que la ecuación de la función lineal, representa la situación problema.

Por último, un estudiante realizó un video sobre traslación de funciones:

[https://drive.google.com/file/d/1LLzSsQMD7XKcM58uYORcjOuFlhJ6DPwo/view?usp=drive link](https://drive.google.com/file/d/1LLzSsQMD7XKcM58uYORcjOuFlhJ6DPwo/view?usp=drive_link)

Si bien la explicación puede resultar confusa en un principio se puede apreciar que adquirió conceptos clave sobre la traslación de funciones, mostrando un buen proceso de autorregulación porque identifica de manera clara las propiedades y

características fundamentales de la traslación de funciones tanto en el eje x como en el eje y .

Por lo cual el profesor decide hacer los siguientes comentarios en el video de YouTube:

Realizó el video apoyándose en un tablero y marcador, con buena calidad de imagen y bien iluminado

A pesar de unas pequeñas confusiones con respecto a los conceptos durante el comienzo de la explicación, conserva coherencia entre lo dicho y lo mostrado en el tablero, lo cual es muy valioso para la comprensión del video.

Con ayuda de un ejemplo muy práctico muestra las características más importantes de la traslación de funciones.

9 Al comenzar la última sesión correspondiente a la última unidad sobre funciones trigonométricas, solo asistió un estudiante para informar al profesor que sus compañeros llegarían tarde, debido a que en ese momento se encontraban ocupados estudiando para

30. Lo que significa que el docente enfrenta contingencias que afectaron de muchas formas la secuencia didáctica del profesor, pero con ayuda del material elaborado en video sobre «Círculo Unitario» y

exámenes finales y requerían de ese espacio. El profesor, ante la contingencia pidió el favor al estudiante de preguntar si podrían asistir a la última hora de la sesión a lo cual accedieron 6 estudiantes. Debido a la contingencia el profesor decide no hacer la actividad correspondiente a la unidad, la cual era de tipo grupal con los roles del trabajo colaborativo de la primera unidad y consistía en realizar con ayuda de GeoGebra un gráfico, en el que se muestre cómo a partir del círculo unitario, se puede construir la función $f(x)=\text{sen}(x)$ en el plano real y después responder una serie de preguntas relacionadas y entregar un documento en Word. En cambio, se les pidió solo ver los videos sobre el círculo unitario y la función seno de x y realizar la evaluación final, en los videos hay explicaciones paso a paso con preguntas acerca de la construcción de la función seno de x , por lo cual el docente decide que puede entrar a valorar los aprendizajes de los estudiantes a cerca de los contenidos vistos por este medio.

Los alumnos se conectaron y observaron los últimos 2 videos, para

«Función Seno de x » se pudieron sobrellevar Rowland (2013)

31. Lo que significa que el docente sintetizó las actividades con ayuda de las TIC utilizando videos explicativos sobre el «Círculo Unitario» y la «Función Seno de x » y gracias a esto los estudiantes alcanzaron completar la totalidad del curso MOOC, mostrando en el docente conocimiento tecnológico y pedagógico del contenido como lo mencionan Mishra y Koehler (2015).

32. Lo que significa que el docente mostrando dominio de la didáctica y el contenido curricular, realizó dos videos para la última unidad, los cuales poseen conexiones estructurales dentro de los temas de «Círculo Unitario» y «Función Seno de x » con el fin de facilitar el proceso de enseñanza como lo menciona Rowland (2013) en la fase de conexión del KQ

33. Lo que significa que el docente gracias al conocimiento especializado en matemáticas tiene presente la manera correcta en la cual se puede reemplazar actividades y optimizar el tiempo de ser necesario, como lo menciona Godino (2014) en

lo cual se les dio 20 minutos, después el profesor hizo sus comentarios finales y se les entregó la evaluación final con 19 preguntas, con preguntas similares a las del pretest y se hizo con el fin de conocer los conocimientos adquiridos a lo largo del curso y así se dio por terminada la secuencia didáctica.

Por lo anterior es necesario el análisis del “evaluación final” ya que este nos permite conocer la efectividad de las estrategias didácticas.

Los resultados obtenidos por cada unidad fueron:

Razones trigonométricas:
Hubo poca mejora en cuanto a conocimientos adquiridos, ya que en esta unidad hubo un porcentaje de aciertos del 67% con respecto al pretest que fue del 66%. La estadística de los resultados muestra que se debe modificar el enfoque del diseño pedagógico que se da al primer nivel de Van Hiele y la tutorización, realizando un seguimiento más riguroso de las fases y realizando actividades en las cuales el profesor intervenga de una manera más activa.

Funciones: Se pudo apreciar una mejora con respecto a los

el MKT sobre el conocimiento especializado para la enseñanza SCK.

34. Lo que significa que el docente tiene presente que a la hora de realizar una secuencia didáctica se deben aplicar estrategias efectivas para cada situación y tema que se enseña, estrategias como: La planificación de la enseñanza, la elección de estrategias eficaces, la organización de las aulas, la promoción de la interacción y la comunicación con sus alumnos requieren un conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) como lo menciona Godino (2014).

35. Lo que significa que el docente tiene presente que el contenido de orientación de disciplinar (diseño pedagógico y secuencia didáctica) debe ser reorganizado y transformado, teniendo en cuenta la experiencia en la aplicación de la secuencia didáctica, después de haber observado a los alumnos, el contexto y el currículo se encuentran relaciones y posibilidades nuevas entre el currículo y su representación, fruto del proceso de enseñanza y

conocimientos adquiridos, ya que el aprendizaje como lo menciona porcentaje de aciertos en la evaluación Shullman (1987) final fue del 70% con respecto al pretest que fue del 61%. La estadística nos muestra que hubo problemas con respecto a la transición del nivel 1 al 2 de Van Hiele, ya que a la hora de reconocer por lo cual se debería modificar diseño pedagógico y darle más peso a la parte investigativa/formativa (fases ABP) diseñando actividades que conecten de manera más rigurosa los dos primeros niveles de Van Hiele.

Función seno de x : se puede apreciar que hubo una mejora notable ya que en estas preguntas hubo un porcentaje de aciertos del 67% con respecto al pretest que fue del 42%. La estadística nos muestra al igual que en la unidad anterior que hubo problemas con respecto a la transición del nivel 1 al 2 de Van Hiele,

Por lo cual el profesor nota que se pueden hacer algunos cambios en el diseño pedagógico, el diseño de la secuencia didáctica y su aplicación en el aula con el fin de mejorar los resultados:

Respecto al diseño pedagógico:
Se debe dar más peso a la ayuda

ajustada durante el proceso de autorregulación, ya que en las actividades que hicieron de manera individual se mostraron resultados más pobres. Durante la ZDP debe generar más actividades en las cuales las cuales se muestren más características de la fase productiva del ABP, y que en esta fase se pueden evaluar diferentes aspectos que nos pueden dar una idea sobre el estado actual de conocimiento de los alumnos.

En la secuencia didáctica se debe dar más enfoque en los ejemplos, ya que en estos se encuentran condensados la aplicación de los conceptos que requieren los alumnos para entender el objeto matemático, por ende, los ejemplos deberían abarcar más parte en los videos y despertar más el interés.

Y para la aplicación de la secuencia didáctica se requiere una planeación más estricta del tiempo de ejecución de cada una de las actividades propuestas, ya que la mayor cantidad de contingencias relacionaron a este factor.

Nota. Diseño propio Tabla 3, cada una de las interpretaciones se enumera con el fin de facilitar el

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

proceso de las conclusiones. UTP (2022).

Tabla 4

Tabla en la cual se hace un análisis de las interpretaciones y se relacionan con cada objetivo planteado

OBJ1	OBJ2	OBJ3	OBG
35, 33, 28, 23, 21, 19, 18, 16, 12, 3 y 2	32, 31, 27, 26, 25, 17, 13, 11, 10, 8, 5 y 1	35, 34, 32, 30, 29, 24, 22, 20, 15, 14, 9, 7, 6 y 4	

Nota. Diseño propio Tabla 4, comparación de los objetivos teniendo en cuenta que cada una de las interpretaciones de la tabla 3 se enumera UTP (2022).

5 Conclusiones.

C1. El docente adquirió nuevos conocimientos pedagógicos al obtener la información necesaria sobre los estudiantes, analizando el contexto sociocultural en el que se desenvuelven e indagando a cerca de los saberes que poseen sobre el objeto matemático. Atendiendo estas condiciones iniciales, el docente realizó un diseño pedagógico el cual se enmarcó en varias teorías de aprendizaje y el enfoque pedagógico Socio -Constructivista; adicionalmente, la interacción con los dos primeros niveles de la teoría de Van Hiele dio pertinencia y aportó al conocimiento pedagógico del contenido del docente aprovechando el carácter geométrico del objeto matemático, dando al docente recursos pedagógicos para determinar qué relaciones entre estas teorías resultaban relevantes para atender la situación de aprendizaje de la función seno en el contexto esta investigación. Esta dinámica, entre conocimiento teórico pedagógico y de contenido matemático, incrementó en el docente sus posibilidades pedagógicas para dimensionar diferentes situaciones en el aula de clase, tales como la iteración en la asistencia a clase y las acciones ante esta contingencia. Por último, el docente obtuvo conocimientos didácticos y tecnológicos del contenido en la medida que el diseño pedagógico se debía ajustar a la estructura del MOOC y la secuencia didáctica.

C2. Se pudo evidenciar la creación de material didáctico en diferentes formatos con ayuda de las TIC, para la estructuración y creación de un MOOC para la enseñanza de la función seno, lo que permitió que el docente adquiriera durante el proceso, mayor conocimiento tecnológico y pedagógico del contenido, ya que durante la creación del MOOC se atendió el diseño pedagógico para adecuar cada uno de los recursos y las interacciones posibles para que los estudiantes realizaran las actividades de aprendizaje de la secuencia didáctica, enfrentando durante el proceso diferentes situaciones como la necesidad de abordar parte del contenido de

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

manera asíncrona, modificar el contenido del curso en función del tiempo lo cual muestra en el docente un conocimiento del contenido y la enseñanza que le permite, la selección de estrategias efectivas y la estructuración de los espacios de aprendizaje. A su vez, las actividades del MOOC permitieron al docente orientar a los estudiantes para que pudiesen observar y aprender de manera interactiva conceptos sobre el objeto matemático de la función seno, utilizando mediadores como GeoGebra, lo que indica que la implementación del MOOC para la enseñanza de la función seno, enriqueció el conocimiento didáctico del docente.

C3. El docente con ayuda de su conocimiento didáctico del contenido, teniendo en cuenta: La planificación de la enseñanza, la elección de estrategias eficaces, la organización del aula, la promoción de la interacción y comunicación con los estudiantes y el diseño pedagógico, elaboró una secuencia didáctica para la enseñanza de la función seno, mostrando a su vez un conocimiento matemático especializado para la enseñanza, al desarrollar actividades, escoger ejemplos y asignar tareas que exploran los conceptos sobre la función seno y también encontrando relaciones entre los conceptos que forman el objeto matemático, como se pudo apreciar en el desarrollo de las actividades propuestas durante la aplicación de la secuencia didáctica. Cabe destacar que, durante la aplicación de la secuencia didáctica, el docente enfrentó situaciones de contingencia debido a la agenda y al tiempo con las cuales incrementó su capacidad pedagógica al atenderlas, modificando las actividades proyectadas, brindando ayudas ajustadas durante la el desarrollo de la secuencia didáctica, con el fin de lograr las orientaciones del diseño pedagógico con ayuda de las herramientas tecnológicas que posibilitaron tanto la comunicación, la interacción como la construcción del MOOC.

CG. Después de la aplicación de la secuencia didáctica con ayuda del MOOC para la enseñanza de la función seno, basado en un diseño pedagógico con enfoque Socio-

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

Constructivista, se pudo apreciar que la interacción con el MOOC genera aportes didácticos, ya que el docente con ayuda de recursos tecnológicos, transformó su conocimiento curricular en formas más accesibles para la enseñanza de la función seno, en la medida que dispuso temas, contenidos, conceptos y explicación en formas y órdenes que se ajustaban al aprendizaje de los estudiantes, con ayuda de videos, infogramas, actividades interactivas en GeoGebra, entre otros, con los cuales, además, adquirió mayor conocimiento tecnológico y didáctico del contenido, atendiendo situación en el aula, tales como tipos contingencias, con respecto al tiempo, los recursos y la intermitencia de la asistencia en los estudiantes, aplicando estrategias para cada una de ellas, en las cuales el conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento de horizonte y el conocimiento del currículo y los estudiantes jugaron un papel importante en las formas como se implementaron para evidenciar que el conocimiento didáctico, pedagógico y tecnológico del contenido aportó a la puesta en escena del docente.

6 Referencias

- Amador, J. F., & otros. (2013). *Las ayudas hipermediales dinámicas AHD en los proyectos de aula con TIC, otra forma de enseñar y aprender conjuntamente*. De Estrategias de formación y acceso para la formación pedagógica. Recuperado de: <http://plataforma.utp.edu.co/>
- Amador, J., Rojas García, J. L., & Sánchez Bedoya, H. G. (2015). *Indagación Progresiva (IP) con Ayudas Hipermediales Dinámicas (AHD) en el currículo escolar del Archipiélago de San Andrés, Providencia y Santa Catalina*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira. Recuperado de: <http://plataforma.utp.edu.co/>
- Gutiérrez, M. A. B., & Nava, C. D. (2014). Más allá de OCW: los cursos masivos abiertos en línea (MOOCs). *XI Encuentro de Didáctica de la Historia Económica*. Recuperado de: https://www.aehe.es/wp-content/uploads/2014/06/s4_bringas_dominguez.pdf
- Barajas, A. & Cuevas, S. (2017). *ADAPTACIÓN DEL MODELO TPACK PARA LA FORMACIÓN DEL DOCENTE UNIVERSITARIO*. Ponencia del XIV CONGRESO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA-COMIE. San Juan de Potosí, 2017. TEMÁTICA GENERAL: TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN (TIC) EN EDUCACIÓN. INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SONORA. Recuperado de: <http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v14/doc/2150.pdf>
- Bringas Gutiérrez, M.A., & Domínguez Nava, C. (2014). *Más allá de OCW: los cursos masivos abiertos en línea (MOOC)*. En XI Encuentro de Didáctica de la Historia Económica. Santiago de Compostela, 26 y 27 de junio de 2014. Sesión: Cursos / Aulas virtuales: posibilidades y limitaciones. Colegio de Estudios Latinoamericanos. Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado de: <https://www.aehe.es/wp->

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

content/uploads/2014/06/s4_bringas_dominguez.pdf

Ruiz, E. (2015). *El Aprendizaje Colaborativo En Ambientes Virtuales*. Centro de estudios e investigaciones para el desarrollo docente Recuperado de:

<https://dialnet.unirioja.es/descarga/libro/652184.pdf>.

Chavez ,v. (2014). *Los Entornos Virtuales y el Aprendizaje Colaborativo*. En Revista PGI - Investigación, Ciencia y Tecnología. Postgrado en Informática Universidad Mayor de San Andrés - UMSA La Paz, Bolivia Recuperado de:

http://www.revistasbolivianas.org.bo/pdf/rpgi/n1/n1_a04.pdf

Castellaro, M., & Peralta, N. S. (2020). Pensar el conocimiento escolar desde el socio constructivismo: interacción, construcción y contexto. *Perfiles Educativos*, 42(168), 140-156.

<https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2020.168.59439>

Cloud, T. (2014). Cooperative learning in the classroom. *Journal on Best Teaching Practices*, 1(2), 7-8.

<http://teachingonpurpose.org/wp-content/uploads/2015/03/Cloud-T.-2014.-Cooperative-Learning-in-the-Classroom.pdf>

Crispín, B., Zambrano, C., (2011) *Aprendizaje Autónomo*. Universidad Iberoamericana. Recuperado de:

<https://ibero.mx/web/filesd/publicaciones/aprendizaje-autonomo.pdf>

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2012). Self-Determination Theory. En *SAGE Publications Ltd eBooks* (pp. 416-437). <https://doi.org/10.4135/9781446249215.n21>

Del Rincón Tomás, O. (2018). *Integración del conexionismo y del modelo de docencia de Van Hiele*. Universidad de Valladolid. <http://uvadoc.uva.es/handle/10324/322457>

Díaz de Salas, Y. D., (2020). Mirada Fenomenológica desde las Competencias Investigativas en las Líneas de Investigación de la UNESR. *Revista Científica*, 5(15), 269-287.

<https://doi.org/10.29394/Scientific.issn.2542-2987.2020.5.15.13.269-287>

Estrada, M., Monferrer, D., & Tena, M. Á. M. (2016). El Aprendizaje Cooperativo y las Habilidades

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

Socio-Emocionales: Una Experiencia Docente en la Asignatura Técnicas de Ventas. *Formación universitaria*, 9(6), 43-62. <https://doi.org/10.4067/s0718-50062016000600005>

Fernández Batanero, J.M., & García Lázaro, L. (2012). *Aprendizaje Basado en Problemas (ABP): una experiencia con alumnos de la asignatura de “Educación y Diversidad”*. “Problem-Based Learning (PBL): an experience with students of the subject of “Education and Diversity. PONENCIA Mesa 2: “Metodologías Didácticas Innovadoras”, Moderadora: M^a. Reyes Bueno Moreno. Facultad de Ciencias de la Educación Recuperado de: https://fcce.us.es/sites/default/files/docencia/Mesa2_comunicacion1.pdf

Fernandez, F. H., & Duarte, J. E. (2013). EL APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS ESPECÍFICAS EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA. *Formación universitaria*, 6(5), 29-38. <https://doi.org/10.4067/s0718-50062013000500005>

Guo, P. J., Kim, J., & Rubin, R. (2014, March). How video production affects student engagement: An empirical study of MOOC videos. In *Proceedings of the first ACM conference on Learning@scale conference* (pp. 41-50). <https://dl.acm.org/doi/abs/10.1145/2556325.2566239>

Gamboa, M. (2019). La zona de desarrollo próximo como base de la pedagogía desarrolladora. *Revista Didasc@lia*, 10(4). <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7248596>

García, J. G. J. (2017, 20 enero). *GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas*. <https://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654>

Godino, Juan D.; Pino-Fan, Luis Roberto (2014). *Del conocimiento matemático para la enseñanza al conocimiento didáctico – matemático*. En González, María Teresa; Codes, Myriam; Arnau, David; Ortega, Tomás (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (p. 591). Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

Hattie, J. (2012). *Visible learning for teachers: Maximizing impact on learning*. Routledge.

Herrera, J. (2017, 26 julio). *La investigación cualitativa*.

<http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/handle/123456789/1167>

Herrera Mayorga, J. A. (2019). *Creación de un MOOC, como estrategia didáctica para la enseñanza en las identidades trigonométricas pitagóricas, con estudiantes del grado décimo, en la institución educativa Liceo Quindío de Salento*. <https://hdl.handle.net/11059/10538>

Hmelo-Silver, C. E., & DeSimone, C. (2013). Problem-based learning: An instructional model of collaborative learning. In *The international handbook of collaborative learning* (pp. 370-385). Routledge.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2016). Cooperative learning and teaching citizenship in democracies. *International Journal of Educational Research*, 76, 162-177.

<https://doi.org/10.1016/j.ijer.2015.11.009>

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Smith, K. A. (2014). Cooperative learning: Improving university instruction by basing practice on validated theory. *Journal on Excellence in University Teaching*, 25(4), 1-26.

<https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=7c9bb2ffc69f3b8c3a5968c5eb70fcddaa11eb2f>

Kizilcec, R. F., Piech, C., & Schneider, E. (2013). *Deconstructing disengagement*.

<https://doi.org/10.1145/2460296.2460330>

Koehler, M. J., Mishra, P., & Cain, W. (2015). ¿Qué son los Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK)? *Virtualidad, Educación Y Ciencia*, 6(10), pp. 9–23. Recuperado a partir de <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/vesc/article/view/11552>

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

- Liyanagunawardena, T. R., Adams, A. B., & Williams, S. (2013). MOOCs: A systematic study of the published literature 2008-2012. *The International Review of Research in Open and Distributed Learning*, 14(3), 202. <https://doi.org/10.19173/irrodl.v14i3.1455>
- Luis, M. V. J. (2016, 18 enero). *El Aprendizaje Basado en Problemas en la renovación de la enseñanza universitaria de las artes*. <http://hdl.handle.net/2445/103499>
- Martínez de la Cruz. R. M., Galindo González. L., & Livier González, N. (2013) *ENTORNOS VIRTUALES DE APRENDIZAJE ABIERTOS Y SUS APORTES A LA EDUCACIÓN*.
En Ponencia En El XXI Encuentro Internacional de Educación A Distancia.
(2 A L6 DE diciembre de 2013). Recuperado de:
<http://www.udgvirtual.udg.mx/encuentro/encuentro/anteriores/xxi/ponencias/80-127-1-RV.pdf>
- Martínez de la Cruz, N.L., Ruiz Aguirre, E.I., & Galindo González, R.M. (2012). Aprendizaje colaborativo en ambientes virtuales y sus bases Socio-Constructivistas como vía para el aprendizaje significativo. En revista online Vol. 4, Núm. 2 (2012) Universidad de Guadalajara. Recuperado de: <http://www.udgvirtual.udg.mx/apertura/index.php/apertura/article/view/313/280>
- Mayer, R. E. (2014). Incorporating motivation into multimedia learning. *Learning and Instruction*, 29, 171-173. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.04.003>
- MEN. (2015). *Matriz de Referencia Matemáticas, Grado 9o*. Recuperado de:
http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf
- MEN. (23 de Julio de 2014). *Estándares Básicos de Aprendizaje*. Recuperado de:
http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-85458_archivo_pdf1.pdf
- MEN. (29 de octubre de 2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Recuperado de:
<http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles->

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

[349446_genera_dba.pdf](#)

- Mesa Ciro, M.L. (2013). *LA EVALUACIÓN COMO ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA EL DESARROLLO DE HABILIDADES DEL PENSAMIENTO. ESTUDIO DE CASOS PARA EL TEMA DE SEGUNDA LEY DE NEWTON*. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Maestría En Enseñanza De Las Ciencias Exactas y Naturales. Medellín, Colombia. 2013. Pp 102. Recuperado de: <http://bdigital.unal.edu.co/12639/1/43251166.2014.pdf>
- Moreno, J., Montoya, L. F., & Vargas, L. M. (2015). *Experiencia de un MOOC en matemáticas para estudiantes de último año de educación media*. En Nuevas Ideas en Informática Educativa TISE 201589. Universidad Nacional de Colombia. Pp. 86-96. Recuperado de: <http://www.tise.cl/volumen11/TISE2015/89-96.pdf>
- Penagos, M., Mariño, L. F., & Hernandez, R. M. (2017). Pensamiento matemático elemental y avanzado como actividad humana en permanente evolución. *Perspectiva*. <https://doi.org/10.22463/25909215.1289>
- Schunk, D. (2012). *Learning Theories: An Educational Perspective*. Sexta edición, The University of North Carolina. Recuperado de: <https://scholar.alaqsa.edu.ps/9703/1/Learning%20Theories%20An%20Educational%20Perspective%206th%20Edition%20%28%20PDFDrive%20%29.pdf>
- Stewart, J. (2017). *CÁLCULO. TRASCENDENTES TEMPRANAS*. Cengage Learning Editores. Retrieved from: <https://www.perlego.com/book/2427349/clculo-trascendentes-tempranas-pdf>
- Rimada, A. (2014). *Evaluación piloto de las herramientas de comunicación sincrónicas y asincrónicas utilizadas en los cursos de «Metodología del Trabajo Académico y Proyecto Pedagógico Unadista» en la UNAD-CEAD Pasto, semestre 2012-2013*. 10596/2494. <https://repository.unad.edu.co/handle/10596/2494>

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

- Roa, M. L. R. (2017). Desarrollo de la competencia de aprendizaje autónomo en estudiantes de Pedagogía en un modelo educativo basado en competencias. *Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, 16(32), 67-82. <https://doi.org/10.21703/rexe.20173267824>
- Rojas Hernández, Yoisel Leopoldo, González Méndez, Adrián, Rodríguez-Amaya Fernández, Ida Juana, & Álvarez Yero, Santo. (2021). Learning and the new information and communication technologies. *Educación Médica Superior*, 35(3), e2418. Epub 01 de septiembre de 2021. Recuperado de: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0864-21412021000300016&lng=es&tlng=en.
- Pérez-Aranda, J., Molina-Gómez, J., Domínguez De La Rosa, L., & Rodríguez Martínez, M. (2015). El Aprendizaje Basado en Problemas como herramienta de motivación: reflexiones de su aplicación a estudiantes de GADE. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*, 8(4)
- Poveda-Fernández, W., & Gómez-Arciga, A. (2017). MOOC Resolución de problemas matemáticos y uso de tecnologías digitales: Su diseño e implementación. *Viviente de Educación en Ciencias Ingeniería-Tecnología y Matemáticas*, 85. https://www.researchgate.net/profile/Angelina-Alvarado/publication/325429548_Topicos_Selectos_de_Educacion_en_CITeM/links/5b0db0040f7e9b1ed7011e43/Topicos-Selectos-de-Educacion-en-CITeM.pdf#page=95
- Solar Bezmalinovic, H., & Deulofeu, J. (2014). *TRATAMIENTO DE LA CONTINGENCIA DESDE EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE ARGUMENTACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS*. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27. Capítulo 1. Análisis del discurso matemático escolar. Publicado por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa- Clame. A. C. pp. 317-325 Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/5389/1/SolarTratamientoALME2014.pdf>
- Solarte Pérez, A.D. (2014). Diseño E Implementación de un Curso Virtual de Trigonometría Básica

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

Utilizando Redes Sociales y Otras Herramientas Tic: Estudio de Caso en Grados Undécimos de dos Colegios Oficiales de Puerto Asis. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Sede Manizales, pp.151. Recuperado de:

<http://bdigital.unal.edu.co/46980/1/16860624.2014.pdf>

Stasiejko, H. (2018). *J. Piaget y L. Vygotsky: Análisis de teorías y sus implicancias en el campo pedagógico*. <http://ri.unlu.edu.ar/xmlui/handle/rediunlu/523>

Tarrés, M. L. (2013). *Observar, escuchar y comprender: Sobre la tradición cualitativa en la investigación social* (1st ed.). FLACSO-México. <http://www.jstor.org/stable/j.ctt16f8cd1>

Vaillant Alcalde, D., Rodríguez Zidán, E., & Bernasconi Piñeyría, G. (2017). *Modalidad MOOC para educación media básica: enseñanzas de una experiencia*. En revista Perfiles Educativos | vol.

XXXIX, núm. 156, 2017 | IISUE-UNAM. PP. 103-118. Recuperado de:

<http://www.denisevaillant.com/wp-content/uploads/2018/02/art%C3%ADculo-MOOC-Gaby-y-Eduardo.pdf>

Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la

geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94. <https://www.redalyc.org/pdf/4759/475947762005.pdf>

Zapata-Ros, M. (2013). *MOOCs, una visión crítica y una alternativa complementaria: La*

individualización del aprendizaje y de la ayuda pedagógica. En Campus Virtuales. II. 20-

38. Recuperado de:

https://www.researchgate.net/publication/236619731_MOOCs_una_vision_critica_y_una

[_alternativa_complementaria_La_individualizacion_del_aprendizaje_y_de_la_ayuda_ped](https://www.researchgate.net/publication/236619731_MOOCs_una_vision_critica_y_una)

[_alternativa_complementaria_La_individualizacion_del_aprendizaje_y_de_la_ayuda_ped](https://www.researchgate.net/publication/236619731_MOOCs_una_vision_critica_y_una)
[Agógica](https://www.researchgate.net/publication/236619731_MOOCs_una_vision_critica_y_una)

Anexo A. Secuencia Didáctica.**Tabla A1***Secuencia didáctica*

Docente	Daniel Alberto López Aguirre
Nombre de la secuencia	MOOC sobre la función seno
Tiempo	6 horas
Problema de enseñanza	Función seno
Aforismo	Las matemáticas son la luz que ilumina las ciencias.
Maestría	Enseñanza de las matemáticas
IE	
IES	Universidad Tecnológica de Pereira
Fecha de elaboración	08/11/2021
Teoría didáctica de la enseñanza de la matemática	

VAN HIELE**Inicio**

N o	Tiempo	Actividad de aprendizaje	Recurso
1	10 minutos	<p>Se les hace llegar un enlace de Google Meet a través de su correo electrónico instituciones.</p> <p>La iniciación del curso por Google Meet contiene:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Introducción sobre el curso. - Charla sobre el E-Learning y los MOOC. 	Celular o computador con acceso a internet.
2	40 minutos	Se realiza una Prueba diagnóstica o evaluación inicial, para tener una idea de los saberes previos y ubicar de manera adecuada a los estudiantes en los 3 módulos:(ZDP y colaboración mediante apoyo tecnológico) (Ver Anexo B)	Celular o computador con acceso a internet

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

		<ul style="list-style-type: none"> - Se les entrega el link de la evaluación inicial por medio del chat de Google Meet el cual se realiza en Google Form. - Se les explica qué deben tener en cuenta para realizar la evaluación inicial. <p>Después de terminado la evaluación inicial se les muestra un infograma hecho en Canva con el fin de mostrarles el contenido que va a tener el curso Función Seno.</p> <p>https://danalblopez.wixsite.com/mooc-funcion-seno/pretest</p>	
--	--	---	--

Desarrollo

MÓDULO 1			
No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
3	20 minutos	<p>Se les pide entrar a la página, https://danalblopez.wixsite.com/mooc-funcion-seno en la cual encontrarán el curso dividido en 3 Módulos diferentes, con solo el primero habilitado. Se les explica, la estructura del curso y se comienza con el primer módulo sobre razones trigonométricas.</p> <p>En la página principal del módulo 1 se encuentran con un video sobre el objeto matemático (razones trigonométricas) estructurado teniendo en cuenta la relación entre el andamiaje y la autorregulación del diseño pedagógico y la información necesaria con respecto a los saberes previos del marco teórico sobre la función seno de x.</p>	Celular o computador con acceso a internet

Mientras los alumnos observan los videos, se crean grupos de 4 personas en WhatsApp para realizar la primera actividad del curso (colaboración mediante ayuda tecnológica y ayuda ajustada).

Los roles que cada uno debe cumplir en el grupo se escogen siguiendo los lineamientos de la teoría del aprendizaje colaborativo (interdependencia positiva y Construcción compartida de significados)

- **Coordinador:** Dirige todas las actividades referentes al trabajo, se asegura que todos los miembros del equipo participen y gestiona entre los diferentes miembros. Además, puede ser escogido para contestar la pregunta hecha por los compañeros.
- **Portavoz:** Pregunta al profesor. Las preguntas deberán ser: puntuales, coherentes, bien redactadas y no muy extensas y se deberán replantear según el criterio del profesor, las preguntas se deberán hacer por escrito en el chat de WhatsApp de la actividad.
- **Secretario:** Está al frente del manejo de GeoGebra, anota y recopila toda la información necesaria.
- **Expositor:** Debe exponer la situación, problemas al grupo y como es su solución con ayuda del software GeoGebra.

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

4	10 minutos	Después de haber terminado el video se hace una puesta en común sobre él y sobre los roles del trabajo en grupo. (tutorización y ayuda ajustada)	Celular o computador con acceso a internet
5	10 minutos	<p>Se les pide que se dirijan a la plataforma y comiencen con la actividad 1 del módulo 1. En ella se encuentra una descripción detallada de lo que deben realizar, un videotutorial y una plantilla de guía, todo elaborado con base en el software GeoGebra.</p> <p>Después de leer la actividad, se aclaran dudas sobre el contenido de esta por medio de Google Meet.</p>	Celular o computador con acceso a internet
6	40 minutos	<p>La actividad consiste en inventar una situación problema, basados en el video de razones trigonométricas y el video ejemplo del tutorial. El problema deberá cumplir con los siguientes parámetros: (Fase problémica, ayuda ajustada)</p> <ul style="list-style-type: none"> - En la solución de esta situación problemas deben intervenir los conceptos de seno, coseno y/o tangente de un ángulo. - Basado en el criterio del docente, se crean grupos de 4 personas, por medio de la app WhatsApp para tener registro de las conversaciones entre cada miembro. 	Celular o computador con acceso a internet

		- El planteamiento de la situación problema no debe exceder las 50 palabras.	
7	20 minutos	<p>Se debe exponer la situación problema inventada con ayuda de GeoGebra en un máximo de 10 minutos por medio de Google Meet, el enlace se les entregará por medio de WhatsApp, a cada grupo. (ZDP y Fase soluciónica)</p> <p>Uno de los grupos, escogido previamente por el profesor, deberá realizar una pregunta al grupo expositor, relacionada con el tema (CCS y Fase productiva)</p>	Celular o computador con acceso a internet
MÓDULO 2			
8	10 minutos	<p>El segundo módulo correspondiente al tema de funciones y tiene una estructura muy similar al módulo anterior.</p> <p>Con ayuda de Google Meet, se da una charla inicial con respecto a las actividades que se deberán realizar en este segundo módulo y posteriormente se envía el enlace https://danalblopez.wixsite.com/mooc-funcion-seno/funciones por medio del chat de la aplicación.</p> <p>En la página principal se pide seleccionar el módulo 2 (ya estará habilitado), en él se encuentra con un video sobre funciones y al igual que el anterior se tiene en cuenta la relación entre el andamiaje y la autorregulación del diseño</p>	Celular o computador con acceso a internet

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

		pedagógico y la información necesaria con respecto a los saberes previos del marco teórico sobre la función seno de x .	
9	10 minutos	Después de que se termina el video se realiza una puesta en común sobre el contenido. (tutorización y ayuda ajustada)	Celular o computador con acceso a internet
10	60 minutos	<p>La actividad consiste en elaborar un video con ayuda de las herramientas que consideren (celular con apps de grabación, micrófono, herramientas de edición, herramientas de diseño, entre otras). El video deberá cumplir con los siguientes parámetros: (Fase problémica, ayuda ajustada)</p> <ul style="list-style-type: none"> - De manera individual se debe realizar un video de mínimo 3 minutos y máximo 5, en el cual se debe explicar un tema relacionado con funciones. - Los temas de los que tratarán los videos serán los siguientes: <ul style="list-style-type: none"> • Relaciones. • Plano cartesiano y formas gráficas. • Aplicaciones de funciones. • Traslación, expansión y contracción de funciones. 	Celular o computador con acceso a internet

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

		<ul style="list-style-type: none"> - En el módulo se encuentra un video a manera de ejemplo hecho profesor para la actividad y de gran importancia para el módulo 3 con el tema de “funciones periódicas” en el cual los alumnos se pueden basar para hacer el video de la actividad (ZDP y tutorización). - El video se deberá subir a YouTube y entregar en un enlace al profesor. - Después de enviado los enlaces, el profesor compartirá por medio del tablón del MOOC. 	
11	20 minutos	<p>Después de presentado el video se realizará una actividad referente a los video hechos por los grupos.</p> <p>Se hará una puesta en común con respecto a cada video y una persona deberá hacer un comentario en cada video publicación en el tablón de MOOC o por medio del correo electrónico escogido por el docente (CCS e interdependencia positiva) teniendo en cuenta lo siguiente:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Deberá hacer un comentario en cada uno de los videos con respecto al contenido de este. - El comentario se debe hacer de manera respetuosa. - Tener buena redacción. - Si el comentario es una pregunta, se deberá responder de manera respetuosa. 	Celular o computador con acceso a internet

		MÓDULO 3	
12	20 minutos	<p>Para el módulo final se comienza por la charla inicial respecto a círculo trigonométrico y la función seno de x, con ayuda de Google Meet. Se activa el tercer módulo en la plataforma y posteriormente se envía el enlace https://danalblopez.wixsite.com/mooc-funcion-seno/funciones-trigonometricas del curso por medio del chat de la plataforma.</p> <p>En la página principal del módulo 3 se encontrarán 2 videos, uno sobre el círculo trigonométrico y otro sobre la función seno con los cuales se finaliza el contenido del curso y se da paso a la última actividad.</p> <p>Al igual que los dos módulos pasados, se diseña teniendo en cuenta la relación entre el diseño pedagógico y la información necesaria del marco teórico.</p>	Celular o computador con acceso a internet
13	10	Después de que se termina el video se realiza una puesta en común sobre el contenido de ambos videos. (tutorización y ayuda ajustada)	
14	40	Posteriormente, se les presenta la última actividad que consiste en hacer un trabajo escrito con las siguientes características: con ayuda de alguna herramienta matemática como GeoGebra, se debe elaborar un gráfico, en el que se muestre, cómo a partir del círculo unitario, se puede construir la función $f(x)=\text{sen}(x)$, teniendo en cuenta lo siguiente:	Celular o computador con acceso a internet

- Mostrar los valores máximos, mínimos y puntos de corte con los ejes, tanto en el círculo unitario como en la función seno de x en el plano real.
- Todos los valores de interés deberán ser escritos como múltiplos de π .
- ¿Qué ocurriría con la función seno de x si la desplazo $\pi/2$ hacia la izquierda? Muestre su respuesta con ayuda del gráfico elaborado.
- Si yo quisiera reducir su periodo a la mitad, aumentar su amplitud al doble y trasladarla en el eje « y » dos unidades negativas, ¿Cuál sería la forma de su ecuación? (recordar la forma general de una ecuación trigonométrica $f(x)=A\sin(Bx-C)+D$).
- El trabajo se hará en los mismos grupos de la primera unidad, utilizando sus respectivos roles.
- Se deberá entregar un documento en Word, explicando sus respuestas a las preguntas hechas, con ayuda del gráfico hecho en GeoGebra.
- Tener en cuenta el ejemplo que se comparte en la última sección de esta página.

Final			
No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
15	10	Para la finalización del curso MOOC, se hace una última reunión por Google Meet, en la cual se tiene una charla sobre el contenido del curso y las opiniones que los estudiantes tienen con respecto a este tipo de herramientas pedagógicas.	Celular o computador con acceso a internet
16	30	<p>Por último, se hace una prueba de control o evaluación final , para tener una idea de los saberes adquiridos:(ZDP (zona del desarrollo proximo) y colaboración mediante apoyo tecnológico) (Ver anexo G y H)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Se les entrega el link de la evaluación final por medio del chat de Google Meet el cual se realiza en Google Form. - Se les explica todo lo necesario para realizar evaluación final. - Se les da 40 minutos para enviar la respuesta. - Después de terminado la evaluación final se da por terminada la secuencia didáctica. <p>https://danalblopez.wixsite.com/mooc-funcion-seno/postest</p>	Celular o computador con acceso a internet

Anexo B. Imágenes de la Evaluación Inicial.**Figura B1**

Imágenes de las preguntas 6 y 7

6. ¿Posee computador con acceso a internet? *

Marca solo un óvalo.

Sí

No

Poseo otro dispositivo similar

https://docs.google.com/forms/d/13tuFOviSLzHIW25IVI0snI5Gx0mubaOaLa_9NxlLHKM/edit 1/19

30/5/22, 21:44 Pre-test sobre trigonometría

7. Autoriza el uso de su número celular y correo electrónico en el contexto del curso MOOC. *

Marca solo un óvalo.

Sí

No

Razones trigonométricas.

En esta sección se deberán contestar una serie de preguntas relacionadas con el tema de razones trigonométricas, hay preguntas de opción múltiple con única respuesta.

Figura B2*Imágenes de las preguntas 8 y 9*

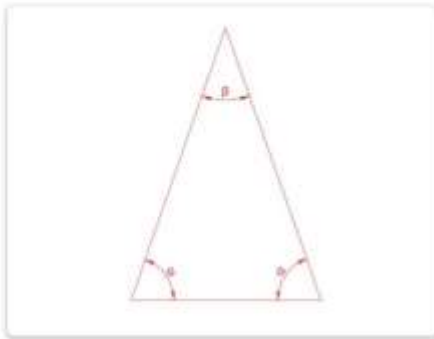
8. ¿Cuál es la definición más acertada trigonometría?

Marca solo un óvalo.

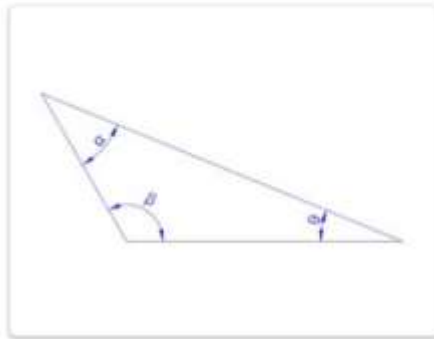
- Es una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o el espacio
- Es una rama de las matemáticas que se ocupa de analizar con detalle los datos de las figuras geométricas mediante técnicas básicas del análisis matemático y del álgebra en un determinado sistema de coordenadas.
- Es una rama de las matemáticas, la cual se encarga de estudiar la relación que existe entre los lados de un triángulo y sus ángulos
- Ninguna de las anteriores.

9. ¿Cuál de los siguientes triángulos es un triángulo rectángulo?

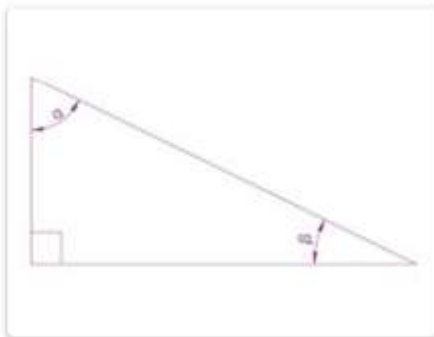
Marca solo un óvalo.



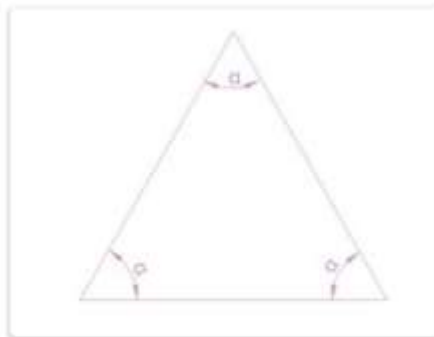
Opción 1



Opción 2



Opción 3



Opción 4

Figura B3

Imágenes de las preguntas 10,11 y 12

10. Nombre de los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo.

Marca solo un óvalo.

- Catetos.
- Catetos e hipotenusa.
- Hipotenusas.
- Vertices.

11. Siendo "a" y "b" las longitudes de los catetos en una triángulo rectángulo y "c" la longitud de la hipotenusa. cual de las siguientes desigualdades es correcta.

Marca solo un óvalo.

- $c < b \wedge c < a$
- $c > b \wedge c > a$
- $a > c \wedge a < b$
- $b > c \wedge b > a$

12. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo?

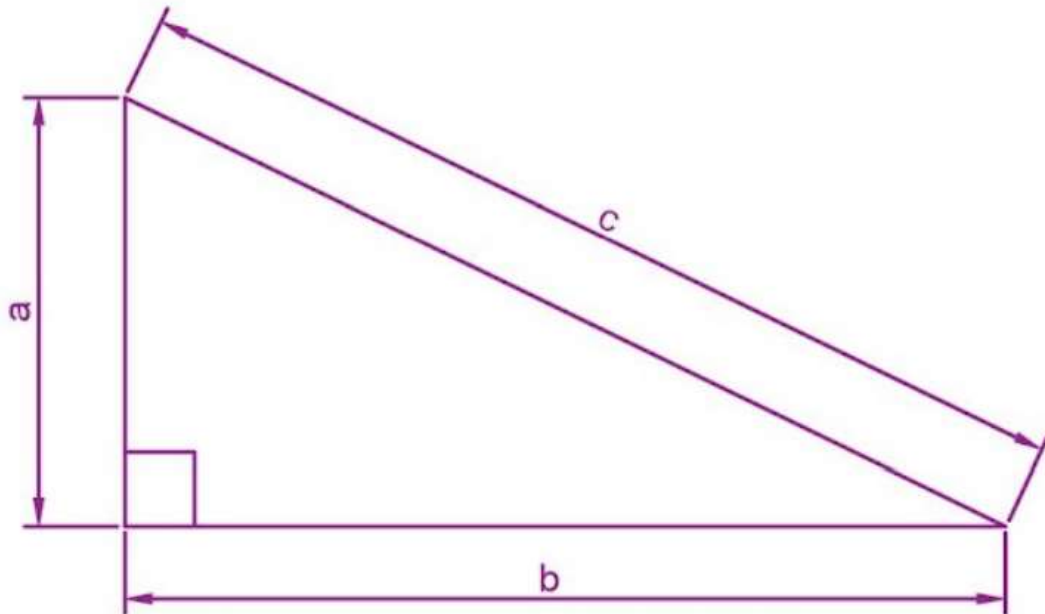
Marca solo un óvalo.

- 180°
- 90°
- 360°
- 45°

Figura B4

Imágenes de la pregunta 13

13. Siendo "a" y "b" las medidas de los catetos y "c" la medida de la hipotenusa, ¿Qué expresión se usa para calcular la longitud del cateto "a"?

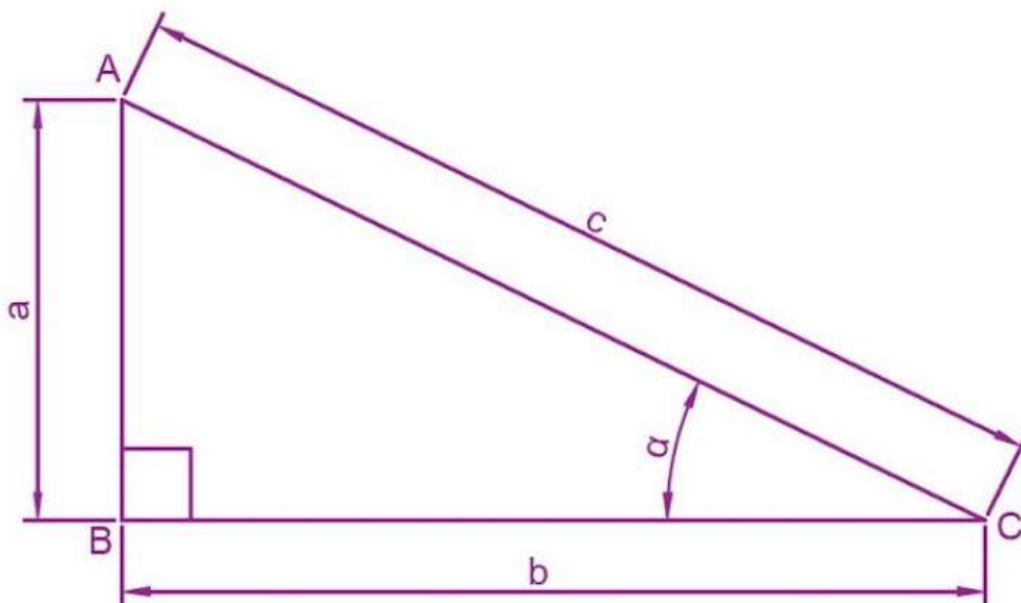


Marca solo un óvalo.

- $a^2 = c^2 + b^2$
- $a^2 = c^2 - b^2$
- $a = c^2 - b^2$
- $a^2 = c + b$

Figura B5*Imágenes de la pregunta 14*

14. En el triángulo ABC que se muestra a continuación, cual de las siguientes expresiones corresponde a la razón trigonométrica seno de α ?

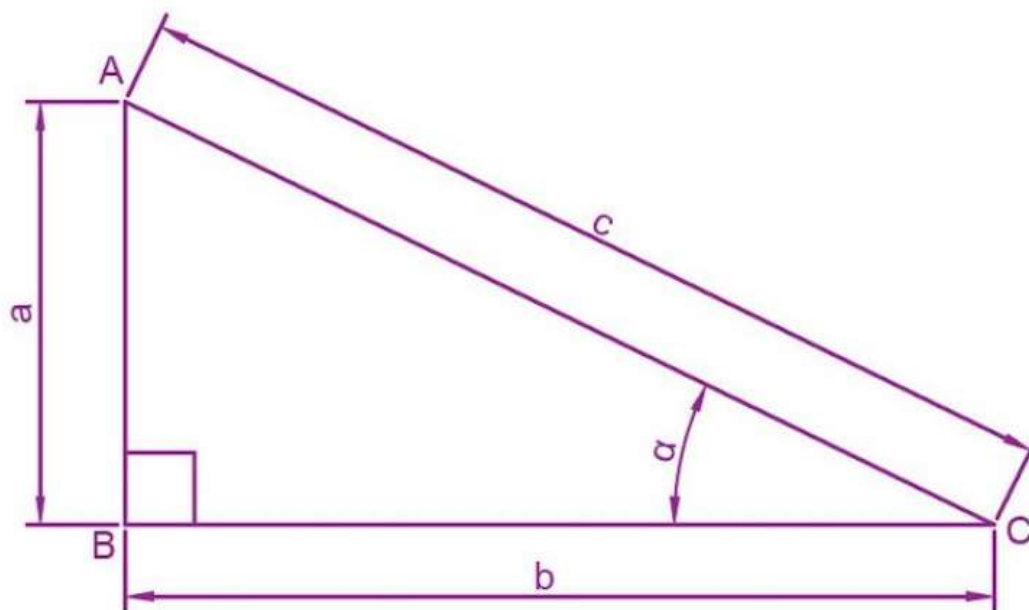


Marca solo un óvalo.

- a/b
- c/a
- a/c
- b/c

Figura B6*Imágenes de la pregunta 15*

15. En el triángulo ABC que se muestra a continuación, ¿a qué sería equivalente la razón trigonométrica coseno de α ?

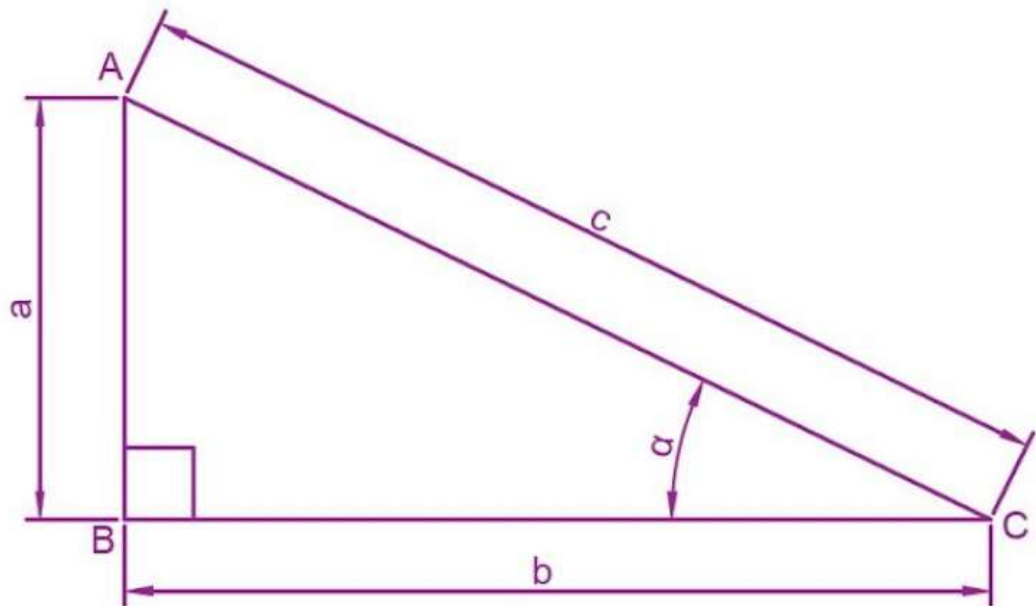


Marca solo un óvalo.

- a/b
- c/a
- a/c
- b/c

Figura B7*Imágenes de la pregunta 16*

16. En el triángulo ABC que se muestra a continuación, ¿a qué sería equivalente la razón trigonométrica tan de α ?



Marca solo un óvalo.

- b/a
- a/b
- b/c
- no tiene tangente.

Figura B8

Imágenes de la pregunta 16

17. ¿Cuál de las siguientes definiciones de función es la más acertada?

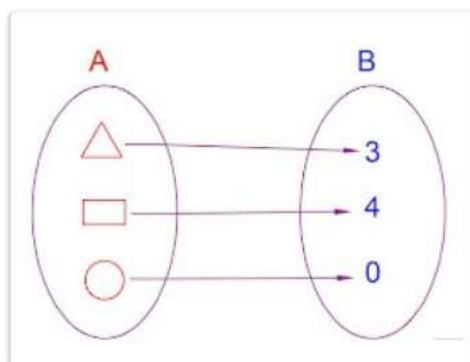
Marca solo un óvalo.

- Una función es una relación entre dos conjuntos de elementos, de tal forma que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un elemento y sólo uno del conjunto final.
- Una función es una correspondencia entre tres conjuntos de elementos, de tal forma que a cada elemento del conjunto inicial le corresponden dos elementos y sólo dos del conjunto final.
- Una relación es una función.
- Una función es una ecuación de cualquier tipo

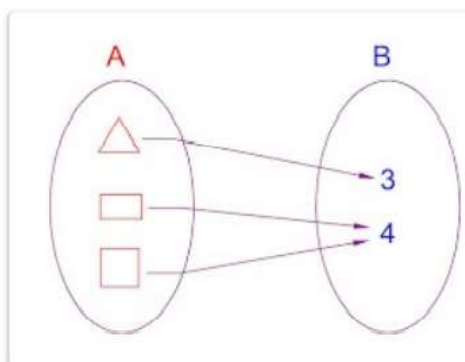
Figura B9*Imágenes de la pregunta 18*

18. ¿Cuál de las siguientes representaciones de relaciones, no es una función?

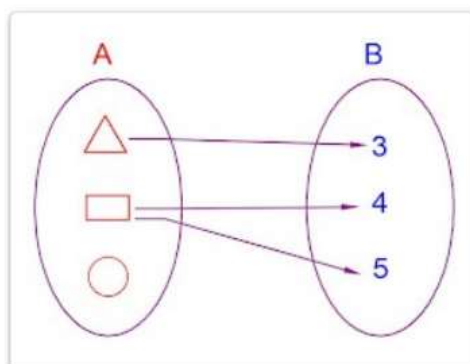
Marca solo un óvalo.



Opción 1



Opción 2



Opción 3

Todas son funciones.

Figura B10

Imágenes de las preguntas 19, 20 y 21

19. ¿Es una función el conjunto compuesto por las parejas ordenadas: $\{(1,5), (1,7), (3,9), (4,11)\}$?

Marca solo un óvalo.

Sí

No

20. ¿Qué conjunto de valores es una función?

Marca solo un óvalo.

$(9,5), (10,5), (9,-5), (10,-5)$

$(3,4), (4,-3), (7,4), (3, 8)$

$(6,-5), (7, -3), (8, -1), (9, 1)$

$(2, -2), (5, 9), (5, -7), (1, 4)$

21. ¿Cómo se le conoce a la prueba gráfica, que me indica si una relación es función o no?

Marca solo un óvalo.

La prueba de la recta diagonal

La prueba de la recta horizontal

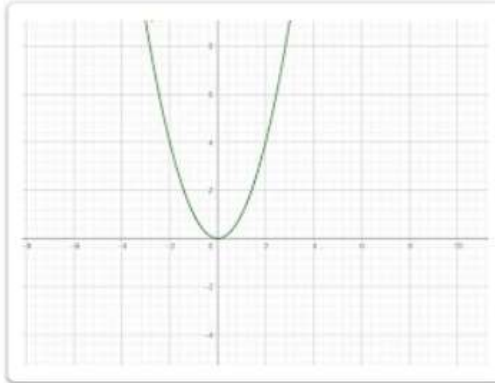
La prueba de la recta vertical

No es posible saberlo gráficamente

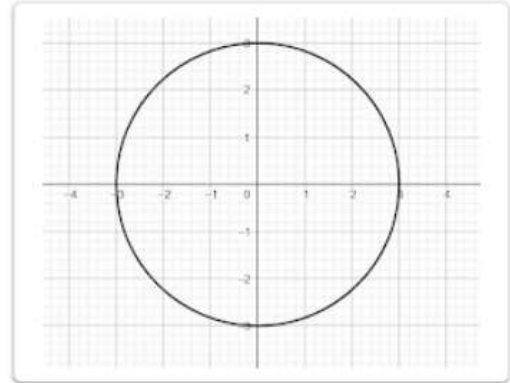
Figura B11*Imágenes de la pregunta 22*

22. ¿Cuál de las siguientes representaciones gráficas en el plano cartesiano, no es función?

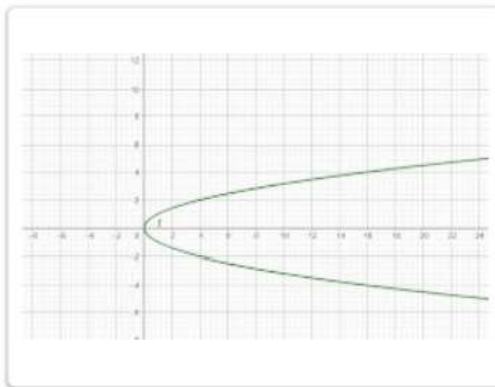
Marca solo un óvalo.



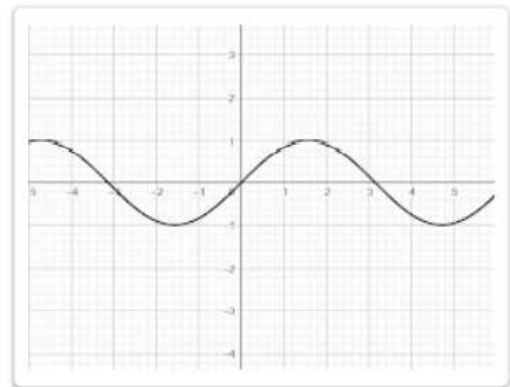
Opción 1



Opción 2



Opción 3



Opción 4

Figura B12

Imágenes de las preguntas 23, 24 y 25

23. ¿Qué tipo de variables posee una función?

Marca solo un óvalo.

- Enteras y dependientes
- Independientes y dependientes
- Enteras e irracionales
- Ninguna de las anteriores

24. ¿Cómo se le conoce al conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente?

Marca solo un óvalo.

- Números reales
- Dominio
- Rango
- Números naturales

Figura B13

Imágenes de las preguntas 25, 26 y 27

25. ¿Cómo se llama al conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente?

Marca solo un óvalo.

- Números reales
- Dominio
- Rango
- Números naturales

26. ¿Cuál definición es la más acertada de función periódica?

Marca solo un óvalo.

- Son funciones que se comportan de manera cíclica sobre un intervalo de tiempo definido.
- Es una función polinómica con una o más variables, que posee expresiones radicales que afectan la variable independiente.
- La función cuyo conjunto del dominio y rango son iguales.
- Una función que posee una expresión exponencial afectando a la variable independiente.

27. ¿Cuál definición es la más acertada de periodo?

Marca solo un óvalo.

- Intervalo en el que comienza y termina un ciclo en una una función periódica.
- Máximo valor que puede tomar una función periódica en un ciclo.
- Mínimo valor que puede tomar una función en un ciclo.
- Valor medio de una función en un ciclo.

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

Figura B14

Imágenes de las preguntas 28, 29 y 30

28. ¿Cuál definición es la más acertada de ciclo?

Marca solo un óvalo.

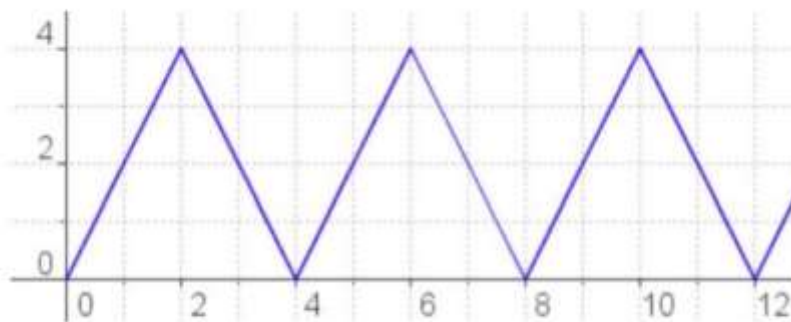
- Conjunto de valores que toma la función periódica durante un período.
- Intervalo en el eje x en el que comienza y termina un ciclo de una función periódica
- Valor medio de una función en un Período.
- Valor que se repite en una función periódica

29. ¿Cuál definición es la más acertada de amplitud?

Marca solo un óvalo.

- El valor máximo de la función menos el mínimo
- La distancia que existe entre el valor medio de la función y su máximo.
- Es el valor máximo de la función dividido entre 2
- distancia entre el punto mínimo y el máximo

30. ¿Cuál es el periodo de la siguiente función periódica?



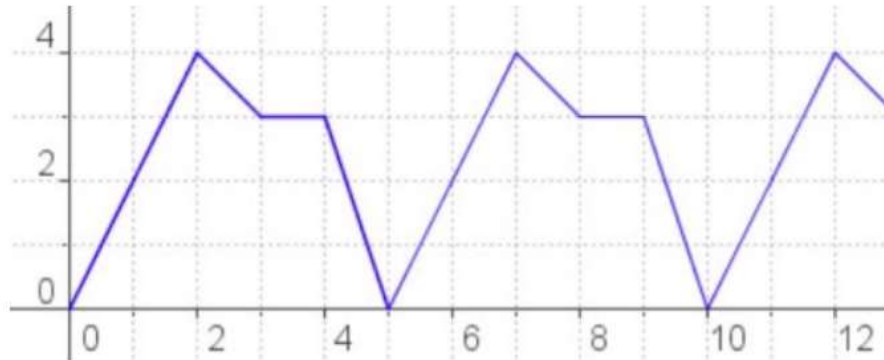
Marca solo un óvalo.

- 2
- 4
- π
- 6

Figura B15

Imágenes de las preguntas 31 y 32

31. ¿Cuál es la amplitud de la siguiente función periódica?



Marca solo un óvalo.

- 4
- 2
- 3
- 1

32. ¿Cuál definición es la más acertada de radianes?

Marca solo un óvalo.

- Otro nombre para π
- La relación que existe entre la longitud de arco de una circunferencia y su radio.
- Otro nombre para los grados.
- La magnitud del radio de una circunferencia

Figura B16

Imágenes de las preguntas 33 y 34

33. ¿Cuál de las siguientes opciones es equivalente a la longitud del radio de un círculo unitario?

Marca solo un óvalo.

- La amplitud de la función seno de x
- La amplitud de la función coseno de x
- El máximo valor de la función seno de x
- Todas las anteriores

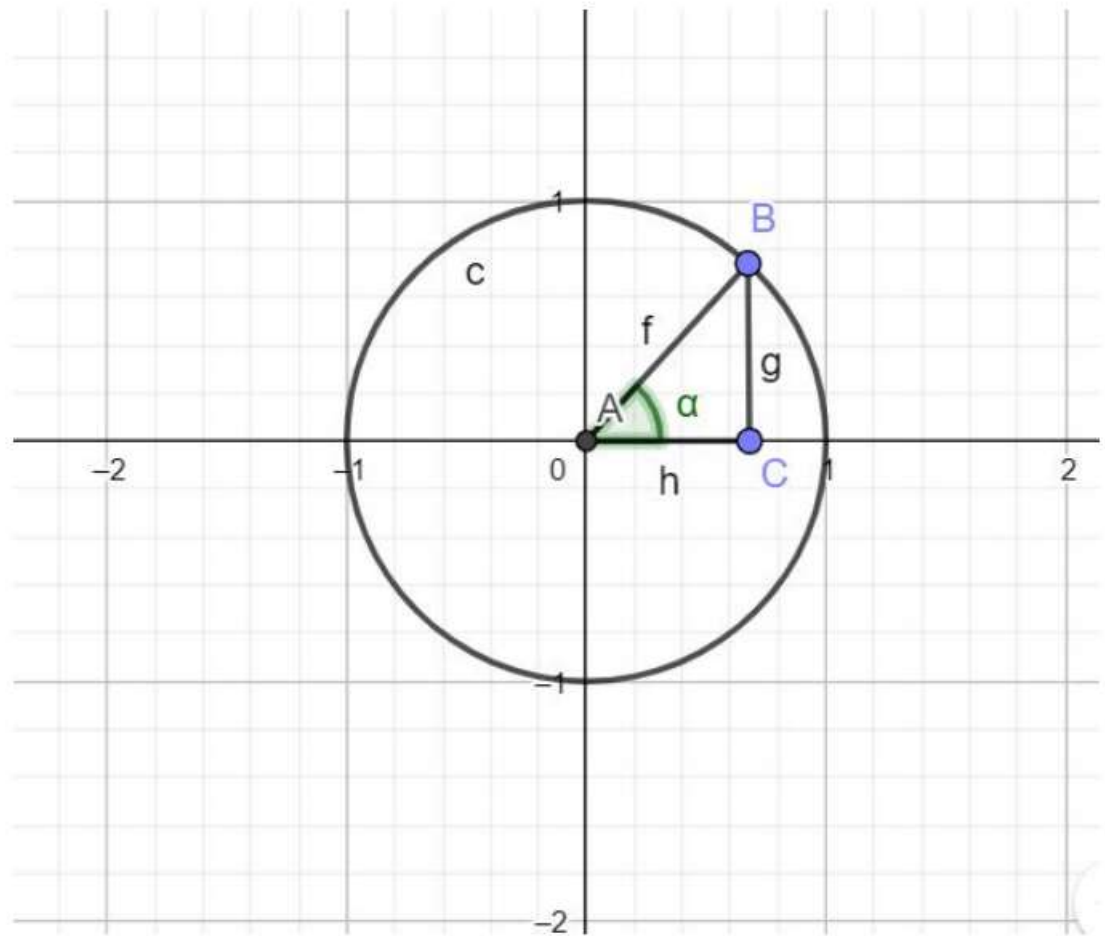
34. ¿Cuál es el periodo de la función seno de x ?

Marca solo un óvalo.

- 2π
- 360°
- Aproximadamente 6.283185307
- Todas las anteriores.

Figura B17*Imágenes de la pregunta 35*

35. ¿Qué función trigonométrica representa a "g" en el siguiente círculo unitario?

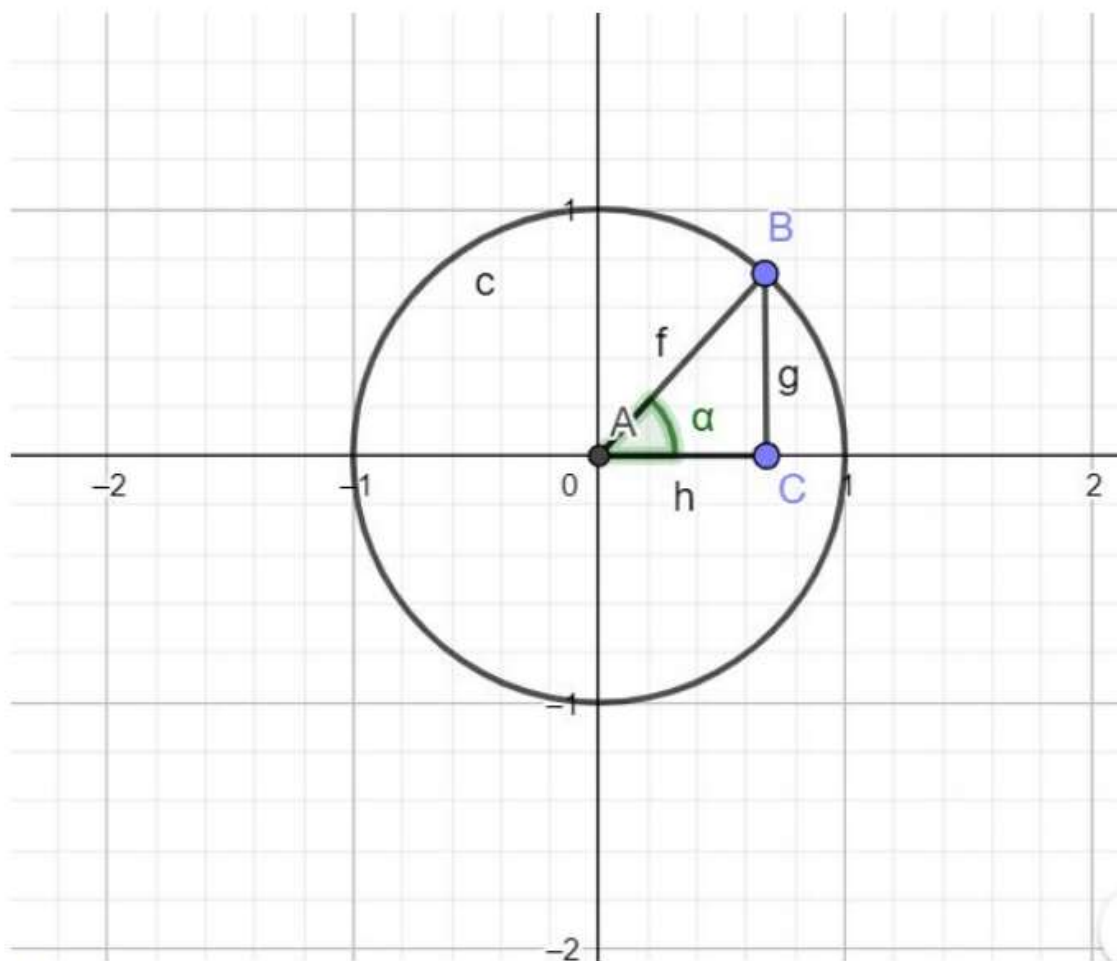


Marca solo un óvalo.

- seno de α
- coseno de α
- tangente de α
- cosecante de α

Figura B18*Imágenes de la pregunta 36*

36. ¿Qué función trigonométrica representa a "h" en el siguiente círculo unitario?



Marca solo un óvalo.

- seno de α
- coseno de α
- tangente de α
- cotangente de α

Figura B19

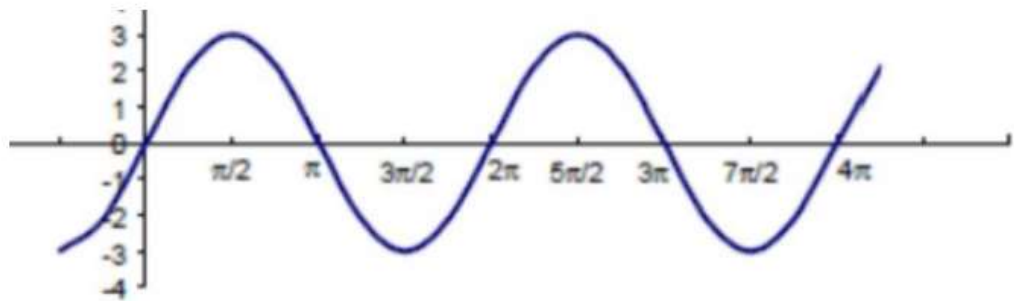
Imágenes de las preguntas 37 y 38

37. La ecuación general de la función seno de x es: $f(x)=A\text{sen}(Bx+C)+D$. Teniendo en cuenta la anterior expresión, ¿con cuales expresiones se relacionan A , B , C y D respectivamente?

Marca solo un óvalo.

- Amplitud, periodo, desplazamiento horizontal y desplazamiento vertical
- Amplitud, desplazamiento horizontal, desplazamiento vertical y periodo
- Valor medio, desplazamiento horizontal, periodo y desplazamiento vertical
- Periodo, amplitud, desfase y desplazamiento vertical

38. ¿Cuál es la ecuación de la siguiente gráfica?

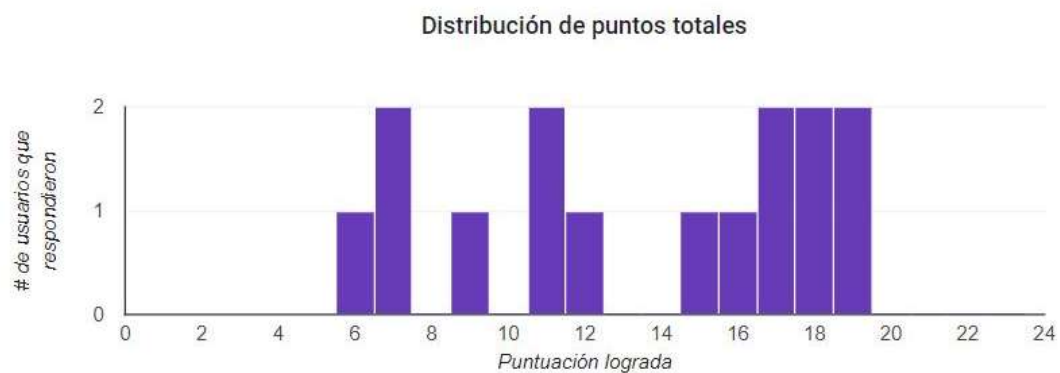


Marca solo un óvalo.

- $f(x)=3\text{sen}(x)$
- $f(x)=6\text{sen}(2*\pi*x)$
- $f(x)=3\text{sen}(2*\pi*x)$
- $f(x)=6\text{sen}(x+2\pi)$

Anexo C. Resultado Evaluación Inicial.**Figura C1**

Resultados que arrojó Google Form.

Estadística

Anexo D. Capturas de pantalla del MOOC.

Figura D

Imagen del MOOC para la función seno Evaluación Inicial.



Figura D2

Imagen del MOOC para la función seno Razones Trigonómicas.



Figura D3

Imagen del MOOC para la función seno: Razones Trigonométricas.

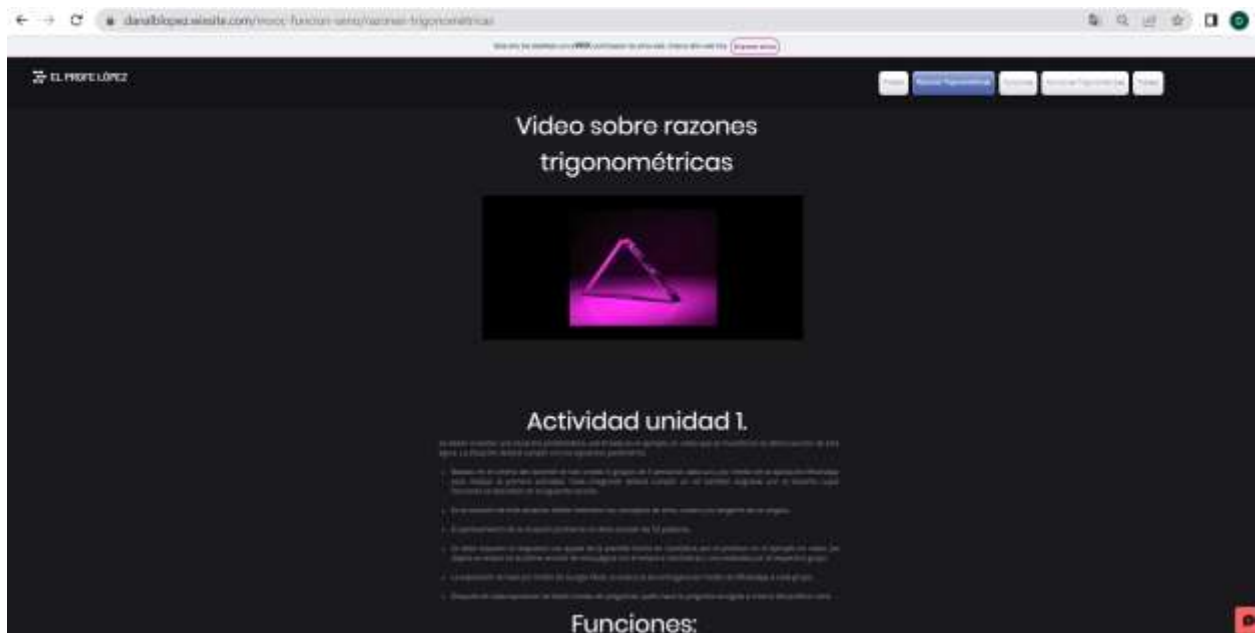
**Figura D4**

Imagen del MOOC para la función seno: Funciones.

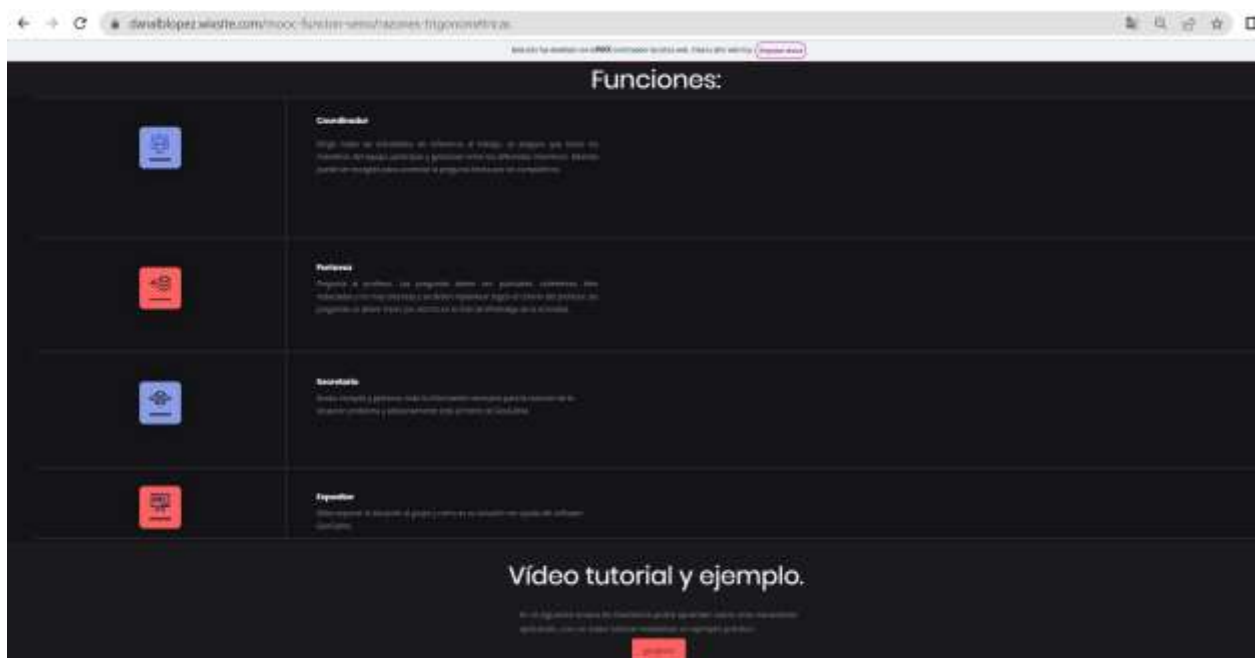


Figura D5

Imagen del MOOC para la función seno: video tutorial de GeoGebra.

**Figura D6**

Imagen del MOOC para la función seno: video sobre funciones.

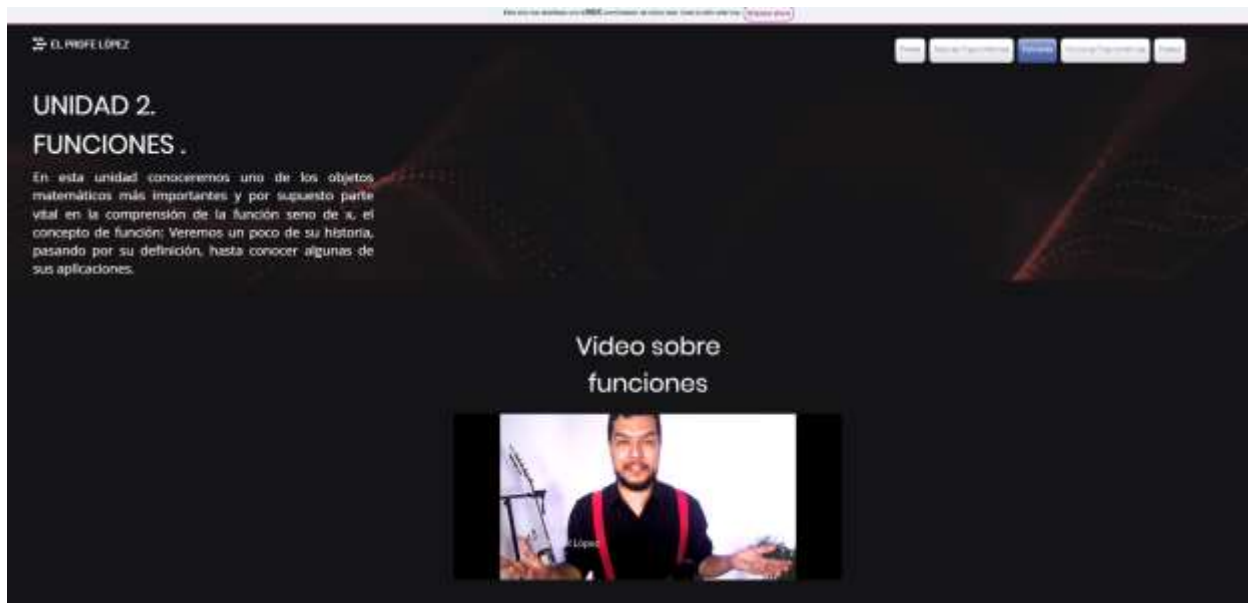
**Figura D7**

Imagen del MOOC para la función seno: Infograma actividad 2.



Figura D8

Imagen del MOOC para la función seno: video ejemplo de funciones periódicas



Figura D9

Imagen del MOOC para la función seno: Funciones de Trigonómicas

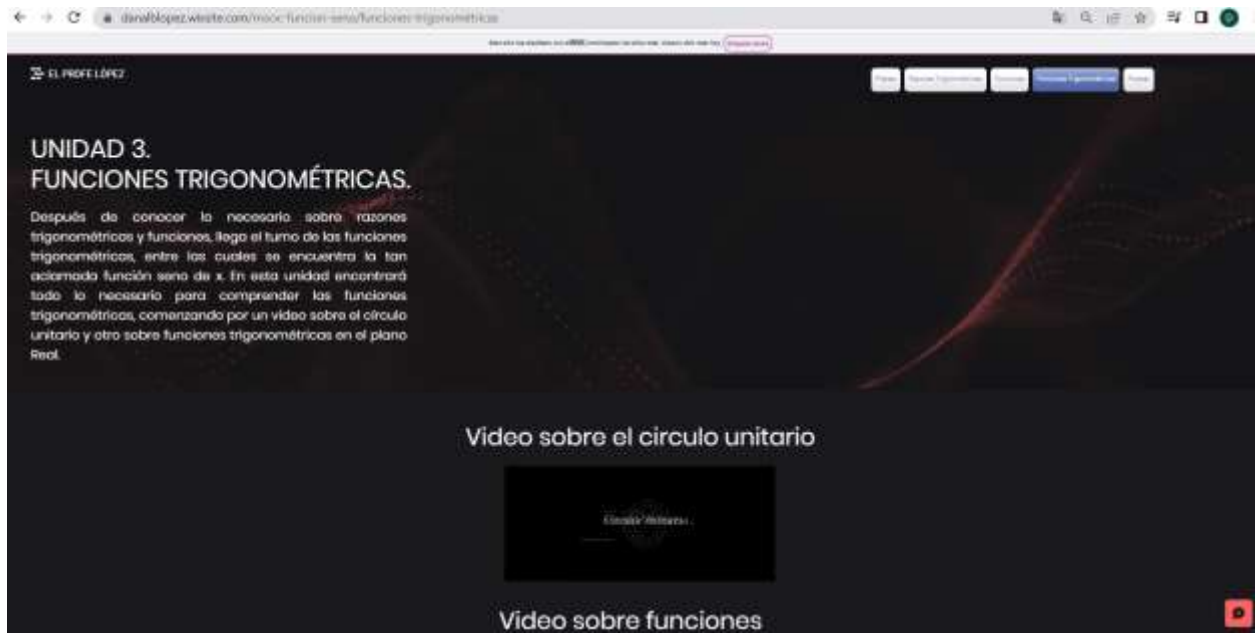
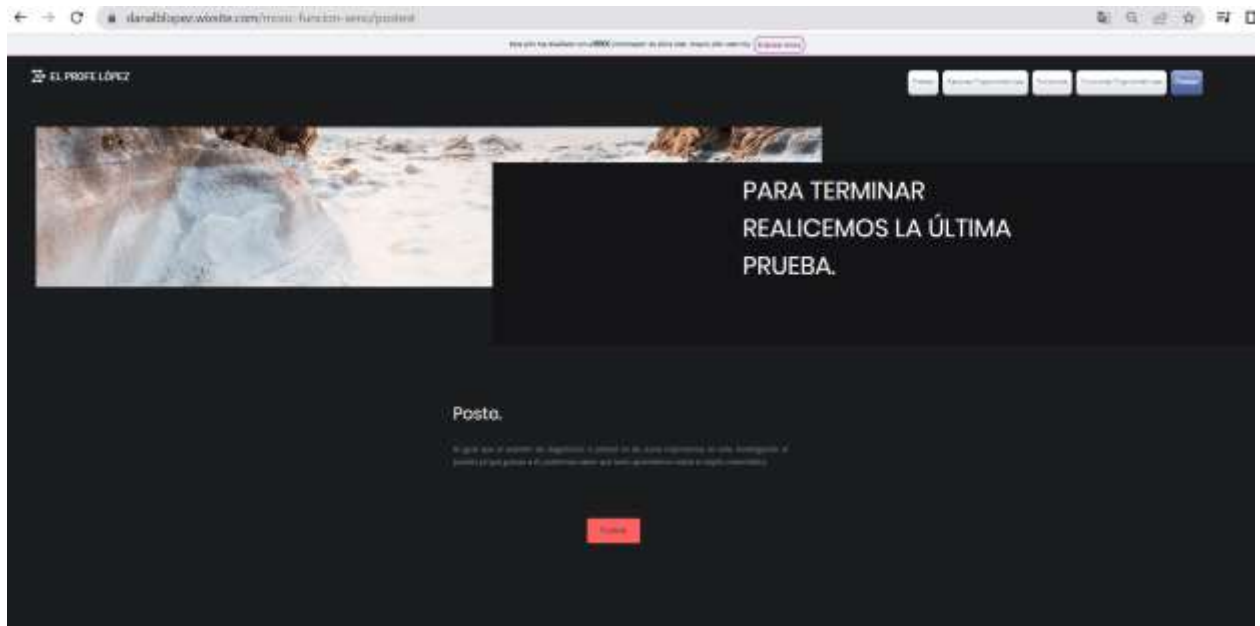
**Figura D10**

Imagen del MOOC para la función seno: Evaluación Final

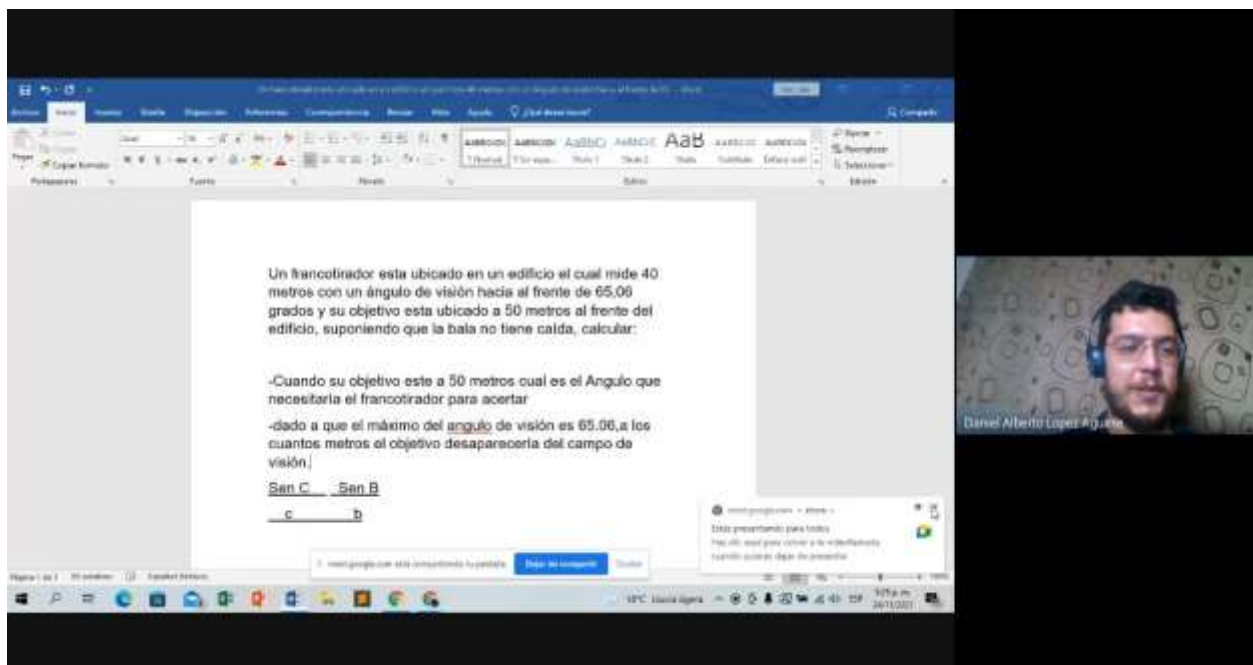
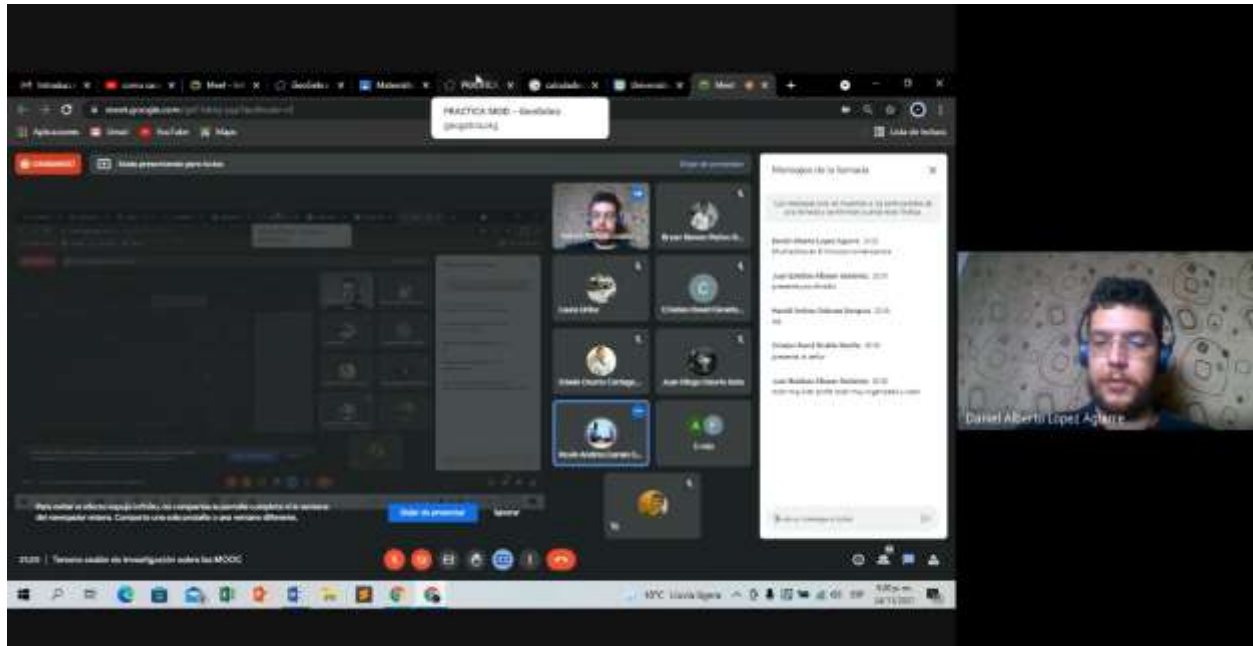


MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

Anexo E. Fotos de Pantalla de la Exposición de la Primera Actividad.

Figura E1

Aplicación de la Secuencia Didáctica grupo 1



MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

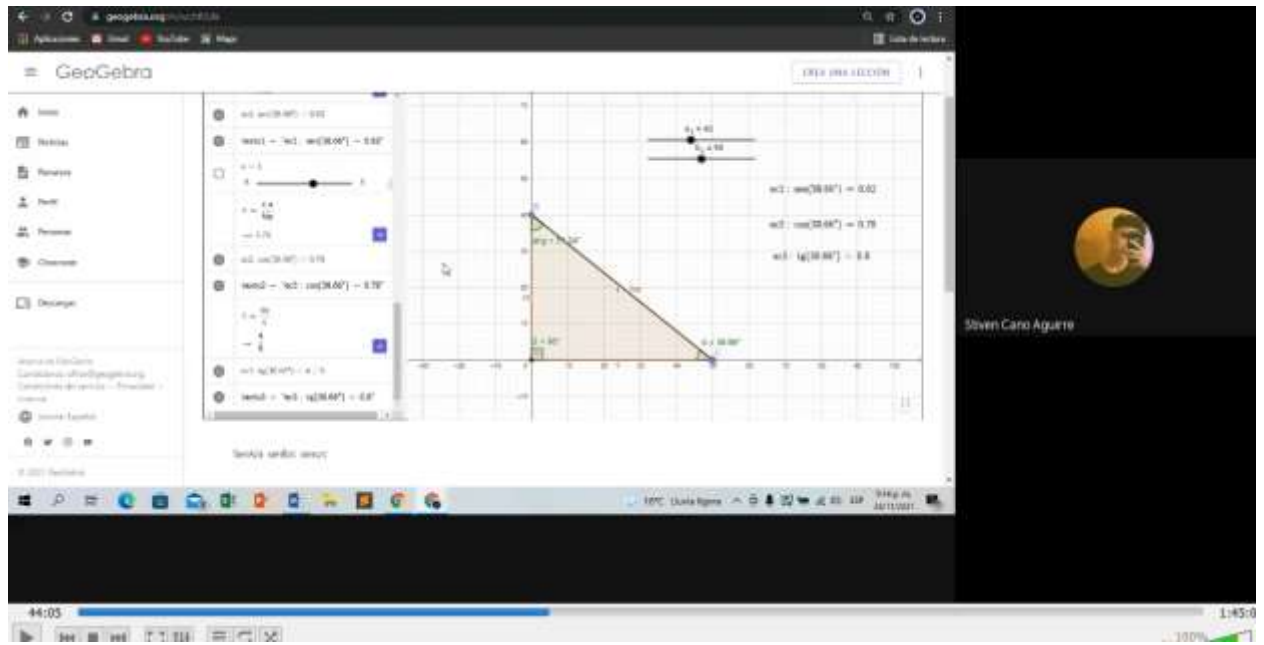
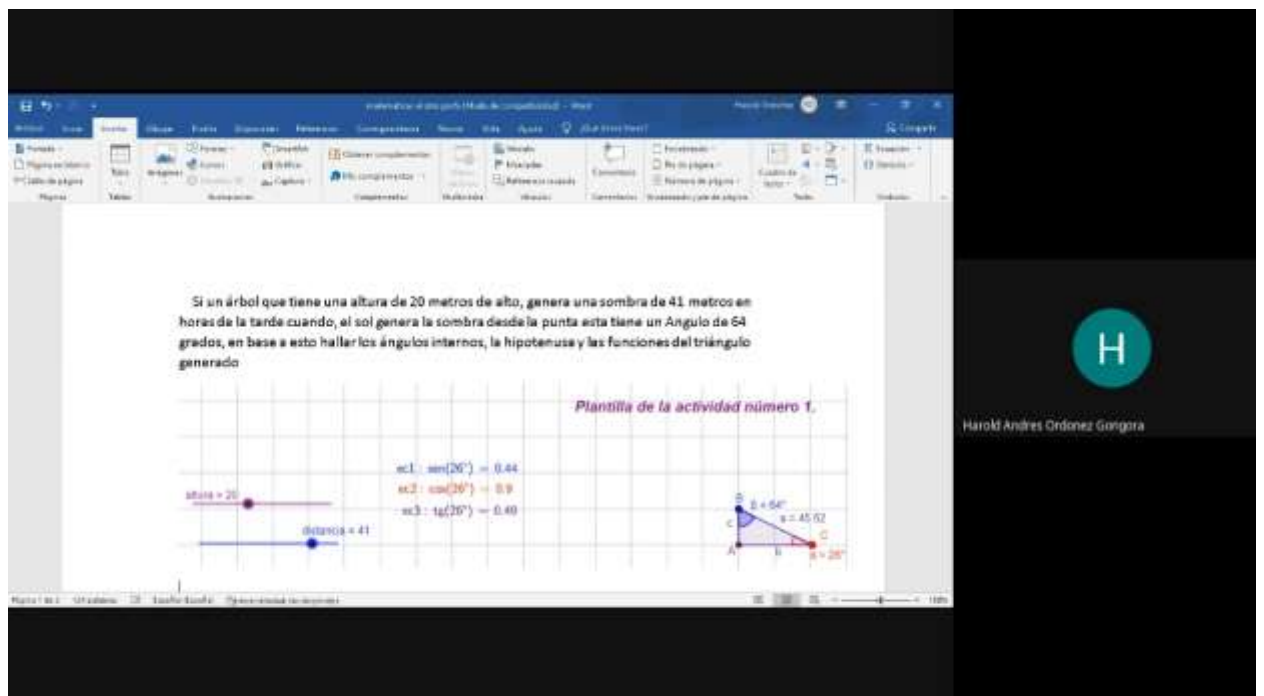
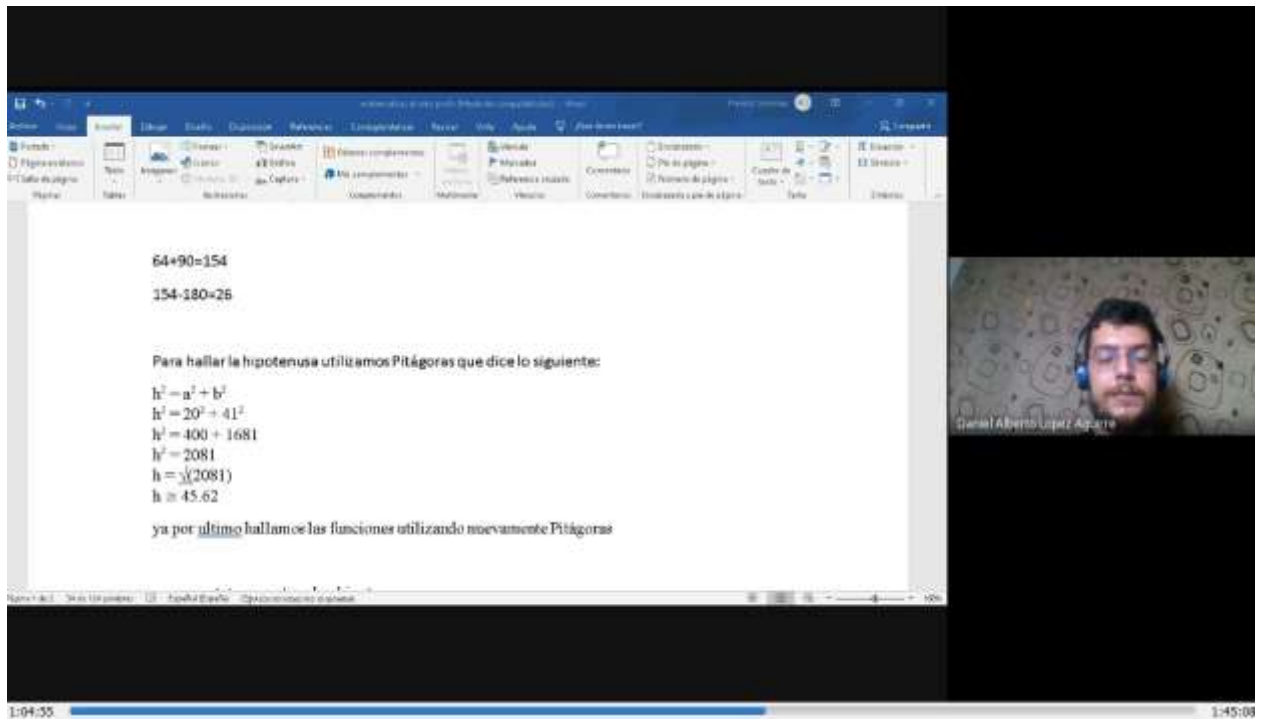


Figura E2

Aplicación de la Secuencia Didáctica grupo 2



MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO



64+90=154
154-180=26

Para hallar la hipotenusa utilizamos Pitágoras que dice lo siguiente:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$h^2 = 20^2 + 41^2$$

$$h^2 = 400 + 1681$$

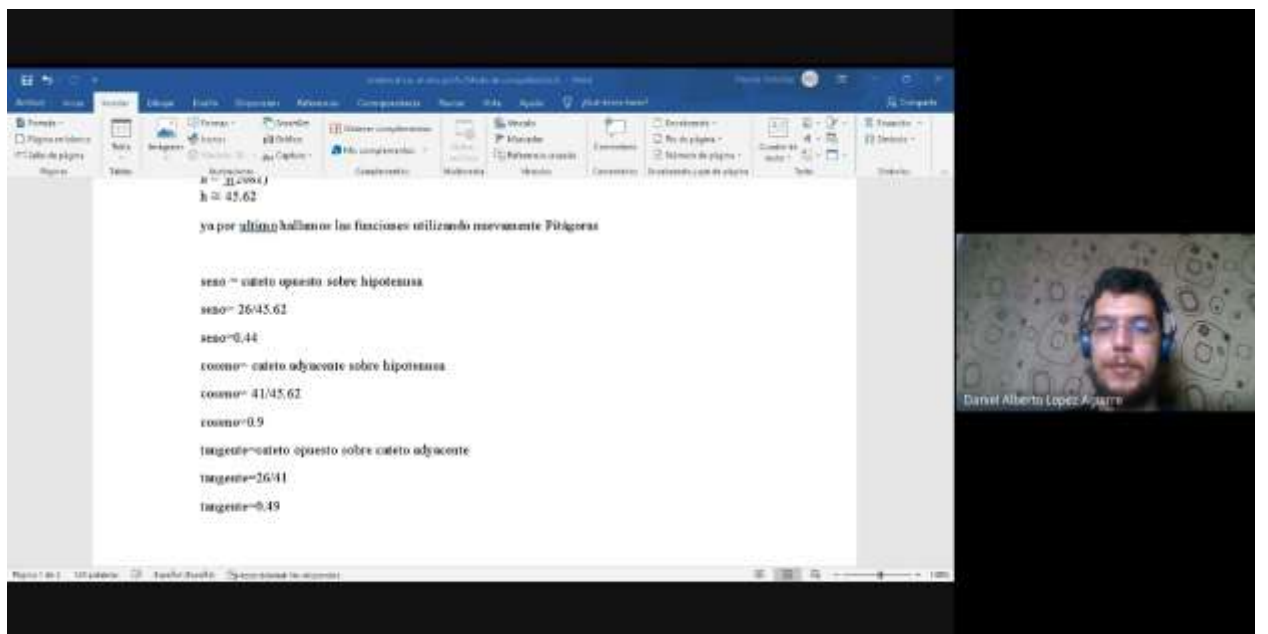
$$h^2 = 2081$$

$$h = \sqrt{2081}$$

$$h \approx 45.62$$

ya por último hallamos las funciones utilizando nuevamente Pitágoras

1:04:55 1:45:09



ya por último hallamos las funciones utilizando nuevamente Pitágoras

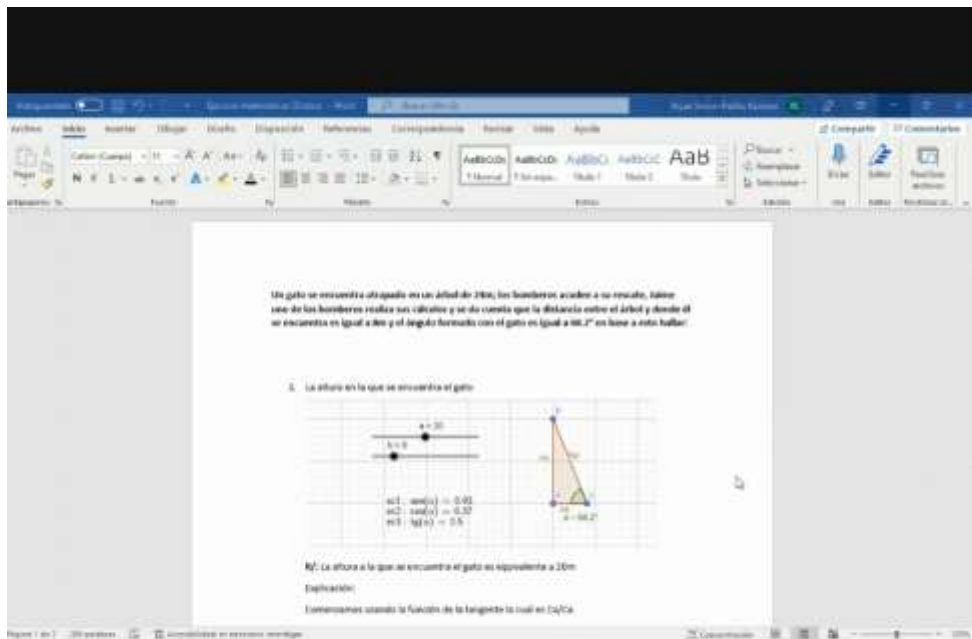
seno = cateto opuesto sobre hipotenusa
seno = 26/45.62
seno = 0.44

coseno = cateto adyacente sobre hipotenusa
coseno = 41/45.62
coseno = 0.9

tangente = cateto opuesto sobre cateto adyacente
tangente = 26/41
tangente = 0.49

1:04:55 1:45:09

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

Figura E3*Aplicación de la Secuencia Didáctica grupo 3*


Un gato se encuentra atrapado en un árbol de 20m, los bomberos acuden a su rescate, saben que los bomberos están a un valor h y se da cuenta que la distancia entre el árbol y donde él se encuentra es igual a h y el ángulo formado con el gato es igual a 36.2° en base a esto hallar:

3. La altura a la que se encuentra el gato

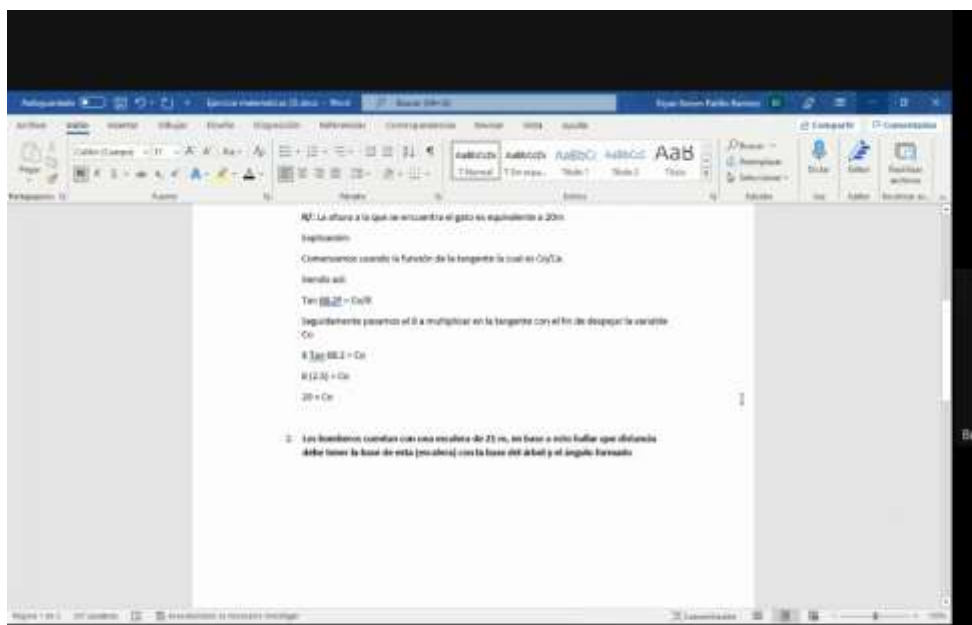
$h_1 = \sin(\alpha) = 0.60$
 $h_2 = \cos(\alpha) = 0.80$
 $h_3 = \tan(\alpha) = 0.5$

h_3 : La altura a la que se encuentra el gato es equivalente a 20m

Explicación:
 Comenzamos usando la función de la tangente la cual es $\tan(\alpha)$

Figura E 3 - 20 palabras | Comentar | Comentar en pantalla

1:15:35



h_3 : La altura a la que se encuentra el gato es equivalente a 20m

Explicación:
 Comenzamos usando la función de la tangente la cual es $\tan(\alpha)$

teniendo así:
 $\tan(36.2) = \frac{h}{20}$
 Seguidamente pasamos el 20 a multiplicar en la tangente con el fin de despejar la variable h

$$20 \tan(36.2) = h$$

$$20(0.74) = h$$

$$14.8 = h$$

2. Los bomberos cuentan con una escalera de 25 m, en base a esto hallar que altura debe tener la base de esta (ya sea) con la base del árbol y el ángulo formado

Figura E 3 - 20 palabras | Comentar | Comentar en pantalla

1:19:45

MOOC PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO

$\alpha = 20$
 $\beta = 6.3$

ec1: $\sin(72^\circ) = 0.95$
 ec2: $\cos(72^\circ) = 0.31$
 ec3: $\tan(72^\circ) = 3.08$

$\alpha = 72^\circ$

R/ La distancia es 6.5m y el ángulo formado es igual a 72°

Explicación:
 Al tener los datos del Cu y la hipotenusa se construye cual es la función que mejor se adapte a dichos datos:

En cuyo caso sería Seno, el cual tiene la fórmula:
 $\text{Sen } \alpha = \text{Cu}/\text{Hipotenusa}$

$\text{Sen } \alpha = 20/21$
 $\alpha = \text{Arc Sen } (20/21)$
 $\alpha = 72^\circ$ aprox

Para hallar el α en la distancia entre la base de la escalera y el árbol se tiene que usar al

Bryan Steven Patino Ramirez

Anexo F. Fotos De Pantalla De la Segunda Actividad.

Figura F1

Aplicación de la Secuencia Didáctica Video Traslación de Funciones

$f(x) + 2$
 $f(x)$

Traslación de Funciones

Suma
 Resta
 Multiplicación

InShot

Figura F2

Aplicación de la Secuencia Didáctica Video Aplicaciones de las Funciones

The figure consists of two screenshots from a GeoGebra application window. The top screenshot shows a graph with a coordinate system. The x-axis is labeled 'años' and the y-axis is labeled 'kilos'. A line is drawn through the points (2, 12) and (3, 14). The text 'APLICACIONES DE LA FUNCION' is overlaid on the graph. The bottom screenshot shows the same graph with the points (2, 12) and (3, 14) explicitly labeled. To the right of the graph is a table:

años	kilos
2	12
3	14
4	?

Below the table, the function equation is derived:

$$f(x) = mx + b$$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{14 - 12}{3 - 2} = 2$$

$$f(x) = 2x + b$$

$$12 = 2 \cdot 2 + b$$

$$12 - 4 = b$$

$$b = 8$$

The final function equation is $f(x) = 2x + 8$. The bottom screenshot also shows the text 'Un bebe pesa 12 kilos ¿ cumplir dos años y a los tres años su peso es de 14 kilos. Si el peso y la edad en años del bebe están relacionados por un modelo lineal entre los dos y los cuatro años, entonces ¿Cuál será el peso del niño cuando cumpla cuatro años?' and the calculation $f(3) = 2(3) + 8 = 14$ and $f(4) = 2(4) + 8 = 16$.

Figura F3

Aplicación de la Secuencia Didáctica Video Formas gráficas de las funciones

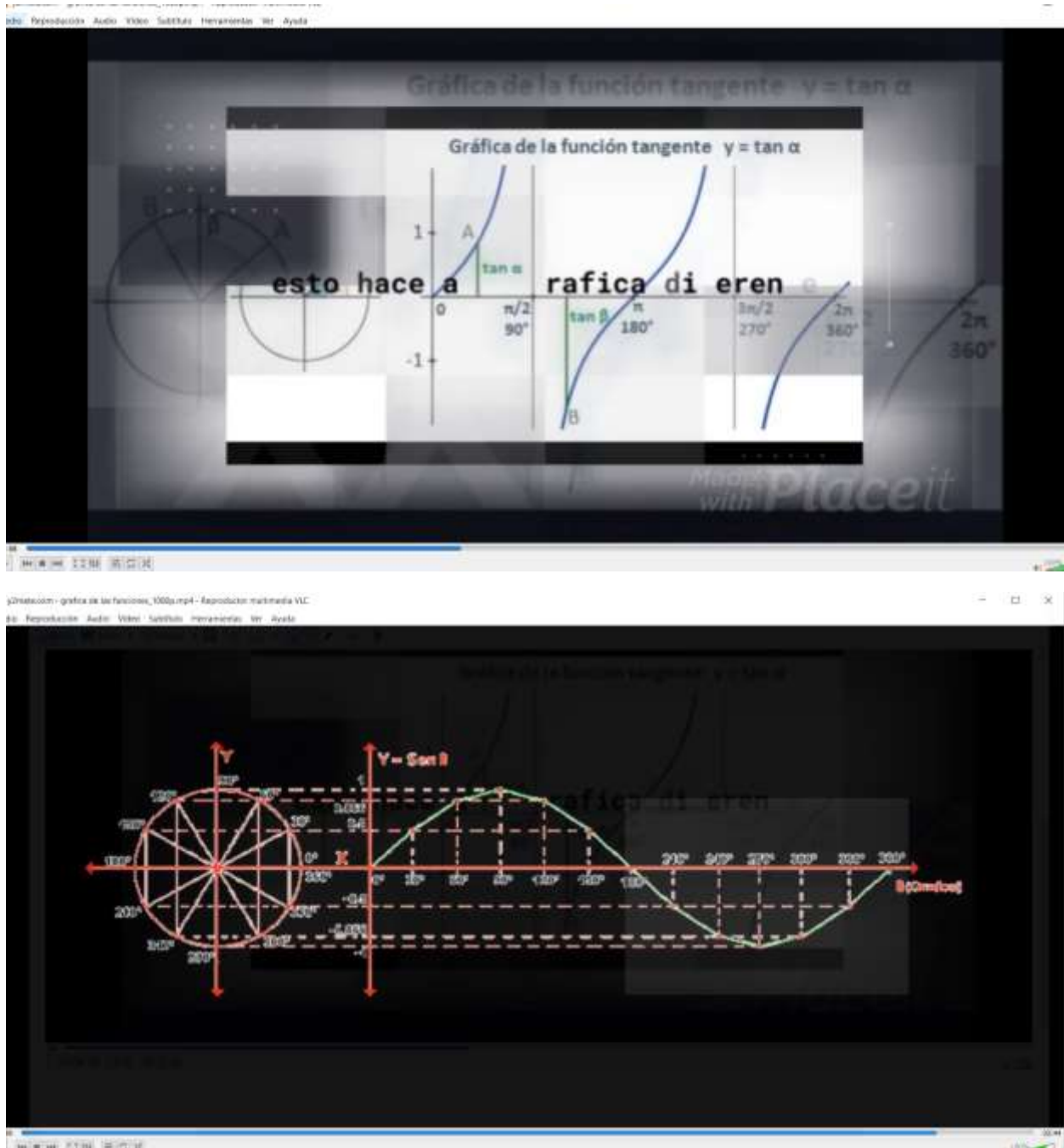


Figura F4

Aplicación de la Secuencia Didáctica Video Relaciones



Anexo G. Imágenes De La Evaluación Final.**Figura G1**

Imágenes de las preguntas 5,6 y 7

5. Los triángulos se clasifican según: *

Marca solo un óvalo.

- El valor de sus ángulos externos.
 Su número de lado.
 Sus lados y según sus ángulos internos.
 No existe manera de clasificarlos.

6. ¿Cuál es la suma de los ángulos internos de un triángulo? *

Marca solo un óvalo.

- 360°
 90°
 210°
 180°

7. En un triángulo rectángulo que también es isósceles, ¿Cuál es el valor de sus ángulos internos? *

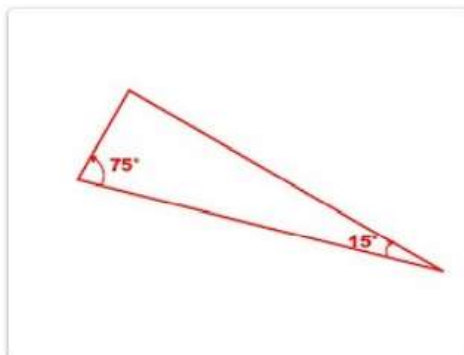
Marca solo un óvalo.

- 45°,45° y 90°
 60°,45° y 90°
 90°,90° y 60°
 Ninguna de las anteriores

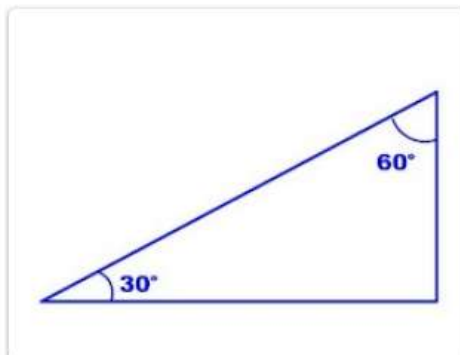
Figura G2*Imagen de la pregunta 8*

8. ¿Cuál de los siguientes triángulos es un triángulo rectángulo? *

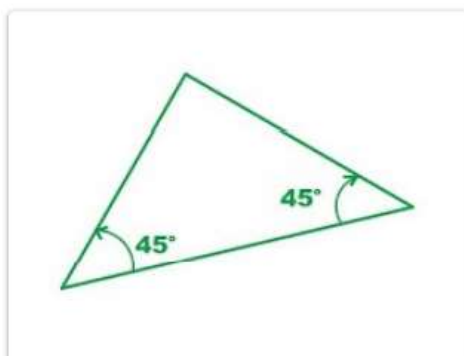
Marca solo un óvalo.



Opción 1



Opción 2



Opción 3

Todos son triángulos rectángulos.

Figura G3*Imagen de la pregunta*

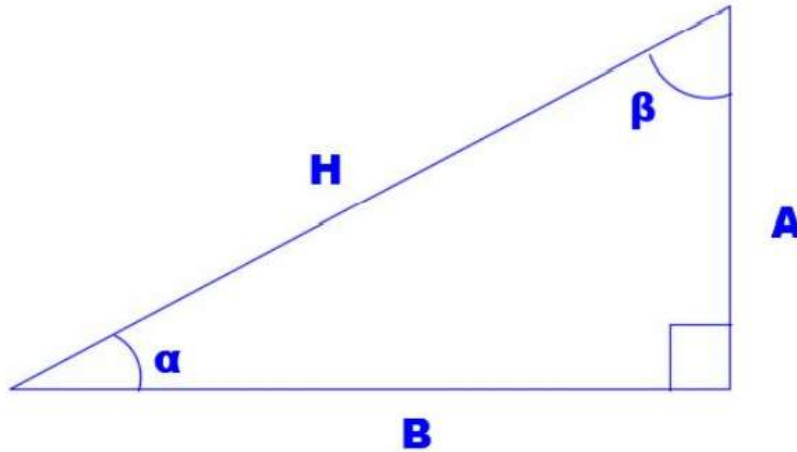
9. Un triángulo rectángulo posee un ángulo de 105° , ¿Cuál es el valor de los otros dos ángulos? *

Marca solo un óvalo.

- 90° y 40°
- 90° y 50°
- 90° y 5°
- No existe un triángulo rectángulo con un ángulo de 105°

Figura G4*Imagen de la pregunta 10*

10. En el triángulo rectángulo de la siguiente imagen, ¿Cuáles son las expresiones que sirven para calcular el seno de α , el coseno de α y la tangente de α respectivamente?

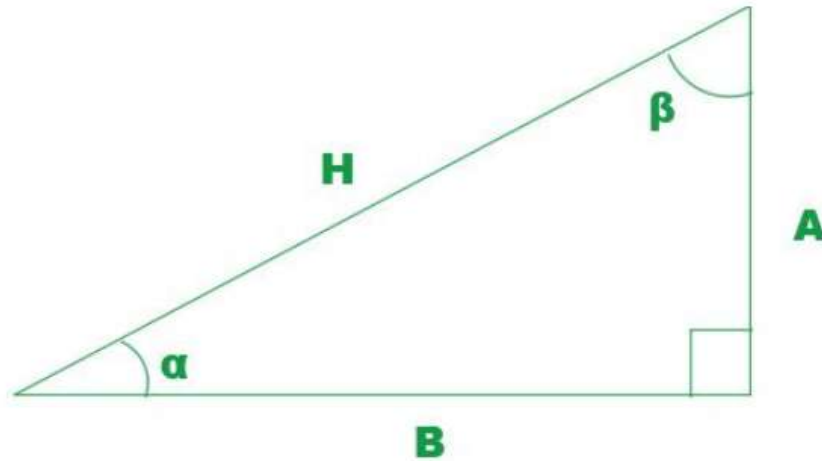


Marca solo un óvalo.

- $\text{sen } \alpha = A/B, \text{cos } \alpha = B/A \text{ y } \text{tan } \alpha = 1/H$
- $\text{sen } \alpha = A/a, \text{cos } \alpha = B/\beta \text{ y } \text{tan } \alpha = A/B$
- $\text{sen } \alpha = A/H, \text{cos } \alpha = B/H \text{ y } \text{tan } \alpha = A/B$
- $\text{sen } \alpha = A/B, \text{cos } \alpha = B/H \text{ y } \text{tan } \alpha = H/1$

Figura G5*Imagen de la pregunta 11*

11. Para el triángulo de la figura cual de las siguientes igualdades se cumple: *



Marca solo un óvalo.

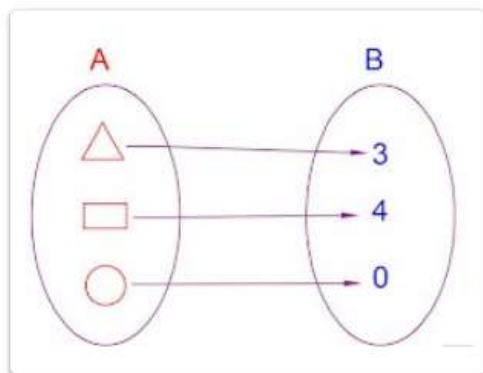
- Sen $\alpha = \cos \beta$
- $\tan \beta = 1/\tan \alpha$
- $\tan \alpha = \cos \beta / \sin \beta$
- Todas las igualdades se cumplen
- Ninguna igualdad es correcta

Figura G6

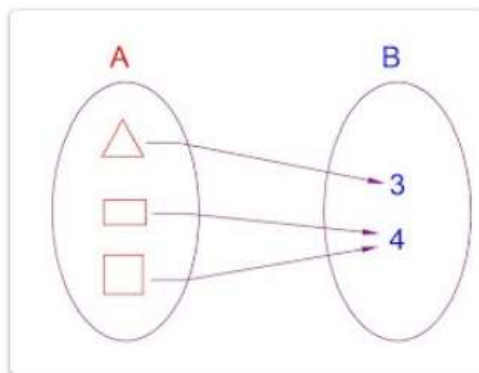
Imágenes de las preguntas 12 y 13

12. Cual de las siguientes representaciones no corresponde a una función: *

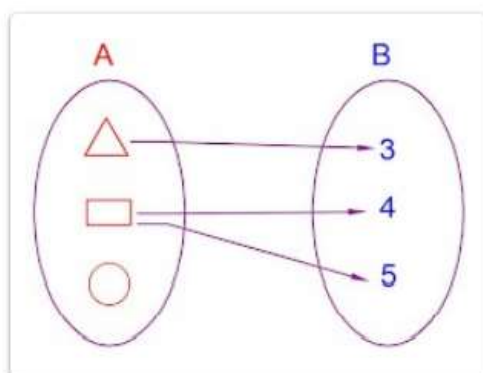
Marca solo un óvalo.



Opción 1



Opción 2



Opción 3

Todas son funciones.

13. ¿Es una función el conjunto compuesto por las parejas ordenadas: $\{(1,5), (1,7), (3,9), (4,11)\}$? *

Marca solo un óvalo.

Sí

No

Figura G7

Imágenes de las preguntas 14, 15 y 16

14. ¿Qué tipo de variables posee una función? *

Marca solo un óvalo.

- Enteras y dependientes
- Independientes y dependientes
- Enteras e irracionales
- Ninguna de las anteriores

15. ¿Cómo se le conoce al conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente? *

Marca solo un óvalo.

- Números reales
- Dominio
- Números naturales
- Todas las anteriores

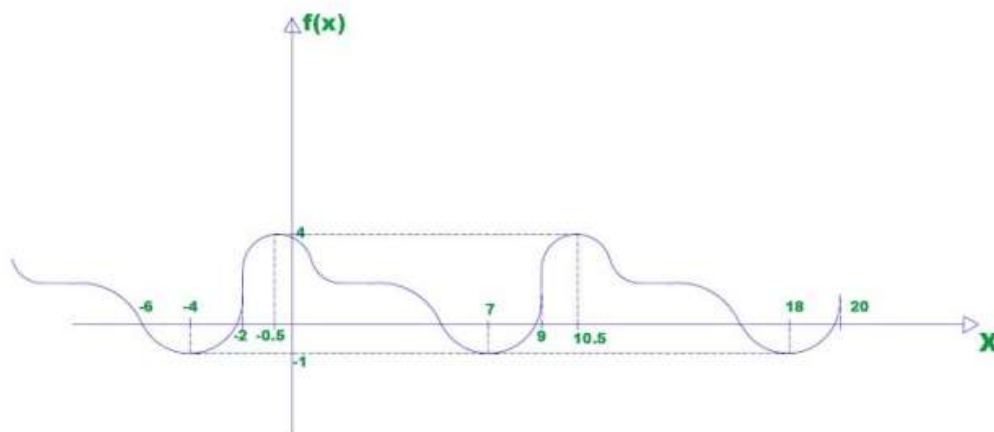
16. ¿Cuál definición es la más acertada de función periódica? *

Marca solo un óvalo.

- Son funciones que se comportan de manera cíclica sobre un intervalo de tiempo definido.
- Es una función polinómica con una o más variables, que posee expresiones radicales que afectan la variable independiente.
- La función cuyo conjunto del dominio y rango son iguales.
- Una función que posee una expresión exponencial afectando a la variable independiente.

Figura G8*Imágenes de las preguntas 17 y 18*

17. ¿Cuál es el periodo, el máximo, el mínimo, la amplitud y el punto medio de la siguiente función respectivamente? *

*Marca solo un óvalo.*

- Periodo=11; máximo en $y=4$; Mínimo en $y=-1$; La amplitud=2.5 y el valor medio en $y=1.5$
- Periodo=10.5; máximo en $y=-0.5$; Mínimo en $y=-4$; La amplitud=5 y el valor medio en $y=2.5$
- Periodo=11; máximo en $y=4$; Mínimo en $y=-1$; La amplitud=1.5 y el valor medio en $y=0.5$
- Periodo=11; máximo en $x=4$; Mínimo en $x=-1$; La amplitud=2.5 y el valor medio en $x=1.5$

Funciones trigonométricas

18. ¿Cuál definición es la más acertada de radianes? *

Marca solo un óvalo.

- Otro nombre para π
- La relación que existe entre la longitud de arco de una circunferencia y su radio.
- Otro nombre para los grados.
- La magnitud del radio de una circunferencia

Figura G9*Imagen de la pregunta 19*

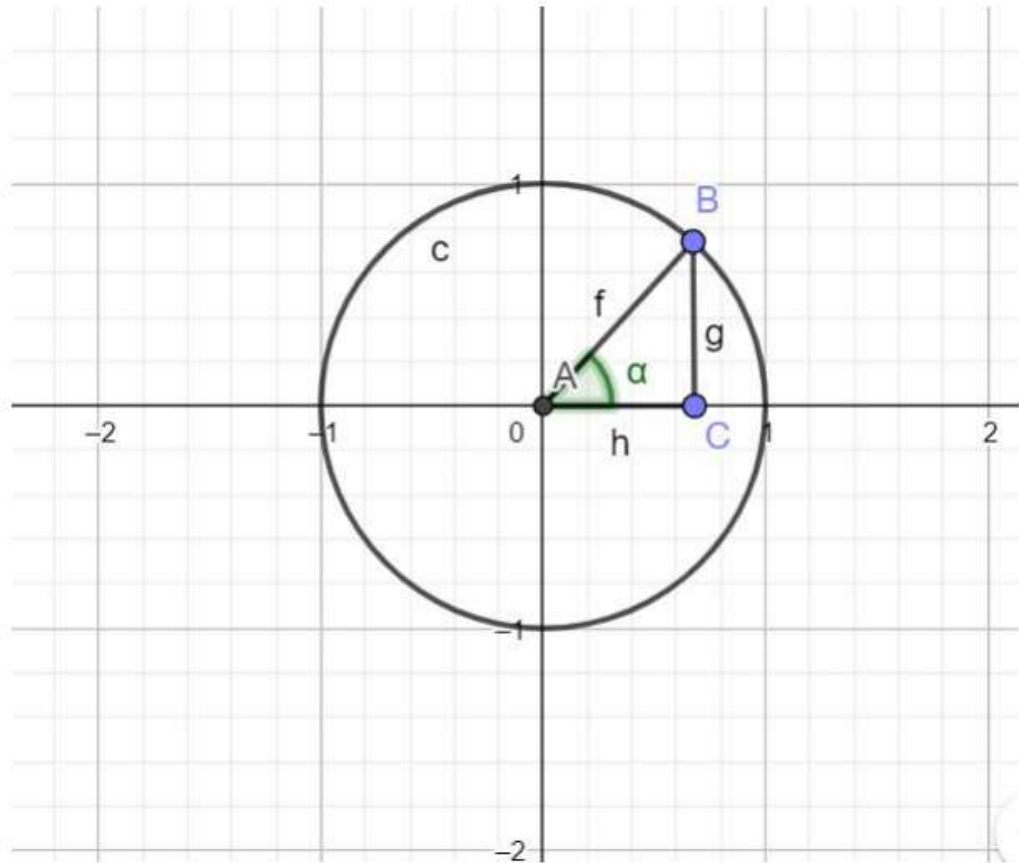
19. ¿Cuál es el periodo, el máximo, el mínimo, la amplitud y el punto medio de la función seno de x ? *

Marca solo un óvalo.

- Periodo= π ; máximo en $y=0.5$; Mínimo en $y=-1$; La amplitud=1 y el valor medio en $y=1$
- Periodo= 2π ; máximo en $y=1$; Mínimo en $y=-1$; La amplitud=1 y el valor medio en $y=0$
- Periodo=2 ; máximo en $y=\pi$; Mínimo en $y=-\pi$; La amplitud=1 y el valor medio en $y=0$
- Periodo= 2π ; máximo en $y=\pi$; Mínimo en $y=-\pi$; La amplitud= π y el valor medio en $y=0$

Figura G10*Imagen de la pregunta 20*

20. ¿Qué función trigonométrica representa a "g" en el siguiente círculo unitario? *

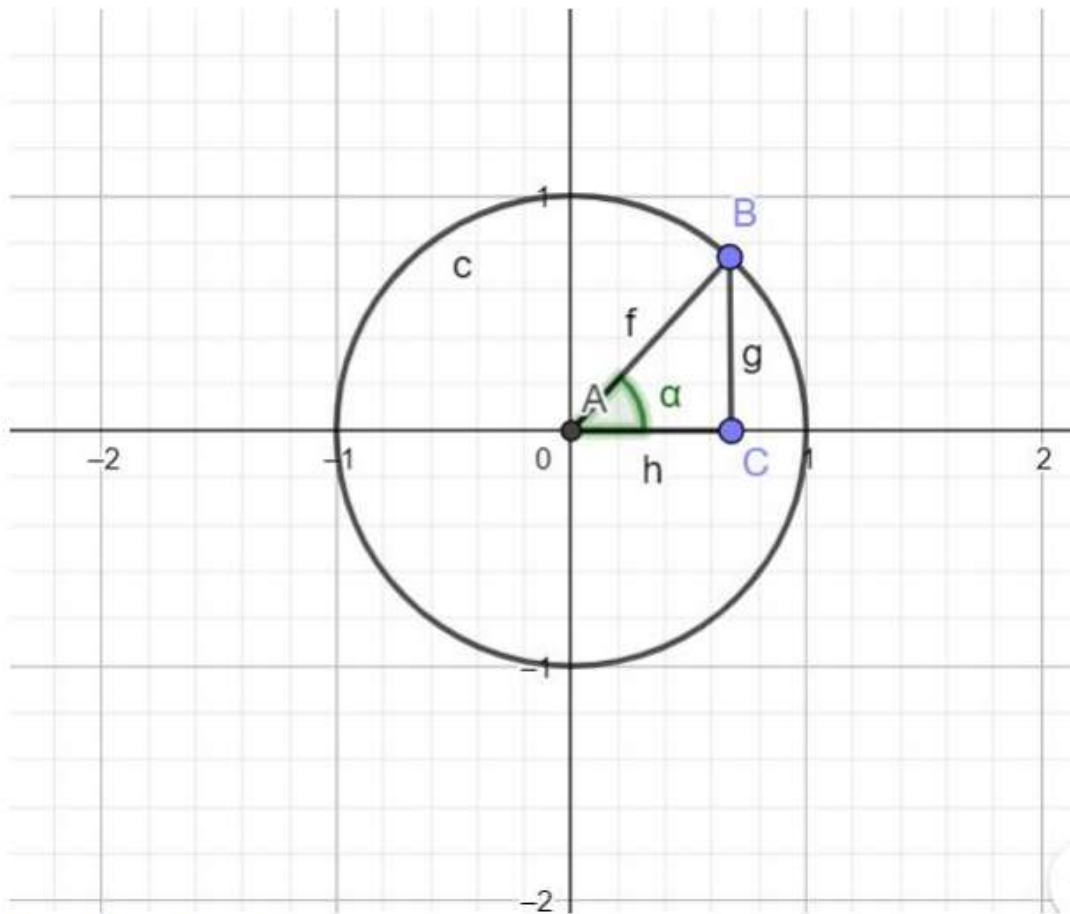


Marca solo un óvalo.

- seno de α
- coseno de α
- tangente de α
- cosecante de α

Figura G11*Imagen de la pregunta 21*

21. ¿Qué función trigonométrica representa a "h" en el siguiente círculo unitario? *



Marca solo un óvalo.

- seno de α
- coseno de α
- tangente de α
- cotangente de α

Figura G11

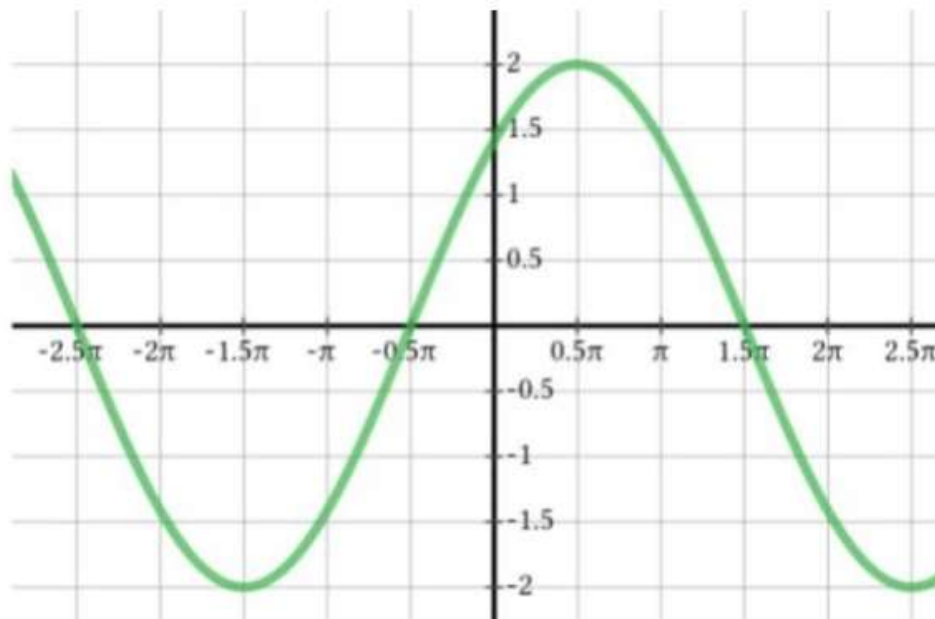
Imágenes de las preguntas 22 y 23

22. La ecuación general de la función seno de x es: $f(x)=A\text{sen}(Bx+C)+D$. Teniendo en cuenta la anterior expresión, ¿con cuales expresiones se relacionan A , B , C y D respectivamente? *

Marca solo un óvalo.

- Amplitud, periodo, desplazamiento horizontal y desplazamiento vertical
- Amplitud, desplazamiento horizontal, desplazamiento vertical y periodo
- Valor medio, desplazamiento horizontal, periodo y desplazamiento vertical
- Periodo, amplitud, desfase y desplazamiento vertical

23. ¿Cuál es la ecuación de la siguiente gráfica? *



Marca solo un óvalo.

- $f(x)=2\text{Seno}((1/2)*X+\pi/4)$
- $f(x)=\text{Seno}((1/2)*X)$
- $f(x)=2\text{Seno}(2*X-\pi/4)$
- Ninguna de las anteriores

Anexo H. Resultados de la Evaluación Final.**Figura H1**

Resultados que arrojó Google Form.



Anexo I. Contenido Específico Guía del Libro Trascendentes Tempranas

Figura I1.

Imagen de las pruebas diagnósticas que se tomaron como guía

C Prueba de diagnóstico: funciones

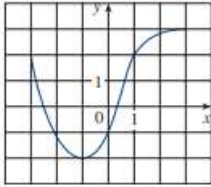
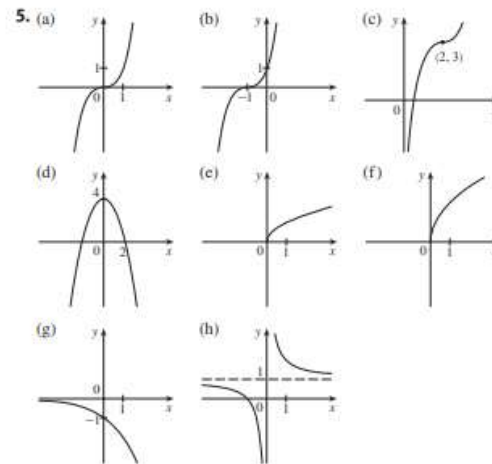


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

- La gráfica de una función f se da a la izquierda.
 - Enuncie el valor de $f(-1)$.
 - Estime el valor de $f(2)$.
 - ¿Para cuáles valores de x es $f(x) = 2$?
 - Estime los valores de x tales que $f(x) = 0$.
 - Enuncie el dominio y rango de f .
- Si $f(x) = x^3$, evalúe el cociente de diferencia $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ y simplifique su respuesta.
- Determine el dominio de cada función.
 - $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$
 - $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$
 - $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$
- ¿Cómo se obtienen las gráficas de las siguientes funciones a partir de la gráfica de f ?
 - $y = -f(x)$
 - $y = 2f(x) - 1$
 - $y = f(x-3) + 2$
- Sin usar una calculadora, haga un diagrama preliminar de la gráfica.
 - $y = x^3$
 - $y = (x+1)^3$
 - $y = (x-2)^3 + 3$
 - $y = 4 - x^2$
 - $y = \sqrt{x}$
 - $y = 2\sqrt{x}$
 - $y = -2^x$
 - $y = 1 + x^{-1}$
- Sea $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
 - Evalúe $f(-2)$ y $f(1)$.
 - Trace la gráfica de f .
- Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = 2x - 3$, determine cada una de las funciones siguientes.
 - $f \circ g$
 - $g \circ f$
 - $g \circ g \circ g$

RESPUESTAS DE LA PRUEBA DE DIAGNÓSTICO C: FUNCIONES

- (a) -2
 - (c) -3, 1
 - (e) $[-3, 3], [-2, 3]$
- (a) $12 + 6h + h^2$
- (a) $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$
 - (b) $(-\infty, \infty)$
 - (c) $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$
- (a) Refleje a través del eje x
 - (b) Prolongue verticalmente por un factor de 2 y luego desplace 1 unidad hacia abajo
 - (c) Desplace 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba



D Prueba de diagnóstico: trigonometría

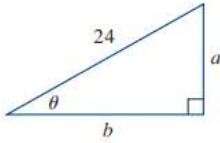
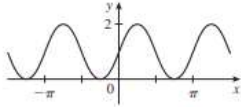


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

- Convierta de grados a radianes.
(a) 300° (b) -18°
- Convierta de radianes a grados.
(a) $5\pi/6$ (b) 2
- Determine la longitud de un arco de un círculo con radio 12 cm si el arco subtende un ángulo central de 30° .
- Determine los valores exactos.
(a) $\tan(\pi/3)$ (b) $\sin(7\pi/6)$ (c) $\sec(5\pi/3)$
- Expresar las longitudes de a y b en la figura en términos de θ .
- Si $\sin x = \frac{1}{3}$ y $\sec y = \frac{5}{4}$, donde x y y se sitúan entre 0 y $\pi/2$, evalúe $\sin(x + y)$.
- Compruebe las identidades.
(a) $\tan \theta \sin \theta + \cos \theta = \sec \theta$ (b) $\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \sin 2x$
- Determine todos los valores de x tales que $\sin 2x = \sin x$ y $0 \leq x \leq 2\pi$.
- Trace la gráfica de la función $y = 1 + \sin 2x$ sin usar una calculadora.

RESPUESTAS DE LA PRUEBA DE DIAGNÓSTICO D: TRIGONOMETRÍA

- | | | |
|-------------------------|---|--|
| 1. (a) $5\pi/3$ | (b) $-\pi/10$ | 6. $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$ |
| 2. (a) 150° | (b) $360^\circ/\pi \approx 114.6^\circ$ | 8. $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$ |
| 3. 2π cm | | 9. |
| 4. (a) $\sqrt{3}$ | (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2 |  |
| 5. (a) $24 \sin \theta$ | (b) $24 \cos \theta$ | |

Si tuvo dificultad con estos problemas, examine el apéndice D de este libro.

Figura I2

Contenido guía del libro sobre funciones trigonométricas

D Trigonometría**■ Ángulos**

Los ángulos pueden medirse en grados o en radianes (abreviados como rad). El ángulo dado por una revolución completa contiene 360° , lo cual es lo mismo que 2π rad. Por tanto,

1

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

y

2

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.017 \text{ rad}$$

EJEMPLO 1

- (a) Determine la medida en radianes de 60° .
 (b) Exprese $5\pi/4$ en grados.

SOLUCIÓN

(a) En la ecuación 1 o 2 para convertir de grados a radianes se multiplica por $\pi/180$. Así,

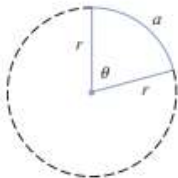
$$60^\circ = 60 \left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

(b) Para convertir de radianes a grados se multiplica por $180/\pi$. Entonces,

$$\frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4} \left(\frac{180}{\pi}\right) = 225^\circ$$

En cálculo, se usan radianes para medir ángulos excepto cuando se indica lo contrario. En la tabla siguiente se muestra la correspondencia entre medidas en grados y en radianes de algunos ángulos comunes.

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

**FIGURA 1**

La figura 1 muestra un sector de un círculo con ángulo central θ y radio r que subtende un arco con longitud a . Como la longitud del arco es proporcional al tamaño del ángulo, y como el círculo entero tiene circunferencia $2\pi r$ y ángulo central 2π , se tiene

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r}$$

Al despejar θ y a en esta ecuación se obtiene

3

$$\theta = \frac{a}{r}$$

$$a = r\theta$$

Recuérdese que las ecuaciones 3 son válidas solo cuando θ se mide en radianes.

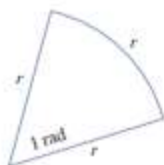


FIGURA 2

En particular, si se pone $a = r$ en la ecuación 3, se observa que un ángulo de 1 rad es el ángulo subtendido en el centro de un círculo por un arco de longitud igual al radio del círculo (véase la figura 2).

EJEMPLO 2

- (a) Si el radio de un círculo es de 5 cm, ¿qué ángulo está subtendido por un arco de 6 cm?
 (b) Si un círculo tiene un radio de 3 cm, ¿cuál es la longitud de un arco subtendido por un ángulo central de $3\pi/8$ rad?

SOLUCIÓN

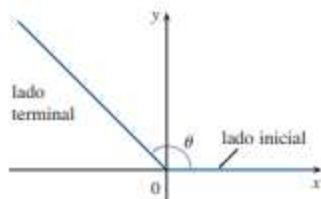
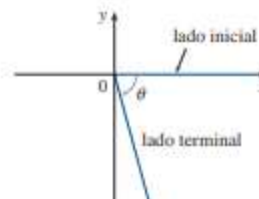
- (a) Usando la ecuación 3 con $a = 6$ y $r = 5$, se observa que el ángulo es

$$\theta = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ rad}$$

- (b) Con $r = 3$ y $\theta = 3\pi/8$ rad, la longitud de arco es

$$a = r\theta = 3\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{9\pi}{8} \text{ cm}$$

La **posición estándar** de un ángulo ocurre cuando se coloca su vértice en el origen de un sistema de coordenadas y su lado inicial en el eje x positivo, como en la figura 3. Un ángulo **positivo** se obtiene rotando el lado inicial en sentido contrario a las manecillas del reloj hasta que coincida con el lado terminal. De igual forma, ángulos **negativos** se obtienen mediante rotación en el sentido de las manecillas del reloj, como en la figura 4.

FIGURA 3 $\theta > 0$ FIGURA 4 $\theta < 0$

La figura 5 muestra varios ejemplos de ángulos en posición estándar. Nótese que ángulos diferentes pueden tener el mismo lado terminal. Por ejemplo, los ángulos $3\pi/4$, $-5\pi/4$ y $11\pi/4$ tienen los mismos lados inicial y terminal porque

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$$

y 2π rad representa una vuelta completa.

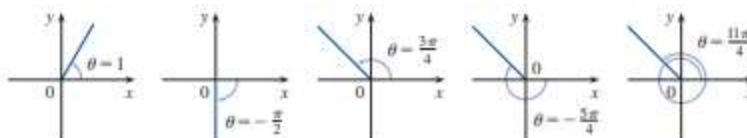


FIGURA 5
Ángulos en posición estándar



FIGURA 6

Las funciones trigonométricas

Para un ángulo agudo θ las seis funciones trigonométricas se definen como razones de longitudes de los lados de un triángulo rectángulo como se muestra a continuación (véase la figura 6).

4

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} & \operatorname{csc} \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} & \operatorname{sec} \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \\ \operatorname{tan} \theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} & \operatorname{cot} \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} \end{aligned}$$

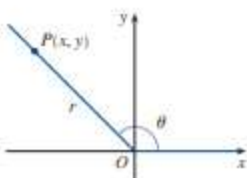


FIGURA 7

Esta definición no se aplica a los ángulos obtusos ni negativos, así que para un ángulo general θ en posición estándar sea $P(x, y)$ cualquier punto en el lado terminal de θ y r la distancia $|OP|$, como en la figura 7. Entonces se define

5

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{r} & \operatorname{csc} \theta &= \frac{r}{y} \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{x}{r} & \operatorname{sec} \theta &= \frac{r}{x} \\ \operatorname{tan} \theta &= \frac{y}{x} & \operatorname{cot} \theta &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Si $r = 1$ en la definición 5 y dibuja un círculo unitario con centro en el origen y rotula θ como en la figura 8, las coordenadas de P son $(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$.

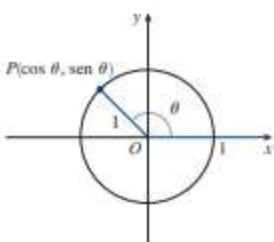


FIGURA 8

Como la división entre 0 es indefinida, $\operatorname{tan} \theta$ y $\operatorname{sec} \theta$ se indeterminan cuando $x = 0$ y $\operatorname{csc} \theta$ y $\operatorname{cot} \theta$ lo hacen cuando $y = 0$. Adviértase que las definiciones en (4) y (5) son congruentes cuando θ es un ángulo agudo.

Si θ es un número, la convención es que $\operatorname{sen} \theta$ significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es θ . Por ejemplo, la expresión $\operatorname{sen} 3$ implica que se trata de un ángulo de 3 rad. Cuando se determina una aproximación por calculadora de este número, se debe recordar fijar nuestra calculadora en modo de radianes, y después se obtiene

$$\operatorname{sen} 3 \approx 0.14112$$

Si se desea conocer el seno del ángulo 3° , se escribiría $\operatorname{sen} 3^\circ$ y con nuestra calculadora en modo de grados hallaría que

$$\operatorname{sen} 3^\circ \approx 0.05234$$

Las razones trigonométricas exactas para ciertos ángulos pueden obtenerse de los triángulos de la figura 9. Por ejemplo,

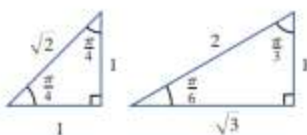


FIGURA 9

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} & \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \operatorname{cos} \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \operatorname{cos} \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2} \\ \operatorname{tan} \frac{\pi}{4} &= 1 & \operatorname{tan} \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\sqrt{3}} & \operatorname{tan} \frac{\pi}{3} &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

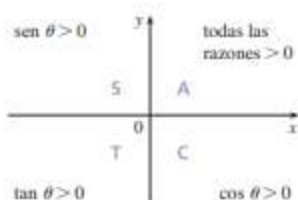


FIGURA 10

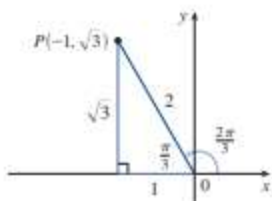


FIGURA 11

Los signos de las funciones trigonométricas para ángulos en cada uno de los cuatro cuadrantes pueden recordarse por medio de la regla "Antes Solo Tomaba Cálculo" que aparece en la figura 10.

EJEMPLO 3 Determine las razones trigonométricas exactas para $\theta = 2\pi/3$.

SOLUCIÓN En la figura 11 un punto en la recta terminal para $\theta = 2\pi/3$ es $P(-1, \sqrt{3})$. Por tanto, tomando,

$$x = -1 \quad y = \sqrt{3} \quad r = 2$$

en las definiciones de las razones trigonométricas se tiene que

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos \frac{2\pi}{3} &= -\frac{1}{2} & \tan \frac{2\pi}{3} &= -\sqrt{3} \\ \csc \frac{2\pi}{3} &= \frac{2}{\sqrt{3}} & \sec \frac{2\pi}{3} &= -2 & \cot \frac{2\pi}{3} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

La tabla siguiente da algunos valores de $\sin \theta$ y $\cos \theta$ determinados por el método del ejemplo 3.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

EJEMPLO 4 Si $\cos \theta = \frac{2}{5}$ y $0 < \theta < \pi/2$, halle las otras cinco funciones trigonométricas de θ .

SOLUCIÓN Como $\cos \theta = \frac{2}{5}$, se puede indicar que la hipotenusa tiene longitud 5 y el lado adyacente longitud 2 en la figura 12. Si el lado opuesto tiene longitud x , entonces el teorema de Pitágoras da $x^2 + 4 = 25$, así que $x^2 = 21$, $x = \sqrt{21}$. Ahora se puede usar el diagrama para escribir las otras cinco funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\sqrt{21}}{5} & \tan \theta &= \frac{\sqrt{21}}{2} \\ \csc \theta &= \frac{5}{\sqrt{21}} & \sec \theta &= \frac{5}{2} & \cot \theta &= \frac{2}{\sqrt{21}} \end{aligned}$$

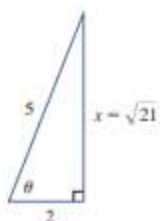


FIGURA 12

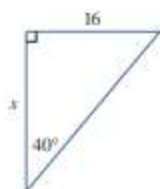


FIGURA 13

EJEMPLO 5 Use una calculadora para aproximar el valor de x en la figura 13.

SOLUCIÓN En el diagrama se observa que

$$\tan 40^\circ = \frac{16}{x}$$

Por tanto,

$$x = \frac{16}{\tan 40^\circ} \approx 19.07$$



FIGURA 2
Diagrama de una función f como una máquina

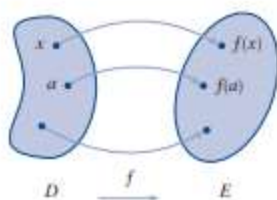


FIGURA 3
Diagrama de flechas para f

Es útil pensar en una función como una **máquina** (véase la figura 2). Si x está en el dominio de la función f , cuando x entra en la máquina, esta la acepta como una entrada apropiada y produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, puede pensar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas, y en el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

Las funciones preprogramadas en una calculadora son ejemplos de una función como una máquina. Por ejemplo, la tecla raíz cuadrada en la calculadora calcula esa función. Oprima la tecla etiquetada $\sqrt{}$ (o \sqrt{x}) e introduzca la entrada x ; si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; es decir, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geq 0$, entonces se presentará una aproximación a \sqrt{x} en la pantalla. Así, la tecla \sqrt{x} en la calculadora no es exactamente lo mismo que la función matemática f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

Otra forma de imaginar una función es con un **diagrama de flechas** como en la figura 3. Cada flecha conecta un elemento de D con un elemento de E . La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x , $f(a)$ está asociada con a , y así sucesivamente.

El método más común para visualizar una función es su **gráfica**. Si f es una función con dominio D , entonces su **gráfica** es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que estos son pares de entrada-salida). En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f .

La gráfica de una función f presenta una imagen útil del comportamiento o “historia de vida” de una función. Dado que la coordenada y de cualquier punto (x, y) en la gráfica es $y = f(x)$, se puede leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (véase la figura 4). La gráfica de f permite también tener una imagen visual del dominio de f en el eje x y su rango en el eje y como en la figura 5.

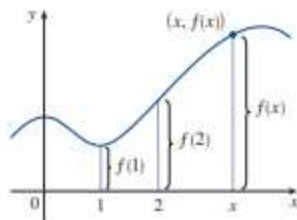


FIGURA 4

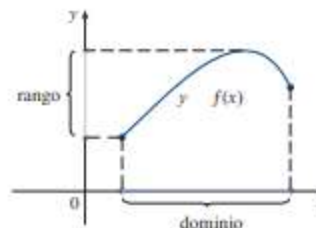


FIGURA 5

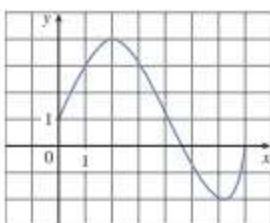


FIGURA 6
La notación por intervalos está dada en el apéndice A.

EJEMPLO 1 La gráfica de una función f se muestra en la figura 6.

- (a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$.
- (b) ¿Cuál es el dominio y el rango de f ?

SOLUCIÓN

(a) De la figura 6 se ve que el punto $(1, 3)$ está en la gráfica de f , por lo que el valor de f en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto en la gráfica que se encuentra arriba de $x = 1$ está 3 unidades arriba del eje x .)

Cuando $x = 5$, la gráfica se encuentra aproximadamente a 0.7 unidades por debajo del eje x , así que se estima que $f(5) \approx -0.7$.

(b) Vea que $f(x)$ está definida cuando $0 \leq x \leq 7$, por lo que el dominio de f es el intervalo cerrado $[0, 7]$. Observe que f toma todos los valores de -2 a 4 , por lo que el rango de f es

$$\{y \mid -2 \leq y \leq 4\} = [-2, 4]$$



Convención para el dominio

Si una función está dada por una fórmula y el dominio no se expresa explícitamente, la convención es que el dominio es el conjunto de todos los números para los que la fórmula tiene sentido y define un número real.

SOLUCIÓN

(a) Debido a que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como un número real), el dominio de f consta de todos los valores de x tales que $x + 2 \geq 0$. Esto es equivalente a $x \geq -2$, por lo que el dominio es el intervalo $[-2, \infty)$.

(b) Como

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

y no se permite la división entre 0, vea que $g(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Por tanto, el dominio de g es

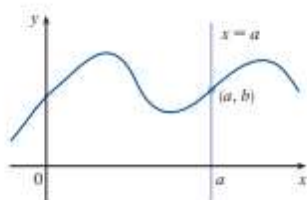
$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

que también puede escribirse en notación de intervalos como

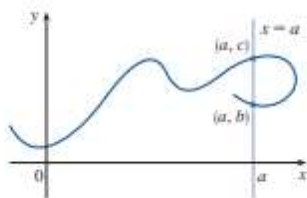
$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

La gráfica de una función es una curva en el plano xy . Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano xy son gráficas de funciones? Esta pregunta se contesta con la siguiente prueba.

La prueba de la recta vertical Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y solo si no hay recta vertical que se interseque con la curva más de una vez.



(a) Esta curva representa una función.



(b) Esta curva no representa una función.

FIGURA 13

La razón de la validez de la prueba de la vertical puede verse en la figura 13. Si cada recta vertical $x = a$ se interseca con una curva solo una vez, en (a, b) , entonces se define exactamente un valor funcional para $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ se interseca con la curva dos veces, en (a, b) y en (a, c) , entonces la curva no puede representar una función debido a que una función no puede asignar dos valores diferentes a a .

Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 2$ que se muestra en la figura 14(a) no es la gráfica de una función de x porque, como puede ver, hay rectas verticales que se intersecan con la parábola dos veces. La parábola, sin embargo, contiene las gráficas de *dos* funciones de x . Observe que la ecuación $x = y^2 - 2$ implica que $y^2 = x + 2$, por lo que $y = \pm\sqrt{x + 2}$. Por tanto, las mitades superior e inferior de la parábola son las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x + 2}$ del ejemplo 6(a) y $g(x) = -\sqrt{x + 2}$. Véanse las figuras 14(b) y (c).

Observe que si invierte los roles de x y y , entonces la ecuación $x = h(y) = y^2 - 2$ define a x como una función de y (con y como la variable independiente y x como la variable dependiente), y la parábola aparece ahora como la gráfica de la función h .

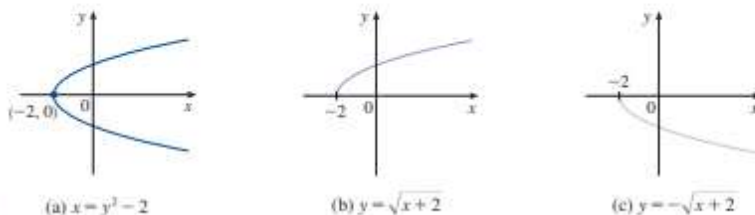


FIGURA 14

(a) $x = y^2 - 2$

(b) $y = \sqrt{x + 2}$

(c) $y = -\sqrt{x + 2}$

Funciones definidas por partes

Las funciones en los siguientes cuatro ejemplos se definen mediante diferentes fórmulas en distintas partes de sus dominios. Estas funciones se llaman **funciones definidas por partes**.

1.3 Funciones nuevas a partir de funciones previas

Esta sección empieza con las funciones básicas discutidas en la sección 1.2 para obtener funciones nuevas por medio del desplazamiento, estiramiento y reflexión de las gráficas. También se muestra cómo combinar pares de funciones utilizando operaciones aritméticas estándar y composición.

■ Transformaciones de funciones

Mediante la aplicación de ciertas transformaciones de la gráfica de una función dada, se pueden obtener las gráficas de algunas funciones relacionadas. Esto dará la posibilidad de esbozar las gráficas de muchas funciones rápidamente a mano. También permitirá expresar ecuaciones para las gráficas dadas.

Considere primero los **traslaciones**. Si c es un número positivo, entonces la gráfica de $y = f(x) + c$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada verticalmente hacia arriba una distancia de c unidades (ya que cada coordenada y se incrementa por el mismo número c). Por otro

lado, si $g(x) = f(x - c)$, donde $c > 0$, entonces el valor de g en x es el mismo que el valor de f en $x - c$ (c unidades a la izquierda de x). Por tanto, la gráfica de $y = f(x - c)$ es la gráfica de $y = f(x)$, desplazada c unidades a la derecha (véase la figura 1).

Desplazamientos vertical y horizontal Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

$y = f(x) + c$, desplace verticalmente c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x) - c$, desplace verticalmente c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x - c)$, desplace horizontalmente c unidades a la derecha la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x + c)$, desplace horizontalmente c unidades a la izquierda la gráfica de $y = f(x)$

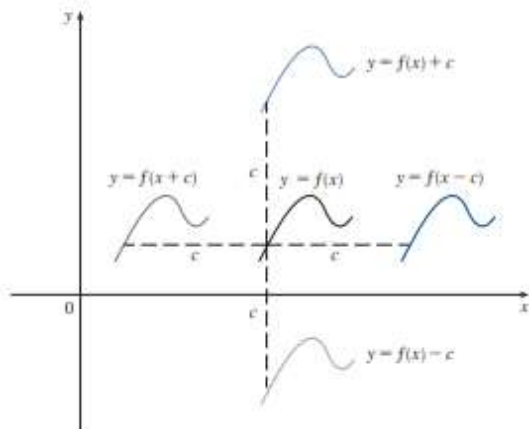


FIGURA 1 Traslación de la gráfica de f

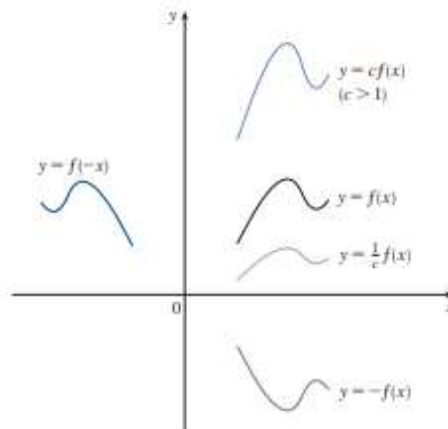


FIGURA 2 Estiramiento y reflexión de la gráfica de f

18a

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$$

18b

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

18c

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

Existen muchas identidades trigonométricas, pero las que se han enunciado son las de uso más frecuente en cálculo. Si olvidara alguna de las identidades de los ejemplos 13-18, recuerde que pueden deducirse de las ecuaciones 12a y 12b.

EJEMPLO 6 Halle todos los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$ tales que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$.

SOLUCIÓN Usando la fórmula de doble ángulo (15a), se reescribe la ecuación dada como

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x(1 - 2 \cos x) = 0$$

En consecuencia, hay dos posibilidades:

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{o} \quad 1 - 2 \cos x = 0$$

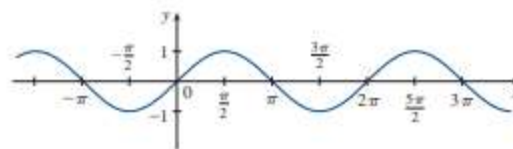
$$x = 0, \pi, 2\pi \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

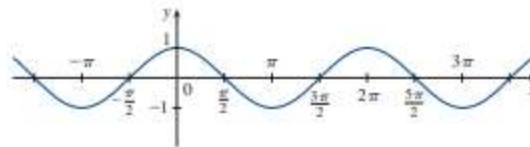
La ecuación dada tiene cinco soluciones: $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$ y 2π . ■

■ Gráficas de las funciones trigonométricas

La gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, que aparece en la figura 14(a), se obtiene trazando puntos para $0 \leq x \leq 2\pi$ y usando después la naturaleza periódica de la función (de la ecuación 11) para completar la gráfica. Note que los ceros de la función seno ocurren en los



(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$



(b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 14

La figura 3 ilustra estas transformaciones de alargamiento cuando se aplican a la función coseno con $c = 2$. Por ejemplo, para obtener la gráfica de $y = 2 \cos x$ multiplique la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = \cos x$ por 2. Esto significa que la gráfica de $y = \cos x$ se alarga verticalmente por un factor de 2.

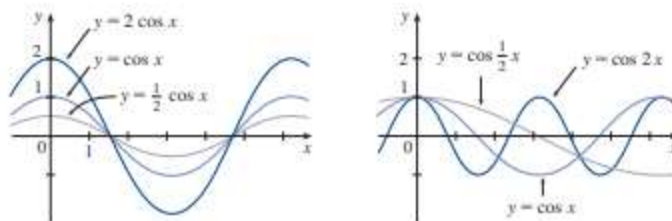


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Dada la gráfica de $y = \sqrt{x}$, use transformaciones para trazar la gráfica de $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$.

SOLUCIÓN La gráfica de la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$, obtenida de la figura 1.2.13(a) se muestra en la figura 4(a). En otras partes de la figura se ha trazado $y = \sqrt{x} - 2$ desplazándola 2 unidades hacia abajo, $y = \sqrt{x - 2}$ por desplazamiento de 2 unidades a la derecha, $y = -\sqrt{x}$ reflejando a través del eje x , $y = 2\sqrt{x}$ estirando verticalmente por un factor de 2, y $y = \sqrt{-x}$ reflejando a través del eje y .