



NOVA
NOVA SCHOOL OF
SCIENCE & TECHNOLOGY

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
MECÂNICA

RUI MIGUEL FERREIRA DA SILVA

Licenciado em Ciências de Engenharia Mecânica

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA BASEADA NA
TENSÃO DE ESTRUTURAS COM GRADIENTE DE
FUNCIONALIDADE

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Universidade NOVA de Lisboa

Setembro, 2022



OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA BASEADA NA TENSÃO DE ESTRUTURAS COM GRADIENTE DE FUNCIONALIDADE

RUI MIGUEL FERREIRA DA SILVA

Licenciado em Ciências de Engenharia Mecânica

Orientador: Dr. Pedro Samuel Gonçalves Coelho,
Professor Auxiliar, Universidade NOVA de Lisboa

Coorientador: Fábio Rúben Monteiro Conde,
Mestre, Universidade NOVA de Lisboa

Júri:

Presidente: Dr. José Manuel Cardoso Xavier,
Professor Auxiliar, FCT-NOVA

Arguente: Dr. João Mário Burguete Botelho Cardoso,
Professor Auxiliar, FCT-NOVA

Orientador: Dr. Pedro Samuel Gonçalves Coelho,
Professor Auxiliar, FCT-NOVA

Coorientador: Fábio Rúben Monteiro Conde,
Mestre, FCT-NOVA

Otimização topológica baseada na tensão de estruturas com gradiente de funcionalidade

Copyright © Rui Miguel Ferreira da Silva, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

*À minha querida mãe,
Paula Ferreira.*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, tenho de agradecer aos meus pais, mas em especial à minha mãe. Agradeço-lhe por me ter incentivado a nunca desistir e por me ter dado força para vencer todos os obstáculos que foram aparecendo ao longo da minha longa jornada académica.

Agradeço ao meu orientador e meu professor de referência, Prof. Dr. Pedro Coelho, por ter reconhecido o meu valor enquanto aluno, pela presença assídua no desenvolvimento desta dissertação, pelas várias discussões altamente produtivas no Laboratório de Mecânica Estrutural sobre os vários temas e abordagens relacionados com a Otimização Topológica e por me ter aberto portas para novas oportunidades que envolvessem a minha carreira profissional e académica.

Ao meu coorientador, Fábio Conde, agradeço-lhe o interesse que demonstrou em acompanhar esta dissertação, a disponibilidade, o *feedback* que partilhou comigo sobre as suas experiências académicas e a enorme ajuda na parte da programação.

À Cláudia Almeida, que embora não tivesse estado diretamente envolvida neste trabalho, agradeço-lhe a troca de opiniões, conselhos e a partilha de conhecimentos sobre linguagem APDL (ANSYS).

Ao Prof. Dr. João Cardoso e ao Prof. Dr. Tiago Silva, agradeço-lhes o tempo e disponibilidade que sempre tiveram em esclarecer-me dúvidas sobre as várias temáticas das Mecânicas dos Sólidos, mesmo em tempos extracurriculares, e por me explicarem sempre mais do que aquilo que muitas vezes só se aprendia em sala de aula. O meu interesse pela Mecânica Estrutural começou nas suas aulas.

Agradeço aos meus colegas do Departamento de Mecânica Estrutural pela entajuda, camaradagem, apoio e pelo excelente ambiente vivido no Laboratório de Mecânica Estrutural.

Como é óbvio, não posso deixar de agradecer aos grandes amigos que levo para a vida e que conheci aqui, na FCT, e que sempre me ajudaram quando mais precisei, Rafaela Correia, Laura Silva, Daniel Damásio, Rúben Tasnicenco, Rafael Batista, Bernardo Varzielas e Vladislav Kuznetsov.

Por fim, deixo também o meu agradecimento aos meus amigos de Leiria que já me acompanham há bastantes anos e que desempenharam um papel muito importante no meu percurso de vida, Hugo Brígido, Hugo Serrano e Pedro Silva.

“Onde pode acolher-se um fraco humano,
Onde terá segura a curta vida,
Que não se arme e se indigne o Céu sereno
Contra um bicho da terra tão pequeno?”
(110-113)
CAMÕES, Luís de. *Op. cit.* (Canto I)

RESUMO

Na prática comum de engenharia, o Homem acaba sempre por ter de se preocupar com o controlo das tensões para evitar que o material falhe. As formulações tradicionais baseadas no controlo do volume ou da *compliance* resultam em *designs* ideais de um ponto de vista da rigidez. Contudo, os *designs* orientados para serem altamente resistentes desempenham, cada vez mais, um papel crucial em engenharia.

O foco deste trabalho é a otimização topológica multimaterial baseada na tensão, que não está suficientemente coberta na literatura. Mais especificamente, a resolução do problema de minimização do máximo da tensão de von Mises ao nível macroestrutural, através de uma lei de interpolação adequada, onde se investiga o desempenho dos materiais com gradiente de funcionalidade (FGMs) na mitigação de tensões. Estes são obtidos como uma extensa variação suave das propriedades do material à conta de variar as frações volúmicas de dois materiais sólidos isotrópicos ao longo do domínio de projeto. Para além disso, é utilizado um método baseado na variável densidade, em conjunto com outras técnicas e análises bem estabelecidas e fundamentadas, para resolver as dificuldades conhecidas que envolvem controlar a tensão nos problemas de otimização.

Neste trabalho são revisitados três exemplos clássicos de teste, placa com furo sujeita a carregamento hidrostático, placa com furo sujeita a corte puro e *MBB-Beam*. Primeiramente, são aplicadas as formulações de minimização da *compliance* e do pico de tensão a estruturas de material único, as quais mostram que a solução mais rígida e mais resistente são coincidentes. Por fim, estendendo a formulação baseada na tensão aos materiais com gradiente de funcionalidade, são obtidos níveis de tensão significativamente mais reduzidos nestas soluções em comparação com as soluções de um único material. As primeiras aproximam-se de *fully stressed designs*, ótimos na mitigação de tensões.

Palavras chave: otimização topológica, multimaterial, macroescala, tensão, FGMs

ABSTRACT

In common engineering practice, there is always a concern regarding the stress control as it prevents material failure. The well-known compliance-based formulations result in stiffness-oriented optimal designs. However, strength-oriented designs are crucial in engineering practice.

The present work addresses multi-material stress-based topology optimization, not well covered in the literature. More specifically, it aims to minimize the von Mises stress peak at the macrostructural level, through an appropriate interpolation law, where the performance of functionally graded materials (FGMs) in stress mitigation is investigated. These are obtained as an extensive smooth variation of material properties on account of varying composition's volume fractions of two isotropic solids throughout the design domain. Furthermore, one uses a density-based method, combined with other well-established techniques, to overcome the stress control difficulties in optimization problems.

Three benchmark problems are revisited here, plate with a hole under hydrostatic load, plate with a hole under shear load and MBB-Beam. Firstly, solving both the compliance and stress-based formulations in a single-material setting, one obtains the same design, i.e., the stiffest and strongest designs coincide. Ultimately, extending the stress-based formulation to graded materials, lower stress peaks are achieved in these solutions when compared to the single-material ones. The FGM solutions nearly attain fully stressed designs, optimal for stress mitigation.

Keywords: topology optimization, multi-material, macrostructure, stress, FGMs

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	1
1.2	Objetivos	2
1.3	Organização do documento	3
2	ESTADO DA ARTE.....	5
2.1	Enquadramento histórico sobre Otimização Estrutural	5
2.2	Categorias principais da Otimização Estrutural	6
2.3	Desempenho da Otimização Estrutural no projeto atual	8
2.4	Otimização topológica	12
2.4.1	Métodos utilizados em otimização topológica.....	13
2.4.2	Método das curvas de nível versus Método baseado na variável densidade....	16
2.4.3	Formulação do problema discreto	16
2.4.4	Formulação do problema relaxado	19
2.4.5	Formulações equivalentes para o problema de minimização da compliance ...	20
2.4.6	Energia elástica de deformação versus Compliance	24
2.5	Otimização topológica multimaterial	25
2.6	Materiais com gradiente de funcionalidade	27
2.7	Desempenho dos FGMs na mitigação de tensões.....	39
2.8	Fabrico aditivo no contexto dos FGMs.....	44
2.9	Otimização topológica baseada na tensão com FGMs	46
3	PRINCÍPIOS DE OTIMIZAÇÃO	53

3.1	Formulação de um problema de otimização	53
3.2	Algoritmos de otimização	54
3.2.1	Algoritmos de otimização baseados no gradiente	54
3.2.2	Algoritmos de otimização não baseados no gradiente	56
3.3	Análise de sensibilidades	57
3.3.1	Métodos analíticos.....	57
3.3.2	Método das diferenças finitas	61
4	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM FGM BASEADO NA TENSÃO	63
4.1	Introdução	63
4.2	Lei de interpolação de material baseada na densidade	64
4.3	Tensão de von Mises	67
4.4	Formulação do problema min-max	68
4.5	Formulação do problema de tensão envolvendo o FGM.....	71
4.6	Técnicas de filtragem	72
5	CÁLCULO DE SENSIBILIDADES.....	79
5.1	Introdução	79
5.1.1	Compliance.....	79
5.1.2	Tensão de von Mises	82
5.1.3	Volume.....	89
5.1.4	Função de penalização da variável topológica.....	90
6	PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS E MÓDULO DE OTIMIZAÇÃO	91
6.1	Introdução	91
6.2	Estrutura do programa FEM 2D.....	92
6.3	Alterações efetuadas nas subrotinas ASSEMB, ESTIFO, TANMOD e STRESS do programa FEM 2D.....	94
6.4	Programa main para realização do módulo de otimização.....	96
7	RESULTADOS E DISCUSSÃO	99
7.1	Placa com furo sujeita a um carregamento hidrostático	100
7.1.1	Malha de elementos finitos	100
7.1.2	Design inicial.....	102
7.1.3	Minimização da compliance com estrangimento de volume	103

7.1.4	Minimização do pico de tensão com um só material	105
7.1.5	Minimização do pico de tensão com FGM.....	107
7.2	Placa com furo sujeita ao corte puro.....	109
7.2.1	Malha de elementos finitos	109
7.2.2	Design inicial.....	110
7.2.3	Minimização da compliance com estrangulamento de volume	111
7.2.4	Minimização do pico de tensão com um só material	112
7.2.5	Minimização do pico de tensão com FGM.....	114
7.3	MBB-beam	116
7.3.1	Malha de elementos finitos	116
7.3.2	Design inicial.....	116
7.3.3	Minimização da compliance com estrangulamento de volume	117
7.3.4	Minimização do pico de tensão com um só material	117
7.3.5	Minimização do pico de tensão com FGM.....	118
8	CONCLUSÕES E TRABALHOS PARA O FUTURO	121
8.1	Conclusões.....	121
8.2	Trabalhos futuros	125
A	VALIDAÇÃO DE RESULTADOS ENTRE FEM 2D E ANSYS®.....	139
A.1	Cálculo analítico da tensão de von Mises	139
A.2	Média volumétrica da tensão de von Mises	140
A.3	Correspondência entre carregamento distribuído e cargas nodais no elemento quadrilátero de 8 nós	141
A.4	Casos de estudo	144
B	MATERIAIS LINEAR ELÁSTICOS E ISOTRÓPICOS	151
B.1	Materiais com comportamento linear elástico	151
B.2	Estado plano de tensão	152
B.3	Estado plano de deformação.....	153
C	VALIDAÇÃO DE RESULTADOS ENTRE MÉTODO ADJUNTO E DIFERENÇAS FINITAS	155
C.1	Exemplo prático para validação de resultados	155
C.2	Observações.....	160

D REPRESENTAÇÃO DO VETOR DE CARGA FICTÍCIA NO ELEMENTO Q8 À FLEXÃO.....	163
D.1 Exemplo	163
D.2 Representação do vetor de carga fictícia.....	164

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Categorias da otimização estrutural. (a) Otimização de dimensões, (b) Otimização de forma, (c) Otimização topológica. (Adaptado de [113])	6
Figura 2.2: Exemplos de <i>Ground Structures</i> . [44]	8
Figura 2.3: Categorias de otimização nas fases de projeto. (Adaptado de [116])	10
Figura 2.4: Relevância da solução ótima do projeto de componentes e a sua relação com a facilidade de fabrico e desempenho. [91]	10
Figura 2.5: Nervuras do bordo de ataque e fuselagem interna de uma porta do Airbus A380. [114]	11
Figura 2.6: (a) Otimização topológica no projeto do <i>pylon</i> de aeronaves, (b) Ilustração do processo de <i>design</i> na Jaguar Cars Ltd com recurso à otimização topológica. [15, 114]	12
Figura 2.7: Efeito do expoente de penalidade na lei de potência SIMP, tomando $E(0) = 0$	15
Figura 2.8: Função objetivo dos problemas (2.23), 4º quadrante, e (2.24), 1º quadrante, em função do campo de variáveis de densidade topológica.	23
Figura 2.9: Otimização topológica multimaterial da estrutura de um autocarro. [30]	26
Figura 2.10: Ilustração esquemática da composição de um FGM de dois componentes. A composição varia gradualmente desde a totalidade de um componente até à totalidade do outro. (Adaptado de [50])	28
Figura 2.11: Células de base de um FGM. (Adaptado de [51])	29
Figura 2.12: (a) FGM 2D otimizado com uma gradação linear no módulo de deformação volumétrica, (b) FGM 3D otimizado com uma variação do módulo de elasticidade transversal, em primeiro a microestrutura otimizada e em segundo a secção transversal do FGM de modo a ilustrar a sua estrutura interna. (Adaptado de [51])	30
Figura 2.13: Alguns exemplos de FGMs na natureza que contêm estruturas com propriedades funcionais. [62]	31
Figura 2.14: Representação da matriz óssea nos dois tipos de tecido ósseo, cortical e trabecular, demonstrando a coexistência de ambos os tipos de FGM numa única estrutura natural. (Adaptado de [59, 63])	32
Figura 2.15: Áreas de aplicação prática dos FGM. (Adaptado de [62])	34

Figura 2.16: Mistura dos materiais constituintes em pontos arbitrários de uma estrutura. [72]	35
Figura 2.17: Limites de Hashin-Shtrikman e modelo material. [72]	36
Figura 2.18: Problema de minimização da <i>compliance</i> média de uma viga em balanço: a) o <i>design</i> do problema; b) <i>design</i> inicial. (Adaptado de [72])	37
Figura 2.19: <i>Design</i> final ótimo. [72]	37
Figura 2.20: Regressão cúbica ajustada do módulo de Young E em função da fração volúmica f de material polimérico. [74]	38
Figura 2.21: Distribuição da tensão de von Mises ao longo do eixo horizontal de uma placa com furo central, revestido por uma camada de material, sujeita a um carregamento hidrostático. (Adaptado de [91])	42
Figura 2.22: (a) <i>Design</i> ótimo da microestrutura sujeita a um carregamento hidrostático e com uma fração volúmica de 95%, considerando 10 fases de material, (b) <i>Design</i> ótimo da microestrutura sujeita a um carregamento hidrostático e com uma fração volúmica de 99%, considerando 15 fases de material. (Adaptado de [91])	43
Figura 2.23: Funções de interpolação que relacionam a tensão de cedência e o módulo de Young na formulação FGM. [73]	50
Figura 2.24: <i>Design</i> ótimo das microestruturas considerando diferentes frações volúmicas para os casos: (a) SMTO, (b) MMT0 e (c) FGMT0. (Adaptado de [112])	51
Figura 4.1: Modelo material. (a) Domínio material à macroescala discretizado numa grelha quadrada, (b) elemento finito e (c) lei de interpolação de material baseada na densidade	65
Figura 4.2: Gráfico comparativo entre os limites de HS e a lei de interpolação SIMP por interpolação de dois sólidos isotrópicos, utilizando diferentes valores do expoente $p2$. (Adaptado de [112])	66
Figura 4.3: Dois segmentos de área constante de um cabo pendurado carregado com um peso P .	69
Figura 4.4: Descontinuidade da função máxima	69
Figura 4.5: Ilustração de problemas decorrentes da otimização topológica baseada na densidade no <i>MBB-beam</i> . (a) malha em formato de <i>checkerboard</i> , (b) dependência da topologia ótima no refinamento da malha. (Adaptado de [124])	73
Figura 4.6: Vizinhança do elemento k para um raio de filtragem $r_{min} = 1.99$.	76
Figura 5.1: Identificação dos graus de liberdade do elemento quadrilátero de 8 nós (16 GDL).	85
Figura 5.2: Malha constituída por 2 elementos finitos quadriláteros de 8 nós (26 GDL) e vetor de carga fictícia do primeiro elemento.	86
Figura 5.3: (a) Simulação de uma placa à tração com $\sigma = 1$ Pa através de um elemento quadrilátero de 8 nós, (b) distribuição das cargas fictícias pelos nós do elemento	87
Figura 5.4: Discretização do domínio de projeto Ω em ne elementos finitos quadriláteros.	89

Figura 6.1: Constituição do programa FEM 2D. Pré-Processamento, Processamento e Pós-Processamento e respectivas subrotinas.	92
Figura 6.2: Fluxograma do algoritmo desenvolvido para o problema de otimização topológica baseado na tensão definido em (4.9).	97
Figura 7.1: Forças concentradas nos nós de uma aresta de um elemento Q8, presente na discretização $n_x \times n_y$ de um quarto de placa quadrada de dimensões unitárias, e que simula uma tensão distribuída unitária de 1 MPa.	101
Figura 7.2: Modelação em elementos finitos de um quarto de uma placa sujeita a um carregamento hidrostático utilizando o elemento Q8.	101
Figura 7.3: Campo de densidade inicial para o caso da placa sujeita a um carregamento hidrostático com uma fração volúmica de 90%.	103
Figura 7.4: Resultados SMTO para o problema de minimização da <i>compliance</i> utilizando um carregamento hidrostático e com diferentes discretizações da malha: (a) 30×30 , (b) 40×40 e (c) 50×50 . O valor mínimo e máximo da tensão nos <i>designs</i> estão indicados na escala a cores.	103
Figura 7.5: Resultados SMTO para o problema de minimização do pico de tensão utilizando um carregamento hidrostático e com diferentes discretizações da malha: (a) 30×30 , (b) 40×40 e (c) 50×50	105
Figura 7.6: Campo de densidade inicial para o problema FGMTTO utilizando um carregamento hidrostático.	107
Figura 7.7: <i>Designs</i> ótimos para o problema de minimização do pico de tensão em FGM utilizando um carregamento hidrostático e considerando duas discretizações da malha: (a) 30×30 , (b) 40×40	108
Figura 7.8: Modelação em elementos finitos de um quarto de uma placa sujeita ao corte puro utilizando o elemento Q8.	110
Figura 7.9: Resultados SMTO para o problema de minimização da <i>compliance</i> utilizando um carregamento de corte e com diferentes discretizações da malha: (a) 30×30 , (b) 40×40 . O valor mínimo e máximo da tensão nos <i>designs</i> estão indicados na escala a cores.	111
Figura 7.10: Resultado SMTO para o problema de minimização da <i>compliance</i> e considerando corte puro para uma malha quadrada discretizada em 30×30 elementos sem recorrer a uma <i>continuation approach</i> no raio de filtragem.	112
Figura 7.11: Resultados SMTO para o problema de minimização do pico de tensão utilizando um carregamento de corte e com diferentes discretizações da malha: (a) 30×30 , (b) 40×40	113
Figura 7.12: <i>Designs</i> ótimos para o problema de minimização do pico de tensão em FGM utilizando um carregamento de corte e considerando duas discretizações da malha: (a) 30×30 , (b) 40×40	114

Figura 7.13: Modelação em elementos finitos de metade do <i>MBB-beam</i> utilizando o elemento Q8. As forças concentradas no canto superior esquerdo correspondem a uma tensão distribuída de 1 MPa.....	116
Figura 7.14: Resultado SMTO para o problema de minimização da <i>compliance</i> considerando uma malha 60×20 . O valor mínimo e máximo da tensão nos <i>designs</i> estão indicados na escala a cores.....	117
Figura 7.15: Resultado SMTO para o problema de minimização do pico de tensão com uma discretização de 60×20 elementos.	118
Figura 7.16: <i>Design</i> ótimo para o problema de minimização do pico de tensão em FGM. No topo tem-se a distribuição do módulo de Young (à esquerda) e a distribuição do campo de tensão (à direita) e no fundo tem-se a distribuição de ρ_1 (à esquerda) e a distribuição de ρ_2 (à direita). A discretização é de 60×20 elementos.....	119
Figura A.1: <i>Patch test</i> para validação da média volumétrica.....	140
Figura A.2: Carregamento distribuído q , aplicado num dos lados do elemento Q8, e respetivas forças nodais equivalentes.	143
Figura A.3: Alocação de um carregamento tangente distribuído uniformemente ao longo de nós igualmente espaçados.....	143
Figura A.4: Placa de dimensões unitárias sujeita a uma tensão de tração σ_{xx}	144
Figura A.5: Modelação numérica da placa da figura A.4 utilizando um único elemento Q8.	145
Figura A.6: Placa de dimensões unitárias sujeita às tensões de tração σ_{xx} e σ_{yy}	145
Figura A.7: Modelação completa da placa da figura A.6 com recurso a um único elemento Q8.	146
Figura A.8: Modelação de um quarto da placa da figura A.7.....	146
Figura A.9: Placa de dimensões unitárias sujeita a uma tensão de tração σ_{xx} e uma tensão de compressão σ_{yy}	147
Figura A.10: Placa de dimensões unitárias sujeita às tensões de corte τ_{xy} e τ_{yx}	148
Figura A.11: Modelação da placa da figura A.10 com recurso a um único elemento Q8.	148
Figura A.12: Placa de dimensões unitárias sujeita às tensões de corte τ_{xy} e τ_{yx} e às tensões de tração σ_{xx} e σ_{yy}	149
Figura A.13: Modelação da placa da figura A.12 com recurso a um único elemento Q8.	149
Figura C.1: Viga em balanço para validação de resultados entre método adjunto e diferenças finitas.....	155
Figura D.1: Modelação de uma placa de dimensões unitárias através de quatro elementos quadriláteros de 8 nós sujeita a uma tensão distribuída unitária $\sigma_{yy} = 1$ Pa aplicada na aresta inferior.....	163
Figura D.2: Ilustração do vetor de carga fictícia em cada um dos quatro elementos da estrutura da figura D.1.....	164

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1: Resultados do problema de minimização do pico de tensão de von Mises para microestruturas com n fases de material. [91].....	43
Tabela 2.2: Valores de tensão (MPa) obtidos para o problema FGMT0 considerando diferentes frações volúmicas de material. (Adaptado de [112]).....	52
Tabela 3.1: Tipos de variáveis de projeto dependendo da formulação do problema de otimização estrutural. [116].....	53
Tabela 7.1: Propriedades do aço (sólido rígido) e alumínio (sólido flexível).....	99
Tabela 7.2: Valores de <i>compliance</i> [J] e do pico de tensão [MPa] para os resultados SMTO mostrados na figura 7.4.	105
Tabela 7.3: Valores de <i>compliance</i> [J] retirados do problema clássico (na verdade aumentados aqui em 0,1%), que servem como limite para o constrangimento de <i>compliance</i> , e do pico de tensão [MPa] para os resultados SMTO mostrados na figura 7.5.....	106
Tabela 7.4: Valores de <i>compliance</i> [J] e tensão [MPa] para os <i>designs</i> FGMT0 mostrados na figura 7.7 utilizando um carregamento hidrostático e considerando duas discretizações da malha de elementos finitos.	108
Tabela 7.5: Valores de <i>compliance</i> [J] e do pico de tensão [MPa] para os resultados SMTO mostrados na figura 7.9.	112
Tabela 7.6: Valores de <i>compliance</i> [J] retirados do problema clássico (aumentados aqui em 0,1%), que servem como limite para o constrangimento de <i>compliance</i> , e do pico de tensão [MPa] para os resultados SMTO mostrados na figura 7.11.....	113
Tabela 7.7: Valores de <i>compliance</i> [J] e tensão [MPa] para os <i>designs</i> FGMT0 mostrados na figura 7.12 utilizando um carregamento de corte e considerando duas discretizações da malha de elementos finitos.	114
Tabela 7.8: Valores de <i>compliance</i> [J] e tensão [MPa] para os problemas SMTO e FGMT0 de minimização do pico de tensão e respetiva comparação de resultados.....	119
Tabela C.1: Comparação de resultados entre método adjunto e diferenças finitas para o cálculo da derivada da tensão de von Mises em relação à variável de densidade ρ_1, i	157

Tabela C.2: Comparação de resultados entre método adjunto e diferenças finitas para o cálculo da derivada da tensão de von Mises em relação à variável de densidade ρ_2, i	158
Tabela C.3: Valor da derivada da tensão de von Mises relativamente à variável de densidade topológica ρ_1, i calculado por diferenças finitas para vários valores de perturbação Δx	159
Tabela C.4: Erro relativo em percentagem entre os valores obtidos por diferenças finitas para vários valores de perturbação e os valores obtidos através do método adjunto, ambos para a variável topológica ρ_1, i	160

SIGLAS

AG	Algoritmo Genético.
AM	<i>Additive Manufacturing.</i>
CA	<i>Continuation Approach.</i>
CAD	<i>Computer-Aided Design.</i>
CBG	Célula de Base Graduada.
CBP	Célula de Base Periódica.
DIC	<i>Digital Image Correlation.</i>
DM	<i>Digital Material.</i>
DMO	<i>Discrete Material Optimization.</i>
FGM	<i>Functionally Graded Material.</i>
FGMTO	<i>Functionally Graded Material Topology Optimization.</i>
GDL	Graus De Liberdade.
GRASP	<i>Greedy Randomized Adaptive Search Procedure.</i>
HS	<i>Hashin-Shtrikman.</i>
LMD	<i>Laser Metal Deposition.</i>
LSM	<i>Level-Set Method.</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos.
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes.</i>
MMTO	<i>Multi-Material Topology Optimization.</i>
PFM	<i>Phase-Field Method.</i>
GP	<i>Gauss Points.</i>
RAMP	<i>Rational Approximation of Material Properties.</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization.</i>
SLM	<i>Selective Laser Melting.</i>
SMTO	<i>Single-Material Topology Optimization.</i>
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming.</i>
WAAM	<i>Wire Arc Additive Manufacturing.</i>

SÍMBOLOS E NOTAÇÕES

Latim

- a_E Forma bilinear da energia.
- [**B**] Matriz de deformação-deslocamento.
- C *Compliance*.
- C^* Limite superior do constrangimento de *compliance*.
- C_{ijkl} Tensor de flexibilidade.
- c_i Parâmetro da violação de constrangimentos do MMA.
- $\text{dist}(e, i)$ Distância entre o centro do elemento e e o centro do elemento i .
- $\text{dist}(j, e)$ Distância entre o centro do elemento j e o centro do elemento e .
- E Módulo de Young.
- E^+ Módulo de Young do material de base mais rígido.
- E^- Módulo de Young do material de base mais flexível.
- E_e Módulo de Young do elemento e .
- E**, E_{ijkl} Tensor de rigidez do material.
- [**E**] Matriz constitutiva que contém as constantes elásticas.
- E_e** Tensor de rigidez do elemento e .
- E_{ad} Tensor de rigidez admissível.
- $E^{(1)}$ Tensor de rigidez da fase de material sólido.
- $E^{(0)}$ Tensor de rigidez da fase de vazio.
- E⁺** Tensor de rigidez da fase sólida mais rígida.
- E⁻** Tensor de rigidez da fase sólida mais flexível.

E_{HS}^+	Limite superior de <i>Hashin-Shtrikman</i> .
E_{HS}^-	Limite inferior de <i>Hashin-Shtrikman</i> .
\mathbf{f}	Vetor das cargas exteriores aplicadas.
f, f_0	Função objetivo.
$f_b, \{\mathbf{F}\}$	Forças mássicas.
f_i	Constrangimento de desigualdade i .
$\tilde{f}_0^{(k)}$	Função aproximadora convexa da função f_0 do subproblema do MMA da iteração k .
$\tilde{f}_i^{(k)}$	Função aproximadora convexa da função f_i do subproblema do MMA da iteração k .
g, g_j	Constrangimento de desigualdade.
g_e	Constrangimento na tensão equivalente do elemento e .
h_k	Constrangimento de igualdade.
\hat{H}_i, \hat{H}_j	Operador de convolução.
\mathbf{K}	Matriz de rigidez global.
\mathbf{K}_e	Matriz de rigidez do elemento e .
IA	Número total de nós do elemento finito quadrilátero de oito nós.
ℓ	Trabalho total das forças exteriores aplicadas.
L	Comprimento de um elemento finito quadrilátero de oito nós.
n	Número de variáveis de projeto.
ne, n^e, N	Número de elementos finitos que constituem a malha.
n_x	Número de elementos finitos da malha segundo a direção x .
n_y	Número de elementos finitos da malha segundo a direção y .
n^{GDL}	Número de graus de liberdade por cada nó de um dos elementos finitos da malha.
n^{LC}	Número de casos de carga.
n^{LSF}	Número de <i>Level-Set Functions</i> .
$[\mathbf{N}]$	Matriz das funções de forma.
m	Número de constrangimentos.
m^{crit}	Número de constrangimentos críticos.
p	Expoente de penalidade utilizado no método SIMP.
p_1	Expoente de penalização da variável topológica.

p_2	Expoente de penalização da variável de seleção de material.
q	Carregamento distribuído quadrático.
\mathbb{R}^d	Conjunto de todos os pontos do plano ($d = 2$) ou do espaço ($d = 3$).
r_{\min}	Raio de aplicação do filtro de densidades ou sensibilidades.
$\{\mathbf{r}_e\}$	Vetor das cargas aplicadas aos nós de uma estrutura, por elementos.
\mathcal{S}	Conjunto dos campos de tensão estaticamente admissíveis.
\mathcal{S}	Energia elástica de deformação total.
\mathcal{S}^e	Energia elástica de deformação no elemento e .
\mathbf{s}	Variável de posição espacial do domínio Ω .
t	<i>Boundary Traction</i> s.
U	Espaço dos campos de deslocamento cinematicamente admissíveis.
u	Campo de deslocamentos da estrutura.
u^*	Campo de deslocamentos ótimo da estrutura.
\mathbf{u}, u_k, u_l	Campo de deslocamentos nodais.
$\bar{u}_{k\alpha}, \bar{u}_{l\alpha}$	Deslocamentos nodais do elemento quadrilátero de oito nós.
V	Volume ou área.
V^*	Volume ou área impostos.
V_f	Fração volúmica de material.
V_f^*	Limite superior do constrangimento de fração volúmica.
\mathbf{x}	Vetor das variáveis de projeto.
$\underline{x}_i^l, \underline{x}_j$	Limite inferior das variáveis de projeto.
\bar{x}_i^u, \bar{x}_j	Limite superior das variáveis de projeto.
Δx_i	Pequena perturbação do valor da variável de projeto i .
\mathbf{y}	Vetor das variáveis artificiais do subproblema do MMA.
\mathbf{z}	Vetor de carga fictícia.
z	Variável artificial do subproblema do MMA.
\bar{z}	Variável artificial que representa o limite de tensão.

Grego

Γ	Fronteira delimitadora do domínio de projeto.
Γ^j	Fronteira da <i>Level-Set Function</i> j .
Γ_T	Região da fronteira Γ à tração.
δ	Medida em percentagem de quanto as soluções de material com gradiente funcional são mitigadas em termos de tensão em relação às soluções de material único.
$\delta^{err.}$	Erro relativo entre o valor teórico mínimo e o valor numérico da tensão máxima de von Mises.
δ_{ie}, δ_{lk}	Delta de Kronecker.
ε	Parâmetro do ε -relaxation.
$\varepsilon_{kl}, \boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor das deformações.
$\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$	Vetor dos valores iniciais de deformação.
ξ_1	Limite superior do constrangimento de penalização dos valores intermédios da variável topológica.
λ	Primeira constante de Lamé.
$\hat{\lambda}$	Primeira constante de Lamé para estado plano de tensão.
$\boldsymbol{\lambda}$	Vetor adjunto.
μ	Segunda constante de Lamé.
v	Deslocamento virtual arbitrário.
π	Energia potencial total.
ρ_e, ρ_i	Variável de densidade artificial associada ao elemento e/i .
$\tilde{\rho}_e$	Densidade modificada do elemento e .
ρ_1	Variável topológica que identifica a presença ou ausência de material.
ρ_2	Variável responsável pela seleção de material.
ρ_{\min}	Valor mínimo para as variáveis de densidade artificial.
$\rho, \boldsymbol{\rho}$	Campo de densidade.
$\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \tilde{\rho}_{j,i}$	Campo de densidade filtrada.
$\boldsymbol{\rho}_1$	Campo de densidade que contém as variáveis topológicas.
$\boldsymbol{\rho}_2$	Campo de densidade que contém as variáveis de seleção de material.
$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1, \tilde{\rho}_{1,e}, \tilde{\rho}_{1,i}$	Campo de densidade filtrada associado às variáveis topológicas.

$\widetilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_{2,i}$	Campo de densidade filtrada associado às variáveis de seleção de material.
ρ_e^p	Função de peso para a seleção de material no elemento e .
σ_{ij}	Tensor das tensões.
$\langle \sigma_{ij} \rangle$	Tensor das tensões médio aplicado.
σ^{VM}	Tensão de von Mises.
σ_e^{VM}	Tensão de von Mises no elemento e .
$\sigma_t _{\Gamma}$	Tensão tangencial ao longo da fronteira de tração livre Γ do furo.
$\{\sigma_0\}$	Vetor dos valores iniciais de tensão.
ν	Coefficiente de Poisson.
φ	Função degrau.
φ_1	Medidor do nível de valores intermédios presentes no campo de densidade filtrada da variável topológica.
Φ_j	<i>Level-Set Function</i> j .
$\{\Phi\}$	Tração distribuída.
ϕ_α	Função de forma associada ao nó α .
Ψ	Função genérica.
Ω	Domínio de projeto.
$\Omega^j, \Omega^{\text{mat}}$	Subdomínio ocupado por material.
Ω^{vaz}	Subdomínio ocupado por vazio.
$ \Omega^{\text{mat}} $	Volume ou área do subdomínio ocupado por material.
$ \Omega _e, \Omega_e , \Omega _i$	Área ou volume do elemento e/i .
ω	Fração volúmica do material de base mais rígido.

INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Nas últimas décadas, a utilização de computadores veio possibilitar, com a ajuda de modelos matemáticos adequados e de métodos numéricos, resolver problemas práticos cada vez mais desafiantes na área da engenharia. Neste sentido, e no contexto da mecânica estrutural, surge a necessidade de desenvolver métodos numéricos que permitam projetar estruturas cada vez mais eficientes. Os métodos numéricos constituem uma ferramenta poderosíssima capaz de analisar problemas reais de engenharia particularmente desafiadores. Não obstante, é a otimização estrutural que, aliada aos métodos numéricos, verdadeiramente permite encontrar soluções estruturais mais eficientes.

Nitidamente, sabe-se que o desempenho e eficiência das estruturas estão relacionados com o material que é utilizado. Materiais estruturais não convencionais, como é o caso dos compósitos, que resultam da combinação de dois ou mais materiais distintos para obter um novo material que, no seu todo, apresenta melhores propriedades que os materiais que lhe deram origem, têm vindo a ser cada vez mais utilizados em engenharia. Este tipo de materiais acabam por possuir um enorme interesse nas indústrias aeroespacial, aeronáutica, automóvel ou até na indústria biomédica. Por exemplo, porque permitem obter estruturas mais leves, altamente resistentes e com baixos níveis de tensão. Contudo, os materiais compósitos revestem-se de grandes desafios, por um lado, em relação aos processos de modelação computacional e, por outro, em relação aos processos tecnológicos de fabrico.

O surgimento, na década de 80, de uma nova classe de materiais compósitos avançados, designados por materiais com gradiente de funcionalidade, com propriedades equivalentes que variam gradualmente ao longo de uma ou mais direções do espaço, veio possibilitar pela primeira vez, no âmbito da indústria aeroespacial, o controlo da resposta térmica dos materiais da fuselagem exterior dos aviões espaciais. Mais tarde, estes materiais possibilitaram também a diminuição do fator de concentração de tensões ao redor de furos em placas, demonstrando serem um tipo de materiais que podiam superar quaisquer outros materiais convencionais de

engenharia. Mas, por mais incrível que pareça, os materiais com gradiente de funcionalidade são também excepcionais de um ponto de vista biológico. Na verdade, estes são a preferência da natureza e não se encontram muito distantes do ser humano, pois o osso é efetivamente um exemplo perfeito deste tipo de materiais.

Atualmente, existem inúmeros avanços tecnológicos na digitalização da indústria, destacando-se, entre eles, o fabrico aditivo por ser um processo que já atingiu um grande impacto na indústria e na sociedade moderna, como foi recentemente demonstrado no combate à pandemia do COVID-19. Uma evolução consistente desta ferramenta de fabrico é a síntese de materiais com estrutura e funcionalidade específicas. A conceção de materiais com gradiente de funcionalidade pode ser abordada por fabrico aditivo em função de soluções específicas de engenharia, onde tal visão herda um padrão semelhante à nova abordagem de sistemas de saúde e dispositivos médicos específicos do paciente. Por outro lado, esta nova geração de materiais contribui para os desafios ambientais e de sustentabilidade pelo uso racional de recursos e energia. Sem dúvida, esta versatilidade torna os materiais com gradiente de funcionalidade em candidatos perfeitos para a resolução de problemas de otimização estrutural, mas mais especificamente, onde seja aplicada otimização topológica.

1.2 Objetivos

De uma forma sucinta, o objetivo principal desta dissertação é utilizar a otimização topológica para minimizar o pico de tensão (tensão de von Mises) ao nível da macroescala com recurso a um modelo material em FGM (*Functionally Graded Material*) considerando duas fases sólidas de material e uma fase de vazio. Dada a não diferenciabilidade deste tipo de problemas, pois estão associados a uma formulação do tipo min-max, não é fácil encontrar contribuições bibliográficas. Mais propriamente, é difícil encontrar trabalhos que utilizem um método de otimização topológica baseado na variável densidade (método SIMP) em conjunto com a estratégia *Bound Formulation* para aliviar a dificuldade inerente à não diferenciabilidade dos problemas min-max. A utilização de funções de agregação para reduzir o número de estrangimentos de tensão é a estratégia que comumente se observa na literatura e normalmente nem está associada a uma formulação do tipo min-max, mas sim a formulações clássicas com tensão onde não se minimiza diretamente o pico de tensão. Posto isto, este tema encontra a sua relevância no facto de não existirem muitos trabalhos, em otimização topológica, que envolvam a minimização do máximo da tensão e, muito menos, utilizando FGMs obtidos pela via da variação da composição.

No entanto, podem destacar-se ainda alguns objetivos parcelares: (1) definição do FGM (modelo material); (2) cálculo analítico da sensibilidade da função tensão de von Mises através do método adjunto e sua implementação num programa de elementos finitos; (3) definição da formulação do problema de otimização topológica de minimização do máximo da tensão de

von Mises de forma matematicamente rigorosa com recurso à *Bound Formulation* e sua resolução através de um algoritmo de otimização baseado no gradiente; (4) aplicação desta metodologia a estruturas mecânicas considerando, para o efeito, alguns exemplos clássicos de teste (*benchmarks*) tais como o *MBB-beam* e a placa com furo.

Pretende-se, portanto, desenvolver uma ferramenta de trabalho, no âmbito da otimização topológica, e não propriamente uma aplicação específica. Esta ferramenta terá de ser desenvolvida de forma a poder ser adequada para resolver problemas de tensão, tirando partido de FGMs. Será um trabalho na base do projeto conceptual. Para além do seu carácter científico e inovador, esta dissertação procurará apresentar também uma perspectiva didática, no sentido de dar origem a novos trabalhos que decoram das descobertas que aqui se fizerem e que possam ser utilizadas tanto a nível académico como industrial.

1.3 Organização do documento

A presente dissertação encontra-se estruturada em 8 capítulos, sendo que no capítulo atual, Capítulo 1, se introduz o tema da dissertação, se faz o seu enquadramento no contexto científico e se detalham os objetivos a que esta se propõe.

No Capítulo 2, é feito o estado da arte dos principais fundamentos teóricos subjacentes à realização desta dissertação. Começa-se por fazer um enquadramento histórico da otimização estrutural e detalha-se o seu desempenho no projeto moderno. Seguidamente, e com especial ênfase na otimização topológica, discutem-se alguns dos métodos utilizados neste tipo de otimização, o problema clássico de minimização da *compliance* e as suas formulações equivalentes, se efetua uma revisão literária superficial da otimização topológica multimaterial e se apresenta o conceito de FGM e suas principais aplicações. Ainda neste capítulo, é destacada a importância do FGM na mitigação de tensões, fator motivador para o desenvolvimento desta dissertação, e são abordadas variantes do fabrico aditivo enquanto processos úteis no fabrico de estruturas em FGM. O capítulo termina com um resumo dos poucos trabalhos que envolvem trabalhar com controlo de tensão e FGMs no contexto da otimização topológica.

No Capítulo 3, abordam-se os princípios de otimização com maior destaque para a concretização desta dissertação. Apresenta-se o algoritmo de otimização baseado no gradiente utilizado e são dados a conhecer os diferentes métodos disponíveis para o cálculo de sensibilidades, bem como os critérios que permitem optar pela escolha de um deles.

No Capítulo 4, apresenta-se a formulação do problema de otimização baseado na densidade e na tensão e indica-se a lei de interpolação de propriedades que a terá de acompanhar. É abordada a essência dos problemas min-max e é feita uma revisão das técnicas de filtragem mais comumente utilizadas na literatura.

No Capítulo 5, é efetuado, com detalhe, o cálculo de sensibilidades e apresentadas algumas interpretações relativas ao método adjunto e ao elemento finito isoparamétrico de oito nós.

No Capítulo 6, introduz-se o programa de elementos finitos que deu início a este trabalho e dá-se a conhecer todas as alterações efetuadas ao mesmo desde a sua versão original até ao seu estado atual. É também apresentado um fluxograma final do algoritmo desenvolvido.

No Capítulo 7, testa-se a formulação proposta em três *benchmarks* e apresentam-se os resultados obtidos, os quais são apresentados tirando partido da simetria das geometrias disponíveis.

Por fim, no Capítulo 8, são retiradas as conclusões mais relevantes e que decorrem do trabalho desenvolvido e é efetuado um balanço da importância de investir no FGM. O fecho desta dissertação tem por base a apresentação de várias propostas para trabalhos futuros e que reconhecem o enorme potencial envolvido neste trabalho.

ESTADO DA ARTE

2.1 Enquadramento histórico sobre Otimização Estrutural

Na sua essência, a otimização estrutural é uma disciplina que engloba um conjunto de teorias e métodos que procuram obter a estrutura que desempenha mais eficientemente a função pretendida. Esta estrutura é gerada por alteração de um conjunto de parâmetros designados por variáveis de projeto (*e.g.* dimensões, forma, densidade). Tipicamente, um problema de otimização estrutural é definido por um ou vários constrangimentos (*e.g.* deslocamento admissível, tensão admissível, volume, massa, *compliance*), dependendo da complexidade do problema em análise, que definem o espaço das soluções admissíveis para as variáveis de projeto. A ideia aqui é minimizar ou maximizar uma função de custo ou função objetivo (*e.g.* rigidez, peso, frequência natural, estabilidade, custo) sem violar os constrangimentos relacionados com a integridade estrutural. As soluções ótimas são essencialmente obtidas com recurso a algoritmos de otimização.

Desde a última década do século XIX que a otimização estrutural tem recebido uma especial atenção por parte da comunidade científica. Os primeiros trabalhos analíticos foram publicados por Maxwell (1890) [1] e Michell (1904) [2]. Contudo, só a partir do ano de 1950 se começaram a observar avanços significativos na área da otimização estrutural. Podem destacar-se três domínios importantes, nomeadamente, os primeiros computadores digitais que surgem no início da década de 50 do século XIX, o desenvolvimento de métodos numéricos de Programação Linear, tais como o SIMPLEX, e métodos numéricos de análise de estruturas, como o método dos elementos finitos (MEF).

No final do ano de 1950, realizaram-se grandes investimentos em projetos de investigação na área da otimização estrutural com o objetivo de obter estruturas cada vez mais leves com especial impacto na indústria aeroespacial. Para além dos progressos tecnológicos efetuados ao nível da informática durante esse ano, registaram-se também avanços teóricos substanciais na área dos métodos numéricos aplicados à mecânica estrutural, como a descoberta do MEF. O desenvolvimento deste método resulta do trabalho de Courant [3], que já o havia começado em 1943, mas que, só em 1960, é apelidado com este nome por Clough [4]. Este método possibilitou, pela primeira vez, a análise de estruturas realmente complexas.

Com o aparecimento dos computadores digitais, o desenvolvimento de métodos numéricos de programação matemática e o surgimento de métodos numéricos para a análise de estruturas até ao final do ano de 1950, estavam reunidas todas as ferramentas necessárias para

o que ainda haveria de chegar. Este próximo passo é dado por Schmit em 1960 [5]. O trabalho publicado pelo autor revolucionou o projeto ótimo de estruturas porque, por um lado, introduziu a ideia de combinar o método dos elementos finitos com métodos numéricos de otimização e, por outro lado, porque demonstrou a viabilidade deste processo na resolução de problemas reais.

Mais tarde, no decorrer das décadas de 70 e 80 do século XIX, destacam-se alguns avanços significativos nos métodos numéricos de Programação Não Linear, nomeadamente, a Programação Quadrática Sequencial (SQP) [6] ou o Método das Assíptotas Móveis (MMA) [7], que permitiram a resolução de problemas de otimização mais complexos. Ainda assim, estes métodos por serem baseados no gradiente, apenas podiam ser aplicados a problemas contínuos, retirando-lhes aplicabilidade à resolução de problemas discretos ou mistos. Em oposição, as Meta-Heurísticas [8], onde se encontram, por exemplo, os Algoritmos Genéticos (AG), aparecem como uma ferramenta alternativa na resolução de problemas de otimização estrutural discretos e mistos.

2.2 Categorias principais da Otimização Estrutural

Podem distinguir-se três categorias principais da otimização estrutural: otimização dimensional, otimização de forma e otimização topológica. A figura 2.1 pretende exemplificar cada uma destas categorias aplicadas a uma viga em consola sujeita a uma carga pontual.

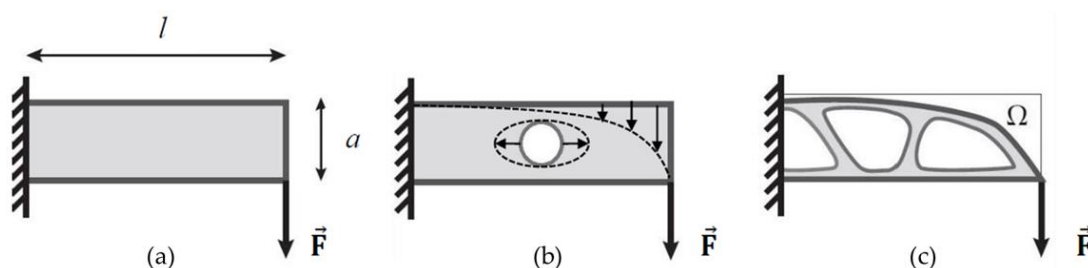


Figura 2.1: Categorias da otimização estrutural. (a) Otimização de dimensões, (b) Otimização de forma, (c) Otimização topológica. (Adaptado de [113])

De salientar que as variáveis de projeto, em função do problema que se pretende resolver, podem ser do tipo contínuas, discretas, mistas ou até mesmo booleanas.

Até ao ano de 1960, a otimização estrutural era realizada recorrendo fundamentalmente à otimização dimensional. Num problema de otimização dimensional, as variáveis de projeto são as dimensões geométricas de uma estrutura, como por exemplo as áreas das secções transversais dos seus elementos, de tal forma que, ao longo do processo de otimização, a forma e a topologia da estrutura permanecem inalteradas. Estas características tornam esta categoria de otimização mais restritiva na medida em que a solução ótima encontrada para um problema

resolvido unicamente por otimização dimensional é, na maior parte dos casos, sub-ótima. Um exemplo muito concreto onde a otimização dimensional é largamente aplicada é na minimização das áreas das secções transversais de barras de uma estrutura reticulada, por variação do diâmetro ou da aresta no caso das barras terem uma secção circular ou quadrangular, respetivamente.

Em meados do ano de 1970, surgem as primeiras publicações incidentes na otimização de forma [9, 10]. Neste tipo de otimização, as variáveis de projeto estão relacionadas com a fronteira Γ delimitadora do domínio de projeto Ω ocupado pela estrutura. Habitualmente, esta fronteira é definida por um conjunto de funções matemáticas contínuas e pode apresentar-se como uma linha ou superfície. As variáveis de projeto são os parâmetros analíticos que regem essas funções. Embora a otimização de forma alcance melhorias substanciais face à otimização dimensional em relação à geometria das estruturas, o seu resultado é fortemente dependente da topologia inicial, resultando, novamente, numa solução ótima classificada como sub-ótima.

A otimização topológica teve como pioneiro Maxwell, em 1890 [1], mas os trabalhos de investigação científica relevantes neste assunto surgiram sobretudo a partir do ano de 1980. Na sua essência, consiste em encontrar o *layout* ótimo de uma estrutura dentro de um domínio de projeto Ω representado por uma área ou volume fixo. Tipicamente, as dimensões físicas, forma e conectividades entre os diferentes elementos da estrutura são desconhecidos. No entanto, conhecem-se as condições de fronteira, o volume ou área da estrutura e, em alguns casos, restrições de projeto adicionais, como dimensões de furos ou zonas sólidas que fazem parte das especificações de projeto. Posto isto, um problema de otimização topológica pode ser visto como um problema de distribuição de material onde se pretende minimizar uma função objetivo sujeita a determinados constrangimentos. Neste tipo de problemas, as variáveis podem ser booleanas ou contínuas, sendo que no primeiro caso 0 representa ausência e 1 a presença de material.

De um ponto de vista hierárquico, a otimização topológica é, em relação às restantes categorias, a mais poderosa e, portanto, a que melhor resultados apresenta. Por um lado, por disponibilizar uma maior liberdade de projeto e, por outro, porque não assume de antemão quaisquer parâmetros relacionados com dimensões geométricas ou forma da estrutura. Assim sendo, é compreensível que quer as soluções obtidas pela via da otimização dimensional, quer as obtidas pela via da otimização de forma num dado problema estão incluídas no conjunto das soluções admissíveis fornecidas pela otimização topológica na resolução do mesmo problema.

Por volta de 1967, Dorn *et al.* [11] sugere uma nova metodologia dedicada à otimização topológica de estruturas reticuladas designada por *Ground Structure Approach*. A ideia deste método assenta na descoberta de quais os nós e barras (conectividades) que correspondem à utilização mais eficiente do material, ou seja, aquela que minimiza o peso e satisfaz os constrangimentos de tensão, deslocamento e encurvadura. Este método pressupõe a utilização de variáveis de natureza booleana (0 ou 1) para estabelecer a conectividade entre cada par de nós.

Os valores 0 e 1 representam, respetivamente, a presença ou ausência de conectividade entre dois nós. De notar que se podem considerar exclusivamente as conectividades situadas dentro do mesmo elemento quadrado ou até mesmo todas as possíveis, tal como ilustrado na figura 2.2.

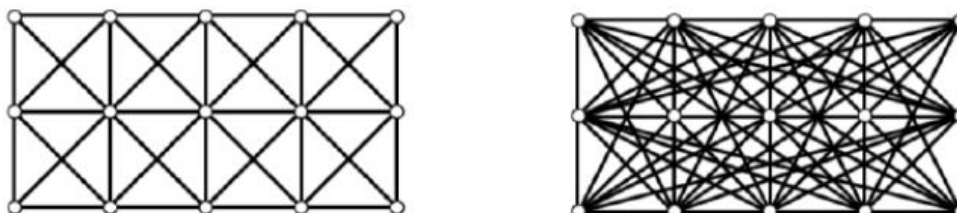


Figura 2.2: Exemplos de *Ground Structures*. [44]

Contudo, é de notar que também se podem considerar variáveis do tipo contínuas como forma de representar o valor da área de cada uma das secções transversais dos elementos estruturais, onde um valor de área nulo corresponde a ausência de material.

Em 1988, surge o trabalho de Bendøe e Kikuchi [12] onde foi desenvolvido o método da homogeneização que resolve um problema de natureza discreta de forma contínua. De uma forma breve, consistiu em utilizar um modelo de material compósito poroso de microestrutura periódica, cujas propriedades elásticas são obtidas pela teoria da homogeneização, para encontrar a forma e topologia ótimas de um elemento mecânico constituído por um material anisotrópico. O material compósito era formado pela repetição de uma célula unitária quadrangular. Não muito tempo depois, já era possível observar uma implementação computacional desta teoria [13].

2.3 Desempenho da Otimização Estrutural no projeto atual

Antigamente, as soluções de engenharia existentes eram obtidas recorrendo a uma metodologia de projeto tradicional que se fundamentava essencialmente no conhecimento e na experiência dos engenheiros projetistas da época. Normalmente, uma solução que cumprisse todos os requisitos necessários para o projeto era alcançada através de um processo iterativo assente em técnicas de tentativa e erro. Contudo, verificava-se que, na maior parte dos casos, a solução encontrada estava longe de ser a ótima. A necessidade de desenvolver e adotar técnicas que permitam melhorar o projeto tradicional aparece também como um resultado da diminuição dos recursos naturais e o aumento da preocupação ambiental, temas bastante sensíveis na atualidade. Assim, a otimização estrutural exibe-se como um aliado poderoso no projeto moderno de estruturas complexas na medida em que permite, mediante uma formulação matematicamente rigorosa, resolver problemas de engenharia com um elevado número de variáveis de projeto e constrangimentos.

Na sua génese, um projeto estrutural tem início na sua fase conceptual, onde apenas são conhecidas as condições de fronteira e se estabelece um domínio representativo que pode ser bidimensional ou tridimensional, sobre o qual se pretende distribuir racionalmente material da forma mais eficiente possível. Em primeiro lugar, é realizada uma modelação computacional do domínio disponível com recurso a ferramentas de *Computer-Aided Design* (CAD). Em segundo lugar, aplica-se otimização topológica sobre esse domínio como forma de perceber qual a distribuição de material mais eficiente. De seguida, em função do resultado obtido por otimização topológica, esboça-se o projeto real.

Numa fase preliminar, são realizadas modificações fundamentalmente ao nível da forma da estrutura. Nesta fase, varia-se a fronteira delimitadora do subdomínio ocupado por material com recurso à otimização de forma mediante as limitações dos processos de fabrico disponíveis ou até mesmo eventuais restrições de montagem.

Por fim, numa fase em que a topologia está fixa e a forma estabelecida, as restantes modificações a realizar prendem-se com pequenos pormenores dimensionais, onde é aplicada essencialmente otimização dimensional. Nesta lógica, um projeto de otimização não se pode limitar a uma das categorias abordadas anteriormente, mas a uma junção de todas. Na figura 2.3 está representado o enquadramento dos diferentes tipos de otimização no decorrer de um projeto de estruturas.

É importante referir que a principal limitação do projeto ótimo está relacionada com a viabilidade de fabrico da solução final, embora já estejam a ser desenvolvidos esforços nesse sentido. As dificuldades em materializar um projeto ótimo de um componente podem ser observadas na figura 2.4. O desenho final é claramente melhorado quando comparado ao inicial, mas tem o custo de ser muito mais difícil de produzir. Sem nenhuma técnica para evitar geometrias inviáveis, as soluções de projeto ótimas por vezes não são fabricáveis, o que requer a sua alteração manual. Este processo leva a um declínio no desempenho dos componentes, mas, ao mesmo tempo, garante que o seu processo de fabrico seja rentável e que esteja abaixo do limite de manufatura.

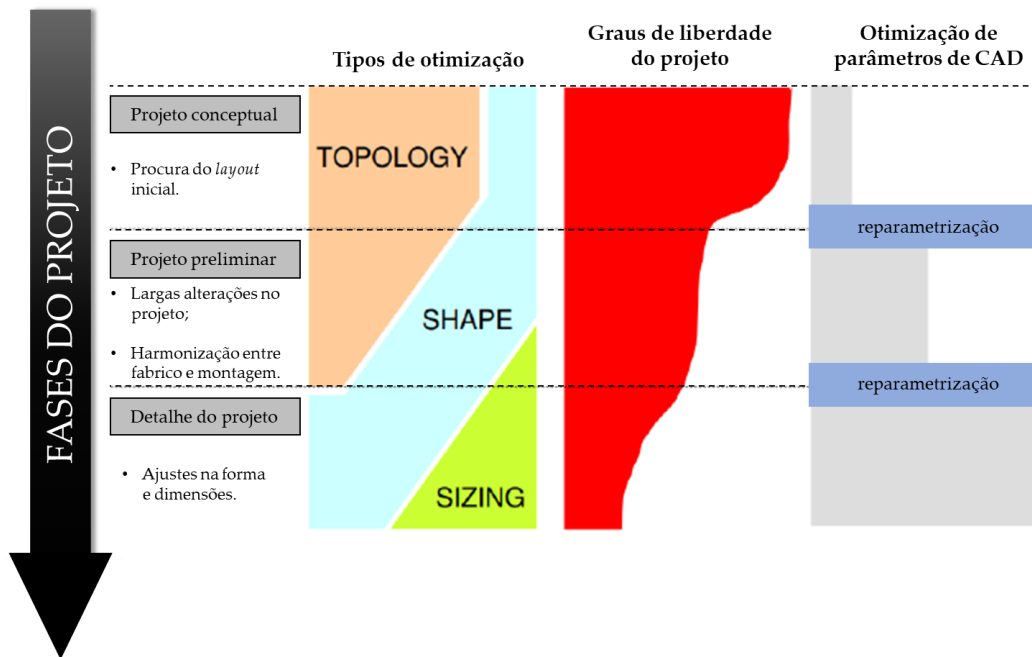


Figura 2.3: Categorias de otimização nas fases de projeto. (Adaptado de [116])

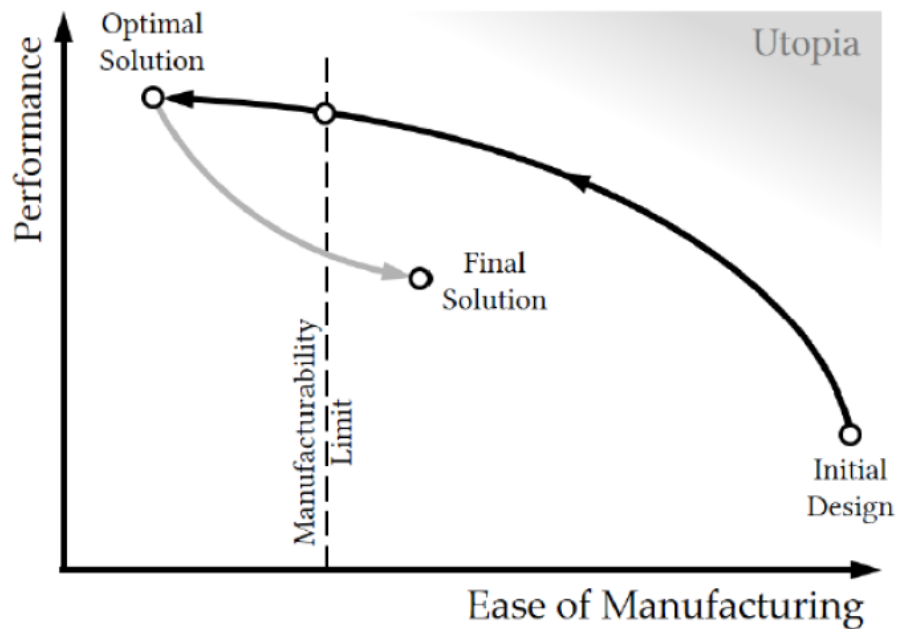


Figura 2.4: Relevância da solução ótima do projeto de componentes e a sua relação com a facilidade de fabrico e desempenho. [91]

A aplicabilidade da otimização estrutural é bastante visível na atualidade, destacando-se sobretudo nas indústrias aeroespacial, aeronáutica e até mesmo na indústria automóvel.

Com o aumento das emissões de dióxido de carbono para a atmosfera e o elevado consumo de combustível, a necessidade de projetar estruturas cada vez mais leves já se aproxima de um dever. No âmbito da indústria aeronáutica, pode observar-se o projeto das nervuras do bordo de ataque e das portas de fuselagem do Airbus A380 desenvolvido com recurso à otimização topológica. O objetivo deste projeto centrava-se na minimização da energia de deformação global (vulgarmente designada por *compliance* na literatura), impondo constrangimentos de deslocamento, tensão e encurvadura. Foram utilizados para o efeito *softwares* de otimização que, com o auxílio de alguma interpretação e conhecimento em engenharia, deram origem a um novo tipo de estrutura para as nervuras com um benefício de peso em relação à estrutura tradicional até cerca de 40% [14, 114], veja-se a figura 2.5.



Figura 2.5: Nervuras do bordo de ataque e fuselagem interna de uma porta do Airbus A380. [114]

Ainda dentro do domínio da indústria aeronáutica, destaca-se também o projeto conceptual do *pylon* de aeronaves obtido através da otimização topológica [15], ver figura 2.6a. Em particular, tem-se o projeto do *pylon* do Airbus A350 [16] onde o domínio de *design* é discretizado em inúmeros elementos tetraédricos e considerados oito casos de carga estática. O objetivo do projeto consistia em minimizar a massa e o atrito resultantes da resistência do ar mantendo simultaneamente a simetria estrutural, o que culminou num *layout* ótimo representativo de apenas 10% do *layout* inicial.

Em relação à indústria automóvel, faz-se referência ao processo de *design* exterior do automóvel Jaguar recorrendo à otimização topológica e que está representado na figura 2.6b. O resultado desta última indica qual a distribuição ideal de material e identifica as zonas onde a utilização de reforços é especialmente importante.

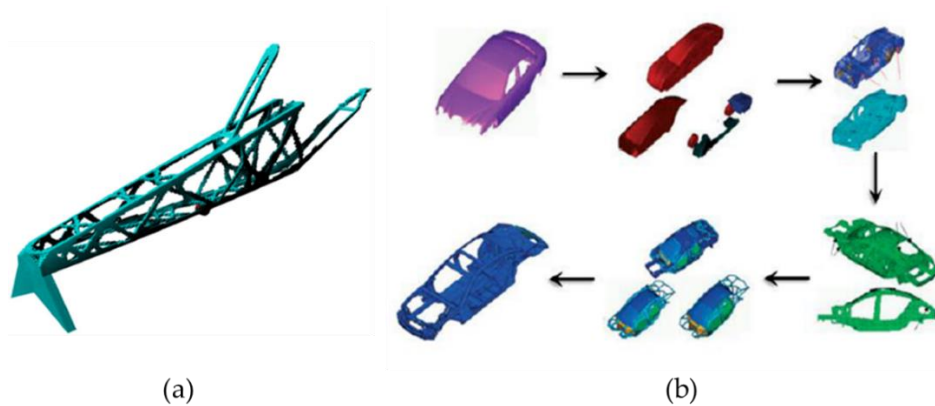


Figura 2.6: (a) Otimização topológica no projeto do *pylon* de aeronaves, (b) Ilustração do processo de *design* na Jaguar Cars Ltd com recurso à otimização topológica. [15, 114]

2.4 Otimização topológica

Usualmente, a otimização topológica é vista como um procedimento de otimização que distribui de forma discreta e racional o material disponível numa área ou volume fixos (domínio de projeto), recorrendo sobretudo a variáveis booleanas (0 ou 1), por forma a determinar quais as zonas desse domínio que devem ou não ser preenchidas com material. Estas variáveis tomam o valor 0 na ausência e 1 na presença de material, respetivamente. De notar que as zonas onde são removidas porções de material são essencialmente regiões de baixo nível de tensão onde o material pouco contribui para uma transmissão eficiente dos esforços internos.

A otimização topológica, sendo na sua génese um problema de natureza discreta, inviabiliza, numa primeira instância, a utilização de métodos baseados no gradiente, ficando dependente da utilização de métodos de programação inteira ou meta-heurísticas (como é o caso do AG). Em adição, este tipo de métodos perde a sua eficiência, por um lado, na resolução de problemas que envolvam um elevado número de variáveis de projeto, pois o custo computacional torna-se excessivo, e, por outro, porque utilizam uma remoção discreta de material e podem gerar o aparecimento de furos nas estruturas que impliquem instabilidade numérica na análise de elementos finitos. Por estes motivos, já foram desenvolvidos esforços de investigação na procura de técnicas que permitam reformular o problema de otimização topológica num problema de natureza contínua que possa ser resolvido através de métodos baseados no gradiente.

Com o surgimento, em 1988, do método da homogeneização desenvolvido por Bendsøe e Kikuchi [12], a otimização topológica foi alvo de especial interesse e investigação por parte da comunidade científica nos últimos anos, dando origem a inúmeras novas abordagens com

vista a resolver os problemas erguidos no trabalho supramencionado. Os métodos mais populares e vastamente documentados na literatura, em alternativa ao método da homogeneização, são os métodos baseados na variável densidade [17, 18], nomeadamente, os métodos SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) [17, 25] e RAMP (*Rational Approximation of Material Properties*) [18, 19].

Seguidamente, nos tópicos que se seguem, apresentar-se-ão alguns dos métodos utilizados em otimização de topologia. Em particular, por ser a abordagem empregue nesta dissertação, o método SIMP baseado na variável densidade é aprofundado.

2.4.1 Métodos utilizados em otimização topológica

A utilização de métodos baseados na variável densidade, tais como os mencionados no subcapítulo anterior, na resolução de problemas de otimização topológica é recorrente, mas é importante salientar que estes não são a única abordagem possível. Na verdade, entre elas, a primeira foi efetivamente baseada na variável densidade, inicialmente conhecida por *power-law approach* e mais tarde por SIMP, e foi proposta por Bendsoe em 1989 [17]. Uns anos mais tarde, outros investigadores propuseram mais abordagens para conseguir efetuar este tipo de otimização, sendo que uma delas é através de funções de nível e designa-se por método das curvas de nível (LSM, *Level-Set Method*) [20, 21, 22, 72]. Outras abordagens são, por exemplo, *Phase Field Method* (PFM) [23, 24], *topological derivative* e *evolutionary* [18]. Não obstante, as abordagens mais comuns na literatura são o método das curvas de nível e os métodos baseados na variável densidade, nomeadamente, o método SIMP. Portanto, estes métodos serão discutidos de seguida, o primeiro de forma mais breve que o segundo por não ser alvo de aplicação nesta dissertação. Explicar-se-á num tópico adiante qual o motivo subjacente a esta escolha.

2.4.1.1 Método das curvas de nível

O LSM [21, 72] é tradicionalmente utilizado para definir a fronteira de uma estrutura na medida em que oferece teorias matemáticas consistentes e muito bem estudadas. Na sua génese, define as fronteiras ou interfaces entre diferentes fases de material através de curvas de nível de n^{LSF} funções de nível (*Level Set Functions*), Φ_j , em que $j = 1, \dots, n^{\text{LSF}}$. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) a região ocupada por uma estrutura. Este método especifica implicitamente, no caso de estruturas constituídas por um único material através de uma função de nível, quais os pontos \mathbf{s} pertencentes ao domínio Ω que constituem o domínio ocupado por material Ω^j da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Estrutura: } \Phi_j(\mathbf{s}) &> 0, & \forall \mathbf{s} \in \Omega^j \\ \text{Fronteira: } \Phi_j(\mathbf{s}) &= 0, & \forall \mathbf{s} \in \Gamma^j \\ \text{Vazio: } \Phi_j(\mathbf{s}) &< 0, & \forall \mathbf{s} \in \Omega \setminus (\Omega^j \cup \Gamma^j) \end{aligned} \tag{2.1}$$

As funções de nível, Φ_j , são tipicamente funções radiais que, em concordância com a equação de *Hamilton-Jacobi*, vão sendo alteradas ao longo do processo de otimização. De salientar que esta equação faz com que o resultado do processo de otimização tenha uma forte dependência com o *design* inicial, dado que esta não permite a nucleação de mais furos para além dos presentes na estrutura inicial. A grande vantagem deste método em otimização topológica prende-se, fundamentalmente, com o facto deste método fornecer uma distinção clara e matematicamente precisa das interfaces entre diferentes fases de material e de vazio [22, 27]. A modelação mais precisa do contorno do domínio ocupado pela estrutura é particularmente relevante quando se analisa o fenómeno de concentração de tensões, pois é particularmente vulgar nas regiões de fronteira de uma estrutura.

2.4.1.2 Métodos baseados na variável densidade

Carateristicamente, os métodos baseados na variável densidade permitem transformar um problema de natureza discreta (0 ou 1) num problema relaxado ao contínuo para que se torne possível a utilização de algoritmos baseados no gradiente. Esta transformação é efetuada à custa de uma variável de densidade artificial, ρ_e , que toma valores pertencentes ao intervalo]0,1]. Normalmente, esta variável de densidade é posteriormente elevada a um expoente de penalidade, p , para que se consiga desfavorecer os seus valores intermédios. O método SIMP utiliza este mecanismo e será, portanto, o método utilizado nesta dissertação.

O SIMP clássico [17, 25, 26] consiste numa lei de potência que permite interpolar o tensor de rigidez do material de acordo com a equação seguinte:

$$E_e(\rho_e) = \rho_e^p E^{(1)} \quad (2.2)$$

onde E_e representa o tensor de rigidez no elemento e , $E^{(1)}$ o tensor de rigidez do material sólido isotrópico que será distribuído pelo domínio de projeto e ρ_e^p a função de peso, tal que ρ_e é a variável de densidade artificial e p o expoente de penalização, com $\rho_e \in]0,1]$ e $p \geq 1$. Na verdade, o SIMP já apresenta, por definição, pelo menos duas fases de material, uma associada ao vazio e a outra associada ao material sólido isotrópico selecionado. Posto isto, a equação (2.2) pode reescrever-se da seguinte forma:

$$E_e(\rho_e) = E^{(0)} + \rho_e^p (E^{(1)} - E^{(0)}) \quad (2.3)$$

em que os tensores $E^{(0)}$ e $E^{(1)}$ (com $E^{(1)} > E^{(0)} \geq 0$) dizem respeito aos tensores de rigidez atribuídos à fase de vazio e ao material sólido isotrópico a distribuir, respetivamente. O expoente p é utilizado para forçar a convergência de valores intermédios de densidade ($0 < \rho_e \leq 1$) para valores discretos 0 e 1, possibilitando a obtenção de soluções muito próximas das discretas. A seleção do expoente de penalidade deve ser feita de forma cuidadosa para

evitar convergências demasiado lentas ou prematuras. É habitual utilizar-se valores de p superiores a 1, mas não muito elevados sob o risco de gerar instabilidades numéricas. Segundo [25], valores de $p \geq 3$ fornecem bons resultados.

Na prática, um valor de $\rho_e = 0$ resulta numa rigidez nula (considerando $E^{(0)} = 0$) e em problemas de singularidade na resolução de problemas de elementos finitos. Para ultrapassar este problema, o valor mínimo de ρ_e deve ser próximo, mas nunca igual a zero, de tal forma que $\rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1$, com $\rho_{\min} \simeq 0$. A figura 2.7 procura ilustrar o efeito do expoente de penalização p na relação entre as propriedades do material e a variável de densidade artificial ρ_e .

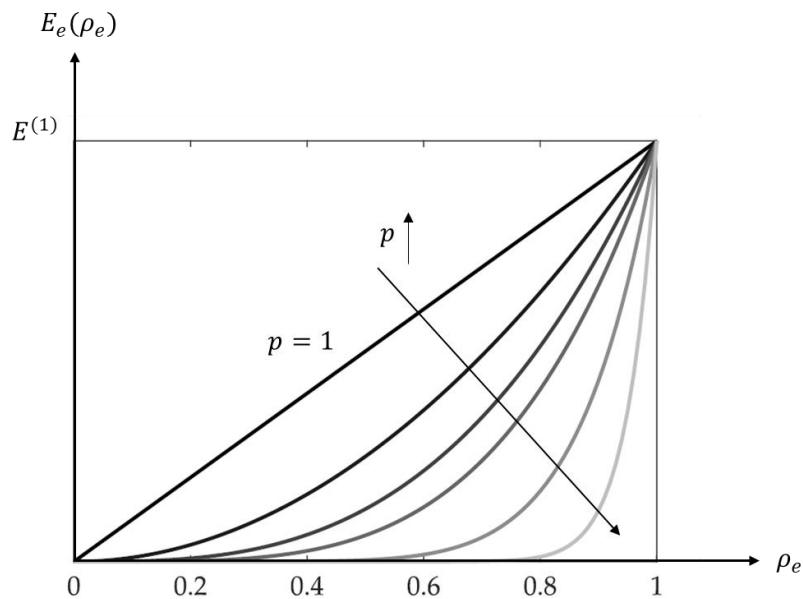


Figura 2.7: Efeito do expoente de penalidade na lei de potência SIMP, tomando $E^{(0)} = 0$.

De salientar que a função de peso, ρ_e^p , não deve tomar valores superiores à unidade, pois tal significaria que o material atribuído à fase sólida apresentaria propriedades elásticas superiores às que o material possuiria na realidade. Em soma, esta função também deve ser sempre positiva uma vez que não existe um significado físico para propriedades negativas.

Por fim, faz-se referência ao trabalho de Bendsoe e Sigmund [26] que, em 1999, concederam um significado físico à rigidez obtida pelo método SIMP. De acordo com esta referência, tal rigidez poderia ser encarada como sendo a rigidez de um material compósito com uma fase de vazio e outra fase sólida, esta última possuindo uma fração volúmica igual ao valor de ρ_e^p e que era resultante do próprio método.

2.4.2 Método das curvas de nível versus Método baseado na variável densidade

Um dos problemas que surge quando se trabalha com a variável densidade está relacionado com a obtenção de contornos em *zig-zag*. Esta abordagem associa, a cada elemento finito que resulta de uma parametrização do domínio, uma variável de densidade. As fronteiras do domínio de projeto, sendo uma malha estruturada (vulgarmente designada por grelha) que pode ser quadrada ou retangular, nem sempre são colineares com as arestas dos elementos finitos. Nestas circunstâncias, vai existir sempre uma aproximação a um contorno curvo em forma de *zig-zag* e, portanto, uma perda subsequente na qualidade da aproximação. Neste seguimento, em otimização topológica baseada na densidade, não existe um contorno do domínio ocupado pela estrutura que seja bem definido. De facto, este problema não se coloca quando se trabalha com funções de nível, naturalmente, porque as funções radiais não são reféns da geometria da malha de elementos finitos.

Numa abordagem pelas curvas de nível, os contornos curvos da estrutura são dados exatamente pelas funções de nível que constituem a solução topológica do problema. Já no caso do método baseado na densidade, a solução topológica é um campo de densidades. A primeira consegue obter, sem dúvida, estruturas muito mais límpidas. Contudo, as funções de nível efetuam uma otimização de forma mais avançada (otimizam a forma dos furos numa estrutura), mas, para além disso, permitem ainda a nucleação desses furos. Mas, ao modificar a forma dos furos e permitir que zonas de vazio ou de outra fase se aglutinem, originam também uma alteração na topologia. O problema que aqui se coloca é que, partindo de uma determinada topologia inicial com um dado número de furos, a topologia final nunca poderá ter mais furos do que aqueles que a estrutura tinha inicialmente. Quando muito terá o mesmo número, mas, regra geral, apresentará sempre um número inferior de furos. Portanto, este método acaba por estar limitado ao número de vazios que a estrutura possui de antemão. Esta limitação no contexto dos métodos baseados na variável de densidade já não se verifica.

2.4.3 Formulação do problema discreto

A lei constitutiva do material a ser considerada nesta dissertação é a lei de *Hooke* para elasticidade linear. Em notação indicial, esta lei define-se da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.4)$$

onde σ_{ij} e ε_{kl} são tensores de 2ª ordem designados por tensor das tensões e tensor das deformações, respetivamente, e E_{ijkl} é um tensor de 4ª ordem chamado de tensor da elasticidade ou rigidez do material. Note-se que as suas componentes (constantes elásticas) traduzem o comportamento do material em todas as direções do espaço.

De salientar que estes tensores satisfazem as seguintes propriedades de simetria:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}; \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}; E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij} \quad (2.5)$$

Dadas estas simetrias, o tensor de rigidez, E , definido por 81 constantes elásticas no espaço tridimensional, contém agora 21 constantes independentes. No caso de se considerarem materiais isotrópicos com um comportamento linear elástico, o tensor fica perfeitamente definido através de duas constantes que são o módulo de Young, E , e o coeficiente de Poisson, ν . Este resultado advém do facto de um material isotrópico possuir infinitos planos de simetria elástica.

Posto isto, considere-se agora um domínio de projeto Ω , que pode representar uma área ou volume fixos, constituído por dois subdomínios distintos Ω^{mat} e Ω^{vaz} , formados por material e por vazio, respetivamente. Dada uma função objetivo, a distribuição ótima de material é efetuada através da escolha adequada do tensor de elasticidade $E_{ijkl}(\mathbf{s})$ ao longo do domínio $\Omega = \Omega^{\text{mat}} \cup \Omega^{\text{vaz}}$, em que \mathbf{s} representa a variável de posição espacial, de modo a promover a minimização dessa mesma função [17]. De uma forma discreta, esta distribuição corresponde a uma representação do domínio num *design* do tipo preto e branco, com “pixels” (ou “voxels”) dados pela discretização de elementos finitos utilizada. Assim, introduza-se a função degrau $\varphi(\mathbf{s})$ responsável por atribuir material ou vazio a um determinado elemento finito e :

$$\varphi(\mathbf{s}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{s} \in \Omega^{\text{mat}} \\ 0, & \text{se } \mathbf{s} \in \Omega^{\text{vaz}} \end{cases} \quad (2.6)$$

Este método implica que o tensor de rigidez admissível, E_{ad} , passe a depender do valor da função degrau, que é variável ao longo do domínio Ω , de acordo com a equação seguinte:

$$E_{ad} = E^{(0)} + \varphi_e(E^{(1)} - E^{(0)}) \quad (2.7)$$

onde φ_e é o valor da função degrau no elemento finito e , $E^{(0)}$ é o tensor da rigidez atribuído à fase de vazio e $E^{(1)}$ é o tensor de rigidez de um dado material sólido isotrópico que se pretende distribuir pelo domínio Ω . É importante referir que, caso se considere $E^{(0)} = 0$, surgem problemas de singularidade e um sistema de equações de equilíbrio impossível de resolver. Assim sendo, note-se as componentes do tensor $E^{(0)}$ devem tomar valores tão pequenos quanto possível, mas nunca zero.

De salientar que este tipo de problemas estão usualmente limitados por um valor máximo de volume ou área de material que pode ser utilizado para ocupar o domínio de projeto. Portanto, a porção do volume Ω ocupada por material, $|\Omega^{\text{mat}}|$, aparece limitada por um valor máximo, aqui representado por V^* e com significado de área ou volume máximo, e define-se abaixo como sendo:

$$|\Omega^{\text{mat}}| = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{s}) \, d\Omega \leq V^* \quad (2.8)$$

Aplicando uma formulação de elementos finitos às equações de equilíbrio do problema da distribuição de material e considerando que o domínio Ω é discretizado em ne elementos finitos, tem-se:

$$\mathbf{K}(\mathbf{E}_e(\varphi_e))\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{com} \quad \mathbf{K}(\mathbf{E}_e(\varphi_e)) = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}_e(\mathbf{E}_e(\varphi_e)) \quad (2.9)$$

sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez global do sistema, \mathbf{u} o vetor de deslocamentos nodais e \mathbf{f} o vetor de carga global correspondente às cargas exteriormente aplicadas. Tal como a própria formulação indica, a matriz de rigidez global é obtida através da assemblagem das várias matrizes de rigidez de cada elemento e e depende do tensor de rigidez desses mesmos elementos, $\mathbf{K}_e(\mathbf{E}_e)$. Destaca-se ainda o facto de as equações passarem a depender da função degrau φ . Deste modo, a equação (2.8) escrita num formato de elementos finitos reduz-se a:

$$|\Omega^{\text{mat}}| = \sum_{e=1}^{ne} \varphi_e |\Omega|_e \leq V^* \quad (2.10)$$

onde $|\Omega|_e$ representa a área ou volume do elemento finito e .

O problema de minimização da *compliance*, C , é aquele que mais facilmente se encontra na literatura sendo, portanto, considerado o problema clássico da otimização topológica. Tipicamente, este problema vem acompanhado de um constrangimento de fração de área ou de volume, e tem como objetivo encontrar a estrutura mais rígida para o carregamento aplicado e condições de apoio definidas, ou seja, a estrutura que apresenta o menor valor global de energia de deformação. Genericamente, este problema formula-se da seguinte forma :

$$\begin{aligned} \min_{\varphi_e} \quad & C = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ & \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad , \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}(E_e(\varphi_e)) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{e=1}^{ne} \varphi_e |\Omega|_e - V^* \leq 0 \\ & \varphi_e \in \{0,1\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Refira-se que a equação (2.11) traduz a forma discreta do problema e não é resolúvel através de métodos não baseados no gradiente. Contudo, para um número muito elevado de

variáveis de projeto, estes métodos acabam por se tornar desinteressantes. Em alternativa, os algoritmos baseados no gradiente, mediante um relaxamento do problema ao contínuo, acabam por se mostrar mais favoráveis a este tipo de problemas. Atente-se no tópico seguinte.

2.4.4 Formulação do problema relaxado

A formulação do problema de minimização da *compliance* relaxado ao contínuo enuncia-se da forma seguinte:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{u}, \rho_e} \quad C = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\
 & \quad \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad , \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}(E_e(\rho_e)) \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{e=1}^{ne} \rho_e |\Omega|_e - V^* \leq 0, \quad 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, ne \\
 & \quad \rho_e \in]0,1]
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Tal como mencionado anteriormente, o problema de distribuição de material é, na sua essência, um problema de natureza discreta. Porém, na formulação apresentada em (2.12), este problema é transformado num problema contínuo e diferenciável à custa da introdução de variáveis de densidade artificial contínuas, ρ_e . Note-se que, sendo agora o problema de natureza contínua, os algoritmos baseados no gradiente veem a sua aplicabilidade acrescida. Nesta formulação, a função degrau φ_e , definida na equação (2.6), é substituída por uma função contínua e que depende da variável de densidade artificial ρ_e . Esta última, também é contínua e toma valores entre 0 e 1. No entanto, é necessário ressaltar alguns aspetos característicos deste problema reformulado. Por um lado, a variável de densidade ρ_e , por ser contínua no intervalo $]0,1]$, pode tomar valores intermédios e, por outro lado, estes últimos estão associados a valores de rigidez intermédia que não correspondem à solução discreta do problema original definido em (2.11).

Como forma de resolver os inconvenientes mencionados no parágrafo anterior, e para que exista compatibilidade entre as soluções do problema contínuo e discreto, aplicam-se as conhecidas técnicas de penalização. Das existentes, a técnica de penalização utilizada no método SIMP, já analisada no tópico 2.4.1.2, é provavelmente a mais conhecida e utilizada na literatura no contexto da otimização topológica. Todavia, ressalva-se o facto de, ao escolher-se um expoente de penalização $p = 1$, a função *compliance* ser convexa [28]. Tal característica suscitou o aparecimento de uma abordagem completamente nova, conhecida como *continuation approach* (CA), que aumenta gradualmente o valor do expoente p , partindo da forma não penalizada ($p = 1$) do problema de otimização, no decorrer do processo iterativo. Neste sentido, a probabilidade de o algoritmo de otimização escapar a um mínimo local é mais elevada, o que é naturalmente mais favorável.

2.4.5 Formulações equivalentes para o problema de minimização da compliance

É importante começar por referir que os primeiros problemas que se apresentam em otimização topológica empregam o tipo mais simples de formulação de problemas de *design* em termos de função objetivo e constrangimentos, nomeadamente, os problemas de minimização da energia total elástica de deformação ou os da *compliance* (máximo da rigidez global) sujeitos a simples constrangimentos de fração volúmica. De um ponto de vista conceptual, estes são o ponto de partida natural para problemas mais complexos, uma vez que as suas soluções refletem muitas das questões fundamentais da otimização topológica. A formulação clássica do problema de minimização da *compliance* para um dado sistema contínuo assume a seguinte forma [25]:

$$\begin{aligned} \min_{u \in U, E} \quad & \ell(u) = \int_{\Omega} f_b u \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} t u \, ds \approx \int_{\Gamma_T} t u \, ds \\ \text{s.a.} \quad & a_E(u, v) = l(v), \quad \forall v \in U \\ & E \in E_{ad} \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde $\ell(u)$ representa o trabalho total das forças exteriores aplicadas (*compliance*), o termo $\int_{\Omega} f_b u \, d\Omega$ está relacionado com as forças mássicas que atuam no corpo (e.g. gravidade), que por simplificação aqui se despreza, e o termo $\int_{\Gamma_T} t u \, ds$ diz respeito às *boundary tractions* aplicadas numa região fronteira sujeita à tração, $\Gamma_T \in \Gamma \equiv \partial\Omega$. Como constrangimentos pode observar-se que a equação de equilíbrio, $a_E(u, v) = l(v)$, é escrita na sua forma variacional fraca, com U a denotar o espaço dos campos de deslocamento cinematicamente admissíveis e o índice E a indicar que a forma bilinear a_E depende das variáveis de projeto. E_{ad} representa o conjunto dos tensores de rigidez admissíveis para o problema de *design* a analisar.

O termo $a_E(u, v)$, que representa a forma bilinear da energia, pode também ser interpretado como sendo o trabalho virtual interno de um corpo elástico no equilíbrio u e para um deslocamento virtual arbitrário v , e é dado por:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) \, d\Omega \tag{2.14}$$

em que E_{ijkl} é o tensor de rigidez do material, sendo este variável ao longo do domínio Ω , e ε_{ij} é o tensor das deformações linearizado dado por:

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{2.15}$$

em que se considera, portanto, válida a hipótese de pequenas deformações e de pequenos deslocamentos.

Repare-se que o problema de minimização da *compliance*, definido em (2.13), pode ainda receber outras formulações equivalentes, em particular com recurso ao conceito de energia potencial total, π . Considere-se um sistema contínuo e um sistema discretizado por elementos finitos. As formulações equivalentes para o mesmo problema de minimização da *compliance* são, para o sistema contínuo:

$$\begin{aligned} \max_{\rho} \quad \min_u \quad & \left\{ \frac{1}{2} a_E(u, u) - l(u) \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) \, d\Omega - l(u) \right\} \\ \text{s.a.} \quad & \int_{\Omega} \rho \, d\Omega \leq V^* \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde a função objetivo é a energia potencial total, π , o termo $\frac{1}{2} a_E(u, u)$ é a energia total de deformação interna absorvida pelo corpo (energia elástica de deformação) e o termo $l(u)$ é a *compliance*. E para o sistema discretizado:

$$\begin{aligned} \max_{\rho} \quad \min_{\mathbf{u}} \quad & \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} \right\} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{ne} \rho_i |\Omega|_i \leq V^* \end{aligned} \quad (2.17)$$

em que agora o termo $\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$ representa a energia elástica de deformação e o termo $\mathbf{u}^T \mathbf{f}$ a *compliance*, ambos escritos na forma discretizada.

Por curiosidade, denota-se que o problema de equilíbrio interno (2.16) pode ser também formulado em termos de tensão. Ao expressar-se a equação (2.16) em termos do princípio da energia complementar mínima, tem-se [25]:

$$\min_{E \in E_{ad}} \quad \min_{\sigma \in S} \quad \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \, d\Omega \right\} \quad (2.18)$$

Aqui, $C_{ijkl} = (E^{-1})_{ijkl}$ é o tensor de flexibilidade e S o conjunto dos campos de tensão estaticamente admissíveis, $S = \{ \sigma \mid \text{div} \sigma = 0 \text{ em } \Omega, \sigma \cdot n = t \text{ em } \Gamma_T \}$. Reforça-se que as forças mássicas não estão a ser consideradas neste subcapítulo. A partir do enunciado do problema (2.16) observa-se que, se o campo de deslocamentos da estrutura ótima for conhecido, a distribuição ótima de rigidez é tal que a energia de deformação é maximizada. Da mesma forma, se

a distribuição de tensão da estrutura ótima for conhecida, a energia complementar é minimizada, equação (2.18).

Recuperando o raciocínio anterior, note-se que a condição de equilíbrio dos problemas (2.16) e (2.17) pode ser expressa em termos do princípio da energia potencial total mínima num sistema contínuo e discreto, respetivamente, tal que:

$$\frac{\partial \pi}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} a_E(u, u) - l(u) \right) = 0 \Leftrightarrow a_E(u, u) = l(u), \forall u \in U \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{u}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} \right) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.20)$$

Note-se que este resultado corresponde à equação de equilíbrio estático que permite obter a deformada do corpo. Portanto, no equilíbrio u^* , e utilizando os resultados das equações (2.19) e (2.20), verifica-se que:

$$\pi(u^*) = \frac{1}{2} a_E(u, u) - l(u) = \frac{1}{2} l(u) - l(u) = -\frac{1}{2} l(u) \quad (2.21)$$

$$\pi(u^*) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T (\mathbf{K} \mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f} = -\frac{1}{2} l(\mathbf{u}) \quad (2.22)$$

Este resultado mostra que o valor energia potencial total no equilíbrio é $-\frac{1}{2} l(u) < 0$, ou seja, um valor negativo. A substituição deste resultado na equação (2.16), e considerando somente um sistema contínuo (o raciocínio seria idêntico considerando um sistema discreto), resulta em:

$$\begin{aligned} & \max_{\rho} \left\{ -\frac{1}{2} l(u) \right\} \\ & \text{s.a.} \quad \int_{\Omega} \rho \, d\Omega \leq V^* \end{aligned} \quad (2.23)$$

No gráfico da figura 2.8 representa-se a função objetivo do problema de máximo da equação (2.23), curva a vermelho, e o seu negativo, curva a preto, correspondente ao problema de mínimo indicado na equação (2.24). Ao longo do eixo das ordenadas constam os valores de ambas as funções objetivo que são ótimos para o problema de minimização da energia potencial total, sendo u^* o campo de deslocamentos ótimo que minimiza π .

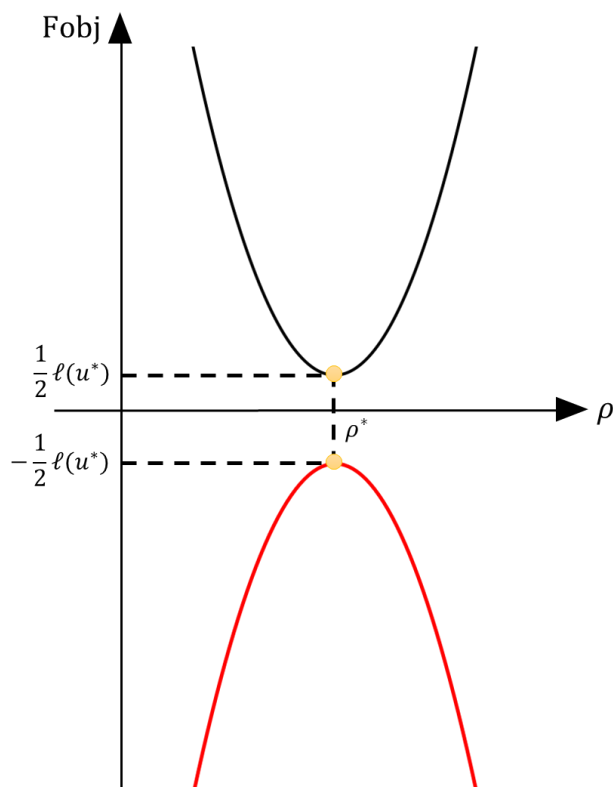


Figura 2.8: Função objetivo dos problemas (2.23), 4º quadrante, e (2.24), 1º quadrante, em função do campo de variáveis de densidade topológica.

Através da análise da figura 2.8, é possível constatar que ambas as funções possuem sinais contrários, mas isso não invalida que não tenham o mesmo ótimo, ou seja:

$$\max\left\{-\frac{1}{2}l(u)\right\} \Leftrightarrow \min\left\{\frac{1}{2}l(u)\right\} \quad (2.24)$$

onde se assume que u já é solução do problema de minimização da energia potencial total. Neste momento, $\frac{1}{2}l(u)$ representa a energia total de deformação. Não obstante, repare-se que a constante $1/2$ não altera a localização do ponto ótimo do problema de otimização e, portanto, pode desaparecer. Assim, a formulação previamente definida na equação (2.16) pode resumir-se à formulação equivalente presente na equação (2.25). Esta última corresponde ao enunciado do problema clássico da *compliance* que se encontra amplamente apresentado na literatura.

$$\begin{aligned} \min \quad & l(u) \\ & \rho \\ \text{s.a.} \quad & \int_{\Omega} \rho \, d\Omega \leq V^* \end{aligned} \quad (2.25)$$

Por vezes, a literatura mostra formulações do problema de minimização da *compliance* onde aparece explicitamente um constrangimento associado à equação de equilíbrio estático [25]. Na prática, quando se resolve o problema (2.25) com recurso a um algoritmo de programação matemática, a equação de equilíbrio estático, $a_E(u, u) = l(u)$ no sistema contínuo ou $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ no sistema discreto, é considerada de forma isolada num programa à parte. Desta forma, garante-se que o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u} , que é utilizado pelo algoritmo na resolução do problema de otimização, já satisfaça de antemão a equação de equilíbrio estático, daí não existir um constrangimento associado à condição de equilíbrio na equação (2.25). Portanto, a formulação que efetivamente é considerada pelo algoritmo de otimização, na forma discretizada, é dada somente por:

$$\begin{aligned} \min \quad & \ell(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{f} \\ & \boldsymbol{\rho} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{ne} \rho_i |\Omega|_i \leq V^* \end{aligned} \tag{2.26}$$

onde não é visível nenhum constrangimento associado à equação de equilíbrio estático.

De forma sumária, ao longo deste tópico apresentarem-se cinco formulações equivalentes para o problema original da *compliance* dado por (2.13). Num sistema contínuo, têm-se as formulações equivalentes (2.16), (2.23) e (2.25). Num sistema discreto, as formulações equivalentes apresentadas foram as equações (2.17) e (2.26). Todas estas formulações permitem entender que o problema de minimização da *compliance* é um problema que se encontra largamente estudado na literatura e que, acima de tudo, constitui o começo natural dos problemas em otimização topológica. Esta caracterização das várias formulações acaba por desempenhar também um papel muito importante na compreensão da natureza do problema de *design*, tanto a nível teórico como computacional.

2.4.6 Energia elástica de deformação versus Compliance

Comece-se por retomar a equação (2.20). Note-se que ao multiplicar-se ambos os termos desta equação por \mathbf{u}^T , obtém-se:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{Ku} = \mathbf{u}^T \mathbf{f} \tag{2.27}$$

Repare-se que o termo do lado direito é vulgarmente associado à *compliance*, mas o termo do lado esquerdo não é a energia elástica de deformação. Por outro lado, ao multiplicar-se ambos os termos da equação (2.27) por 1/2, vem que:

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (2.28)$$

onde o termo que aparece agora do lado esquerdo da equação é a energia elástica de deformação e o termo do lado direito, em rigor, é o trabalho realizado pelas forças exteriores aplicadas, trabalho esse que se assume calculado com base na aplicação de uma força com uma duração suficientemente lenta no tempo para produzir um deslocamento \mathbf{u} .

Portanto, de um ponto de vista formal e matematicamente rigoroso, a vulgarmente chamada *compliance* e a energia elástica de deformação de um corpo são proporcionais, sendo a constante de proporcionalidade entre elas de 1/2. Mas, do ponto de vista da otimização, ao resolver-se o problema de minimização da energia elástica de deformação ou da *compliance*, a presença desta constante não altera a sua solução ótima. No contexto da otimização, tal resulta em formulações de problemas de *design* equivalentes, tal como se observou no tópico anterior.

2.5 Otimização topológica multimaterial

A otimização topológica *Single-Material* (SMTO, *Single-Material Topology Optimization*) tem sido vastamente documentada na literatura nas últimas décadas. Já no âmbito da otimização topológica multimaterial (MMTO, *Multi-Material Topology Optimization*) não existem assim tantos trabalhos realizados ou documentados na literatura, pelo menos em comparação com SMTO. A MMTO é uma categoria com um potencial enorme na medida em que oferece um maior número de graus de liberdade e resultados melhores ou, quanto muito, iguais aos obtidos por SMTO. Já se demonstrou, por exemplo, que as soluções de *design* multimaterial, quando comparadas às soluções de um único material, originam melhores níveis de *compliance* e de tensão [29, 112]. Para além destes trabalhos, faz-se ainda referência ao trabalho de Lu *et al.* [30] desenvolvido no contexto de estruturas reticuladas, em particular, no âmbito da indústria automóvel. Por um lado, este trabalho mostra perfeitamente a estrutura física otimizada de sistema mecânico comum do dia-a-dia e, por outro lado, demonstra que a MMTO também oferece resultados muito significativos em termos de massa. Os autores aplicaram otimização topológica multimaterial à estrutura de um autocarro, veja-se a figura 2.9, com o objetivo de reduzir a sua massa. Para o efeito, utilizaram variáveis de densidade topológica e de seleção de material e dois tipos de constrangimentos, de rigidez e de frequências naturais.

Neste trabalho, foram utilizados dois materiais, o aço e o alumínio, de tal forma que a estrutura ótima, à diferença da inicial, passou a ser constituída por vigas de aço e por vigas de alumínio e a apresentar menos 19 vigas relativamente às 358 de aço de que era portadora inicialmente. Com esta alteração, os autores conseguiram reduzir a massa da estrutura em 39,65%. Na verdade, a partir deste último resultado, os autores ainda aplicaram otimização dimensional à secção transversal das vigas, obtendo um resultado final de massa 39,47% inferior em relação ao resultado anterior.

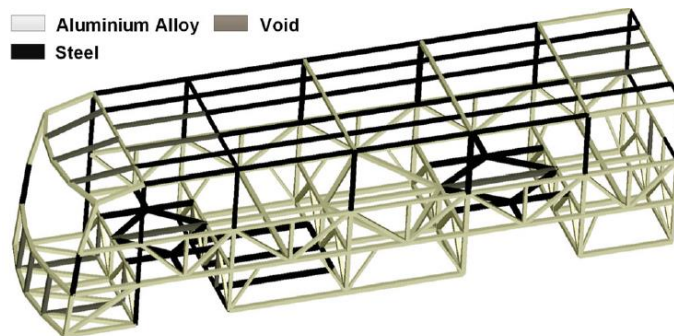


Figura 2.9: Otimização topológica multimaterial da estrutura de um autocarro. [30]

Desta forma, é importante referir que uma abordagem multimaterial apesar de permitir, de um modo geral, melhores resultados estruturais implica também um aumento da complexidade da metodologia utilizada no projeto e na resolução do problema de otimização. Em acréscimo, é também relevante perceber que em problemas SMTO apenas existiam duas fases de material, sendo que uma delas era a fase de vazio e a outra era a fase sólida constituída por um único material isotrópico. Não obstante, este número de fases não é limitativo e, no âmbito dos problemas MMTO, é possível contemplar um número de fases de material superior, que tenha em conta a utilização de diferentes materiais e como estes se devem distribuir ao longo do domínio de projeto [31]. À semelhança do que já se tinha verificado nos problemas SMTO, também aqui os algoritmos de otimização visam obter uma distribuição ótima dos diferentes materiais selecionados (incluindo o vazio), gerando melhorias significativas no projeto.

Em MMTO existem pelo menos três fases de material, em que uma delas é a fase de vazio. Por forma a obter resultados que sejam fisicamente realistas e robustos, é habitual utilizarem-se as leis de interpolação de material que se servem das variáveis de densidade artificial para, com base nas propriedades dos materiais de base, calcular as propriedades resultantes num dado elemento do domínio de projeto. As leis de interpolação mais comuns são a extensão da lei de potência SIMP, estratégia SIMP recursivo [31, 32, 33], e o DMO (*Discrete Material Optimization*) [34, 35, 36]. De notar que as variáveis de densidade artificial utilizadas por estes métodos são do tipo discretas e, portanto, incompatíveis com o uso de algoritmos baseados no gradiente. Portanto, o relaxamento destes problemas ao contínuo continua a ser uma forma eficiente de os abordar. Mas tal implica estabelecer uma penalização destas variáveis artificiais por forma a inviabilizar os seus valores intermédios, forçando antes os valores limite 0 ou 1. Obviamente que o número de variáveis de densidade é tanto maior quanto maior for o número de fases de material que se esteja a interpolar.

No âmbito do método SIMP recursivo, é interessante notar que existem diferentes extensões do método para o mesmo número de fases, principalmente quando se consideram mais do que duas fases sólidas de material [31, 33]. Constata-se que, dependendo do método

SIMP recursivo adotado, é possível chegar-se a soluções diferentes. Ao comparar-se os trabalhos [31, 33], chega-se mesmo a concluir que, em 50% dos casos, as abordagens oferecem a solução vazia e, em cerca de 37.5% dos casos, a escolha de um material diferente [37]. Assim, pode dizer-se que um dos *handicaps* do método SIMP é a diferença nas soluções quando se introduzem mais do que duas fases de material sólido. Contudo, nesta dissertação, esse problema não se coloca porque será efetuada uma interpolação entre duas fases sólidas e uma fase de vazia.

Na literatura, a formulação MMTO mais comum é a minimização da *compliance* sujeita a constrangimentos de fração volúmica para cada fase. No entanto, a introdução do constrangimento de massa no problema multimaterial também já foi documentado em alguns trabalhos [32, 38, 39, 40, 112]. Para além da adição do constrangimento de massa, pode observar-se o trabalho de Zuo e Saitou [41] onde os autores já consideraram o constrangimento de custo do material, que acaba por ser de alguma forma equivalente a adicionar constrangimentos de volume. Importa mencionar que alguns autores afirmam que, para prática de engenharia, é preferível utilizar a massa da estrutura enquanto objetivo do problema, embora a imposição de um limite superior no constrangimento da *compliance* possa não ser de todo evidente [29, 42, 43]. Por fim, salientam-se ainda alguns trabalhos relevantes no contexto da otimização multimaterial. Refira-se o trabalho de Pratas [44] que elaborou uma formulação para fazer otimização multimaterial em estruturas reticuladas de minimização de massa com constrangimentos de tensão; refira-se o trabalho de Almeida [45] que desenvolveu metodologias capazes de minimizar a massa de estruturas reticuladas planas sujeitas a constrangimentos de tensão de modo a otimizá-las a nível dimensional e topológico com seleção de material; e refira-se o trabalho de Pinto [37] que procurou encontrar um equilíbrio entre *compliance*, massa e custo, grandezas conflituosas, à custa da otimização multimaterial e multiobjetivo.

No âmbito desta dissertação, será utilizado um tipo de otimização multimaterial, mas que, ao contrário dos trabalhos mencionados neste subcapítulo, não contempla a existência de uma interface entre as diferentes fases discretas de material que se estão a interpolar. São obtidas antes misturas de materiais, onde as propriedades variam suavemente ao longo do domínio de projeto, por forma a criar um gradiente contínuo de propriedades nas várias direções do espaço. A este tipo de materiais dá-se o nome de materiais com gradiente de funcionalidade, sendo estes explorados seguidamente.

2.6 Materiais com gradiente de funcionalidade

No subcapítulo anterior, discutiu-se o quanto a otimização topológica tem sido utilizada para acomodar prontamente os *designs* multimaterial (MMTO). Para além da MMTO, o conceito de material com gradiente de funcionalidade (*Functionally Graded Material*, FGM) tem sido muito investigado em otimização topológica recentemente. Os FGMs foram introduzidos, no ano de 1984, por um grupo de cientistas de materiais como uma nova classe de materiais

compósitos avançados com propriedades equivalentes que variam de forma contínua e graduada ao longo de uma ou mais direções do espaço como uma função conhecida [46, 62].

O conceito de FGM foi originalmente desenvolvido, no contexto da indústria aeroespacial, com o propósito de controlar a resposta térmica dos materiais da fuselagem exterior dos aviões espaciais (em inglês, *space planes*). Mais especificamente, de fazer com que os materiais funcionassem como barreiras térmicas. Este era um aspeto importantíssimo, pois existia um aquecimento abrupto do material da fuselagem resultante da sua fricção com o ar [47]. Desde então, existiu um esforço para continuar a desenvolver materiais de alta *performance* e com elevada resistência ao calor (*highperformance heat-resistant materials*) através da tecnologia com um gradiente funcional [48].

No ano de 1996, surge um avanço significativo na investigação dos FGMs com a publicação do trabalho de Kawasaki e Watanabe [49] onde os autores propuseram a criação de uma camada intermédia com uma composição graduada (*compositionally graded interlayer*) para estabelecer a união entre um metal e um cerâmico. Sabe-se que a união direta entre estes materiais dá origem a tensões térmicas em aplicações práticas que exijam temperaturas elevadas. Tais tensões estão associadas à formação de fissuras e à delaminação da camada de material cerâmico. Através desta camada FGM, os autores conseguiram eliminar estas tensões térmicas e constaram que este novo material com gradiente de propriedades possuía simultaneamente uma resistência enorme aos efeitos térmicos e uma dureza suficiente para evitar a propagação de fissuras. A figura 2.10 ilustra esquematicamente a ideia por trás do desenvolvimento deste FGM como um material estrutural resistente ao calor constituído por duas fases sólidas, uma de material metálico e outra de material cerâmico.

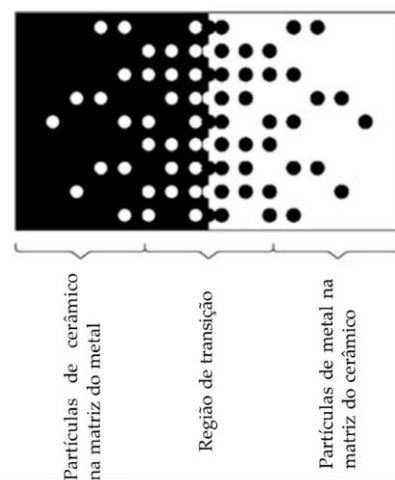


Figura 2.10: Ilustração esquemática da composição de um FGM de dois componentes. A composição varia gradualmente desde a totalidade de um componente até à totalidade do outro. (Adaptado de [50])

Na figura anterior, a fase de material cerâmico atua como uma barreira térmica que protege a fase de material metálico da corrosão e da oxidação. Em contrapartida, a fase metálica,

que apresenta uma baixa resistência à corrosão a temperaturas elevadas, devido à sua alta condutividade térmica e resistência a baixas temperaturas fortalece o compósito no seu todo. Observa-se a dispersão aleatória de partículas esféricas ou quase esféricas de cada um dos materiais no interior da matriz do outro material com proporções variáveis. Como resultado, desenvolvem-se características termofísicas não homogêneas associadas ao material compósito por simples variação das frações volúmicas das suas fases constituintes [50].

Na verdade, percebe-se na literatura que existe mais um tipo de FGM, conforme se descreve brevemente de seguida. Note-se que o efeito de FGM também pode ser obtido variando espacialmente uma microestrutura ou arquitetura ao longo de uma dada direção do espaço. Como forma de exemplificar, faz-se referência ao trabalho de Radman *et al.* [51] onde os autores projetaram FGMs celulares que apresentam uma variação gradual na sua rigidez ao longo de uma determinada direção. Especificamente, a microestrutura de um FGM pode ser denotada através de uma célula de base graduada (CBG), tal como a representada na figura 2.11.

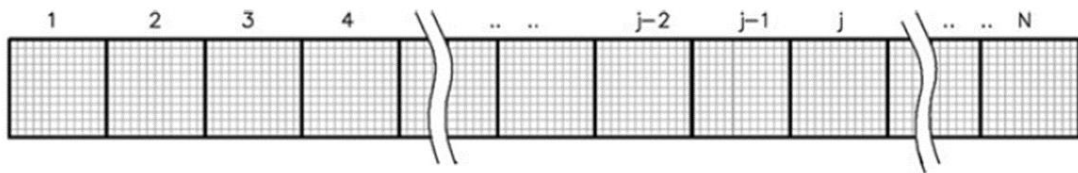


Figura 2.11: Células de base de um FGM. (Adaptado de [51])

Para projetar um FGM com um gradiente de rigidez é necessário dividir a CBG, que constitui o domínio de projeto, numa série de células de base periódicas (CBP) ao longo da direção de gradação. Assume-se um número total células de base igual a N e que cada célula tem um *target* diferente em termos de rigidez. Note-se que a relação entre a topologia das CBP e as propriedades macroscópicas do material são estabelecidas através da teoria da homogeneização.

Como primeiro exemplo, pode utilizar-se o FGM celular 2D, representado na figura 2.12a, que apresenta uma variação no módulo de deformação volumétrica desde 40 até 15%, percentagem de material sólido. Neste caso, o domínio de projeto foi dividido em dez células de base. Como segundo exemplo, observe-se o FGM 3D constituído por oito células de base e resultante de uma variação do módulo de elasticidade transversal médio desde 40 até 5%, percentagem de material sólido, representado na figura 2.12b.

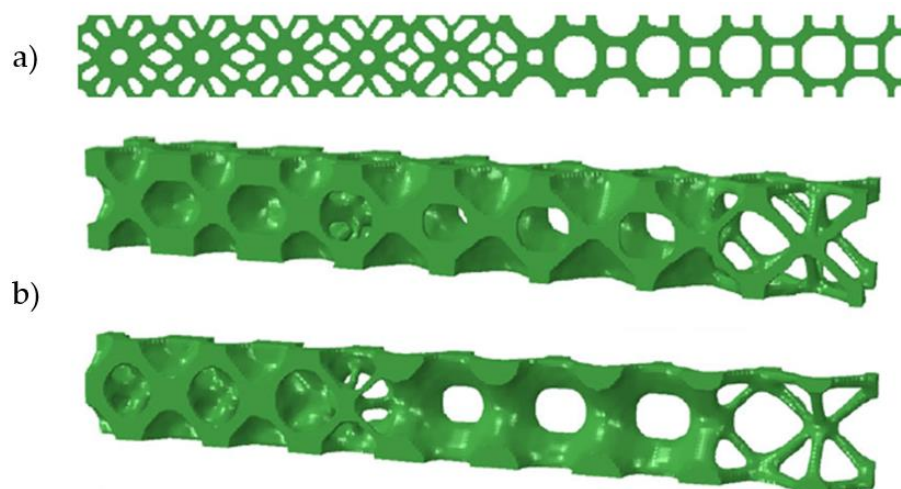


Figura 2.12: (a) FGM 2D otimizado com uma gradação linear no módulo de deformação volumétrica, (b) FGM 3D otimizado com uma variação do módulo de elasticidade transversal, em primeiro a microestrutura otimizada e em segundo a secção transversal do FGM de modo a ilustrar a sua estrutura interna. (Adaptado de [51])

É interessante notar que, quer no exemplo da Fig. 12a como no da Fig. 12b, se constata nas microestruturas otimizadas uma conectividade entre as células de base quase indistinguível e que gera um efeito de continuidade entre as diferentes microestruturas. Com tal característica, é possível obter uma transição contínua no espaço ao passar de microestruturas mais densas para microestruturas altamente porosas.

Em síntese, existem essencialmente duas formas de obter um FGM: (1) variando a composição de materiais que se misturam [50, 52]; (2) variando uma arquitetura ao longo de uma dada direção [51, 53]. De salientar que um material com um gradiente de propriedades associado uma variação na composição não tem necessariamente de apresentar uma microestrutura variável, ou seja, uma não implica a outra. Por exemplo, um melhoramento da resistência de um material à iniciação de fissuras devidas à fadiga pode ser efetuado alterando o tamanho do grão em função da posição mais próxima à superfície do material. Este tipo de material pode ser considerado um FGM mesmo na ausência de qualquer gradiente na composição. Da mesma forma, para melhorar a resistência à corrosão de uma solução sólida monofásica, a composição de um elemento de liga pode ser variada em função da distância à superfície do material. Tal material também pode ser considerado um FGM, embora não tenha sofrido nenhuma mudança evidente nas características geométricas da microestrutura [54].

Por conseguinte, observou-se que mudanças contínuas na composição e na microestrutura deste tipo de materiais compósitos geram um gradiente de propriedades tanto ao nível da resistência mecânica como ao nível da condutividade térmica. Para além disso, em contraste com os materiais compósitos convencionais, cujas mudanças acentuadas nas propriedades do material dão origem a tensões interlaminares, verifica-se que as estratégias de alterar gradualmente a geometria ou a fração volúmica do material evitam este problema [55]. Repare-se

inclusive que, de acordo com estas características, muitas estruturas biológicas também pertencem à categoria dos FGMs.

Curiosamente, a eficiência dos FGMs em cumprir a função para a qual se destinam é absolutamente notável e admirável quando estes são encontrados de forma natural na própria natureza, os quais têm sido objeto de mimetização por parte de cientistas e engenheiros nas suas áreas de intervenção e investigação [56, 62]. Sistemas biológicos onde é possível reconhecer FGMs são, por exemplo, o tecido ósseo, as conchas do mar, os caules de plantas [54], veja-se a figura 2.13.

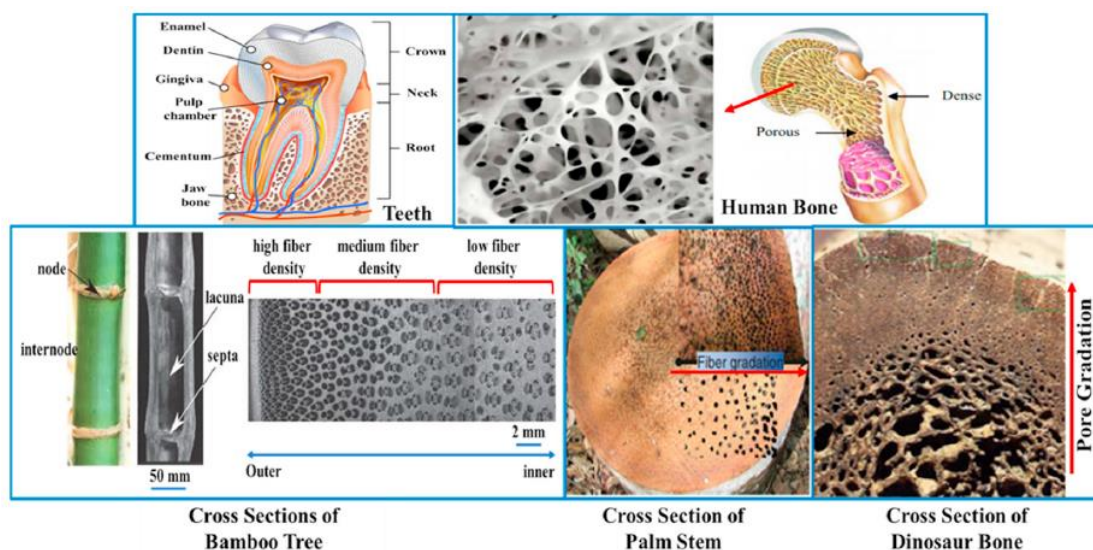


Figura 2.13: Alguns exemplos de FGMs na natureza que contêm estruturas com propriedades funcionais. [62]

Por exemplo, o bambu, que é uma estrutura leve e muito comum na natureza, explora muito bem o conceito de material com propriedades funcionais, pois apresenta formas microestruturais complexas e uma distribuição de material singular que lhes conferem uma elevada tenacidade à fratura [57, 58]. No entanto, o conceito de FGM não se restringe apenas a plantas, os ossos são também estruturas biológicas onde é possível investigar este conceito [59, 60]. É interessante notar que uma das características mais importantes dos FGMs naturais, como o bambu e o osso, é a sua capacidade de auto-otimização (*self-optimizing*) através da modelação e remodelação das suas microestruturas, pela deteção de estímulos mecânicos, que lhes permite uma melhor adaptação ao meio ambiente [61]. Em relação ao osso humano, observa-se que o osso cortical e o osso trabecular são exemplos de estruturas biológicas onde se conseguem distinguir os dois tipos de FGM anteriormente descritos, caracterizados pela variação de composição ou arquitetura. Veja-se a figura 2.14 que destaca um canal central vertical na parte do osso cortical por onde passa um vaso sanguíneo. Este, entre outros canais semelhantes, encontra-se rodeado por uma estrutura que não é homogénea, e que no espaço pode ser considerada transversalmente isotrópica. No entanto, na direção radial, da parte de dentro para a

parte de fora de cada canal, percebe-se que existe um certo gradiente local de propriedades associado a uma organização lamelar do tecido ósseo envolvente. O osso cortical é assim um FGM caracterizado por variação de composição enquanto o osso trabecular, que lhe é adjacente, é já um FGM caracterizado pela variação da arquitetura. Efetivamente, o osso é um bom exemplo de um FGM e uma estrutural natural onde coexistem os dois tipos de FGM. Ter a capacidade de olhar para a natureza no sentido de reconhecer situações úteis na resolução de problemas de engenharia, tais como a existência de gradientes de propriedades, é estimulante e desafiante em prol da inovação.

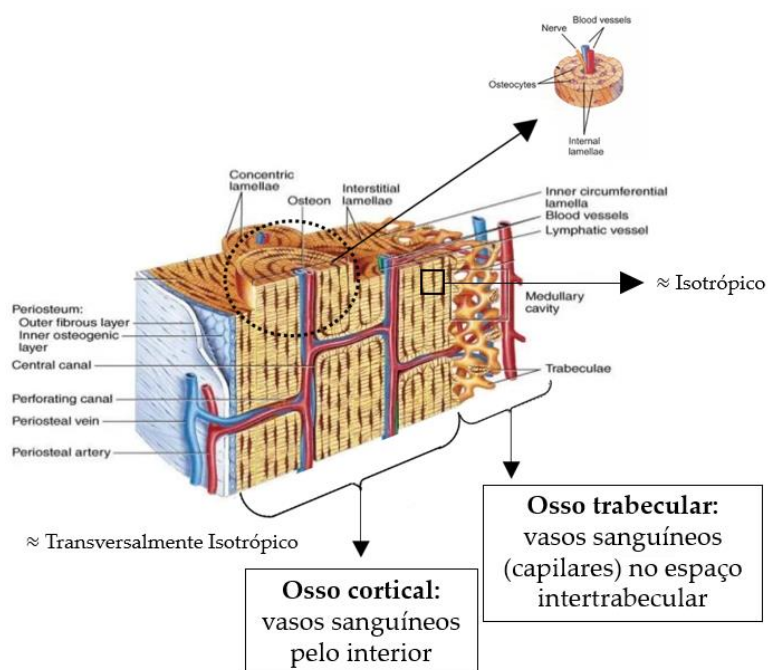


Figura 2.14: Representação da matriz óssea nos dois tipos de tecido ósseo, cortical e trabecular, demonstrando a coexistência de ambos os tipos de FGM numa única estrutura natural. (Adaptado de [59, 63])

Nos últimos anos, os FGMs têm sido extensivamente estudados em termos do desenvolvimento de novas metodologias de fabrico e técnicas de modelação. Obter uma resposta ótima das propriedades do material às condições de um meio ambiente real é o principal requisito no projeto de FGMs. Para cumprir este requisito, é habitual efetuar-se uma variação da composição e da microestrutura do material ao longo da estrutura. Não é novidade que os engenheiros podem desenvolver novos materiais imitando morfologicamente os FGMs naturais. Mas a grande questão que se coloca agora é: não será possível inventar materiais (“engenheirados”) que a natureza não possui e que a humanidade ainda não conheceu? Encarando os FGMs naturais como estruturas bem adaptadas/otimizadas para uma função, vale a pena explorar a obtenção de FGMs em engenharia utilizando, para o efeito, as técnicas de otimização topológica que têm vindo a ser bem estabelecidas na comunidade científica e tantas vezes têm até resultado em soluções semelhantes aos *designs* naturais [25].

Os aspetos desafiadores no projeto de FGMs prendem-se essencialmente com a previsão das suas características de desempenho e com a determinação da distribuição espacial ótima dos seus materiais constituintes [64]. No entanto, alguns cientistas já se debruçaram sobre este assunto e procuraram aplicar métodos de otimização topológica para projetar FGMs. Faz-se referência ao trabalho de Stump *et al.* [65] que, em 2006, propuseram o projeto de estruturas FGM otimizadas, considerando constrangimentos de tensão, utilizando a otimização topológica baseada num problema relaxado obtido através da definição de um modelo material FGM para duas fases. Refira-se o trabalho de Zhou e Li [66] que, em 2008, investigaram vários métodos para projetar FGMs com uma mudança gradual nas suas propriedades elásticas utilizando a técnica da homogeneização inversa proposta por Sigmund [68]. Refira-se o trabalho de Paulino *et al.* [67] que, em 2009, investigaram sistematicamente o conceito de FGM a nível local, numa célula unitária (RVE), controlando a gradação das propriedades do material desde sólido a vazio em vez de forçar uma topologia pura 0-1. Refira-se o trabalho de Radman *et al.* [50] que, em 2015, elaboraram um algoritmo computacional para o projeto topológico de microestruturas para FGMs com gradação em duas propriedades funcionais.

Em termos práticos, os FGMs são frequentemente encontrados em aplicações que vão desde produtos biomédicos, estruturas aeroespaciais até aos metamateriais e já demonstraram melhorias de desempenho de um ponto de vista estrutural, mecânico e eletrónico, ver [54, 62, 69, 70, 71]. Este tipo de materiais são bastante adequados para várias aplicações de engenharia onde os materiais convencionais não funcionam. Alguns campos da sua aplicabilidade estão ilustrados na figura 2.15. Estas metas de desempenho são alcançadas devido à capacidade de as propriedades destes materiais poderem variar global e localmente em todo o domínio de projeto. Repare-se que os métodos de otimização constituem ferramentas essenciais para aproveitar o máximo de desempenho e de benefício da heterogeneidade dos FGMs. Em particular, verifica-se que uma variação suave das propriedades do material pode oferecer vantagens na redução do fenómeno de concentração de tensões resultante de uma perturbação geométrica no material, como o caso da abertura de um furo. De facto, a maior vantagem dos FGMs é a possibilidade de customizar a sua gradação de propriedades com vista a maximizar o desempenho de um dado componente [65].

O benefício das estruturas FGM reside na sua heterogeneidade que pode ser adaptada a várias aplicações específicas. Podem distinguir-se dois tipos de heterogeneidade quanto ao seu nível de abrangência: (1) contínua e (2) descontínua [22]. A primeira representa o caso em que a estrutura é sintetizada através de uma variação contínua das propriedades do material em todo o domínio ocupado pela estrutura. A segunda refere-se ao que se passa ao longo da interface de materiais diferentes. Neste caso, não deve existir uma interface abrupta entre fases discretas de materiais. Deve existir antes uma zona de transição entre essas fases tal que a passagem das propriedades de uma fase para a outra faz-se de forma gradual através da coexistência com um FGM, mas apenas nessas zonas de fronteira ou transição. Tipicamente, as

interfaces macroscópicas entre diferentes materiais com diferentes propriedades são vulneráveis a tensões interlaminares, deformação plástica e fissuras que, posteriormente, levam à falha do material. Contudo, este é um problema que não se coloca em estruturas FGM, o que lhes confere uma enorme vantagem face a estruturas multimateriais tradicionais.

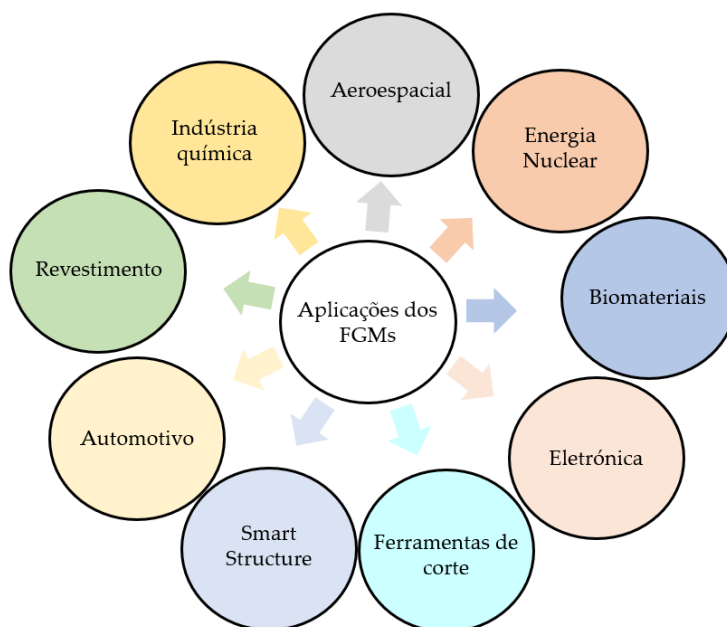


Figura 2.15: Áreas de aplicação prática dos FGM. (Adaptado de [62])

Como à macroescala as propriedades efetivas do material podem ser aproximadas por regras de mistura (*mixture rules*) em termos das frações volúmicas dos constituintes, as frações volúmicas são geralmente consideradas como variáveis de projeto na literatura do *design* e otimização de materiais com gradiente de funcionalidade. As regras de mistura dependem apenas das frações volúmicas dos materiais de base e assumem que estes são misturados uniformemente sem uma microestrutura, tal como ilustrado na figura 2.16.

Importa reforçar que o FGM obtido pela via da variação da composição resulta da mistura de dois materiais homogéneos diferentes. Sabe-se que as propriedades de tais misturas não se correlacionam linearmente com as frações volúmicas dos constituintes [72, 73, 74, 112]. Este último aspeto é agora contemplado pelo autor desta dissertação.

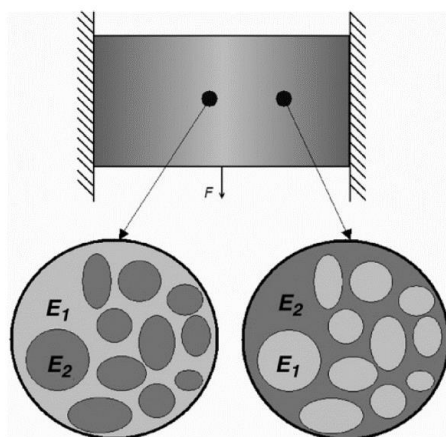


Figura 2.16: Mistura dos materiais constituintes em pontos arbitrários de uma estrutura. [72]

Em 2008, Xia e Wang [72] foram provavelmente os primeiros a aplicar otimização topológica a *designs* FGM. No seu trabalho, o FGM é visto como uma extensa variação suave das propriedades do material à custa da variação da composição de frações volúmicas ao longo do domínio de projeto. Os autores utilizaram um modelo de fração volúmica da composição do material e calcularam a média dos limites de Hashin-Shtrikman (HS) com vista a obter o módulo de elasticidade efetivo em cada elemento finito, tendo a função objetivo do seu problema sido a soma da *compliance* média. Mais especificamente, propuseram um método baseado nas curvas de nível com o objetivo de estabelecer uma otimização simultânea das propriedades do material e da topologia de estruturas com gradiente de funcionalidade. Neste método, a fração volúmica dos materiais de base da mistura (que modela as propriedades efetivas do material) e a fronteira livre da estrutura são consideradas como variáveis de projeto, as quais são *a posteriori* integradas num objetivo funcional comum na resolução de um problema de otimização a duas dimensões.

O interesse deste trabalho no contexto desta dissertação prende-se com dois aspetos. Um deles está relacionado com o facto de se contemplar a mistura de dois materiais distintos, através de regras de mistura, que prevalece extensivamente sobre a sua distribuição discreta, que corresponde ao tipo de FGM abordado nesta dissertação. Porém, é importante notar que existe um outro tipo de FGMs que visam alcançar zonas de transição suaves entre materiais discretos em compósitos, o que pode ser obtido adequadamente em otimização topológica com recurso ao método das curvas de nível [75, 76]. Não obstante, e tal como tem vindo a ser referido ao longo deste documento, a abordagem utilizada nesta dissertação é baseada na densidade, logo o trabalho a desenvolver distingue-se dos demais deste ponto de vista. O outro aspeto está relacionado com a utilização dos limites de HS para obter as propriedades do FGM. Note-se que o efeito de FGM é obtido à conta de misturar materiais que estejam suficientemente distantes um do outro em termos de propriedades. Na verdade, os autores utilizam

como modelo material a média dos limites superior e inferior de HS para efetuar uma interpolação das propriedades dos materiais de base (materiais compósitos isotrópicos), os quais estão ilustrados na equação (2.29) e figura 2.17.

$$E(\omega) = \frac{1}{2}(E(\omega)_{HS}^- + E(\omega)_{HS}^+) \quad (2.29)$$

onde ω é a fração volúmica do material de base mais rígido, E_{HS}^- é o limite inferior e E_{HS}^+ o limite superior de HS.

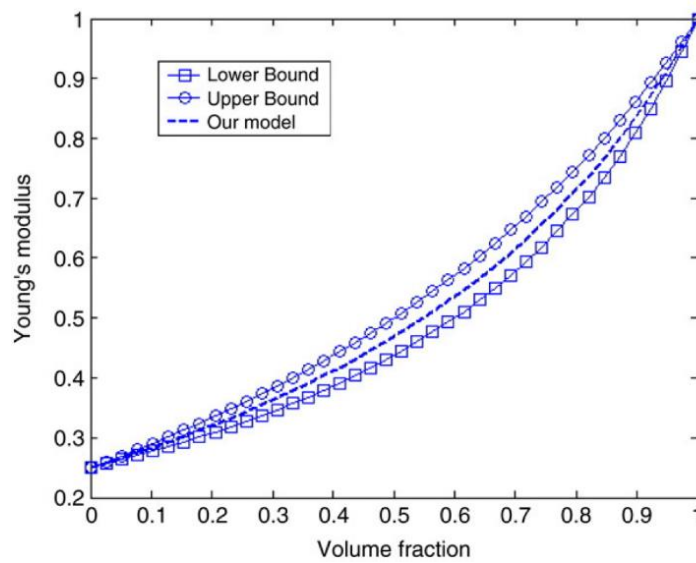


Figura 2.17: Limites de Hashin-Shtrikman e modelo material. [72]

Tal como se pode observar na figura 2.17, o modelo material, equação (2.29), tem uma penalidade nos valores intermédios das frações volúmicas o que se apresenta semelhante ao modelo de interpolação que tem sido utilizado pelo método SIMP, provando que este consegue modelar de forma adequada e precisa esta regra de mistura.

Os autores consideram, como um exemplo a duas dimensões para validar o método que desenvolvem, uma viga em balanço com uma proporção de 2:1 sujeita a uma carga vertical unitária aplicada no ponto médio da aresta do lado direito, tal como ilustrado na figura 2.18a. O *design* inicial, representado na figura 2.18b, será posteriormente otimizado com recurso ao método das curvas de nível. Utilizam ainda uma malha retangular fixa para o domínio de projeto, de espessura unitária, para efetuar uma análise de elementos finitos.

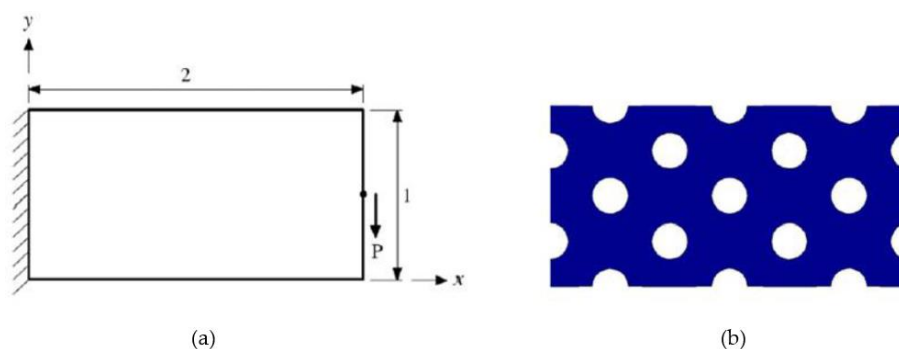


Figura 2.18: Problema de minimização da *compliance* média de uma viga em balanço: a) o *design* do problema; b) *design* inicial. (Adaptado de [72])

Durante o processo de otimização, surgem mudanças significativas nas propriedades topológicas e do material, culminando no *design* final representado na figura 2.19. Repare-se que se trata claramente de um FGM. A barra de cores representa o mapeamento do valor da fração volúmica do material de base mais rígido, ω .

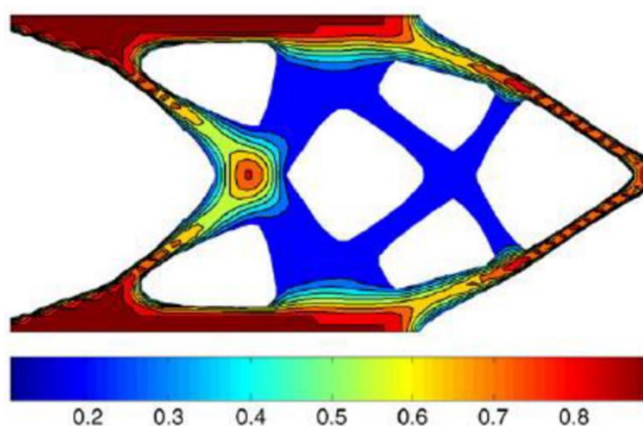


Figura 2.19: *Design* final ótimo. [72]

Destaca-se que, na topologia ótima, obteve-se uma distribuição mais eficiente das propriedades do material. Para além disso, note-se que o *design* final apresenta um número de furos inferior ao número de furos existentes no *design* inicial, desvantagem associada à utilização método das curvas de nível.

Um outro aspeto que é importante notar, para além obviamente dos diferentes métodos que são possíveis adotar ao nível da otimização topológica (método baseado na densidade, método das curvas de nível, etc), está relacionado com as diferentes abordagens utilizadas, no contexto do FGM, para definir o modelo material. Neste ponto de vista, destaca-se o trabalho de Ituarte *et al.* [74] que, em 2019, publicaram um artigo que explora o projeto estrutural e de fabrico de estruturas FGM com base em materiais digitais (DMs, *Digital Materials*). Os autores adaptaram uma abordagem baseada numa análise de regressão onde ajustaram os resultados

da caracterização dos DMs a um modelo de regressão cúbica para prever o comportamento à macroescala dos FGMs (baseados em DMs). O modelo material, representado na figura 2.20, é baseado em resultados experimentais e relaciona a fração volúmica de material polimérico com o módulo de Young (*fitted curve*). A fração volúmica dita a quantidade de cada um dos materiais poliméricos utilizados pelos autores e que deve entrar na mistura. O gráfico mostra a propriedade resultante dessa mistura. De notar que este modelo foi incorporado num problema de otimização de topologia com o objetivo de obter uma estrutura FGM que fosse capaz de atingir deslocamentos predefinidos e, por conseguinte, a resposta mecânica desejada.

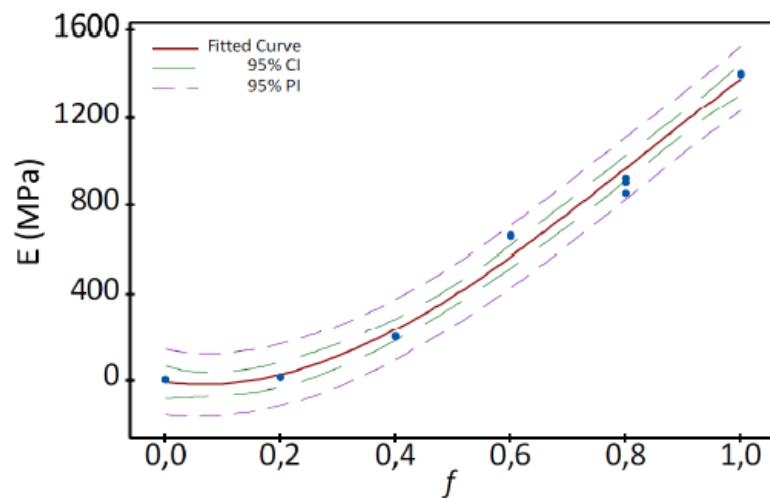


Figura 2.20: Regressão cúbica ajustada do módulo de Young E em função da fração volúmica f de material polimérico. [74]

O algoritmo de otimização alimenta-se destas propriedades resultantes obtidas experimentalmente e decide, com base na fração volúmica com que estiver a trabalhar, quais as propriedades que a mistura terá de ter em cada ponto do domínio de projeto. Curiosamente, note-se que a curva representada na figura 2.20, *fitted curve*, é muito semelhante à curva utilizada por Xia e Wang [72], com a diferença de a segunda ser baseada em propriedades teóricas.

No seu trabalho, os autores minimizam uma função de erro que tem um *target* em termos de perfil de deslocamento. O objetivo é minimizar essa função para diferentes frações volúmicas de um dado material polimérico resultante da mistura de outros polímeros por forma a obter um campo de deslocamentos parabólico. Na solução apresentada, pode ver-se um domínio de estrutura retangular, que se pretende não poroso, ocupado por um material resultado da mistura de dois conforme definido por otimização topológica a fim de obter um gradiente de propriedades elásticas.

Este trabalho constituiu uma prova de conceito que mostra que para atingir determinadas *performances*, como é o caso de obter um determinado perfil de deslocamentos, só é possível através de um FGM. Por instantes, se o objetivo for mitigar tensões, a via do FGM é potencialmente aquela que melhores resultados oferecerá. Portanto, pode dizer-se que os FGMs são

de extrema importância, pois assumem-se como uma solução não convencional para encontrar respostas a problemas cujo nível de exigência é elevado e que não são resolúveis através de materiais convencionais de engenharia. Tendo por base esforços anteriores de minimização de tensão e soluções que já existem na própria natureza, é relevante que se aposte na otimização topológica baseada na tensão para tirar partido dos benefícios dos FGMs na redução de tensões, tal como demonstra o tópico seguinte.

2.7 Desempenho dos FGMs na mitigação de tensões

O estudo de FGMs no âmbito da redistribuição e redução de tensões tem sido alvo de tratamento em otimização topológica e de muito interesse prático em engenharia. É de extrema importância estabelecer um controlo do fenómeno de concentração de tensões no interior de componentes estruturais compósitos, uma vez que este tipo de regiões são precisamente as primeiras a apresentar falha durante o serviço. Na prática, e tirando partido de um exemplo muito comum na literatura, observa-se que numa placa homogénea sujeita a tração não existe qualquer singularidade na distribuição da tensão, ou seja, esta última é uniforme no domínio da placa. Todavia, a abertura de furos perturba essa distribuição e provoca picos de tensão. O fenómeno de concentração de tensões não é um problema recente e já era uma preocupação do Homem no passado que, ao projetar estruturas, acabava sempre por ter de se preocupar com este dilema. Em virtude disso, salientam-se algumas técnicas comumente utilizadas na indústria e que permitem mitigar a concentração de tensões na vizinhança deste tipo de singularidades. Algumas dessas abordagens são o reforço do furo por adição de material, otimização da sua forma ou a remoção de material na sua vizinhança pela introdução de novos furos auxiliares [77].

Durante muito tempo, a estratégia de colocar camadas homogéneas (anéis de reforço) de materiais diferentes ao redor de furos para diminuir o fator de concentração de tensões foi amplamente utilizada e era uma estratégia que, ao fim de contas, fornecia bons resultados [78, 79]. Ainda assim, zonas de interface abruptas entre as diferentes fases sólidas homogéneas levavam ao aparecimento de tensões nessas interfaces, colocando em causa a resistência à delaminação ou à fadiga do material. Tais interfaces podem ser suavizadas através de uma graduação contínua das propriedades do material nas redondezas da região da interface (zona de transição) entre materiais discretos. Esta solução de *design* FGM localizada pode também estender-se a todo o domínio de projeto com vista à exploração da sua potencialidade na mitigação de tensões.

O FGM é o novo ramo de materiais compósitos que possuem uma variação contínua na composição em função da dimensão espacial. Esta variação contínua na composição oferece a variação correspondente nas propriedades mecânicas e isso torna o FGM um material candidato atraente para potenciais aplicações estruturais em engenharia. Os FGMs evidenciam inúmeras vantagens relativamente aos materiais compósitos convencionais, como a ausência de

delaminação, uma distribuição residual melhorada, fatores de concentração de tensões baixos, propriedades térmicas superiores, elevada tenacidade à fratura e uma melhor distribuição de tensões. Embora o fator de concentração de tensões seja uma propriedade geométrica de estruturas de materiais homogêneos, um FGM, cujas propriedades variem de forma adequada, pode reduzir o fator de concentração de tensões nas estruturas [80]. Em 2002, Kim e Paulino [81] apresentaram a primeira análise do fator de concentração de tensões para uma placa FGM e relataram que este era significativamente afetado pelas propriedades variáveis do FGM, mas era de outra forma independente das propriedades do material para materiais homogêneos.

Em adição, um levantamento da literatura sugere que os FGMs com propriedades funcionais na direção radial são muito mais benéficos e úteis do que FGMs com propriedades funcionais segundo as direções horizontal (direção x) e transversal (direção y). O estudo do campo de tensão em FGMs com propriedades elásticas funcionais na direção radial tem recebido uma considerável atenção nos últimos tempos [82, 83, 84]. Mais especificamente, no âmbito de uma análise de tensão em placas FGM com um furo circular destacam-se os seguintes trabalhos: (1) Kubair e Bhanu-Chandar [85] que, em 2008, estudaram numericamente o efeito da não homogeneidade do material na direção radial no fator de concentração de tensões devido a um furo circular numa placa FGM utilizando diferentes leis (potencial e exponencial); (2) Yang *et al.* [86] que, em 2010, estudaram a distribuição da tensão em 2D numa placa FGM com um furo circular sujeita a cargas arbitrárias constantes e mostraram que a tensão é bastante reduzida à medida que o módulo de Young aumenta radialmente; (3) Mohammadi *et al.* [87] que, em 2011, investigaram o fator de concentração de tensões numa placa feita de material com gradiente funcional assumindo um módulo de Young e um coeficiente de Poisson que variavam exponencialmente na direção radial.

No entanto, é necessário ressaltar que todos os estudos mencionados acima dizem respeito a placas inteiras de FGM. Contudo, na prática, muitas vezes não é viável fabricar uma placa inteira de material com gradiente de funcionalidade e é suficiente utilizar apenas uma fina camada de FGM em torno, por exemplo, de um furo para mitigar as tensões. Porém, Sburlati e outros autores [88, 89] já realizaram trabalhos no sentido de reduzir o fator de concentração de tensões aplicando uma camada de FGM ao redor de um furo em vez de utilizar uma placa inteira em FGM. Em particular, na referência [88], os autores desenvolvem um trabalho com o objetivo de compreender o efeito da utilização de uma camada heterogênea, com propriedades funcionais na direção radial, em redor de um furo no fator de concentração de tensões numa placa homogênea. Assumiram uma variação radial da lei de potência do módulo de Young e um valor constante do coeficiente de Poisson. As fórmulas para o fator de concentração de tensões foram fornecidas explicitamente para condições de carregamento uniaxial, biaxial e de corte no plano. Os resultados são posteriormente validados através de simulações numéricas de elementos finitos.

Outro aspeto que é importante salientar é o facto de, na literatura, apenas se observarem soluções numéricas ou aproximadas para placas FGM sujeitas a condições de carregamento

no plano. Tal facto deve-se à distribuição de tensão numa placa com gradiente de funcionalidade sem furo não ser uniforme como no caso de uma placa homogénea, e a solução para a placa com furo requerer a utilização de uma condição de fronteira no infinito correspondente à solução da placa sem furo [89]. Por outro lado, uma revisão da literatura revela que o fator de concentração de tensões pode ser significativamente reduzido com recurso a uma camada FGM ao redor da singularidade. Mas uma análise comparativa de diferentes materiais FGM e suas propriedades é muito difícil de encontrar na literatura. Tal motivou o trabalho de Goyat *et al.* [90] que, em 2019, estudaram a redução do fator de concentração de tensões, utilizando diferentes camadas de materiais com gradiente de funcionalidade (FGMs) ao redor de um furo circular contido numa placa infinita de material homogéneo, para diferentes condições de carga. O módulo de Young da camada FGM foi considerado variável ao longo da direção radial enquanto o coeficiente de Poisson foi mantido constante. O seu trabalho serviu para fornecer uma visão para selecionar uma camada FGM adequada e suas propriedades para reduzir o fator de concentração de tensões numa estrutura mecânica.

Seguidamente, destaca-se o trabalho de Barroca [91] enquanto um trabalho relevante e com grande inspiração para esta dissertação. Em 2019, o autor estudou problemas de minimização do valor do pico de tensão ao nível da microestrutura, no âmbito da otimização multi-material, garantindo ao mesmo tempo uma certa quantidade de vazio no seu domínio. Em particular, estudou o fator de concentração de tensões numa placa homogénea e isotrópica com um furo central. Observe-se o gráfico presente na figura 2.21. Da análise do mesmo, depreende-se que se a placa for homogénea o fator de concentração de tensões apresenta a distribuição representada pela linha a preto. Inicialmente, observa-se que o pico de tensão vale 2, resultado clássico para uma placa homogénea isotrópica com um furo central sujeita a um carregamento hidrostático. A adição de uma camada de outro material em redor do furo cria uma descontinuidade na função tensão que se observa na fronteira de transição entre dois materiais diferentes, tal como se pode constatar na figura 2.21. Esta modificação gerou uma nova distribuição da função tensão que é agora representada pelas linhas coloridas, representando cada uma um material diferente. Note-se que a estratégia de otimização utilizada neste trabalho procura encontrar qual o material e quanto desse material é que é necessário colocar em torno do furo, sabendo que esta adição criará novos picos de tensão isolados, mas, ao mesmo tempo, praticamente nivelados. Assim, existem agora dois picos de tensão, mas significativamente inferiores ao pico inicial. Neste caso, note-se ainda que a deformação continua a ser uma função contínua porque o material continua a ser sólido, agregado e não existe qualquer rotura. Não obstante, existe uma diferença nas propriedades do material. A descontinuidade da função tensão é prevista pela Lei de *Hooke* que resulta, no caso em estudo, do produto de uma função descontínua (módulo de Young) por uma função contínua (extensão). O que se observa na figura 2.21 é um alívio da tensão por intermédio da introdução de uma camada

de material, isolada, gerando uma solução onde coexistem dois materiais perfeitamente caracterizados, sólidos e isotrópicos. Esta redução do pico de tensão inicial foi efetuada à custa da criação de dois novos picos de tensão significativamente mais reduzidos.

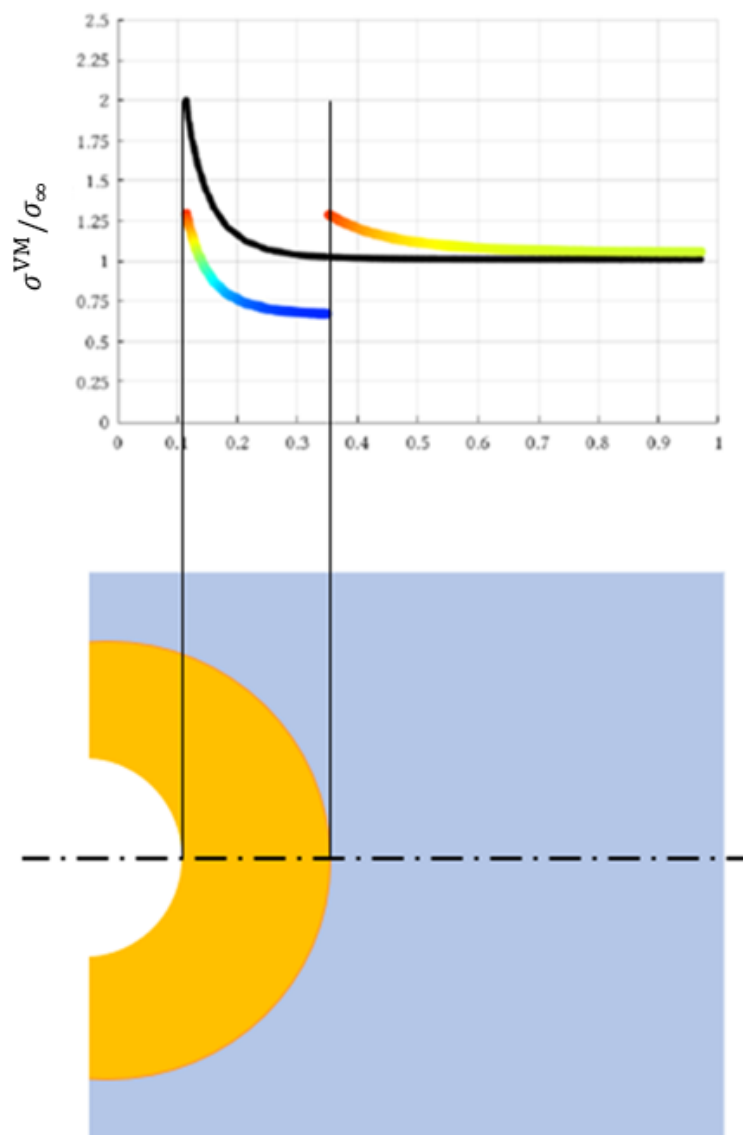


Figura 2.21: Distribuição da tensão de von Mises ao longo do eixo horizontal de uma placa com furo central, revestido por uma camada de material, sujeita a um carregamento hidrostático. (Adaptado de [91])

Podem destacar-se duas soluções do trabalho de Barroca [91], para 10 e 15 fases de material, relativas ao módulo de Young ótimo e distribuição da tensão equivalente resultante para frações volúmicas de 95% e 99%, respetivamente. Vejam-se as figuras 2.22a e 2.22b.

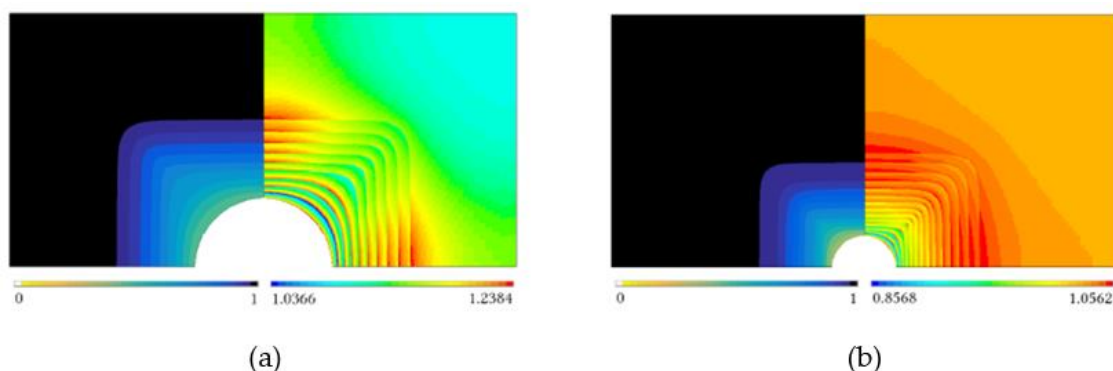


Figura 2.22: (a) *Design* ótimo da microestrutura sujeita a um carregamento hidrostático e com uma fração volúmica de 95%, considerando 10 fases de material, (b) *Design* ótimo da microestrutura sujeita a um carregamento hidrostático e com uma fração volúmica de 99%, considerando 15 fases de material. (Adaptado de [91])

Os resultados de minimização do pico de tensão de von Mises para microestruturas com n fases de material estão sumariados na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Resultados do problema de minimização do pico de tensão de von Mises para microestruturas com n fases de material. [91]

V [%]	Resultado teórico	n fases de material	
	$\sigma_{\max}^{\text{VM}}$	$\sigma_{\max}^{\text{VM}}$	Redução [%]
99	2.0202	1.0562	47.72
95	2.1053	1.2384	41.18

No seu trabalho, são obtidas reduções bastante significativas (perto dos 50%) do pico de tensão pela introdução de camadas de materiais em redor do furo. De notar que as figuras 2.22a e 2.22b não correspondem a FGMs. Em ambas as figuras, podem observar-se diferentes anéis onde, em cada um, existe um único material diferente e não uma mistura de materiais, embora exista um gradiente de propriedades na direção radial que é responsável pelo alívio da tensão.

Um dos motivos que inspira a existência desta dissertação é a possibilidade destas camadas de materiais em torno do furo poderem ser uma mistura de diferentes materiais. Pode ser abrupto considerar camadas solidárias de material. Ao fim de contas, está-se a introduzir uma descontinuidade na função tensão quando o objetivo é acabar com essas singularidades. Pretende-se antes que o campo de tensão seja o mais regular, contínuo e baixo possível, o que só consegue atingir com as propriedades funcionais do FGM.

Em síntese, quando as estruturas apresentam vários furos, a concentração de tensões no seu redor pode ser reduzida através de uma variação adequada das propriedades do material. Por isso, faz todo sentido estudar o fenómeno de concentração de tensões em redor de furos com FGMs. A vantagem de suavizar o desajuste das propriedades do material através dos

FGMs torna-os muito úteis para estruturas sujeitas a cargas e condições ambientais extremas. Neste segmento de ideias, os efeitos da delaminação que ocorrem em compósitos laminados convencionais serão muito mais reduzidos. Em jeito de curiosidade, destaca-se uma abordagem biomimética sobre os orifícios atravessados por vasos sanguíneos em ossos que suportam carga. Esta afirma que estes não estão normalmente envolvidos em falhas estruturais por possuírem uma elevada resistência devida a uma distribuição radial do módulo de elasticidade em redor destes furos. Tal distribuição é responsável pela redução de tensões [89]. De facto, recordando a figura 2.14, percebe-se que o osso apresenta um gradiente de propriedades em torno dos canais por onde passam os vasos capilares. Sendo um sólido perfurado, tal gradiente local só faz sentido existir como forma de aliviar tensões.

2.8 Fabrico aditivo no contexto dos FGMs

Com o aumento do custo dos recursos naturais e das preocupações com o meio ambiente, os clientes exigem produtos cada vez mais eficientes. A necessidade de projetar materiais e estruturas mecânicas que sejam inovadores e superem os já existentes é uma procura recorrente. Essencialmente, podem destacar-se três estratégias principais que têm impacto na eficiência do uso de recursos naturais, a saber: utilização de materiais leves, avanços tecnológicos nos processos de fabrico e integração de otimização estrutural no projeto. A integração de estratégias num fluxo de trabalho único, onde é efetuada uma ponte que liga a otimização de topologia com o fabrico aditivo (*Additive Manufacturing*, AM), tem sido recentemente demonstrada e identificada como uma tendência futura promissora [92, 93].

Impulsionados por técnicas computacionais e fabrico avançadas, os FGMs podem ser criados com um excelente comportamento mecânico. Podem salientar-se dois paradigmas. Por um lado, os metamateriais podem ser projetados com variação da sua arquitetura interna que confere um comportamento excecional, não intuitivo ou natural. Por outro lado, os materiais podem ser projetados com variação de composição interna e/ou heterogeneidades inspirados na natureza. Nesta última abordagem, já foram alcançados resultados impressionantes, por exemplo, para atenuar a concentração de tensões ou aumentar a resistência à fratura, tal como observado no subcapítulo anterior. Sem dúvida, os FGMs superam os materiais compósitos convencionais no que toca à redução do fator de concentração de tensões, eventualmente existindo também uma mitigação da delaminação, especialmente tirando vantagem da otimização da variação das propriedades do material ao longo de todo o domínio de projeto constituído por material sólido e por áreas de vazio [79]. Os FGMs exibem propriedades complexas e que não podem ser obtidas combinando um único sistema de materiais. Por exemplo, através da combinação de um material rígido com outro pouco rígido, é possível encontrar propriedades anisotrópicas personalizadas ou gradientes de propriedades únicos [94]. Contudo, uma variação espacial das propriedades elásticas pode trazer problemas de fabrico.

Os sistemas multimateriais de AM, com a capacidade de variar as composições locais dos materiais durante a deposição, evidenciam um enorme potencial para aplicações com FGMs. A tendência de combinar otimização topológica com tecnologias emergentes de AM tem permitido o projeto integrado e o fabrico de novos compósitos como FGMs com desempenhos sem precedentes, ver [92]. Na verdade, segundo os autores desta última referência, a sinergia entre otimização topológica e fabrico aditivo é vista como uma simbiose ideal. No entanto, note-se que a capacidade do fabrico de FGMs com recurso ao AM está limitada ao quão discretamente o sistema de AM pode seletivamente depositar os materiais de base [95].

Os FGMs podem ser obtidos a partir de diferentes processos avançados de fabrico. No entanto, o *status quo* desses processos de síntese ainda está embrenhado em vários desafios devido à complexidade destas estruturas. Existem vários tipos de processos de AM, mas o *Wire Arc Additive Manufacturing* (WAAM) é considerado o mais adequado para a produção de peças estruturais em FGM. É um processo direto de deposição de matéria que utiliza energia térmica (um arco elétrico) para derreter o material da matéria-prima (arame). Este processo permite a obtenção de materiais com um gradiente de funcionalidade (FGMs) por alteração da mistura dos materiais dos arames durante o processo de deposição [96]. Por outro lado, uma variante WAAM de alimentação de arame duplo pode ser implementada, utilizando diferentes matérias-primas, permitindo uma prescrição predefinida de frações volúmicas que podem ser utilizadas para controlar a microestrutura e a composição química ao longo das direções de deposição [97]. Contudo, já foram utilizados outros processos de AM, como a deposição de metal a laser (*Laser Metal Deposition*, LMD) e a fusão a laser seletiva (*Selective Laser Melting*, SLM). O LMD, no entanto, não tem flexibilidade para controlar a composição química em cada camada e a variação espacial gradual de diferentes pós metálicos não é tão precisa e rápida [98]. O SLM é uma ferramenta poderosa para produzir materiais celulares. Não obstante, acaba por ser um processo à base de pó que não é flexível para controlar em tempo real a composição química. Além disso, é muito moroso para produzir peças estruturais de tamanho médio ou grande e não é adequado para criar FGMs com composições químicas graduadas no plano de deposição [99].

O trabalho de pesquisa pioneiro que se encontra-se em Ituarte *et al.* [74] merece novamente relevância no contexto do fabrico aditivo. Note-se que a sua contribuição acabou por constituir o primeiro passo no desenvolvimento de projetos integrados num fluxo de trabalho de fabrico de estruturas de materiais com classificação funcional (FGM) com base em sistemas multimateriais de AM. Através da integração das tecnologias emergentes, como a otimização topológica, o fabrico aditivo e a *Digital Image Correlation* (DIC), num ciclo completo, os autores mostram uma liberdade de projeto completamente nova.

É importante referir que o fabrico aditivo aparece apenas implicitamente no desenvolvimento desta dissertação, ou seja, não é um objetivo principal. Serve para mostrar que não existe nenhum outro processo de fabrico, a não ser o aditivo, que permita dar à luz este tipo

de estruturas não convencionais. Nesta perspetiva, e de modo a esclarecer o leitor, esta dissertação aparece como sendo o ponto de partida para a consolidação de um fluxo de trabalho de pesquisa integrado que se destaque num *design* e produto inovadores, destoando da atual tecnologia de ponta, em busca de uma nova geração de compósitos adaptados a serem funcionais, compósitos esses que só podem ser fabricados através de AM.

2.9 Otimização topológica baseada na tensão com FGMs

Tal como tem vindo a ser mencionado ao longo desta dissertação, o projeto de FGMs pode beneficiar muito da otimização topológica. Esta última tem sido efetivamente a área de investigação mais ativa em otimização estrutural e multidisciplinar nas últimas décadas. De facto, o problema clássico de minimização da *compliance* é o mais abordado na literatura de otimização topológica. No entanto, na maior parte das vezes, acaba por não ser o mais atraente na prática de engenharia, que normalmente se preocupa com critérios de integridade estrutural. Portanto, como um desenvolvimento natural, têm surgido alguns trabalhos, mas ainda poucos, que têm procurado estender a formulação clássica dos problemas de topologia aos problemas de projeto de FGMs levando em conta o controlo de picos de tensão no domínio de projeto.

Esta dissertação procura abordar problemas de otimização utilizando uma formulação que minimize diretamente a função tensão. Porém, começa-se antes por fazer um levantamento da literatura sobre as dificuldades inerentes à incorporação de constrangimentos de tensão na formulação de um problema de otimização estrutural (formulação clássica com tensão). Trabalhar com constrangimentos de tensão não é uma tarefa fácil, mas, tirando partido de problemas de otimização topológica como a minimização da *compliance* (ou energia total de deformação) ou da massa de uma estrutura, acaba por se tornar uma prática interessante em contextos reais. Note-se que a própria tensão traduz de uma forma evidente o comportamento de uma estrutura. A imposição de critérios de tensão envolve, por exemplo, o critério de cedência de von Mises que diz que o material cede quando a tensão de von Mises excede a tensão de cedência do material.

Podem destacar-se essencialmente três grandes desafios que decorrem da utilização de constrangimentos de tensão em problemas de otimização estrutural, a saber: (1) fenómeno da singularidade; (2) natureza local dos constrangimentos; e (3) comportamento altamente não linear da função tensão [25]. Estes problemas já foram convenientemente abordados pela comunidade da otimização topológica com maior foco no projeto macroestrutural [100], mas, ao mesmo tempo, com menos desenvolvimento ao nível microestrutural [79, 101, 102].

O fenómeno da singularidade, associado aos problemas de otimização topológica com constrangimentos de tensão, surge mais concretamente quando é utilizada uma abordagem baseada na variável densidade. Este fenómeno está relacionado com o facto de o ponto ótimo

estar situado numa zona degenerada da região admissível, resultante da remoção de elementos estruturais (elementos cuja densidade tende para zero). Tal ótimo não é alcançável por algoritmos de otimização baseados no gradiente, acabando estes por convergir para uma solução sub-ótima. Na verdade, este problema tem as suas raízes na otimização de treliças [103] e foi extensivamente estudado antes do ano 2000. O relaxamento dos constrangimentos de tensão [104, 105] é uma forma de ultrapassar o problema da singularidade. As técnicas de relaxamento mais comumente utilizadas, e que permitem modificar os constrangimentos de tensão com vista a tornar admissível a zona degenerada do domínio de projeto aos algoritmos de otimização baseados no gradiente, são o ε -relaxation [106, 107] e qp -approach [101, 102, 108].

Resumidamente, a primeira técnica consiste em introduzir um parâmetro ε , com $0 < \varepsilon \ll 1$, nos constrangimentos por forma a permitir que estes tomem valores ligeiramente superiores a zero. Tomando como exemplo um constrangimento de tensão na forma $g \leq 0$, esta técnica modifica-o de tal forma que este consegue tolerar uma ligeira violação ε , tal que $g \leq \varepsilon$. É evidente que à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$ o problema relaxado se aproxima do problema original, dito anteriormente de não relaxado. De salientar que esta técnica, ao relaxar os constrangimentos e ao modificar o espaço de projeto, leva a que o ponto ótimo resultante do problema relaxado não seja exatamente igual ao ponto ótimo do problema não relaxado, embora estes até possam estar muito próximos um do outro. Na verdade, o valor do ponto ótimo do problema não relaxado é menos otimista que o ótimo do problema relaxado. Não obstante, através da utilização de uma *continuation approach* torna-se possível fazer com que o parâmetro ε tenda para zero e, por conseguinte, que o ótimo global do problema relaxado convergia para o ótimo global do problema original [107].

Em 2008, Bruggi e Venini [108], baseando-se no trabalho de Duysinx e Bendsøe [107], elaboraram a técnica qp -approach também como meio de lidar com o fenómeno da singularidade. O seu trabalho tira partido de um modelo material compósito poroso, que exige que se tenha em consideração os conceitos de tensão micro e macroscópica, onde as espessuras das camadas da microestrutura do material (onde vigora a tensão microscópica) aparecem associadas aos valores intermédios da variável de densidade artificial. O modelo baseado na variável densidade, método SIMP, utilizado pelos autores coloca em evidência que a aplicação do qp -approach está limitada a problemas que utilizam leis de potência baseadas em variáveis de densidade artificiais. Porém, tal como o método anterior, também o qp -approach levava a que o ótimo global do problema relaxado não coincidisse com o ótimo do problema original, com a diferença de que agora o efeito do relaxamento se fazia notar ao longo de toda a extensão da fronteira do constrangimento. Note-se que este último é alterado recorrendo a uma operação que abrange as variáveis de projeto, ao passo que o ε -relaxation modifica os constrangimentos através de um parâmetro ε que lhe é adicionado.

A imposição de constrangimentos de tensão locais aparece como uma outra dificuldade associada à resolução de problemas de otimização topológica baseados na variável densidade. Perante uma discretização do domínio de projeto em elementos finitos, é necessário garantir

que a tensão em cada elemento da estrutura não exceda o valor da tensão admissível considerada. É imperativo que o número de constrangimentos é tanto maior quanto mais refinada for a malha de elementos finitos e, como tal, impor constrangimentos de tensão individualmente a cada elemento resulta claramente num enorme custo computacional, pois seria necessário proceder ao cálculo das sensibilidades de todos os constrangimentos associados a cada um desses elementos [100]. Uma forma possível de mitigar este custo é utilizando a técnica *active set strategy*. Nesta estratégia, apenas os potenciais constrangimentos de tensão a estarem ativos são considerados em cada iteração do projeto [109]. Outra forma de combater esta dificuldade é através da utilização de técnicas de agregação. Estas últimas procuram reduzir o número de constrangimentos de tensão locais e podem dividir-se em técnicas globais, regionais ou em bloco. As técnicas globais remediaram o problema da natureza local dos constrangimentos de tensão combinando os valores de tensão locais numa única relação utilizando, por exemplo, as variantes das funções de *Kreisselmeier-Steinhauser* [110], a função *P-norm* ou a função *P-mean* [111]. A combinação de tensões locais num único constrangimento global tem impactos significativos no custo computacional, mas não garante que os valores máximos de tensão não possam ser excedidos localmente. Já as técnicas de agregação regional e em bloco (também chamadas de *clustering*), procuram ajudar a restaurar o controlo do nível máximo de tensão usando várias regiões localizadas que cobrem o espaço de projeto. Os elementos em cada região são posteriormente agregados a um único valor do constrangimento que é calculado através de uma formulação global. Portanto, em vez de um constrangimento global para contemplar as tensões, são utilizados múltiplos constrangimentos, um por cada uma das regiões, levando a que os erros de agregação sejam mais reduzidos. Até à data da presente dissertação, as técnicas de agregação regionais aparentam ser os métodos mais usados para incorporar critérios de projeto relacionados com tensão [100].

Para além das dificuldades já mencionadas anteriormente, associadas à utilização de constrangimentos de tensão na formulação do problema de otimização, acrescenta-se ainda a dificuldade de a função tensão ser altamente não linear. Em particular, a não linearidade faz-se sentir com mais intensidade na proximidade de zonas onde o fator de concentração de tensões é elevado (arestas vivas ou furos). Por outro lado, em otimização topológica baseada na variável densidade, verifica-se que a tensão é imensamente sensível a uma variação das variáveis de projeto, como é o caso da variável densidade, pelo que a ocorrência de erros numéricos que advêm da discretização do domínio de projeto ou do grau das funções de forma dos elementos finitos considerados é inevitável [101]. Nestas circunstâncias, por forma a minimizar estes erros, é habitual proceder-se a um refinamento gradual da malha de elementos finitos, quer através do aumento do número de elementos finitos (*H-method*) quer do aumento do número de nós de cada elemento (*P-method*), até que se constate a convergência do valor da tensão medido mediante uma dada tolerância predefinida [44].

Verificou-se anteriormente que o uso de vários materiais pode reduzir significativamente a concentração de tensões perto de singularidades. No entanto, a utilização de fases

discretas de materiais pode produzir alguma concentração de tensões ao longo da interface entre os materiais de base. Note-se que a junção de fases discretas de materiais, ao invés de uma mistura de fases com gradiente funcional, provoca, sempre que existe mudança de fase, uma descontinuidade na tensão [91]. Os FGMs constituem uma alternativa ao uso de fases discretas de materiais por se tratarem de materiais heterogêneos que permitem que as propriedades equivalentes entre dois ou mais materiais diferentes possam variar gradualmente ao longo de uma dada direção. Posto isto, aborda-se agora a otimização topológica baseada na tensão que tira partido das características do FGM (FGMTO, *Functionally Graded Material – Topology Optimization*) e que ainda não está suficientemente coberta na literatura. Os problemas de otimização topológica baseados na tensão, que são normalmente morosos, podem tornar-se muito interessantes na prática de engenharia caso se encontre um *trade-off* entre precisão e tempo de execução. Referem-se seguidamente duas contribuições desenvolvidas no âmbito dos FGMs, que trabalham com otimização topológica e tensão, e que constituem inspirações para o desenvolvimento desta dissertação.

Em primeiro lugar, destaca-se o trabalho de Conlan-Smith e James [73] que, em 2019, apresentaram um método para incorporar critérios de tensão na otimização topológica de estruturas heterogêneas. Mais especificamente, concentraram-se no uso de materiais com gradiente de funcionalidade (FGMs) para produzir estruturas menos suscetíveis de falhar. No seu trabalho, as propriedades locais do material são obtidas através da interpolação entre as propriedades (módulo de Young e tensão de cedência) de dois ou mais materiais de base. O gráfico representado na figura 2.23 mostra dois modelos material entre o módulo de Young e a tensão de cedência que são utilizados para aproximar a tensão de cedência local em função do módulo de Young local, o qual é calculado com base numa extensão da lei de potência SIMP para o caso FGM. Uma análise mais detalhada deste gráfico pode levantar questões metalúrgicas, pois é excessivo e pouco realista assumir que uma interpolação, seja ela linear ou não, das propriedades de materiais conhecidos consegue fornecer a tensão de cedência, ou admissível, de uma mistura de materiais.

Sob outra perspetiva, a presente dissertação também se distingue deste trabalho pelo facto de não utilizar técnicas de agregação. É utilizada pelos autores uma técnica de agregação baseada na função *P-norm* para encontrar o elemento com a tensão máxima, a qual é depois minimizada no problema de otimização baseado na tensão. O seu problema é formulado com um constrangimento de *compliance*, para assegurar que existe alguma rigidez na estrutura para prevenir que o otimizador force todos os elementos para vazio numa tentativa de minimizar a função tensão, e um constrangimento de fração volúmica.

Por fim, os autores resolvem três exemplos de otimização topológica utilizando o MMA. Para efeitos de comparação, resolvem primeiro o problema clássico de minimização da *compliance* com um constrangimento de fração volúmica e depois o problema de minimização da tensão. São observadas reduções de tensão significativas nos *designs* FGM comparativamente aos *designs* de material homogêneo, ponto esse que motiva esta dissertação.

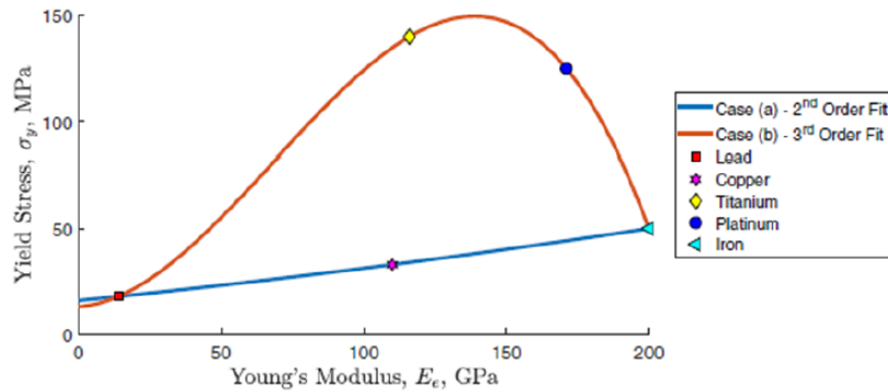


Figura 2.23: Funções de interpolação que relacionam a tensão de cedência e o módulo de Young na formulação FGM. [73]

Outra inspiração para esta dissertação é encontrada no trabalho de Conde *et al.* [112]. Neste trabalho, os autores abordam a otimização topológica de uma célula unitária periódica de material compósito, com propriedades previstas pela teoria da homogeneização, e resolvem o problema de minimização do máximo da tensão de von Mises (estratégia min-max) na célula unitária onde dois sólidos são misturados para além da caracterização da fase de vazio. Na verdade, para além da contribuição a emergir desta dissertação, este é o único trabalho encontrado até à data que estende a minimização do máximo da tensão de von Mises, que não está muito bem coberta na literatura, para o caso multimaterial num contexto de FGMs para encontrar os seus benefícios na mitigação de tensões. Dependendo da configuração da lei de interpolação dos materiais, os autores investigam duas soluções de *design*. Por um lado, a coexistência de dois sólidos onde existe claramente uma interface discreta entre eles. Por outro lado, a obtenção de um material com gradiente de funcionalidade como uma extensa variação suave das propriedades do material à conta da variação da composição das frações volúmicas de ambos os sólidos ao longo do domínio de projeto. O artigo explora soluções MMTO baseadas na tensão com fases discretas de materiais, mas também soluções FGM que são do interesse desta dissertação.

Por simetria, os autores consideram apenas um quarto da célula unitária para apresentar os resultados. A figura 2.24 mostra os resultados de *design* para os casos SMTO, MMTO e FGMTTO do problema que resolvem e a tabela 2.4 sumaria os respetivos valores do pico de tensão obtidos no problema FGMTTO e a sua respetiva comparação com os valores obtidos nos casos SMTO e MMTO para os mesmos valores de fração volúmica. A percentagem δ sumaria o quão menores são os níveis de tensão nos *designs* FGMTTO quando comparados com os níveis de tensão nos *designs* SMTO e MMTO.

Note-se que podem distinguir-se quatro quadrantes diferentes nos casos MMTO e FGMTO da figura 2.24. O primeiro quadrante diz respeito à variação da tensão de von Mises, o segundo ilustra a variação do módulo de Young, o terceiro representa a variável densidade relativa à existência ou ausência de material e o quarto contém a variável densidade responsável por variar a composição dos materiais de base. No caso (c) da figura 2.24, é possível observar um gradiente contínuo entre propriedades, segundo quadrante da célula unitária, traduzindo o significado do FGM. Os resultados fornecidos pela tabela 2.4 demonstram que o FGM consegue reduzir significativamente os níveis de tensão em comparação com soluções *single material* e soluções *multi-material* com fases discretas graças ao seu gradiente de propriedades.

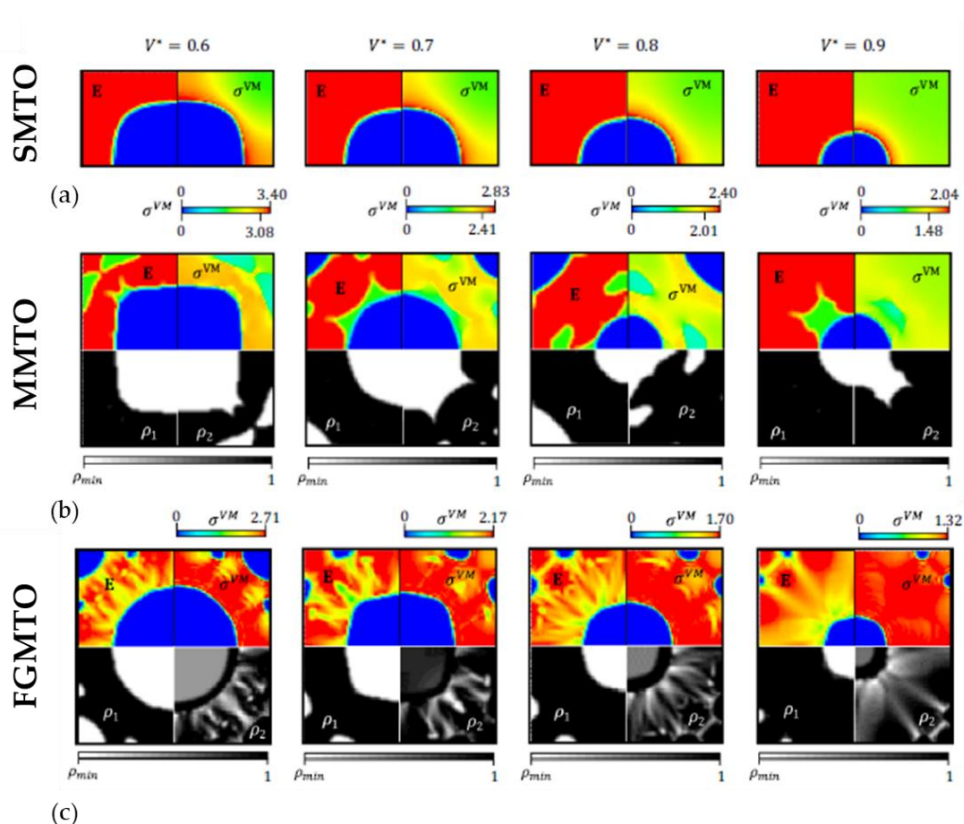


Figura 2.24: *Design* ótimo das microestruturas considerando diferentes frações volúmicas para os casos: (a) SMTO, (b) MMTO e (c) FGMTO. (Adaptado de [112])

Tabela 2.2: Valores de tensão (MPa) obtidos para o problema FGMTO considerando diferentes frações volúmicas de material. (Adaptado de [112])

		V^*			
		0.60	0.70	0.80	0.90
FGMTO	σ_{\max}^{VM}	2.71	2.17	1.70	1.32
$\delta(\%)$	SMTO	-23.8	-26.4	-32.0	-36.8
	MMTO	-12.0	-10.0	-15.4	-10.8

PRINCÍPIOS DE OTIMIZAÇÃO

3.1 Formulação de um problema de otimização

Um problema de otimização ou projeto ótimo requer uma formulação matematicamente rigorosa que torne possível a sua resolução. Nesta formulação devem ser identificadas as variáveis de projeto, que devem ser o mais independentes possível uma das outras, a função objetivo, que deve ser expressa em função das variáveis de projeto, e todos os constrangimentos de projeto. A formulação *standard* deste tipo de problemas é apresentada na equação (3.1).

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \leq 0 & ; j = 1, \dots, m \\ h_k(\mathbf{x}) \leq 0 & ; k = 1, \dots, p \\ x_i^l \leq x_i \leq x_i^u & ; i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ é o vetor das n variáveis de projeto, $f(\mathbf{x})$ a função objetivo, $g_j(\mathbf{x})$ os m constrangimentos de desigualdade, $h_k(\mathbf{x})$ os p constrangimentos de igualdade e x_i^l e x_i^u os limites inferior e superior das variáveis de projeto, respetivamente. De notar que o projeto ótimo de uma estrutura pode ser formulado pela via da otimização dimensional, de forma e de topologia. Dependendo da formulação do problema que se está a utilizar, a natureza das variáveis de projeto pode ser diferente. Atente-se na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Tipos de variáveis de projeto dependendo da formulação do problema de otimização estrutural. [116]

Tipo de otimização	Tipo da variável de projeto	Possível significado físico
Dimensional	Inteira	Seleção de secções transversais
	Real	Dimensões válidas num intervalo de variação contínuo
Forma	Real	Coordenadas dos nós
Topologia	Booleana	Existência ou ausência de material
	Real	Densidade do material variável

Verifica-se que, na maior parte dos problemas de otimização estrutural, recorre-se sobretudo a variáveis dimensionais, espessuras, larguras, diâmetros, etc. É muito comum também encontrarem-se problemas de otimização estrutural dimensional combinada com a otimização de forma ou de topologia.

3.2 Algoritmos de otimização

A necessidade de desenvolver e aplicar métodos numéricos aos problemas de otimização em engenharia é uma preocupação atual. No seguimento do aparecimento dos computadores digitais, o surgimento do MEF proporcionou a resolução de problemas de otimização com um elevado grau de complexidade e de grande importância na prática de engenharia, nomeadamente a resolução de problemas de programação não linear. Estes problemas não lineares são tipificados por existir pelo menos uma função não linear, seja objetivo ou constrangimento, cuja resolução analítica possa ser inviável. Tipicamente, a simbiose entre a otimização e o MEF acaba por resultar num processo iterativo que efetua, de forma organizada, uma procura de ponto para ponto no domínio de projeto. O valor das variáveis de projeto associadas ao modelo numérico vai sendo continuamente modificado ao longo deste processo. Na sua essência, esta descrição corresponde a um algoritmo de otimização. Essencialmente, podem distinguir-se dois tipos de algoritmos de otimização: (1) baseados no gradiente; (2) não baseados no gradiente, consoante se detalha nos tópicos seguintes.

3.2.1 Algoritmos de otimização baseados no gradiente

Os algoritmos baseados no gradiente, por requererem que o espaço de projeto seja convexo, fechado e limitado e que as funções objetivo e dos constrangimentos sejam pelo menos uma vez continuamente diferenciáveis, não são obviamente aplicáveis a problemas de otimização de natureza discreta. Em contrapartida, são comparativamente pouco dispendiosos computacionalmente e bastante eficientes na procura do ponto ótimo em problemas onde a função objetivo é unimodal. Estes algoritmos iniciam a sua pesquisa estimando, numa primeira instância, aquele que eventualmente poderia ser o ponto ótimo do espaço de projeto e efetuando uma análise de elementos finitos. Os resultados provenientes desta última são utilizados para verificar se as condições de otimalidade de Karoush-Kuhn Tucker são satisfeitas. Se não satisfeitas, então são realizadas tantas iterações quanto as necessárias até serem satisfeitas aquelas condições, terminado o processo iterativo.

Como exemplos de algoritmos de otimização baseados no gradiente, tem-se: o Método do Declive mais Acentuado; o Método do Gradiente Conjugado; o Método de Newton para otimização não constrangida; o Método de Programação Quadrática Sequencial (SQP, *Sequential Quadratic Program-ming*); e, no contexto desta dissertação, o Método das Assíntotas Móveis (MMA, *Method of Moving Asymptotes*).

3.2.1.1 Método das assíntotas móveis (MMA)

O MMA foi desenvolvido, em 1987, por Krister Svanberg [7] e consiste num método para programação não linear estrangida. Em cada iteração do processo iterativo que o algoritmo de programação matemática percorre, gera-se e resolve-se um subproblema de aproximação convexa a partir do cálculo dos gradientes da função objetivo e dos estrangimentos do problema original. A geração destes subproblemas, mais simples e bem comportados de um ponto de vista de convexidade e separabilidade das funções, é controlada pelas assíntotas móveis, as quais podem aproximar-se uma da outra para acelerar a convergência ao longo do processo iterativo. Estas características tornam o método bastante atraente para problemas de otimização topológica [25].

O código FORTRAN utilizado nesta dissertação assume que o problema de otimização original com n variáveis de projeto e m estrangimentos se encontra formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f_0(\mathbf{x}) + z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + 0.5 y_i^2) \\
 & f_i(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq f_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, m \\
 & x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad i = 1, \dots, m \\
 \text{s.a.} \quad & y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
 & z \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ são as variáveis de projeto do problema original e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$ e z são as variáveis de otimização artificiais criadas pelo próprio algoritmo. A função f_0 é a função objetivo e as funções f_1, \dots, f_m são os estrangimentos. Nesta formulação todas elas são consideradas reais e continuamente diferenciáveis. Os limites x_j^{\min} e x_j^{\max} representam números reais, tal que $x_j^{\min} < x_j^{\max}$. Já os parâmetros a_1, \dots, a_m e c_1, \dots, c_m são também números reais que satisfazem $a_i \geq 0$ e $c_i \geq 0$.

Em cada iteração k , gera-se um subproblema onde as funções $f_0(\mathbf{x})$ e $f_i(\mathbf{x})$ são aproximadas por funções aproximadoras convexas $\tilde{f}_0^{(k)}(\mathbf{x})$ e $\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x})$, respetivamente. Estas aproximações são baseadas principalmente na informação do gradiente das funções originais calculado no ponto da iteração atual, mas também, implicitamente, tendo em conta a informação de iterações anteriores. O subproblema da iteração k é então resolvido e a única solução ótima encontrada é o ponto de partida da iteração $k + 1$, $(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{y}^{(k+1)}, z^{(k+1)})$, e assim por diante. O subproblema descrito acima tem o aspeto seguinte:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \tilde{f}_0^{(k)}(\mathbf{x}) + z + 0.05z^2 + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + 0.5y_i^2) \\
& \tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq f_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, m \\
\text{s.a.} \quad & \alpha_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)}, \quad i = 1, \dots, m \\
& y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& z \geq 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

em que os limites $\alpha_j^{(k)}$ e $\beta_j^{(k)}$ são apelidados de “móveis”, na medida em que garantem que as variáveis de projeto variem dentro de uma gama de valores que não contenha uma assíntota da função de aproximação convexa. Por fim, resta apenas explicar a importância do parâmetro c_i enquanto penalizador da função objetivo e satisfação dos constrangimentos. O valor deste parâmetro não deve ser nem muito baixo, sob o risco de não penalizar o suficiente os constrangimentos, nem muito elevado, pois pode originar instabilidades numéricas. A escolha de c_i depende do problema que se está a tentar resolver, mas é a chave para a convergência do algoritmo para uma solução admissível. A sua escolha deve ser refletida e resultante de um teste de vários valores.

Em síntese, o MMA, que trabalha com funções de aproximação assintóticas das funções objetivo e dos constrangimentos, oferece a possibilidade de controlar a posição das assíntotas, tal como se descreve de seguida. Se ao longo do processo iterativo o ponto de pesquisa tiver um carácter oscilatório, tal significa que o algoritmo já começou a convergir e se pode estreitar as assíntotas para restringir o espaço de pesquisa. Em oposição, se a variação do ponto de pesquisa tiver um carácter monótono, então o algoritmo ainda está afastado do ótimo e deve efetuar-se um afastamento das assíntotas para aumentar a sua rapidez de convergência. Assim que este possua um carácter de oscilação, o algoritmo já se encontra dentro de um vale.

3.2.2 Algoritmos de otimização não baseados no gradiente

Os algoritmos não baseados no gradiente são aplicáveis a problemas de otimização estrutural discretos e mistos, onde os algoritmos baseados no gradiente perdem a sua aplicabilidade, dado que não existe uma garantia de que as funções do problema sejam contínuas e/ou diferenciáveis. Embora não sejam utilizados nesta dissertação, os algoritmos não baseados no gradiente constituem uma alternativa aos algoritmos baseados no gradiente, pois permitem procurar a solução ótima em problemas de otimização inteira ou não diferenciável. Assim sendo, merecem também relevância.

A análise dos problemas descritos anteriormente é conseguida, em parte, pelas meta-heurísticas. Formalmente, estas definem como sendo um processo iterativo de geração de soluções, que utiliza uma ou mais heurísticas subordinadas, combinando diferentes conceitos de pesquisa e exploração do espaço de soluções [116]. Caracteristicamente, os métodos heurísticos

não oferecem dependência das propriedades analíticas de continuidade ou de diferenciabilidade das funções, cujas variáveis podem ser contínuas ou discretas, nem exigem que o domínio do problema seja convexo, podendo este ser disjunto ou não convexo. De salientar que as meta-heurísticas são classificadas como métodos de otimização local. Tal significa que são portadoras de estratégias de pesquisa baseadas na possibilidade de aceitar soluções vizinhas auspiciosas, que deterioreem o valor da função objetivo, para que possam escapar a ótimos locais e continuar o processo iterativo em busca do ótimo global. Porém, a descoberta do ótimo global nem sempre é garantida, uma vez que isso requer a avaliação da função objetivo em vários pontos do domínio de projeto, traduzindo-se em custos computacionais muito elevados.

Os exemplos de meta-heurísticas que mais comumente se podem encontrar na literatura são [8]: *Tabu Search*; *Simulated Annealing*; *Genetic Algorithms*; *Evolutionary Methods*; *Scatter Search*; *Neural Networks*; *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure (GRASP)*; *Variable Neighborhood Search*; *Ant Colonies*.

3.3 Análise de sensibilidades

Em poucas palavras, pode definir-se análise de sensibilidades em otimização como sendo o estudo da variação de uma função, seja objetivo ou de estrangimento, relativamente a uma determinada variável ou conjunto de variáveis de projeto. O cálculo analítico dos gradientes de funções com alguma complexidade (funcionais ou funções de funções) pode, em certas situações, ser moroso ou até mesmo impossível. De um modo geral, podem distinguir-se dois métodos para o cálculo de sensibilidades: analítico ou diferenças finitas. A escolha entre um método e o outro no cálculo de sensibilidades prende-se essencialmente com o custo computacional do processo de otimização. Os tópicos que se seguem foram escritos com base em [115, 116].

3.3.1 Métodos analíticos

Geralmente, as formulações associadas a problemas de otimização estrutural resultam de uma discretização do domínio de projeto em elementos finitos e, como tal, as equações de equilíbrio estático podem resumir-se ao sistema de equações que se apresenta abaixo na forma matricial:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

onde \mathbf{K} representa a matriz de rigidez global, \mathbf{u} o vetor de deslocamentos nodais em coordenadas globais, \mathbf{f} o vetor de carga global e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ as n variáveis de projeto. De salientar que as equações que se seguem assumem uma discretização do sistema em elementos

finitos e que, por motivos de simplificação, se assume que o vetor \mathbf{x} é constituído somente pela variável de projeto x .

Considere-se então uma função genérica, que pode representar qualquer medida de desempenho de uma estrutura (tensão ou deslocamento), escrita da seguinte forma:

$$\Psi = \Psi(x, \mathbf{u}(x)) \quad (3.5)$$

Repare-se que a função Ψ , por ser uma função funcional pois depende de outras funções, tem a dificuldade do cálculo da sua sensibilidade em relação à variável de projeto x aumentada, não sendo este de todo trivial. O cálculo da derivada total de $d\Psi/dx$ pressupõe a utilização da regra da cadeia e escreve-se da seguinte forma:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dx} \quad (3.6)$$

Na equação (3.6), o termo $d\Psi/dx$ diz respeito à parte explícita, onde se percebe que a variável x se apresenta na função Ψ de modo independente, e o termo $(\partial\Psi/\partial\mathbf{u})(d\mathbf{u}/dx)$ diz respeito à parte implícita, em que Ψ depende de x por intermédio da variável dependente \mathbf{u} que resulta de resolver o sistema de equações (3.4).

Essencialmente, a principal dificuldade inerente à resolução da equação (3.6) é o cálculo da parte implícita, nomeadamente da derivada $d\mathbf{u}/dx$. Já o cálculo da parte explícita não é habitual oferecer grandes dificuldades porque ou é uma parcela nula, ou o seu cálculo é simples de efetuar. Derivando a equação (3.4) em ordem a x para obter $d\mathbf{u}/dx$ e substituindo o resultado em (3.6), resulta:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{u}} \left(\mathbf{K}^{-1}(x) \left[\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\partial\mathbf{K}(x)}{\partial x} \mathbf{u} \right] \right) \quad (3.7)$$

Note-se que a equação (3.7) por envolver o cálculo inviável, de um ponto de vista prático, da inversa da matriz de rigidez, $\mathbf{K}^{-1}(x)$, vê a sua aplicabilidade restrita. Podem, no entanto, utilizar-se dois métodos distintos para fugir a este cálculo que são o método da diferenciação direta e o método adjunto.

3.3.1.1 Método da diferenciação direta

Este método calcula $d\mathbf{u}/dx$ diretamente através de um sistema de equações dado por:

$$\mathbf{K} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) = \left[\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\partial\mathbf{K}(x)}{\partial x} \mathbf{u} \right] \quad (3.8)$$

cujo resultado é depois inserido em (3.6). De notar que na abordagem descrita considerou-se apenas uma variável de projeto, x , pelo que o sistema de equações (3.8) se resume a uma única equação. Não obstante, já no caso de existirem mais variáveis de projeto, diga-se n , seria necessário resolver n equações. É imperativo que este método está dependente do custo computacional associado ao número elevado de equações que possam vir a ser resolvidas, resultado de um hipotético elevado número de variáveis de projeto.

3.3.1.2 Método adjunto

O método adjunto constitui uma alternativa ao método da diferenciação direta e consiste em determinar um vetor adjunto, λ , que é solução de um sistema de equações designado por problema adjunto. Este último define-se da seguinte forma:

$$\mathbf{K}(x)\lambda = \mathbf{z} \quad , \quad z_i = \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \quad (3.9)$$

em que \mathbf{z} representa o vetor de carga fictícia (*dummy load vector*), correspondendo, cada uma das suas entradas, à derivada da função Ψ relativamente cada um dos deslocamentos, u_i .

O resultado da equação (3.9) pode ser posteriormente substituído na equação (3.7), culminando em:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}} + \lambda^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x} \mathbf{u} \right] \quad (3.10)$$

Assim, torna-se possível a determinação da sensibilidade de Ψ em ordem a x .

3.3.1.3 Escolha do método analítico adequado

Para melhor entendimento do assunto abordado neste tópico, comece-se por observar a equação (3.11) que demonstra, de forma esboçada, a aplicação do método da diferenciação direta e do método adjunto no contexto de um problema de otimização constituído por n variáveis de projeto e m constrangimentos.

Método da diferenciação direta

$$\mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{dx_i} &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} + \frac{d\Psi_1}{d\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \\ \frac{d\Psi_2}{dx_i} &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_i} + \frac{d\Psi_2}{d\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \\ &\vdots \\ \frac{d\Psi_m}{dx_i} &= \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i} + \frac{d\Psi_m}{d\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \end{aligned}$$

Método adjunto

$$\mathbf{K} \lambda_j = \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \mathbf{u}} \right)^T, \quad j = 1, \dots, m$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{dx_i} &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} + \lambda_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \\ \frac{d\Psi_2}{dx_i} &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_i} + \lambda_2^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \\ &\vdots \\ \frac{d\Psi_m}{dx_i} &= \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i} + \lambda_m^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Da análise da mesma, é intuitivo perceber que, de um ponto de vista computacional, o esforço requerido à aplicação do método da diferenciação direta está dependente do número de variáveis de projeto, ao passo que o esforço computacional envolvido na aplicação do método adjunto está relacionado com o número de constrangimentos que integram o problema de otimização. Por outras palavras, o método da diferenciação direta implica a resolução de tantas equações quanto o número de variáveis de projeto existentes e o método adjunto pressupõe a resolução de um problema adjunto por cada constrangimento que figure na formulação do problema de otimização. No total, o método da diferenciação direta resolve n equações diferentes e o método adjunto m problemas adjuntos.

Posto isto, chega-se à conclusão de que os métodos da diferenciação direta e adjunto são mais adequados quando $n < m$ e $n > m$, respetivamente. No entanto, podem aparecer situações em que $n \simeq m$, onde a escolha de um método ou do outro se mostra equitativamente eficiente. Na realidade, um engenheiro projetista pode sempre entender, dos m constrangimentos, quais os que são críticos no contexto do problema de otimização que se está a resolver. Entende-se por constrangimento crítico qualquer constrangimento que esteja ativo ou quase ativo. Nestas circunstâncias, tem-se que $m^{\text{crit}} < m \simeq n$ e o cálculo das sensibilidades é efetuado somente em relação ao número de constrangimentos m^{crit} , mostrando ser o método adjunto o mais adequado num cenário deste tipo. Pode inclusive acontecer que o método adjunto continue a demonstrar maior viabilidade face ao método da diferenciação direta, mesmo em situações em que o número de variáveis de projeto seja inferior ao número de constrangimentos, caso se verifique $m^{\text{crit}} < n < m$.

Em termos práticos, é habitual considerarem-se diversos casos de carga, n^{LC} , o que se traduz num aumento proporcional do custo computacional inerente aos dois métodos discutidos. Note-se que, a cada caso de carga, estará associado um vetor de deslocamentos \mathbf{u} . A adição de $n^{\text{LC}} \times m$ novos constrangimentos ao problema inicial pode ser indicativo de que o método da diferenciação direta é preferível face ao método adjunto se $n^{\text{LC}} \times n < n^{\text{LC}} \times m$, o

que resulta novamente em $n < m$. Contudo, verifica-se que o número de constrangimentos críticos não se altera significativamente com o número de casos de carga, o que permite desprezar os casos de carga que não influenciem a ativação de constrangimentos. Assim sendo, mesmo para múltiplos casos de carga, constata-se que $m^{\text{crit}} \ll n^{\text{LC}} \times n$, colocando em evidência que em casos como este o método adjunto mostra-se preferível face ao método da diferenciação direta. Por outro lado, é evidente que o método da diferenciação direta se mostra em vantagem num cenário em que $n^{\text{LC}} \times n < m^{\text{crit}}$.

3.3.2 Método das diferenças finitas

As diferenças finitas tornam possível aproximar o gradiente de uma função complexa, cujo cálculo analítico seja impraticável de obter, com recurso ao conceito de derivada parcial e por imposição de uma pequena perturbação na variável em relação à qual a sensibilidade está a ser calculada.

Assuma-se uma função Ψ , constituída por n variáveis, que é contínua e diferenciável em todos os pontos do domínio de projeto. O cálculo da sensibilidade desta função em relação à variável x_i , sendo x_i um ponto contido no domínio de projeto, pode ser efetuado de três formas distintas:

Diferenças finitas progressivas (*forward*):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \approx \frac{\Psi(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - \Psi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (3.12)$$

Diferenças finitas retroativas (*backward*):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \approx \frac{\Psi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - \Psi(x_1, \dots, x_i - \Delta x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (3.13)$$

Diferenças finitas centrais (*central*):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \approx \frac{\Psi\left(x_1, \dots, x_i + \frac{1}{2}\Delta x_i, \dots, x_n\right) - \Psi\left(x_1, \dots, x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i, \dots, x_n\right)}{\Delta x_i} \quad (3.14)$$

De salientar que o método das diferenças finitas centrais é o que permite obter os resultados mais precisos. Contudo, é computacionalmente mais dispendioso porque exige que o valor da função seja avaliado o dobro das vezes.

Atente-se agora no facto de que os métodos da diferenciação direta e adjunto pressupõem a obtenção da solução do sistema de equações (3.8) e (3.9), tarefa que mais contribui para

o custo computacional destes métodos. É importante detalhar que a forma fatorizada da matriz \mathbf{K} faz parte da solução destas equações. Este é um aspeto que torna a solução para $d\mathbf{u}/dx$ ou λ computacionalmente mais barata. Por exemplo, o valor aproximado de $d\mathbf{u}/dx$ pelo método das diferenças finitas progressivas é:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} \approx \frac{\mathbf{u}(x + \Delta x) - \mathbf{u}(x)}{\Delta x} \quad (3.15)$$

o que requer a avaliação do deslocamento $\mathbf{u}(x + \Delta x)$, por intermédio da reassemblagem da matriz de rigidez e do vetor de carga no *design* perturbado, e a resolução da equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}(x + \Delta x)\mathbf{u}(x + \Delta x) = \mathbf{f}(x + \Delta x) \quad (3.16)$$

Contudo, é fácil de entender que o custo computacional resultante de fatorizar a matriz de rigidez é muito superior ao custo de utilizar somente a matriz de rigidez obtida nas equações (3.8) e (3.9). Para além disso, destacam-se também os problemas resultantes de uma escolha infeliz do valor de Δx . Se este for demasiado pequeno, pode originar problemas de instabilidade numérica e, se for demasiado grande, pode levar a uma avaliação grosseira aquando do cálculo das sensibilidades. Existem fundamentalmente dois tipos de erro recorrentes da aplicação de diferenças finitas: (1) erro de arredondamento; (2) erro de truncatura [117]. O primeiro define-se como sendo a diferença entre a avaliação numérica da função e o seu valor real. Embora não seja um problema em relação a uma função com uma expressão analítica conhecida, se o valor da função for obtido através de um longo processo numérico, o erro de arredondamento no cálculo pode ser significativo. O segundo vem como consequência da negligência de termos da expansão em série de Taylor da função perturbada.

Em síntese, pode dizer-se que o método das diferenças finitas é um método de fácil implementação, mas possui alguns inconvenientes. Por um lado, o facto de exigir que se calcule o valor da função sempre que se faça uma perturbação numa dada variável de projeto, o que se reflete num esforço computacional elevado e numa maior dificuldade para os algoritmos de otimização. Por outro lado, a falta de exatidão associada ao cálculo da derivada que resulta da atribuição de certos valores ao passo. Assim, apenas faz sentido utilizar este método em situações em que o número de variáveis de projeto é deveras reduzido.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM FGM BASEADO NA TENSÃO

4.1 Introdução

A maioria dos problemas de otimização estrutural, em particular de topologia, têm girado em torno de problemas de minimização da energia total de deformação com constrangimentos de volume. Este problema já está bastante estudado e, para além disso, está bem colocado, pois a função objetivo é contínua e pelo menos duas vezes diferenciável e existe uma prova matemática da existência de um único mínimo global. Note-se que ambas as funções de volume e energia total de deformação são convexas [25]. Por outro lado, a grande parte dos projetos de engenharia não estão limitados pela sua rigidez, uma vez que as preocupações com as tensões surgem muito antes de existir quaisquer grandes deformações.

De alguma forma, observou-se no subcapítulo 2.9 que se podem abordar pelo menos dois tipos de problemas em otimização topológica que envolvam a tensão. Por um lado, a formulação clássica com tensão, onde se minimiza a massa ou o volume de uma estrutura e esta aparece como um constrangimento [44, 101]. Por outro lado, a formulação de minimização do pico de tensão sujeita a determinados constrangimentos (*e.g. compliance*, fração volúmica, massa, etc), onde a tensão, a ser minimizada, aparece como objetivo do problema de otimização. Este tipo de formulações requerem a utilização da estratégia *Bound Formulation* para escapar à não diferenciabilidade dos problemas min-max [112]. Sendo objetivo desta dissertação trabalhar com FGMs, definir a sua tensão admissível, que tipicamente não é conhecida, para impor constrangimentos de tensão tornar-se-ia numa complicação. Por exemplo, em [101], a abordagem utilizada pelos autores é a de tensão constrangida, sendo posteriormente necessário recorrer a técnicas como o *qp-approach* para fugir ao fenómeno da singularidade. Esta abordagem torna-se um pouco disruptiva porque, ao constranger-se a tensão, não se está a minimizar o pico de tensão, mas sim exigir que a tensão não seja superior a um certo valor admissível. Obviamente que, num contexto FGM, trabalhar com uma formulação baseada em constrangimentos de tensão que envolvam indicar uma tensão admissível não é evidente. Portanto, existe toda a conveniência em alterar esta formulação para outra cujo objetivo seja minimizar diretamente o pico de tensão porque, só assim, se conseguirá explorar e tirar proveito de todo o potencial que um FGM pode fornecer em termos uniformizar o campo de tensão [91, 112]. Desta forma, também se evita de trabalhar com tensões admissíveis, sendo que a estrutura que

se obtém apresenta o menor pico de tensão possível, e garante-se que a estrutura ótima tem o mínimo de rigidez, onde a preocupação de não exceder a tensão admissível já não se verifica.

A definição de um modelo material FGM também pode ser uma tarefa desafiante. De notar que não é fácil determinar a propriedade resultante de uma determinada mistura de materiais. Uma revisão da literatura neste tópico, mostra que alguns autores desenvolvem uma interpolação entre o módulo de Young e a tensão de cedência ou admissível com base em propriedades conhecidas de alguns materiais [73]. Contudo, esta metodologia é questionável pelo facto de, de um ponto de vista metalúrgico, não ser muito realista. Por outro lado, também se observa na literatura a utilização de uma interpolação entre fração volúmica e módulo de Young gerada a partir de resultados obtidos experimentalmente [74]. Ou ainda a utilização das conhecidas regras de mistura que dependem apenas das frações volúmicas dos materiais constituintes da própria mistura [72, 112]. Na literatura podem encontrar-se vários exemplos de regras de mistura, entre as quais se destacam, o modelo de Voigt, o modelo compósito de Halpin–Tsai [118], os limites de Voigt–Reuss [119] e os limites de Hashin–Shtrikman [120]. No caso desta dissertação, utilizar-se-ão os limites de HS enquanto regra de mistura para definir o modelo material em FGM. O esquema de interpolação SIMP, a implementar, consegue modelar adequadamente esta regra de mistura no caso de se estar a trabalhar com FGMs que resultam de variar a composição dos materiais de base que se misturam, estratégia motivada pelos trabalhos [72, 112].

4.2 Lei de interpolação de material baseada na densidade

A presente dissertação procura encontrar soluções de *design* FGM, com até duas fases de material sólido, onde o pico de tensão seja mitigado consideravelmente face a soluções de *design single-material*. Com vista a resolver o problema FGMTD baseado na densidade tendo por base este número de fases, o autor desta dissertação serve-se do método SIMP. Este método é de aplicação direta em problemas de otimização topológica FGM e consegue modelar adequadamente a regra de mistura escolhida. Na verdade, as leis de interpolação SIMP para otimização multimaterial com fases discretas e FGM, considerando duas fases sólidas isotrópicas de material, são muito semelhantes e diferem apenas mediante uma adaptação do valor do expoente de penalização da variável responsável por seleccionar o material. Posto isto, a lei de interpolação SIMP a utilizar nesta dissertação para um modelo material FGM é [26, 112]:

$$\mathbf{E}(\rho_1, \rho_2) = (\rho_1)^{p_1} [(\rho_2)^{p_2} \mathbf{E}^+ + (1 - (\rho_2)^{p_2}) \mathbf{E}^-] \quad (4.1)$$

onde $\rho_1, \rho_2 \in [\rho_{\min}, 1]$ são as variáveis de densidade artificiais, em que ρ_1 é a variável topológica que identifica a presença ou ausência de material e ρ_2 a variável responsável pela seleção de material, \mathbf{E}^+ e \mathbf{E}^- são os tensores de rigidez das fases sólidas (com $\mathbf{E}^+ > \mathbf{E}^-$), p_1 e p_2

são os expoentes de penalização, maiores que 1, por forma a desfavorecer os valores intermédios das densidades ($p_1, p_2 \geq 3$ em problemas 2D, ver [25]). O limite inferior das variáveis de projeto, ρ_{\min} , deve ser um valor positivo muito pequeno e próximo de zero para evitar problemas de singularidade. Em [112] os autores utilizam, com sucesso, um valor de $\rho_{\min} = 10^{-3}$, pelo que este valor será tomado como referência nesta dissertação, embora tal não invalide que não se testem outros valores.

De salientar que a equação (4.1) é utilizada para estabelecer uma interpolação entre o vazio (a azul), o material sólido \mathbf{E}^+ mais rígido (a vermelho) e o material sólido mais flexível \mathbf{E}^- (a verde), tal como ilustrado na figura 4.1. A escala de cores mostra que é possível obter um material intermédio (FGM) resultante da mistura das fases \mathbf{E}^+ e \mathbf{E}^- . Três cenários possíveis estão representados em (c) podendo existir um quarto (não representado) que seria a mistura.

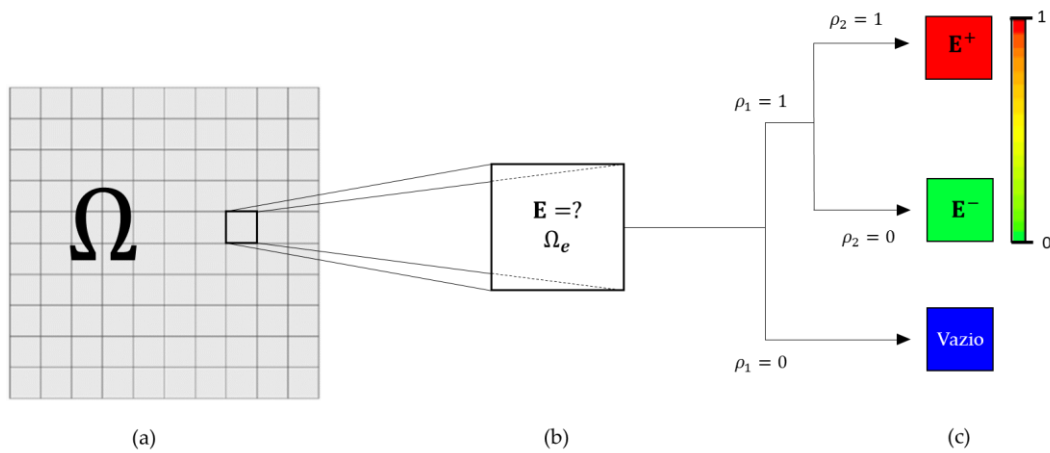


Figura 4.1: Modelo material. (a) Domínio material à macroescala discretizado numa grelha quadrada, (b) elemento finito e (c) lei de interpolação de material baseada na densidade.

Como o objetivo é obter estruturas FGM, os valores de p_1 e p_2 têm de ser cuidadosamente escolhidos para acomodar os efeitos desejados da penalização e existir uma consistência com a física das misturas sólidas. Nesta configuração, os valores intermédios da variável topológica ρ_1 são desfavorecidos de modo a que as regiões sólidas e vazias passem a ser claramente identificadas. Em adição, os valores intermédios da variável ρ_2 , que definem a proporção de cada fase sólida (\mathbf{E}^+ e \mathbf{E}^-) na mistura sólida resultante, devem ser consistentes com os limites de Hashin-Shtrikman. Assumindo um problema bidimensional, que os materiais de base são misturados uniformemente sem microestrutura, que ambos são isotrópicos, assim como a sua mistura, e que têm um coeficiente de Poisson igual a 1/3, os limites de HS podem ser expressos da seguinte forma [26, 72, 112]:

$$E_{HS}^- = \frac{(2 + \omega)E^+ + (1 - \omega)E^-}{2(1 - \omega)E^+ + (1 + 2\omega)E^-} E^- \quad (4.2)$$

$$E_{HS}^+ = \frac{\omega E^+ + (3 - \omega)E^-}{(3 - 2\omega)E^+ + 2\omega E^-} E^+ \quad (4.3)$$

onde E_{HS}^- e E_{HS}^+ são, respetivamente, os limites inferior e superior de HS. A fração volúmica do material de base mais rígido, E^+ (módulo de Young), é dada por $\omega \in [0,1]$ enquanto a fração volúmica do material de base mais flexível, E^- , é dada por $(1 - \omega)$. Os limites de HS estão representados na figura 4.2 por forma a verificar como é que estes e a lei de interpolação (4.1), função de apenas ρ_2 assumindo $\rho_1 = 1$, se comparam.

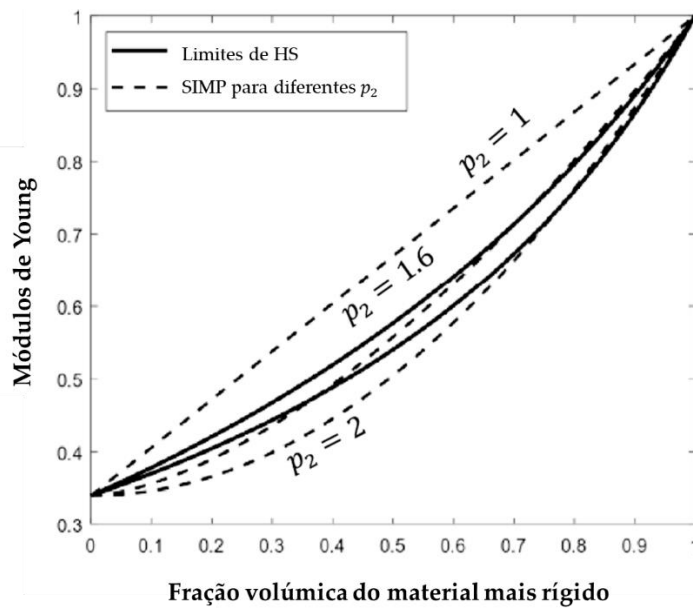


Figura 4.2: Gráfico comparativo entre os limites de HS e a lei de interpolação SIMP por interpolação de dois sólidos isotrópicos, utilizando diferentes valores do expoente p_2 . (Adaptado de [112])

De salientar que na figura 4.2 são testados diferentes valores do expoente p_2 para investigar o ajuste da curva. Por observação da figura, constata-se que, misturando dois sólidos isotrópicos diferentes (como é o caso do aço e do alumínio, que são os materiais de base utilizados nesta dissertação), as propriedades elásticas resultantes não se correlacionam linearmente com a fração volúmica de cada constituinte. Portanto, para capturar adequadamente as propriedades do FGM, é necessário que as previsões da lei de interpolação estejam dentro dos limites de HS para toda a gama de fração volúmica. Para além disso, o valor de p_2 deve estar compreendido entre 1 e 2. Um valor de $p_2 = 1.6$ parece efetivamente ser uma boa aproximação no âmbito de uma lei de potência baseada num esquema de interpolação. Na verdade, a combinação não é perfeita como até se pode ver para alguns valores de fração volúmica. Note-se que para valores reduzidos e elevados de ω , os limites de HS são ligeiramente violados. Não obstante, o valor proposto é uma espécie de *trade-off* que evita violar muito estes limites para

menores ou maiores valores de ω [112]. O ajuste da curva poderia, contudo, ser melhorado utilizando outro esquema de interpolação, como por exemplo, efetuando a média dos limites de HS [72]. Em termos físicos, essa estratégia é muito consistente, mas acaba por introduzir muito mais complexidade matemática, especialmente quando se trata da análise de sensibilidades. Por esta via, o método de interpolação SIMP consegue, com uma perda muito reduzida de precisão, ser muito mais simples.

Em resumo, o modelo material a utilizar nesta dissertação assume propriedades teóricas (tal como acontecia em [72, 112]) e modela uma mistura de dois sólidos (FGM), mais vazios. Este modelo assume ainda elasticidade linear e sólidos dúcteis de tal forma que a falha do material pode ser prevista pelo critério de tensão de von Mises.

4.3 Tensão de von Mises

A tensão de von Mises, vulgarmente chamada de tensão equivalente, é um resultado da teoria da energia de distorção máxima e serve para determinar se um determinado material dúctil e isotrópico consegue suportar um dado carregamento complexo que pode ir desde tensões normais, tensões de corte ou até mesmo uma mistura das duas. Essencialmente, esta tensão consegue transformar este estado de tensão complexo num escalar que depois pode ser comparado com a tensão de cedência do material (critério de falha de von Mises).

Tendo em conta a discretização do domínio Ω numa grelha quadrada revestida por elementos finitos quadriláteros 2D, tal como ilustrado na figura 4.1, e sabendo que cada um desses elementos apresenta uma área igual a $|\Omega_e|$, onde o índice $e \in \{1, \dots, ne\}$ diz respeito a cada um dos ne elementos finitos da malha, a tensão de von Mises para um estado plano de tensão, σ_e^{VM} , assumida como uniforme em cada $|\Omega_e|$, pode ser escrita como uma média volumétrica das tensões de von Mises, $\sqrt{\mathbf{t}^T \mathbf{V} \mathbf{t}}$, calculadas em cada um dos pontos de integração de Gauss da malha de elementos finitos:

$$\sigma_e^{VM} = \frac{\int_{\Omega_e} (\sqrt{\mathbf{t}^T \mathbf{V} \mathbf{t}}) d\Omega_e}{|\Omega_e|} \quad (4.4)$$

onde

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^e \\ \sigma_{22}^e \\ \sigma_{12}^e \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Utilizando um pouco de álgebra e desenvolvendo os termos da expressão (4.4) chega-se a:

$$\sigma_e^{\text{VM}} = \frac{\int_{\Omega_e} \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11}^e - \sigma_{22}^e)^2 + (\sigma_{11}^e)^2 + (\sigma_{22}^e)^2] + 3(\sigma_{12}^e)^2} d\Omega_e}{|\Omega_e|} \quad (4.6)$$

Note-se que a tensão de von Mises, σ_e^{VM} , depende de σ_{ij} através desta última equação. Esta informação é particularmente importante a reter, principalmente no que diz respeito à análise de sensibilidades da equação (4.6).

4.4 Formulação do problema min-max

Um dos objetivos desta dissertação passa por resolver o problema de minimização da tensão máxima de von-Mises, σ^{VM} . Este tipo de problemas são vulgarmente designados, em otimização estrutural, por problemas min – max. O problema de minimizar o pico de tensão equivalente formula-se, de uma forma genérica, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \max_{\mathbf{y}} \quad \sigma^{\text{VM}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \text{s.a.} \quad & \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.7)$$

No entanto, um problema min – max não é de resolução trivial e apresenta uma dificuldade relacionada com o máximo de uma função não ter derivadas contínuas. Este facto pode ser observado considerando um caso muito simples do máximo de uma função em dois pontos. Considere-se, por exemplo, o caso em que a área da secção transversal de um cabo tem que ser constante, por partes, por forma a reduzir os custos de manufatura. A figura 4.3 ilustra o caso onde o número de segmentos do cabo está limitado a dois e as variáveis de projeto são as duas áreas da secção transversal dos segmentos 1 e 2, A_1 e A_2 , respetivamente.

Por sua vez, a figura 4.4 mostra uma possível variação da tensão máxima em cada segmento como uma função de A_2 , isto é, $\sigma_1(A_2)$ e $\sigma_2(A_2)$, respetivamente. Ao aumentar o valor de A_2 , observa-se uma redução da tensão máxima no segmento de área A_2 , mas um aumento da tensão no segmento de área A_1 . O gráfico mostra, portanto, que a tensão máxima ao longo do cabo apresenta uma descontinuidade no declive do ponto onde a localização do máximo salta de um segmento para o outro. Em síntese, pode dizer-se que um problema min – max não é diferenciável porque o mínimo local ou global do espaço de projeto corresponde geralmente a um ponto onde o gradiente é descontínuo.

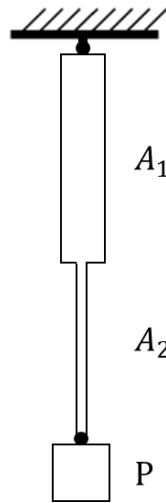


Figura 4.3: Dois segmentos de área constante de um cabo pendurado carregado com um peso P .

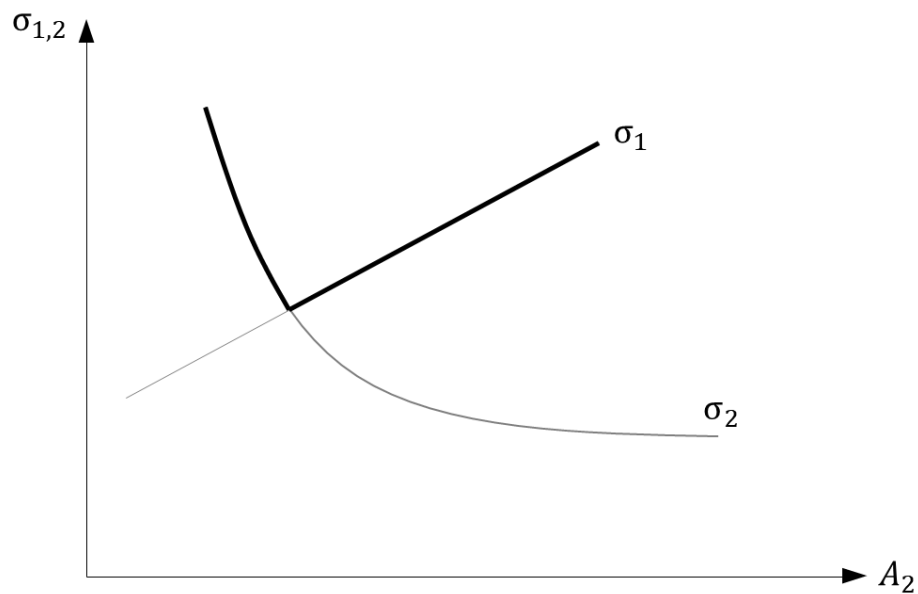


Figura 4.4: Descontinuidade da função máxima.

Dado a conhecer o obstáculo da não diferenciabilidade do problema min-max, salienta-se que já foram desenvolvidas estratégias para transformar o máximo da tensão de von Mises numa função diferenciável equivalente, tal como acontece nas abordagens P -norm ou P -mean (as tão conhecidas funções de agregação na literatura para reduzir o número de constrangimentos de tensão) ou na função de *Kreisselmeier-Steinhauser*. A função P -norm é maioritariamente utilizada por causa da sua simplicidade e pelo facto de os seus cálculos intermédios não resultarem em números muito elevados como acontece em outros métodos, o que significa

que se gera um erro numérico menor [121]. Outra função que também contempla uma abordagem semelhante é a função de *Kreisselmeier-Steinhauser*. Esta função faz uso de uma dependência exponencial mais fortemente no maior termo de um conjunto de funções, enquanto ainda se mantém diferenciável. Este método desempenha um papel melhor do que a função *P-norm* ao aproximar-se mais do valor máximo de um dado conjunto de funções, mas, ao mesmo tempo, apresenta uma maior tendência a acumular erros numéricos, sendo que os cálculos intermédios envolvem números bastante elevados [110, 122]. Alternativamente, por forma a aliviar a dificuldade associada à não diferenciabilidade do problema min-max, pode adotar-se a famosa *Bound Formulation* sugerida por Taylor e Bendsøe em 1984 [123]. Este método permite transformar um problema do tipo min-max num problema diferenciável à custa da formulação de um problema equivalente de minimização de uma variável artificial z . Tal significa substituir o objetivo $\max(\sigma^{VM})$ por z , a ser minimizado nas variáveis de projeto, as originais em acréscimo do próprio z , $z \in]0, +\infty [$, dentro de um constrangimento ampliado definido para incluir $\sigma^{VM} \leq z$, onde z representa o limite de tensão não conhecido e que se pretende tomar como o menor possível. Todos os valores de tensão equivalente são então limitados por z , tal como formulado na equação (4.8). Desta forma, a função objetivo é igual à variável artificial z que agora pode ser minimizada de forma suave, garantindo que todos os valores de tensão são inferiores a z . Apesar de os constrangimentos adicionais exigirem um poder computacional maior do que as funções supramencionadas, este método impõe um constrangimento local em todos os elementos da malha em vez de controlar uma função que agrega a contribuição de todos os elementos. Os pontos originais de não diferenciabilidade correspondem agora aos limites do conjunto de constrangimentos do espaço de projeto ampliado e resultam de interseções de constrangimentos diferenciáveis. É um facto que se criam mais constrangimentos na formulação do problema, mas isso também significa tratar as tensões tal como elas são, locais, e escapar a qualquer método de agregação que possa comprometer o controlo pontual das tensões. Esta estratégia de converter um problema min – max num problema suave, isto é, contínuo, através da utilização de uma variável adicional é utilizado em alguns trabalhos [79, 91, 112]. O enunciado do problema (4.7) é agora transformado no problema (4.8):

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}, z} && z \\
& \text{s.a.} && \sigma_i^{VM} \leq z, \quad i = 1, \dots, n^e \\
& && \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j = 1, \dots, n^v
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.5 Formulação do problema de tensão envolvendo o FGM

A formulação do problema de otimização baseado na tensão, FGMT0, que se propõe resolver nesta dissertação, considerando duas fases sólidas e uma fase de vazio e já contemplando a aplicação da *Bound Formulation*, formula-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \mathbf{\rho}_1, \mathbf{\rho}_2, z \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\text{s.a.} \quad \frac{\sigma_e^{\text{VM}}}{z} \leq 1, e = 1, \dots, ne \tag{4.10}$$

$$\frac{C}{C^*} \leq 1 \tag{4.11}$$

$$\frac{V_f}{V_f^*} \leq 1 \tag{4.12}$$

$$\frac{\varphi_1 - \zeta_1}{\zeta_1} = \frac{\sum_{e=1}^{ne} [(1 - \tilde{\rho}_{1,e})(\tilde{\rho}_{1,e} - \rho_{\min})] - \zeta_1}{\zeta_1} \leq 1 \tag{4.13}$$

De notar que as variáveis de projeto ρ_1 e ρ_2 estão contidas no intervalo definido no subcapítulo 4.2. O problema é formulado com um constrangimento de *compliance* (4.11) para evitar estruturas infinitamente elásticas. Não se pode deixar de trabalhar com *compliance*, ainda que como constrangimento, porque em otimização topológica envolvendo tensão é habitual os algoritmos caírem na solução trivial que corresponde a não existir estrutura. No fundo, este constrangimento impõe que a estrutura deva ser suficientemente rígida ao ponto de não desaparecer [18, 109]. O constrangimento de fração volúmica (4.12) serve o intuito de existirem regiões de vazio, ou seja, é um constrangimento de porosidade que limita a quantidade de material sólido que constitui o domínio de projeto, independentemente de se tratar da fase \mathbf{E}^+ ou \mathbf{E}^- . Naturalmente que C^* e V_f^* são os limites superiores dos constrangimentos de *compliance* e fração volúmica, respetivamente. De salientar que o valor de C^* é obtido resolvendo o problema clássico de minimização da *compliance* com um constrangimento de fração volúmica (*single-material*) utilizando o material de base mais rígido. Neste problema clássico, o valor limite do constrangimento de fração volúmica e a estrutura utilizada têm de ser iguais aos do problema original. O valor ótimo resultante deste problema é depois multiplicado por um fator multiplicativo, por exemplo de 1.40 ou 1.50, que correspondem a aumentar a *compliance* limite em 40% e 50%, respetivamente. No fundo, este fator empírico corresponde a um agravamento do valor da *compliance* para dar liberdade ao algoritmo de piorar a rigidez da estrutura e assim conseguir obter picos de tensão mais reduzidos. O constrangimento (4.13) tem a função de penalizar os valores intermédios do campo de densidade filtrada $\tilde{\rho}_1$ por forma a existir uma distribuição clara entre vazio e sólido. Neste constrangimento, φ_1 é um medidor do nível de valores intermédios (regiões cinzentas) presente em $\tilde{\rho}_1$ e $\xi_1 \in]0, +\infty[$ o seu respetivo limite superior, que deve ser mantido pequeno. A escolha do parâmetro ξ_1 é exigente e

depende do problema a resolver. Por exemplo, em [112] os autores afirmam que, para frações volúmicas elevadas, ξ_1 é possivelmente menor comparativamente ao caso de se considerarem frações volúmicas mais reduzidas. O ajuste deste parâmetro requer, portanto, que se corra o problema de otimização mais do que uma vez.

Informa-se o leitor da não existência de um constrangimento para penalizar os valores intermédios de $\widetilde{\rho}_2$. Note-se que os valores intermédios de $\widetilde{\rho}_2$ têm um significado físico quando se aborda o problema através do FGM, o qual é obtido através da interpolação de dois sólidos isotrópicos de acordo com o gráfico da figura 4.2. Tais valores intermédios representam as diferentes proporções de cada sólido presente na mistura. Obviamente que, num contexto MMTO onde se pretendem obter soluções com fases discretas de material, os valores intermédios de $\widetilde{\rho}_2$ teriam de ser penalizados através de um constrangimento semelhante a (4.13), mas agora adaptado a esta variável [112].

Por fim, resta apenas sublinhar duas notas importantes. Em primeiro lugar, que as variáveis de densidade ρ_1 e ρ_2 representadas na equação (4.1) de forma simplificada, são, na verdade, campos de densidade filtrada, $\widetilde{\rho}_1$ e $\widetilde{\rho}_2$, que resultam da aplicação de um filtro de densidades (explicado com mais detalhe no tópico seguinte). Em segundo lugar, nesta formulação os constrangimentos aparecem normalizados porque o otimizador (versão FORTRAN do MMA) apenas aceita os constrangimentos escritos nesta forma.

4.6 Técnicas de filtragem

Em otimização topológica baseada na distribuição de material podem destacar-se dois grandes problemas que influenciam significativamente os resultados computacionais que podem ser obtidos: (1) obtenção de resultados com uma aparência de tabuleiro de xadrez (*checkerboard*); (2) resultados que dependem do refinamento da malha (*mesh-dependency*).

O primeiro tem que ver com a formação de regiões em que elementos sólidos aparecem alternados com regiões de vazio, o que faz recordar um tabuleiro de xadrez, tal como ilustrado na figura 4.5a. A explicação mais direta para a ocorrência deste fenómeno está relacionada com os *layouts* de material terem uma rigidez artificialmente elevada quando analisados em certas formulações discretizadas. O segundo está relacionado com a geração de um *layout* estrutural interno de escala fina similar em natureza às microestruturas que a teoria prevê quando se refina a malha de elementos finitos do domínio de referência. A dependência das soluções com o refinamento da malha encontra-se ilustrada na figura 4.5b, onde uma discretização de elementos finitos mais refinada resulta numa estrutura muito mais detalhada. Idealmente, o refinamento da malha deve resultar numa melhor modelação dos elementos finitos da mesma estrutura ótima e numa melhor descrição das fronteiras do domínio, e não numa estrutura mais detalhada e qualitativamente diferente.

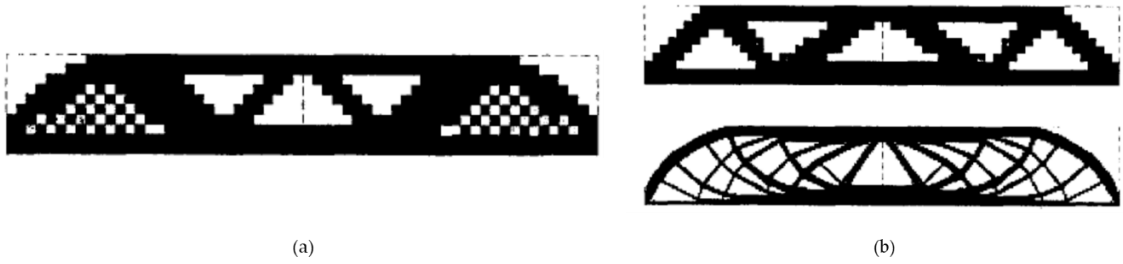


Figura 4.5: Ilustração de problemas decorrentes da otimização topológica baseada na densidade no *MBB-beam*. (a) malha em formato de *checkerboard*, (b) dependência da topologia ótima no refinamento da malha. (Adaptado de [124])

As técnicas sugeridas para ultrapassar estes dois fenômenos enquadram-se em três classes genéricas de métodos. Estas consistem em: (1) adicionar constrangimentos ao problema de otimização; (2) reduzir diretamente o espaço de parâmetros para os *designs*; (3) aplicar filtros na formulação do problema de otimização. Para a maioria destes métodos, a existência de soluções e a convergência das aproximações de elementos finitos já foi provada [124]. No entanto, o autor desta dissertação optou pela utilização de filtros.

A aplicação de filtros no processo de otimização consegue evitar problemas numéricos, tais como o fenômeno do *checkerboard* e da dependência da malha. Podem destacar-se essencialmente dois filtros: (1) filtro de sensibilidades e (2) filtro de densidades. O filtro de sensibilidades foi proposto, em 1994, por Sigmund [125] e é um filtro puramente heurístico. Este filtro permite modificar as sensibilidades do *design* de um elemento específico com base numa média ponderada das sensibilidades dos elementos de uma vizinhança fixa [124]. Seja f a função objetivo de um dado problema de otimização. O filtro de sensibilidades altera o gradiente da função objetivo de tal forma que, em vez de serem utilizadas as sensibilidades reais, $\partial f / \partial \rho_e$, são utilizadas antes sensibilidades filtradas, sensibilidades essas fornecidas pela seguinte equação:

$$\frac{\widehat{\partial f}}{\partial \rho_e} = (\rho_e)^{-1} \frac{1}{\sum_{i=1}^N \widehat{H}_i} \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \quad (4.14)$$

tal que ρ_e é a variável de projeto, com $e = 1, \dots, N$ e sendo N o número total de elementos que constituem a malha de elementos finitos, e \widehat{H}_i é o operador de convolução (também designado por fator peso) dado por:

$$\widehat{H}_i = r_{\min} - \text{dist}(e, i), \quad \{i \in N \mid \text{dist}(e, i) \leq r_{\min}\} \quad (4.15)$$

Fundamentalmente, o operador de convolução \widehat{H}_i representa a importância que cada um dos elementos da vizinhança apresenta sobre o elemento que está a ser filtrado. O operador

$\text{dist}(e, i)$ é definido como sendo a distância entre o centro do elemento e e o centro do elemento i e r_{\min} é o raio de aplicação do filtro. É óbvio que \hat{H}_i vale zero fora da área do filtro, ou seja, $\text{dist}(e, i) > r_{\min}$. Note-se ainda que o operador convolução, para o elemento i , decai linearmente com a distância ao elemento e . Vale a pena notar também que a sensibilidade (4.14) converge para a sensibilidade original quando r_{\min} se aproxima de zero e que as sensibilidades são todas iguais quando r_{\min} tende para infinito.

A ideia principal da utilização do filtro das sensibilidades é basear as atualizações do *design* em sensibilidades filtradas em vez das sensibilidades verdadeiras. Naturalmente, esta é uma abordagem simples, mas potencialmente arriscada, especialmente em problemas em que os algoritmos de otimização são baseados em pesquisa em linha, pois os dados das sensibilidades podem não representar uma direção de descida. Portanto, a otimização pode parar prematuramente. No entanto, já inúmeras aplicações e várias configurações físicas provaram que este filtro é bastante robusto e confiável ao utilizar-se a maioria das ferramentas mais populares de otimização. Ao longo do tempo, vários investigadores tentaram explicar o funcionamento exato do filtro de sensibilidades, porém, até agora sem sucesso. Como as sensibilidades são modificadas heurísticamente, provavelmente é mesmo impossível descobrir qual função objetivo está realmente a ser minimizada, mas geralmente pode afirmar-se que as sensibilidades filtradas correspondem às sensibilidades de uma versão suavizada da função objetivo original [126].

Já o filtro de densidades funciona por modificação da densidade do elemento:

$$\tilde{\rho}_e = \tilde{\rho}_e(\rho_{i \in N}) \quad (4.16)$$

isto é, a densidade modificada do elemento, $\tilde{\rho}_e$, é uma função das variáveis de projeto vizinhas $\rho_{i \in N}$. Chama-se à atenção de que é possível encontrar $\tilde{\rho}_e$ com o nome de densidade filtrada na literatura.

Até à data, já foram propostas várias formas de implementar o filtro de densidades na literatura [126], mas a mais popular é a que se apresenta de seguida. É importante notar que uma característica dos operadores de filtro é a preservação do volume, ou seja, o volume de material deve ser o mesmo antes e depois do processo de filtragem. Na prática, a preservação exata do volume raramente é cumprida devido à influência da fronteira. Algumas das abordagens do filtro de densidades sugeridas na literatura não preservam o volume, o que não é um problema, desde que o constrangimento de fração volúmica seja modificado adequadamente e não existam regiões fixas de sólido ou vazio no domínio de projeto. Posto isto, o filtro de densidades clássico foi proposto, em 2001, por Bruns e Tortorelli [127] e transforma as densidades originais ρ_e em:

$$\tilde{\rho}_e = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{H}_i \rho_i}{\sum_{i=1}^N \hat{H}_i} \quad (4.17)$$

onde

$$\hat{H}_i = r_{\min} - \text{dist}(e, i), \quad \{i \in N \mid \text{dist}(e, i) \leq r_{\min}\} \quad (4.18)$$

$$\text{dist}(e, i) = \|x_e - x_i\| \quad (4.19)$$

Nestas equações, r_{\min} é o raio de aplicação do filtro, N representa o número total de elementos finitos e a norma $\|x_e - x_i\|$ indica a distância espacial entre os centróides dos elementos e e i . Através da equação (4.17), tanto a função objetivo como os constrangimentos, que anteriormente dependiam de ρ_e , são agora função de $\tilde{\rho}_e$. Assim sendo, torna-se necessário recorrer à regra da cadeia para efetuar o cálculo das suas sensibilidades. Considere-se uma função funcional genérica, $\Psi(\tilde{\rho}_e(\rho_e))$, que pode ser tanto uma função objetivo como uma função dos constrangimentos. O cálculo da sensibilidade de Ψ em ordem as variáveis de projeto ρ_e é [126]:

$$\frac{d\Psi}{d\rho_j} = \sum_{e=1}^{N_j} \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{\rho}_e} \frac{d\tilde{\rho}_e}{d\rho_j} = \sum_{e=1}^{N_j} \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{\rho}_e} \frac{\hat{H}_j}{\sum_{i=1}^N \hat{H}_i} \quad (4.20)$$

em que \hat{H}_i é dado pela equação (4.18), \hat{H}_j e $\text{dist}(j, e)$ são dados por, respetivamente:

$$\hat{H}_j = \max [0, r_{\min} - \text{dist}(j, e)], \quad \{e \in N \mid \text{dist}(j, e) \leq r_{\min}\} \quad (4.21)$$

$$\text{dist}(j, e) = \|x_j - x_e\| \quad (4.22)$$

Ao utilizar-se o filtro de densidade é importante estabelecer uma interpretação fisicamente correta do *design*. Na literatura, observa-se por vezes alguns problemas que advêm deste pormenor, embora este aspeto seja bastante simples. As variáveis de projeto originais, ρ_e , não têm um significado físico e são utilizadas apenas como variáveis matemáticas intermédias. Portanto, é sempre conveniente apresentar um gráfico das variáveis de densidade filtrada, $\tilde{\rho}_e$, que também são utilizadas na lei de interpolação SIMP (4.1), pois estas representam a densidade física dos elementos. Note-se que $\tilde{\rho}_e^p$ representa a rigidez física dos elementos. Corretamente, a densidade filtrada $\tilde{\rho}_e$ deve ser sempre apresentada como a solução do problema de otimização em vez do campo de densidade original ρ_e .

Por outro lado, também é conveniente esclarecer quais os valores mais adequados para atribuir ao raio do filtro, r_{\min} , visto que uma má escolha deste parâmetro pode colocar em causa as soluções de *design* que se obtêm. Note-se que o filtro de densidades considera que o domínio de projeto pode ser representado por uma grelha de elementos quadriláteros, tal como ilustrado na figura 4.6. Para além disso, através da equação (4.17), percebe-se que este

filtro calcula a densidade filtrada num dado elemento k efetuando uma média das densidades dos seus elementos vizinhos ponderada pela distância entre o centro deste elemento e o centro dos vizinhos. Posto isto, pretende-se que exista uma definição da fronteira de tal forma que sejam apanhados, não só o centro dos elementos imediatamente adjacentes ao elemento k , mas também o centro dos elementos da diagonal, ou seja, $r_{\min} > \sqrt{2} \approx 1.41$. Habitualmente, utiliza-se um raio de filtragem de valor $r_{\min} = 1.99$ porque, desta forma, se garante que a vizinhança do elemento k é constituída por 8 elementos e mais nenhum. Repare-se que para um $r_{\min} = 2$ o número de vizinhos já seria igual a 12. Curiosamente, é fácil de notar que fazendo $r_{\min} - 1 = 0.99$ e $r_{\min} - 1.41 = 0.58$, de acordo com a equação (4.21), se conclui que os elementos que pesam mais na média são precisamente os elementos que estão mais perto do elemento k (os vizinhos adjacentes nas direções vertical e horizontal). A experiência adquirida mostra que valores de $r_{\min} \in [1.99, 3.99]$ forneciam bons resultados e que a utilização de uma *continuation approach*, onde r_{\min} vai diminuindo gradualmente, facilita a convergência do algoritmo de otimização.

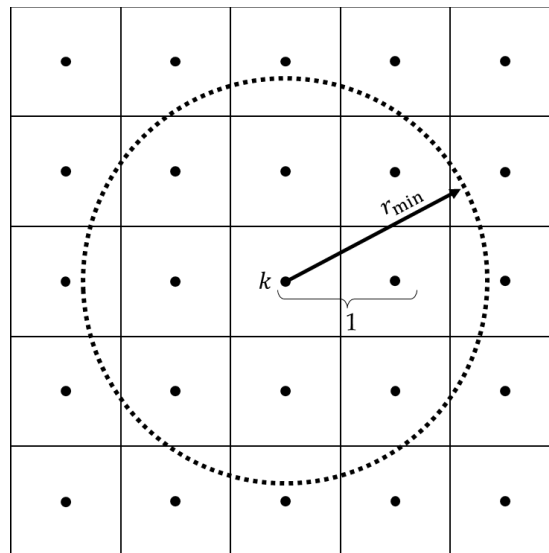


Figura 4.6: Vizinhança do elemento k para um raio de filtragem $r_{\min} = 1.99$.

Finalmente, sublinham-se alguns aspetos relevantes para a compreensão do leitor no que diz respeito à utilização de um filtro e à escolha do filtro de densidades em vez do filtro de sensibilidades. Em primeiro lugar, percebe-se que a utilização de um filtro, neste caso do filtro de densidades, acaba sempre por ser importante para evitar os fenómenos do *checkerboard* e da dependência da malha, embora no caso desta dissertação se utilize o elemento quadrilátero isoparamétrico de oito nós, que possui funções de forma quadráticas, para corrigir o fenómeno do *checkerboard*. No entanto, a dependência da malha está sempre presente e esse é um dos motivos da utilização de um filtro. Em segundo lugar, reforça-se que nesta dissertação

se irá trabalhar com a função tensão, que não é uma função tão bem-comportada como a *compliance* pois é altamente não linear. O filtro de sensibilidades mostra-se pouco eficiente neste contexto porque, embora funcione muito bem para o problema clássico da *compliance*, ao modificar o gradiente da tensão faz com que o algoritmo de otimização se perca completamente, surgindo soluções completamente disparatadas. Em adição, o filtro de densidades também é útil para efetuar uma regularização da tensão na fronteira porque, tal como é evidente quando se trabalha com otimização topológica baseada na densidade, a distribuição da tensão ao longo de uma fronteira em *zig-zag* pode dar origem a singularidades.

CÁLCULO DE SENSIBILIDADES

5.1 Introdução

Dada a necessidade de resolver o problema de otimização (4.9) sujeito aos constrangimentos (4.10) - (4.13) através de um algoritmo baseado no gradiente, como é o caso do MMA, é necessário calcular as derivadas de primeira ordem de todas as funções relativamente a todas as variáveis de projeto. Já foram discutidas anteriormente as dificuldades que podem aparecer associadas ao cálculo da sensibilidade da função tensão e como estas podem ser ultrapassadas, ora através de métodos analíticos, ora através de métodos numéricos. As funções com um baixo grau de complexidade são facilmente diferenciáveis por aplicação imediata das regras de derivação (*e.g.* volume ou massa). É boa prática tornar os programas o mais eficientes e rápidos possível. A utilização de diferenças finitas no cálculo da derivada da tensão seria uma opção, mas acabaria por violar este ponto. Este método numérico está associado a um elevado custo computacional e a uma escolha cuidadosa da perturbação Δx (reveja-se o tópico 3.3.2). Por este motivo, a sensibilidade da tensão será calculada através de um método analítico. Dentro dos métodos analíticos existem duas hipóteses de escolha, método da diferenciação direta ou método adjunto. Dado que o problema a resolver apresenta menos constrangimentos do que variáveis de projeto, então o método adjunto é efetivamente o mais adequado e o que será utilizado neste capítulo, ver [115]. Para além da função tensão, também a *compliance* é um funcional e requererá a aplicação do método adjunto no cálculo da sua derivada. Contudo, e como se virá de seguida, o cálculo da sua derivada é um problema auto-adjunto, o que se traduz numa redução enorme da dificuldade inerente ao seu cálculo em comparação com o cálculo da derivada da tensão. As derivadas do volume e da função de penalização são simples de calcular e não requerem grande descrição. O cálculo das derivadas das funções em ordem à variável artificial z é trivial e, por isso, omitido.

5.1.1 Compliance

A *compliance* é um funcional porque depende do campo de deslocamentos \mathbf{u} que, por sua vez, depende do campo de densidades filtradas, $\tilde{\rho}$. Sendo assim, para calcular a derivada total em ordem ao campo de densidades filtradas é necessário aplicar a regra da cadeia:

$$\frac{dC[\mathbf{u}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})]}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = \frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} \quad (5.1)$$

A derivada do campo de deslocamentos em ordem ao campo de densidades filtradas, $d\mathbf{u}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})/d\tilde{\boldsymbol{\rho}}$, pode ser obtida por intermédio da derivação da equação de equilíbrio $\mathbf{K}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})\mathbf{u}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}) = \mathbf{f}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})$. Por motivos de simplificação de escrita, a dependência de $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ será omitida. Portanto, derivando ambos os membros da equação de equilíbrio relativamente a $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ e isolando o termo supradito, tem-se:

$$\frac{d(\mathbf{K}\mathbf{u})}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = \frac{d\mathbf{f}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{K}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}\mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = \frac{d\mathbf{f}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{u}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = \mathbf{K}^{-1} \left[\frac{d\mathbf{f}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} - \frac{d\mathbf{K}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}\mathbf{u} \right] \quad (5.2)$$

De notar que, como \mathbf{K} e \mathbf{f} dependem explicitamente de $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$, as suas derivadas totais em ordem a $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ são iguais às suas derivadas parciais. Substituindo (5.2) em (5.1), obtém-se:

$$\frac{dC[\mathbf{u}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})]}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = \frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \left[\frac{d\mathbf{f}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} - \frac{d\mathbf{K}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}\mathbf{u} \right] \quad (5.3)$$

Defina-se agora a variável adjunta $\boldsymbol{\lambda}$ como sendo:

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \quad (5.4)$$

Importa mencionar que estas equações envolvem matrizes, \mathbf{K} , e vetores, \mathbf{u} e \mathbf{f} . Refira-se que os termos $\left[\frac{d\mathbf{f}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} - \frac{d\mathbf{K}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}\mathbf{u} \right]$ e $\boldsymbol{\lambda}$ são vetores coluna e o termo $\frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1}$ um vetor linha. Tal explica a necessidade de utilizar a transposta da variável $\boldsymbol{\lambda}$ em (5.4), caso contrário não existiria coerência na equação (5.3).

Retomando a equação (5.4) e multiplicando ambos os membros por \mathbf{K} , tirando partido da simetria desta matriz e aplicando a transposta em ambos os membros da referida equação, vem que:

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = \frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \Leftrightarrow (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K})^T = \left(\frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \Leftrightarrow \mathbf{K}^T \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \Leftrightarrow \mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \quad (5.5)$$

A equação (5.5) designa-se por problema adjunto. Por curiosidade, note-se que $\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda}$ e $(\partial C(\mathbf{u})/\partial \mathbf{u})^T$ são vetores coluna. Após a resolução de (5.5) em ordem á variável adjunta $\boldsymbol{\lambda}$, a sensibilidade de (5.1) ou (5.3) pode ser obtida através de:

$$\frac{dC[\mathbf{u}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})]}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = \boldsymbol{\lambda}^T \left[\frac{d\mathbf{f}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} - \frac{d\mathbf{K}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}\mathbf{u} \right] \quad (5.6)$$

De seguida, substitua-se a expressão da *compliance*, $\mathbf{f}^T \mathbf{u}$, em (5.4):

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{f}^T \mathbf{u}) \right)^T \Leftrightarrow \mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \left(\mathbf{f}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \Leftrightarrow \mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f} \quad (5.7)$$

Note-se que \mathbf{f}^T não depende do campo de deslocamentos \mathbf{u} , logo não é afetado pelo operador $\partial/\partial \mathbf{u}$. De salientar que a equação (5.7) tem exatamente o mesmo aspeto que a equação de equilíbrio $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Assim, verifica-se que para a *compliance* se obtém diretamente $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u}$ (como se verá no caso da tensão não será tão simples). Esta simplificação significa que o problema da *compliance* é auto-adjunto.

No caso desta dissertação, o vetor \mathbf{f} será constituído apenas por forças concentradas nos nós dos elementos finitos. Portanto, não depende do campo de densidades filtradas $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$, ou seja, a derivada $d\mathbf{f}/d\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ na equação (5.6) pode simplesmente desaparecer. Contudo, caso se considerem as forças mássicas (e.g. peso da estrutura), este termo já não poderia ser desprezado. Posto isto, a derivada total da *compliance* expressa pela equação (5.6) assume a seguinte forma simplificada:

$$\frac{dC[\mathbf{u}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})]}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = \mathbf{u}^T \left[\mathbf{0} - \frac{d\mathbf{K}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} \mathbf{u} \right] \Leftrightarrow \frac{dC[\mathbf{u}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})]}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = -\mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} \mathbf{u} \quad (5.8)$$

Por outro lado, sabe-se que a *compliance* e a energia elástica de deformação diferem, uma da outra, a menos de uma constante multiplicativa de 1/2 (reveja-se o tópico 2.4.6). O cálculo de (5.8) pode também ser obtido recorrendo ao conceito de energia elástica de deformação total, S . Por definição, tem-se que:

$$S = \sum_{e=1}^{ne} \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_e \quad (5.9)$$

onde o tensor das deformações, $\boldsymbol{\varepsilon}$, é dado por (2.15) e calculado em cada ponto de Gauss do elemento e e o termo integral utilizando a regra de integração numérica. Note-se que o tensor da elasticidade $\mathbf{E}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})$ depende explicitamente da variável $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$, ao passo que o tensor das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}))$ depende implicitamente, por intermédio do campo de deslocamentos \mathbf{u} , pelo que este não é afetado pelo operador $\partial/\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}$ no cálculo da derivada de (5.9) em ordem a $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$:

$$\frac{dS}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_e \quad (5.10)$$

Note-se que \mathbf{E} é constante no interior de cada elemento finito e por isso pode sair para fora do integral. O sinal negativo em (5.10) é resultado da aplicação do método adjunto, tal como se demonstrou em (5.8). Os valores de energia obtidos através de (5.10) correspondem a metade dos valores obtidos através de (5.8) tomando \mathbf{K} igual a \mathbf{K}_e , sendo este último relativo ao elemento finito e .

Chama-se à atenção que o campo de densidades filtradas, $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$, tanto pode ser o campo de densidades que contém as variáveis de densidade topológicas, $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1$, ou as variáveis de densidade responsáveis pela seleção de material, $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_2$. Assim, o cálculo, quer de (5.8) como de (5.10), é sempre efetuado em ordem a cada uma destas variáveis de projeto e somente em ordem à do respetivo elemento e , isto é, calculadas por elemento:

$$\frac{dS^e}{d\tilde{\rho}_{j,i}} = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial E_{zykm}}{\partial \tilde{\rho}_{j,i}} \int_{\Omega_e} \varepsilon_{zy} \varepsilon_{km} d\Omega_e \right) \delta_{ie} \quad (5.11)$$

sendo S^e a energia de deformação no elemento e e δ_{ie} o delta de Kronecker que, em bom rigor, não representa uma função, mas sim um símbolo matemático que se define da seguinte forma:

$$\delta_{ie} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = e \\ 0, & \text{se } i \neq e \end{cases} \quad (5.12)$$

com $j \in \{1,2\}$ e $i, e \in \{1, \dots, ne\}$, onde ne denota o número total de elementos finitos da malha. Efetivamente, a sensibilidade da *compliance*, por ser localizada no sentido de envolver apenas informação ao nível do elemento, é extremamente fácil de calcular. No entanto, não deixa de ser necessário a aplicação da regra da cadeia dado o efeito oculto das variáveis de projeto $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ através do campo de deslocamentos \mathbf{u} . Salienta-se ainda o facto de a derivada calculada em (5.8) ser negativa para todos os elementos. Intuitivamente, tal confirma que material adicional em qualquer elemento diminui a *compliance* ou flexibilidade, ou seja, torna a estrutura mais rígida.

5.1.2 Tensão de von Mises

No caso da tensão, os constrangimentos dependem explícita e implicitamente do valor das variáveis de projeto $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$. Considere-se a título de exemplo o constrangimento na tensão equivalente de um elemento, $g_e = g_e(\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \sigma_e^{\text{VM}}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}))$, onde a dependência das variáveis de projeto aparece, por um lado, de forma explícita e, por outro lado, de forma implícita através da tensão equivalente do elemento, σ_e^{VM} . Neste segmento de ideias, o cálculo da derivada total de g_e implica a utilização da regra da cadeia:

$$\frac{dg_e}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = \frac{\partial g_e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}} + \frac{\partial g_e}{\partial \sigma_e^{\text{VM}}} \frac{d\sigma_e^{\text{VM}}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} \quad (5.13)$$

Da equação (5.13) é imperativo que a derivada $d\sigma_e^{\text{VM}}/d\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ tenha de ser calculada em primeiro lugar. Na verdade, também a tensão equivalente depende explícita e implicitamente (por ser função do campo de deslocamentos, \mathbf{u} , que é solução da equação de equilíbrio, $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$, num modelo de elementos finitos) das variáveis de projeto $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$, ou seja, $\sigma_e^{\text{VM}} = \sigma_e^{\text{VM}}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{u}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}))$. Portanto, aplicando novamente a regra da cadeia para calcular a derivada total da tensão equivalente em ordem a $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$, tem-se:

$$\frac{d\sigma_e^{\text{VM}}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = \frac{\partial \sigma_e^{\text{VM}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}} + \frac{\partial \sigma_e^{\text{VM}}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} \quad (5.14)$$

A derivada total $d\mathbf{u}/d\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ resulta de derivar a equação de equilíbrio em ordem a $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ e isolar o respetivo termo. Este resultado está expresso na equação (5.2), pelo que não será repetido aqui. Substituindo (5.2) em (5.14), obtém-se:

$$\frac{d\sigma_e^{\text{VM}}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = \frac{\partial \sigma_e^{\text{VM}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}} + \frac{\partial \sigma_e^{\text{VM}}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \left[\frac{d\mathbf{f}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} - \frac{d\mathbf{K}}{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}} \mathbf{u} \right] \quad (5.15)$$

onde:

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \frac{\partial \sigma_e^{\text{VM}}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \sigma_e^{\text{VM}}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \quad (5.16)$$

Note-se que o cálculo de \mathbf{K}^{-1} é impraticável e, portanto, em vez de se obter $\boldsymbol{\lambda}$ diretamente através de (5.16), multiplicam-se ambos os membros desta última por \mathbf{K} para obter o seguinte problema adjunto:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{\partial \sigma_e^{\text{VM}}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \quad (5.17)$$

Tipicamente, esta equação é resolvida em ordem a $\boldsymbol{\lambda}$ e o resultado é posteriormente substituído na equação (5.15). De salientar que a tensão equivalente de um elemento é calculada através da fórmula de von Mises para elementos 2D dada por:

$$\sigma_e^{\text{VM}} = \frac{\int_{\Omega_e} \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11}^e - \sigma_{22}^e)^2 + (\sigma_{11}^e)^2 + (\sigma_{22}^e)^2] + 3(\sigma_{12}^e)^2} d\Omega_e}{|\Omega_e|} \quad (5.18)$$

onde esta é definida como sendo uma média volumétrica das tensões equivalentes calculadas em todos os pontos de Gauss de um dado elemento. Assim, e assumindo que:

$$w = \frac{1}{2} [(\sigma_{11}^e - \sigma_{22}^e)^2 + (\sigma_{11}^e)^2 + (\sigma_{22}^e)^2] + 3(\sigma_{12}^e)^2 \quad (5.19)$$

tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_e^{\text{VM}}}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{\int_{\Omega_e} w^{\frac{1}{2}} d\Omega_e}{|\Omega_e|} \right) = \frac{\int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial u_k} w^{-\frac{1}{2}} d\Omega_e}{|\Omega_e|} \quad (5.20)$$

em que:

$$\frac{\partial w}{\partial u_k} = \left(\frac{\partial \sigma_{11}^e}{\partial u_k} - \frac{\partial \sigma_{22}^e}{\partial u_k} \right) (\sigma_{11}^e - \sigma_{22}^e) + \frac{\partial \sigma_{11}^e}{\partial u_k} \sigma_{11}^e + \frac{\partial \sigma_{22}^e}{\partial u_k} \sigma_{22}^e + 6 \frac{\partial \sigma_{12}^e}{\partial u_k} \sigma_{12}^e \quad (5.21)$$

Substituindo em (5.20), obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma_e^{\text{VM}}}{\partial u_k} = \frac{\int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{11}^e}{\partial u_k} - \frac{\partial \sigma_{22}^e}{\partial u_k} \right) (\sigma_{11}^e - \sigma_{22}^e) + \frac{\partial \sigma_{11}^e}{\partial u_k} \sigma_{11}^e + \frac{\partial \sigma_{22}^e}{\partial u_k} \sigma_{22}^e + 6 \frac{\partial \sigma_{12}^e}{\partial u_k} \sigma_{12}^e \right] d\Omega_e}{|\Omega_e| \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11}^e - \sigma_{22}^e)^2 + (\sigma_{11}^e)^2 + (\sigma_{22}^e)^2] + 3(\sigma_{12}^e)^2}} \quad (5.22)$$

Note-se que o campo de deslocamentos é agora apresentado em notação indicial, isto é, u_k , onde o índice $k \in \{1,2\}$ diz respeito à direção espacial do respetivo campo de deslocamento. Por exemplo, se $k = 1$, tem-se u_1 que representa o campo de deslocamentos horizontais.

Na expressão (5.22), o tensor das tensões macroscópico, σ_{ij} , é calculado de acordo com a lei de *Hooke*:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.23)$$

tal que o tensor das deformações macroscópico (também conhecido por tensor das deformações de *Cauchy*) é dado por:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (5.24)$$

Portanto, a derivada das tensões macroscópicas em ordem ao campo de deslocamentos u_k fica:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_k} = E_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial u_k} = E_{ijkl} \frac{\partial}{\partial u_k} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right] \quad (5.25)$$

De notar que o tensor da elasticidade, E_{ijkl} , é independente de u_k e, por conseguinte, não é afetado pelo operador $\partial/\partial u_k$. Na verdade, no formato de elementos finitos, os campos de deslocamentos u_k e u_l são aproximados por:

$$u_k = \bar{u}_{k\alpha}\phi_\alpha \quad (5.26)$$

$$u_l = \bar{u}_{l\alpha}\phi_\alpha \quad (5.27)$$

ou seja, os deslocamentos nodais $\bar{u}_{k\alpha}$ e $\bar{u}_{l\alpha}$, com $k, l = 1, \dots, n^{\text{GDL}}$ e $\alpha = 1, \dots, \text{IA}$, são multiplicados pelas funções de forma ϕ_α de modo a ser possível estimar o valor dos deslocamentos em cada ponto do domínio do elemento considerado. Aqui, n^{GDL} representa o número de graus de liberdade (GDL) por cada nó de um dos elementos finitos da malha e IA representa o número total de nós do respetivo elemento finito utilizado. No caso desta dissertação, considerou-se o elemento quadrilátero de 8 nós, Q8, com 2 graus de liberdade por nó, tal como representado na figura 5.1. A escolha deste elemento, em alternativa ao elemento quadrilátero de 4 nós, Q4, prende-se, essencialmente, com o fenómeno da retenção ao corte (*Shear-Locking*) associado ao facto de os elementos Q4 não conseguirem reproduzir corretamente a deformação associada à flexão pura. Note-se que estes elementos apresentam uma rigidez artificial que faz com que os deslocamentos calculados sejam muito inferiores aos reais. Em acréscimo, refira-se também que o elemento Q8 evita o fenómeno do *checkerboard*, tal como explicado no subcapítulo 4.6.

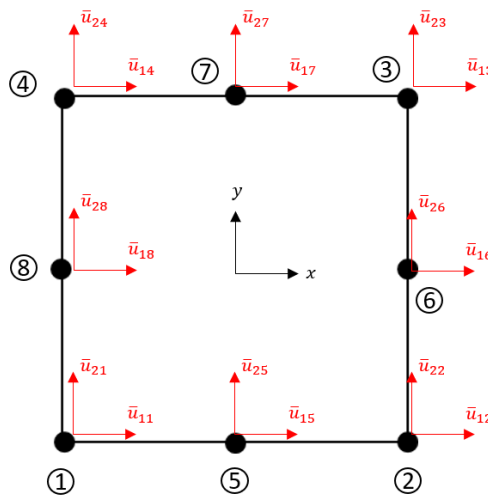


Figura 5.1: Identificação dos graus de liberdade do elemento quadrilátero de 8 nós (16 GDL).

Assim, através de (5.25) e aplicando as aproximações de elementos finitos dadas por (5.26) e (5.27), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \bar{u}_{k\alpha}} &= \frac{1}{2} E_{ijkl} \frac{\partial}{\partial \bar{u}_{k\alpha}} \left(\bar{u}_{k\alpha} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_l} + \bar{u}_{l\alpha} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} E_{ijkl} \left(\frac{\partial \bar{u}_{k\alpha}}{\partial \bar{u}_{k\alpha}} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_{l\alpha}}{\partial \bar{u}_{k\alpha}} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{1}{2} E_{ijkl} \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_l} + \delta_{lk} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} E_{ijkl} \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_l} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_l} \right) = E_{ijkl} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_l} \end{aligned} \quad (5.28)$$

É relevante mencionar que a derivada (5.22) representa o vetor de carga fictícia (*dummy load vector*) que resulta da aplicação do método adjunto. Note-se ainda que existirão tantos vetores de carga ou problemas adjuntos quanto o número de elementos da malha que se está a considerar porque existirá um constrangimento de tensão em cada elemento, recorde-se a equação (4.10). Portanto, é importante que se perceba que, numa malha com mais do que 1 elemento, o vetor de carga fictícia, que no fundo possui as derivadas da tensão equivalente em ordem a cada um dos deslocamentos representados na figura 5.1, apenas pode ter entradas diferentes de zero nos graus de liberdade dos nós associados a esse mesmo elemento. A figura 5.2 esclarece este ponto. Repare-se que a dimensão do vetor de carga fictícia \mathbf{z}_1 é igual a 26, isto é, 13 nós \times 2 GDL/nó = 26 GDL e quando se pretende tirar as derivadas da tensão no elemento 1 da malha ilustrada esse vetor assume o aspeto resumido na figura.

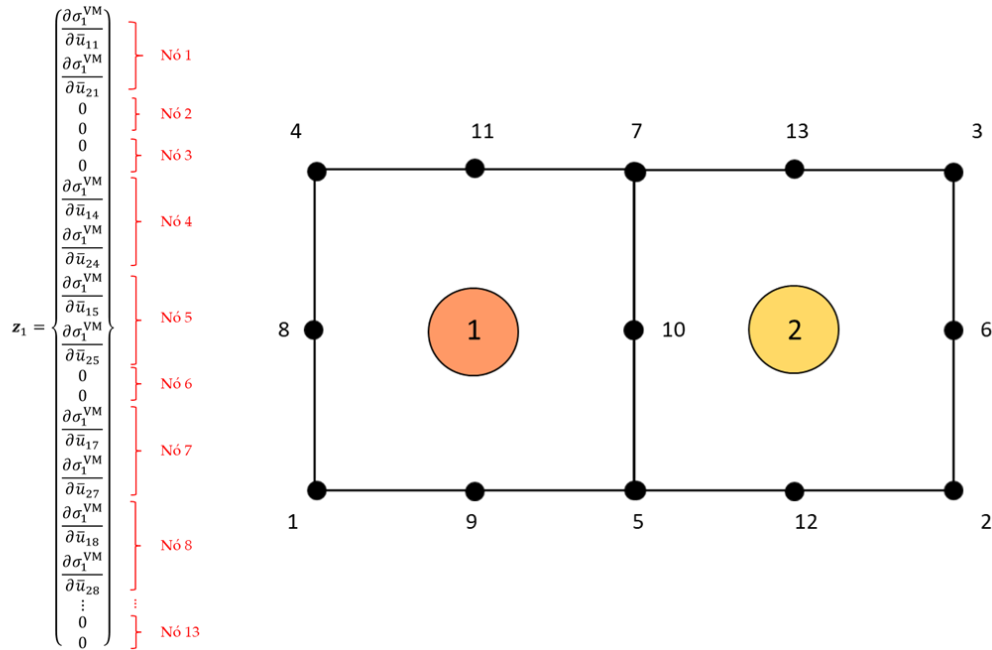


Figura 5.2: Malha constituída por 2 elementos finitos quadriláteros de 8 nós (26 GDL) e vetor de carga fictícia do primeiro elemento.

Outro aspeto que é curioso notar é o facto de, se um dado nó estiver fixo, as entradas do vetor \mathbf{z} para os GDL desse nó são, geralmente, diferentes de zero. Para além disso, observou-se que, se o elemento estiver à tração, as cargas fictícias distribuem-se pelos nós da forma representada na figura 5.3.

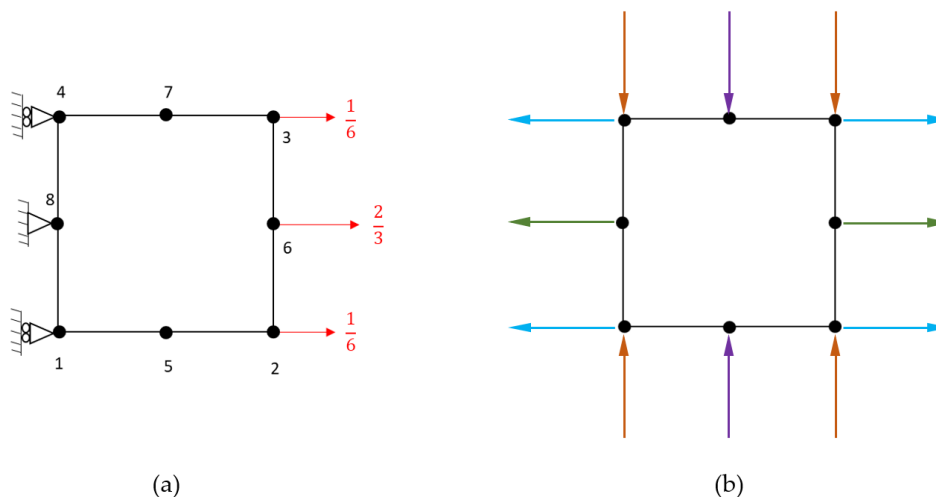


Figura 5.3: (a) Simulação de uma placa à tração com $\sigma = 1$ Pa através de um elemento quadrilátero de 8 nós, (b) distribuição das cargas fictícias pelos nós do elemento.

A figura 5.3a simula uma placa à tração onde as forças externas aplicadas nos nós 2, 3 e 6 e as reações nos apoios onde estão os nós 1, 4 e 8 equivalem a aplicar uma tensão distribuída unitária nas respetivas arestas da placa (ver anexo A). A figura 5.3b ilustra a distribuição das cargas fictícias pelos 8 nós do elemento aquando da aplicação do método adjunto, onde as setas com a mesma cor simbolizam cargas iguais. Da análise da mesma, observa-se que existe um equilíbrio estático no elemento, pois o somatório das forças segundo a direção horizontal e segundo a direção vertical é igual a zero. Mais que isso, caso se considerem mais elementos, e se todos os elementos forem iguais, então esta distribuição de forças mantém-se e é igual para todos os elementos da malha. Este acontecimento resulta de atribuir o mesmo valor de $\tilde{\rho}_1$ e $\tilde{\rho}_2$ (podendo estes ser diferentes entre si) a todos os elementos finitos da malha que, sendo estes constantes em cada elemento, originam um tensor das deformações constante e igual em todos os pontos de Gauss e em todos os elementos. Porém, constatou-se uma mudança de paradigma ao considerar-se um elemento à flexão pura. Neste caso, todas as cargas fictícias aplicadas nos nós do elemento são diferentes e os sentidos das mesmas deixam de ser concordes com os sentidos das cargas representadas na figura 5.3b, ou seja, cargas aplicadas em nós opostos não têm necessariamente de ter sentidos contrários. No entanto, observou-se que o somatório das forças, tanto na direção horizontal como vertical, continuava a ser nulo (bem como o momento resultante em torno de um ponto arbitrário) e, portanto, continuava a existir um equilíbrio estático, ver anexo D. Este resultado encontra os seus fundamentos no facto de, estando a estrutura sujeita à flexão, o tensor das deformações e, por conseguinte, o tensor das tensões, serem diferentes em todos os pontos de Gauss e em todos os elementos da malha.

Note-se ainda que a expressão (5.22) depende explicitamente das componentes do tensor das tensões.

Neste momento, a parte implícita da derivada total da tensão equivalente em ordem a $\tilde{\rho}$ pode ser calculada. Agora, resta apenas calcular a parte explícita da equação (5.14). Desta maneira, e utilizando notação indicial, a derivada da tensão de von Mises em ordem a $\tilde{\rho}_{j,i}$, $\partial\sigma_e^{\text{VM}}/\partial\tilde{\rho}_{j,i}$, é dada por:

$$\frac{\partial\sigma_e^{\text{VM}}}{\partial\tilde{\rho}_{j,i}} = \frac{\int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\sigma_{11}^e}{\partial\tilde{\rho}_{j,i}} - \frac{\partial\sigma_{22}^e}{\partial\tilde{\rho}_{j,i}} \right) (\sigma_{11}^e - \sigma_{22}^e) + \frac{\partial\sigma_{11}^e}{\partial\tilde{\rho}_{j,i}} \sigma_{11}^e + \frac{\partial\sigma_{22}^e}{\partial\tilde{\rho}_{j,i}} \sigma_{22}^e + 6 \frac{\partial\sigma_{12}^e}{\partial\tilde{\rho}_{j,i}} \sigma_{12}^e \right] d\Omega_e}{|\Omega_e| \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11}^e - \sigma_{22}^e)^2 + (\sigma_{11}^e)^2 + (\sigma_{22}^e)^2] + 3(\sigma_{12}^e)^2}} \quad (5.29)$$

onde as derivadas das tensões macroscópicas em ordem a $\tilde{\rho}_{j,i}$, com $j \in \{1,2\}$ a representar cada um dos campos de densidade filtrada e $i \in \{1, \dots, n^e\}$ os n^e elementos da malha, são obtidas através da seguinte equação:

$$\frac{\partial\sigma_{zy}^e}{\partial\tilde{\rho}_{j,i}} = \frac{\partial E_{zykl}}{\partial\tilde{\rho}_{j,i}} \varepsilon_{kl} \delta_{ie} \quad (5.30)$$

Note-se que, como a equação (5.30) se trata de uma derivada explícita e o tensor das deformações, ε_{kl} , não depende explicitamente de $\tilde{\rho}_{j,i}$, o operador $\partial/\partial\tilde{\rho}_{j,i}$ apenas abrange o tensor da elasticidade, E_{ijkl} . O tensor da elasticidade depende das variáveis de projeto através da lei SIMP bi-material para materiais com gradiente de funcionalidade apresentada em (4.1). A derivada de (4.1) em ordem a cada uma das variáveis de densidade topológica e de seleção de material, $\tilde{\rho}_{1,i}$ e $\tilde{\rho}_{2,i}$, respetivamente, para o elemento i é dada por:

$$\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial\tilde{\rho}_{1,i}} = p_1 \tilde{\rho}_{1,i}^{p_1-1} \left(\tilde{\rho}_{2,i}^{p_2} E_{ijkl}^{(1)} + (1 - \tilde{\rho}_{2,i}^{p_2}) E_{ijkl}^{(2)} \right) \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial\tilde{\rho}_{2,i}} = p_2 \tilde{\rho}_{1,i}^{p_1} \tilde{\rho}_{2,i}^{p_2-1} \left(E_{ijkl}^{(1)} - E_{ijkl}^{(2)} \right) \quad (5.32)$$

em que p_1 e p_2 são os expoentes de penalidade, $E_{ijkl}^{(1)}$ é o tensor da elasticidade do material de base mais rígido e $E_{ijkl}^{(2)}$ o tensor da elasticidade do material de base mais flexível. Por fim, a derivada total $d\sigma_e^{\text{VM}}/d\tilde{\rho}$ da equação (5.14) pode finalmente ser calculada.

Torna-se importante mencionar que o cálculo da derivada da tensão já foi efetuado ao nível microestrutural por Collet *et al.* [102], Coelho *et al.* [79] e Conde *et al.* [112]. No caso dos dois primeiros, para uma deformação e tensão médias aplicadas e considerando SMTO, e entendido ao caso MMTO, no caso da terceira referência. Até à data, tanto quanto o autor desta

dissertação sabe, o presente documento é original a respeito do cálculo da sensibilidade da tensão recorrendo ao método adjunto para o caso multimaterial à macroescala.

De um modo geral, a análise de sensibilidades é uma tarefa desafiadora e que consome muito tempo. No caso desta dissertação, o número total de constrangimentos de tensão é igual ao número total de elementos finitos considerado, isto é, as tensões são tratadas tal como elas são, locais. Tal também significa um número elevado de constrangimentos e, por isso, cada função requer a sua derivada em ordem a todas as variáveis de projeto. De notar que, dada a existência de dois campos de densidade, em comparação com o caso SMTO, o número de variáveis de projeto é duplicado no caso FGMT0.

5.1.3 Volume

Comece-se por considerar o domínio de projeto Ω , representado na figura 5.4, discretizado em n^e elementos finitos quadriláteros.

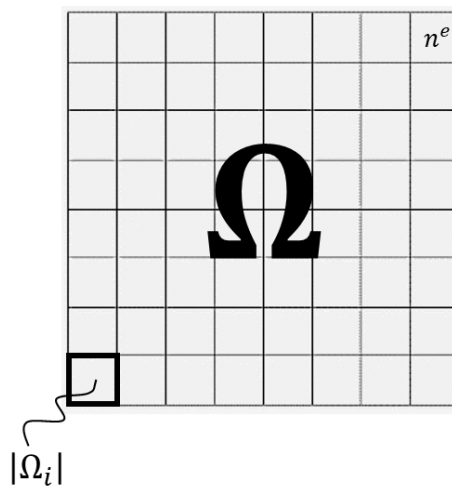


Figura 5.4: Discretização do domínio de projeto Ω em n^e elementos finitos quadriláteros.

É trivial notar que o volume (3D) ou área (2D) do domínio de projeto, assumindo que todo ele está preenchido com material, resulta de somar cada um dos $|\Omega_i|$, com $i \in \{1, \dots, n^e\}$, de cada elemento, isto é,

$$|\Omega| = \sum_{i=1}^{n^e} |\Omega_i| \quad (5.33)$$

em que $|\Omega_i|$ representa o volume ou área do elemento i e $|\Omega|$ o volume ou área total do domínio de projeto.

Contudo, para efeitos de otimização, sabe-se que nem todo o domínio de projeto será ocupado por material. Assim, este será constituído tanto por material sólido como por vazio,

isto é, $\Omega = \Omega^{\text{mat}} \cup \Omega^{\text{vaz}}$, sendo Ω^{mat} o volume ou área ocupado por material e Ω^{vaz} o ocupado por vazio. Sendo que a cada elemento finito i será atribuída uma variável topológica filtrada, $\tilde{\rho}_{1,i}$, que decide se o elemento em questão será ou não ocupado por material, o volume ou área total efetivo(a) do domínio de projeto Ω num sistema contínuo é dado por

$$V(\tilde{\rho}_{1,i}) = \int_{\Omega} \tilde{\rho}_{1,i} \, d\Omega \quad (5.34)$$

Utilizando a discretização da figura 5.4, vem que:

$$V(\tilde{\rho}_{1,i}) = \sum_{i=1}^{n^e} \tilde{\rho}_{1,i} |\Omega_i| \quad (5.35)$$

A derivada de (5.35) em ordem à variável $\tilde{\rho}_{j,i}$ é simples:

$$\frac{dV}{d\tilde{\rho}_{j,i}} = \begin{cases} |\Omega_i| & \text{se } j = 1 \\ 0 & \text{se } j = 2 \end{cases} \quad (5.36)$$

Em otimização topológica, a fração volúmica do material é tradicionalmente calculada como sendo uma média dos volumes dos elementos ponderada pela variável densidade associada a cada elemento ao longo de todo o domínio de projeto, i.e.:

$$V_f(\tilde{\rho}_{1,i}) = \frac{\sum_{i=1}^{n^e} \tilde{\rho}_{1,i} |\Omega_i|}{\sum_{i=1}^{n^e} |\Omega_i|} \quad (5.37)$$

5.1.4 Função de penalização da variável topológica

A derivada da função φ_1 , que penaliza os valores intermédios da variável topológica $\tilde{\rho}_{1,i}$, em ordem ao campo de densidades filtradas, $\tilde{\rho}_{j,i}$, é dada por:

$$\frac{d\varphi_1}{d\tilde{\rho}_{j,i}} = \begin{cases} -2\tilde{\rho}_{1,i} + \rho_{\min} + 1 & \text{se } j = 1 \\ 0 & \text{se } j = 2 \end{cases} \quad (5.38)$$

PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS E MÓDULO DE OTIMIZAÇÃO

6.1 Introdução

Já é sabido que o grande objetivo desta dissertação consiste em resolver o problema de otimização descrito no subcapítulo 4.5. Tal problema requer, evidentemente, o cálculo das sensibilidades tanto da função objetivo como dos constrangimentos, abordadas no Capítulo 5. A realização deste cálculo de forma manual é completamente inviável. Note-se que só o cálculo de (5.28), utilizando um elemento igual ao da figura 5.1, requer que se calculem 64 derivadas ($16 \text{ GDL} \times 4 \text{ GP}$), onde a sigla GP significa *Gauss Points*. Portanto, o recurso a uma linguagem de programação em computador é imperativo. Podem distinguir-se dois tipos de código: (1) código aberto e (2) código fechado ou comercial. A diferença entre eles é muito simples. O primeiro permite a sua alteração no código fonte, o segundo já não. Os programas de elementos finitos FEM 2D (*Finite Element Method 2D by Kikuchi from 1984* [128]) e o ANSYS® (acrónimo para *Analysis System*), são exemplos disso, respetivamente, e foram usados nesta dissertação. Visto que o cálculo de sensibilidades, em particular da tensão através do método adjunto ao nível da macroescala, não se encontra implementado num código comercial que seja do conhecimento do autor desta dissertação, então existe toda a conveniência em trabalhar em código aberto. Para o efeito, diga-se que todo o cálculo de sensibilidades discutido no Capítulo 5 foi implementado no código FEM 2D como extra. Este trabalho foi feito em linguagem FORTRAN que é uma das principais linguagens de programação científica e que oferece um elevado desempenho recorrendo aos mais recentes compiladores como os disponibilizados pela Intel®, usados nesta dissertação. Essencialmente, o FEM 2D é um programa de elementos finitos disponibilizado que permite resolver os problemas de elasticidade plana convencionais recorrendo a elementos quadriláteros isoparamétricos de quatro nós. Serve-se de quatro pontos de Gauss para integração numérica e faz o pós-processamento ao nível das deformações e tensões.

6.2 Estrutura do programa FEM 2D

O programa trabalhado nesta dissertação, e cuja versão original pode ser consultada em [128], pode dividir-se em 3 partes: (1) pré-processamento; (2) processamento de elementos finitos; (3) pós-processamento. A primeira contém 10 subrotinas que geram o *input* necessário para a segunda parte, processamento de elementos finitos (constituído por 9 subrotinas). A terceira parte tem 3 subrotinas que providenciam as deformações, as tensões e outras quantidades necessárias para a análise de tensões e projeto de estruturas. A estrutura do programa encontra-se sumariada na figura 6.1.

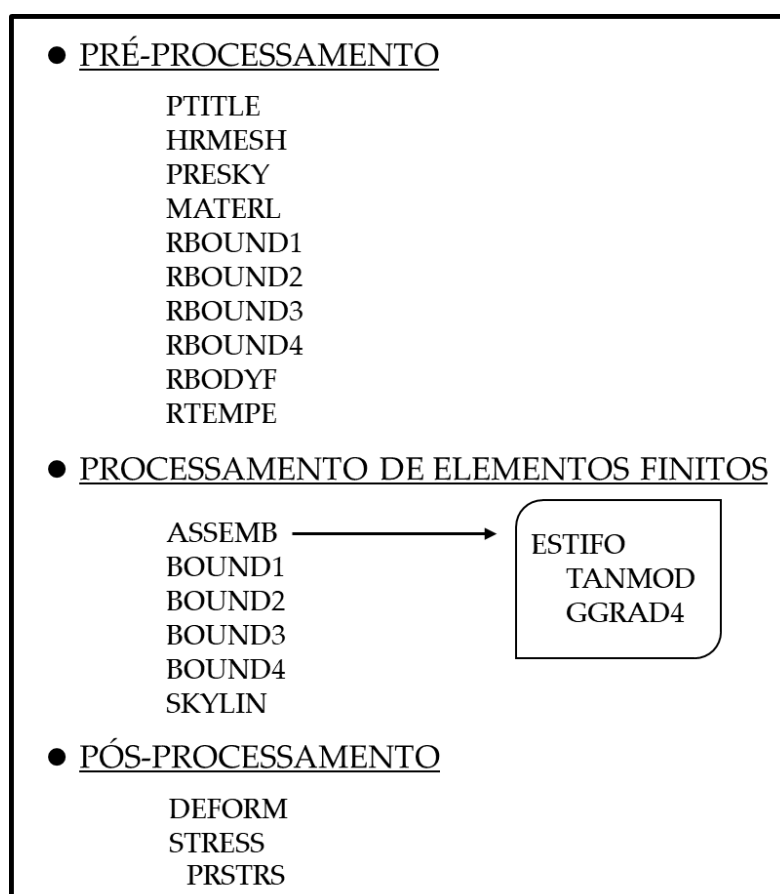


Figura 6.1: Constituição do programa FEM 2D. Pré-Processamento, Processamento e Pós-Processamento e respectivas subrotinas.

De forma breve, em termos de pré-processamento tem-se: a subrotina PTITLE que lê e devolve o título do problema que se irá resolver; a subrotina HRMESH que lê a informação de *input* das coordenadas dos nós e das conectividades dos elementos; a subrotina PRESKY que calcula a altura da *skyline* e constrói os ponteiros diagonais "JDIAG" para o *solver*; a subrotina MATERL que lê e devolve todas as propriedades dos materiais (o módulo de Young, o coefi-

ciente de Poisson, a espessura do corpo e o coeficiente de expansão térmica) e define as características do problema; as subrotinas RBOUND1, RBOUND2, RBOUND3 e RBOUND4 que leem os dados de *input* relativamente às condições de fronteira de deslocamentos impostos nos nós, forças aplicadas nos nós, a informação para o terceiro tipo de condições de fronteira nas direções normal e tangencial e a informação necessária para restringir o deslocamento normal de um ponto que esteja situado numa superfície inclinada, respetivamente; e as subrotinas RBODYF e RTEMPE que estão relacionadas com a existência de forças mássicas e de tensões térmicas, respetivamente.

Em termos de processamento, pode dizer-se que a subrotina ASSEMB constitui o corpo principal do processamento de elementos finitos, pois é formada por mais 3 subrotinas importantes, ESTIFO, TANMOD e GGRAD4. A primeira constrói as matrizes de rigidez dos elementos e os seus respetivos vetores de carga. A segunda é utilizada para especificar o tensor da elasticidade do material, E_{ijkl} . A terceira calcula o gradiente das funções de forma dos elementos relativamente ao sistema de coordenadas global (x, y) . As matrizes de rigidez dos elementos e os vetores de carga são posteriormente assemblados na subrotina ASSEMB. As subrotinas BOUND1, BOUND2, BOUND3 e BOUND4, de acordo com a informação lida nas subrotinas RBOUND1, RBOUND2, RBOUND3 e RBOUND4, respetivamente, modificam a matriz de rigidez e o vetor de carga globais. A subrotina SKYLIN constitui o *solver* do programa que resolve o sistema de equações lineares (3.4) utilizando o método da *skyline* [128].

Por fim, em termos de pós-processamento, as subrotinas DEFORM, STRESS e PRSTRS devolvem os resultados, tais como deslocamentos, tensões, tensões principais, a energia elástica total de deformação do corpo, a tensão equivalente (ou de von Mises), etc.

É importante mencionar que nesta dissertação foi utilizado o *Microsoft Visual Studio* 2019 como plataforma para a edição e geração de código compilado pelo pacote gratuito disponibilizado pela Intel®, denominado *oneAPI toolkit*. Refira-se que, neste ambiente de programação, não existe uma interface gráfica que permita visualizar o *design* ou topologia obtida. Para esse efeito, foi utilizado o programa ANSYS®, na verdade cumpre uma função dupla: (1) gerar a malha de elementos finitos; (2) visualizar o *design* obtido. De salientar que o FEM 2D se alimenta de um ficheiro de entrada que identifica a posição dos nós, as forças aplicadas, os deslocamentos impostos, as conectividades, as características dos materiais, a posição dos apoios, etc. Este ficheiro é obtido através de um ficheiro de texto com instruções APDL, designado de GERAMESH, que, após a criação da malha de elementos finitos através do ANSYS®, transforma o ficheiro gerado por este último num ficheiro que pode ser lido pelo FEM 2D. Para além disso, chama-se à atenção que se detetou que o programa FEM 2D, na sua versão original, não estava pronto para ser corrido mais que uma vez porque existiam três variáveis que não estavam inicializadas e que, por conseguinte, geravam erros numéricos. As variáveis são as seguintes: TEMP (temperaturas em cada ponto nodal), BFR (vetor das forças mássicas) e U (vetor de deslocamentos atual). Em adição, visto que nesta dissertação se utilizou o elemento Q8, à semelhança da subrotina GGRAD4, criou-se outra igual, designada por GGRAD8, para

que o programa contemplasse agora este elemento. Finalmente, resta apenas dizer que o leitor pode sempre complementar o seu conhecimento em relação ao código FORTRAN FEM 2D consultando [128].

6.3 Alterações efetuadas nas subrotinas ASSEMB, ESTIFO, TANMOD e STRESS do programa FEM 2D

Numa primeira fase, observou-se que o programa FEM 2D apenas fornecia os valores da tensão equivalente num elemento Q8 em cada um dos 4 pontos de Gauss, isto é, quatro tensões equivalentes por elemento. Contudo, e como é do interesse deste trabalho a resolução do problema do subcapítulo 4.5, este resultado não serve. Para efeitos de otimização, o objetivo será minimizar o valor da tensão equivalente considerada constante no elemento e não esse valor em cada ponto de Gauss, pois levaria a um custo computacional muito mais elevado. Assim, a primeira alteração ao código consistiu na implementação de uma média volumétrica no elemento das tensões equivalentes calculadas nos pontos de Gauss, equação (4.6). Desta forma, tem-se um único valor de tensão equivalente por elemento. Para além disso, o programa original também não calculava o volume total da estrutura, pelo que este também foi implementado através da equação (5.33). O volume efetivo dado por (5.34) também foi implementado. Todas estas alterações foram efetuadas na subrotina STRESS.

Numa segunda fase, foram implementadas duas leis de interpolação baseadas no método SIMP, uma no tensor da elasticidade E_{ijkl} , equação (4.1), e outra na matriz de rigidez \mathbf{K}_e dos elementos. A primeira foi efetuada na subrotina STRESS enquanto a segunda na subrotina ASSEMB. Note-se que na subrotina TANMOD o programa calcula o tensor da elasticidade de um material isotrópico através da equação (6.1). Aqui, a equação está escrita para um estado plano de tensão, embora se chama à atenção que o programa também oferece a possibilidade de estado plano de deformação:

$$E_{ijkl} = \hat{\lambda} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (6.1)$$

onde $\hat{\lambda}$ e μ são as constantes de Lamé que dependem do módulo de Young, E , e do coeficiente de Poisson, ν , do material e são dadas por:

$$\hat{\lambda} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \quad (6.2)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.3)$$

em que a constante $\hat{\lambda}$ é escrita tendo em conta que se trata de um estado plano de tensão. Substituindo as equações (6.2) e (6.3) em (6.1) e depois em (5.23), obtém-se (ver anexo B):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

onde é perfeitamente visível o tensor da elasticidade para materiais isotrópicos e considerando um estado plano de tensão. No entanto, este tensor só é válido para um material. Portanto, houve a necessidade de calcular outras duas constantes de Lamé, diga-se $\hat{\lambda}_2$ e μ_2 , bem como um novo tensor da elasticidade, $E_{ijkl}^{(2)}$ para a segunda fase de material sólido. De notar que o programa deve agora ler as propriedades de dois materiais diferentes. Estas modificações foram implementadas na subrotina TANMOD. Podendo agora um elemento ser constituído por duas fases sólidas de material (reveja-se a figura 4.1), torna-se necessário criar uma segunda matriz de rigidez para esse mesmo elemento, mas agora tendo em conta a existência de um segundo tensor da elasticidade para o material 2, $E_{ijkl}^{(2)}$. O cálculo desta matriz de rigidez para o material 2 foi adicionado à subrotina ESTIFO, onde o programa já calculava a matriz de rigidez do elemento para uma única fase sólida de material isotrópico. Dito isto, o processo de assemblagem deve agora ter em conta que um elemento pode ter a contribuição de dois materiais e, por conseguinte, a matriz de rigidez desse mesmo elemento é calculada a partir da interpolação das matrizes de rigidez associadas aos materiais 1 e 2. A escrita desta equação é em tudo semelhante à apresentada no subcapítulo 4.2, equação (4.1), e corresponde a uma lei de interpolação baseada no método SIMP:

$$\mathbf{K}_e(\rho_1, \rho_2) = (\rho_1)^{p_1} [(\rho_2)^{p_2} \mathbf{K}^+ + (1 - (\rho_2)^{p_2}) \mathbf{K}^-] \quad (6.5)$$

onde \mathbf{K}^+ e \mathbf{K}^- representam a matriz de rigidez de um elemento considerando que este é constituído unicamente pelo material 1 e 2, respetivamente. Note-se que a implementação do método SIMP na matriz de rigidez oferece a possibilidade de calcular \mathbf{K}^+ e \mathbf{K}^- uma única vez. Como em otimização topológica se trabalha com elementos finitos quadriláteros, todos eles iguais, não faria sentido estar a calcular tantas matrizes de rigidez quanto o número de elementos da malha se todos eles são iguais. Sendo as propriedades de elemento para elemento diferentes, isto é, a cada elemento corresponde um \mathbf{E} calculado através de (4.1), consegue evitar-se todo o custo computacional associado ao cálculo de várias matrizes de rigidez. Uma vez calculadas as matrizes de rigidez dos dois materiais diferentes, \mathbf{K}^+ e \mathbf{K}^- , faz-se uma interpolação entre elas alterando-se apenas o valor da densidade e obtém-se um \mathbf{K}_e resultante que é posteriormente atribuído a cada elemento.

Por fim, grande parte do cálculo de sensibilidades apresentado no Capítulo 5, com exceção da função de penalização, foi implementado na subrotina STRESS. A derivada do volume

efetivo da estrutura (contemplando a existência de regiões de vazio), equação (5.36), é igual ao volume de cada elemento e, portanto, a sua implementação é trivial. A derivada da *compliance* ou da energia elástica de deformação também não requer grande descrição. A sua implementação resultou de um aproveitamento da estrutura do código, nomeadamente das linhas correspondentes ao cálculo da *total strain energy of the elastic body*, às quais se acrescentou apenas a derivada do tensor da elasticidade definido por (4.1) em ordem a $\tilde{\rho}_{1,i}$ e $\tilde{\rho}_{2,i}$. Já o cálculo da sensibilidade da tensão foi realizado com recurso ao método adjunto, método esse que teve de ser implementado de raiz no código original. Portanto, na subrotina STRESS acrescentou-se uma instrução *CALL* que chama a subrotina ADJSEQ onde foi implementado o método adjunto. Em poucas palavras, o cálculo de (5.15) efetua-se da seguinte forma: na subrotina STRESS o programa calcula a parte explícita, $\partial\sigma_e^{VM}/\partial\tilde{\rho}$, e o vetor de carga fictícia, $\partial\sigma_e^{VM}/\partial\mathbf{u}$. Os resultados são posteriormente enviados para a subrotina ADJSEQ, situada dentro da subrotina STRESS. Nesta subrotina são resolvidos os problemas adjuntos dados por (5.17) e finaliza-se o cálculo da parte implícita, à qual falta ainda calcular o termo $\left[\frac{d\mathbf{f}}{d\tilde{\rho}} - \frac{d\mathbf{K}}{d\tilde{\rho}}\mathbf{u}\right]$. De salientar que esta subrotina é constituída por dois ciclos, um ciclo exterior que percorre todos os constrangimentos e outro ciclo interior que percorre todas as variáveis de densidade.

Um dos grandes desafios desta dissertação era a implementação do cálculo da sensibilidade da tensão através do método adjunto. Não deixa de ser importante sublinhar que houve uma enorme quantidade de tempo despendido para esta finalidade. Para o efeito, convida-se o leitor a consultar o Anexo C, onde se estabelece uma comparação entre resultados obtidos pelo método adjunto e diferenças finitas, por forma a validar a correta implementação do método adjunto.

6.4 Programa main para realização do módulo de otimização

O algoritmo desenvolvido para resolver o problema (4.9) está resumido no fluxograma da figura 6.2. A inicialização atribui valores iniciais a ρ que são seguidamente filtrados para obter $\tilde{\rho}$. Os cálculos das sensibilidades da *compliance* (5.11), do volume (5.36) e da tensão (5.15) em ordem a $\tilde{\rho}$ são efetuados dentro do programa FEM 2D. No caso da tensão, este cálculo é particularmente efetuado através do método adjunto. São posteriormente preparados a função objetivo (4.9) e constrangimentos (4.10) - (4.13) e efetuado o respetivo cálculo da sua sensibilidade em ordem a $\tilde{\rho}$ e z . É testado um critério de convergência (número de iterações, alteração do *design*). Se este não for satisfeito, continua o processo de otimização. Através do *density filter grad* calcula-se a sensibilidade dos constrangimentos em ordem a ρ . Por fim, o MMA atualiza o ρ e aplica-se novamente o filtro de densidades antes de uma nova análise ser realizada através do FEM 2D. O novo $\tilde{\rho}$ é então calculado e o ciclo das iterações termina com um teste de convergência do *design*.

No contexto da otimização, o grande número de constrangimentos de tensão em (4.10) torna o otimizador (MMA) num *bottleneck* importante na presente dissertação quando este é executado totalmente em série, o que pode desencorajar o seu uso. Portanto, é utilizada aqui uma versão paralelizada do MMA que foi proposta em [112] que fornece acelerações relevantes quando são tratados muitos constrangimentos.

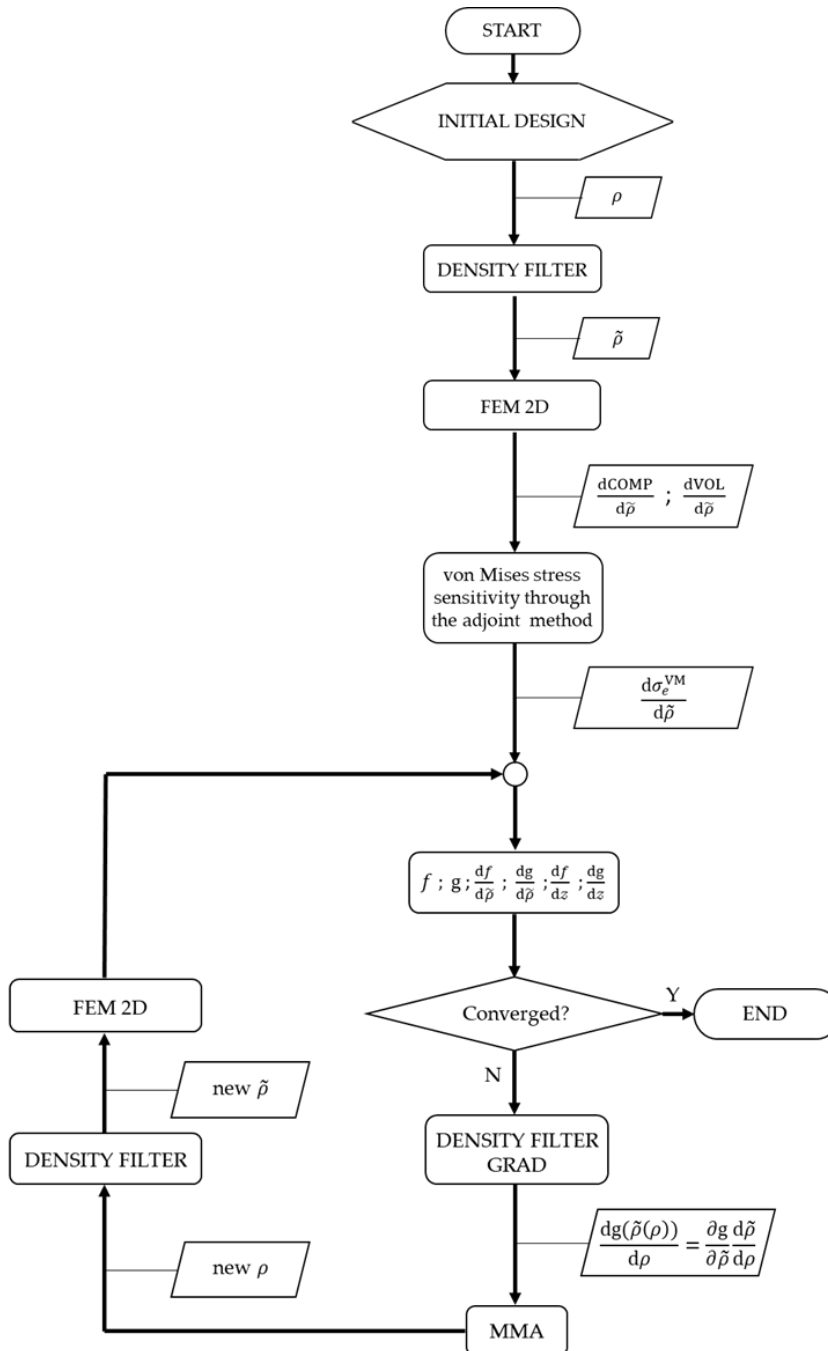


Figura 6.2: Fluxograma do algoritmo desenvolvido para o problema de otimização topológica baseado na tensão definido em (4.9).


RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo apresenta-se a aplicação da metodologia desenvolvida a três *benchmarks*: (1) placa com furo sujeita a um carregamento hidrostático; (2) placa com furo sujeita a corte puro; e (3) *MBB-beam*. Nestes três casos de estudo teve-se em conta a lei de interpolação entre dois materiais sólidos isotrópicos definida em (4.1). Lembra-se que esta lei baseada no método SIMP, devido à escolha dos valores dos expoentes de penalização mencionados no Capítulo 4, contempla a possível mistura entre os materiais escolhidos, sendo que a propriedade resultante dessa mistura se encontra dentro dos limites de HS. A distribuição desta mistura de materiais (FGM) ao longo das estruturas, em particular junto de zonas onde existe concentração de tensões, dá origem a melhores níveis de tensão.

O código em linguagem FORTRAN descrito no capítulo anterior é exclusivo desta dissertação. Esclarece-se o leitor que o código corre num único ambiente de programação compilado através do *software Microsoft Visual Studio*. Tal não acontecia, por exemplo, no trabalho de Pinto [37] que utiliza o ANSYS® em modo *batch* para fazer a análise de elementos finitos, o que resulta em maiores erros numéricos. A utilização do programa FEM 2D substitui assim o ANSYS®, possibilitando não só correr o código isoladamente, mas também a realização do cálculo de todas as sensibilidades necessárias. Os dados de *input* e todas as malhas de elementos finitos são elaborados através de um ficheiro de texto em linguagem APDL. A visualização das soluções de *design* é efetuada com recurso à interface gráfica do ANSYS®. O otimizador é o MMA e é utilizado o filtro de densidades.

As fases de material sólido (rígida e flexível) selecionadas para os exemplos que se seguem estão indicadas na tabela 7.1 [112]. De notar que, por simplificação, o valor do rácio $E/E_{aço}$ é utilizado como um dado dos problemas para E em unidades de [GPa]. Assume-se que ambos os materiais apresentam um coeficiente de Poisson igual a 0.3.

Tabela 7.1: Propriedades do aço (sólido rígido) e alumínio (sólido flexível).

Material	Cor	E [GPa]	$E/E_{aço}$
Aço		200	1
Alumínio		68	0.34

A escolha da discretização da malha de elementos finitos para os diferentes problemas teve por base os seguintes aspetos: (1) ser possível identificar uma topologia; (2) custo computacional razoável; (3) fornecer soluções de *design* ótimas que evidenciem melhorias significativas face à solução ótima de *design single-material*; (4) funcionar como prova de conceito.

De sublinhar que o elemento finito utilizado é o elemento quadrilátero isoparamétrico de 8 nós, Q8. Este elemento eleva a complexidade dos cálculos relativamente ao elemento finito quadrilátero isoparamétrico de 4 nós, Q4, pois possui mais graus de liberdade. Porém, ao possuir funções de forma mais enriquecidas, evita o problema da retenção ao corte. Este último surge do facto de o elemento Q4 possuir uma rigidez artificial e não se conseguir deformar corretamente face à existência de um momento fletor considerável.

Por fim, este capítulo é delineado de forma sequencial, onde se trata separadamente as *benchmarks* escolhidas. Resolve-se, para cada uma, o problema de minimização clássico da *compliance* sujeito a um constrangimento de fração volúmica e o problema de minimização do pico de tensão definido por (4.9), considerando para ambos somente o material de base mais rígido. O problema (4.9) é depois novamente resolvido, mas agora no contexto MMTO. Em particular, sem fases discretas de material e considerando a mistura das frações volúmicas dos materiais de base (FGM). Os resultados obtidos para este último caso são posteriormente comparados com os resultados obtidos no problema de minimização do pico de tensão em *single-material*. A apresentação dos resultados é efetuada tirando partido da simetria dos problemas.

7.1 Placa com furo sujeita a um carregamento hidrostático

7.1.1 Malha de elementos finitos

A malha de elementos finitos utilizada para resolver este caso não é tarefa fácil de obter. Note-se que, dada a complexidade do elemento Q8, a correspondência entre uma tensão distribuída ao longo de uma das arestas da placa e as forças concentradas nos nós dos elementos não é trivial (ver Anexo A), pelo menos em comparação com o elemento Q4. Para este último, a aplicação de uma tensão distribuída unitária é tão simples como aplicar duas forças concentradas nos nós extremos da aresta em questão no valor de 1/2. Para o efeito, foi desenvolvido um código APDL capaz de gerar malhas quadradas e que aplica, mediante a discretização da malha pretendida, as forças concentradas correspondentes a uma tensão de tração distribuída unitária em unidades de [MPa]. A malha é discretizada em elementos Q8, *Plane183* no ANSYS®. Informa-se que as forças concentradas nos nós de uma das arestas de cada um dos elementos de uma malha quadrada $n_x \times n_y$, sendo n_x o número de elementos segundo x e n_y o número de elementos segundo y e com $n_x = n_y$ porque a malha é quadrada, estão esquematizadas na figura 7.1. O valor 10^6 serve para as tensões virem em unidades de [MPa]. O fator multiplicativo 2 no terceiro nó é resultado de somar as forças concentradas entre nós partilhados de elementos adjacentes.

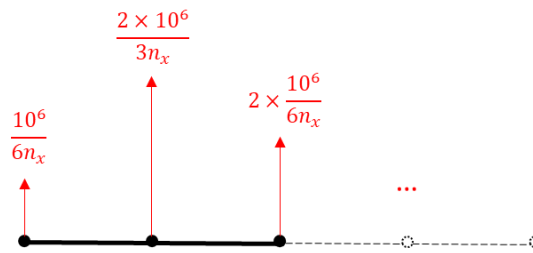


Figura 7.1: Forças concentradas nos nós de uma aresta de um elemento Q8, presente na discretização $n_x \times n_y$ de um quarto de placa quadrada de dimensões unitárias, e que simula uma tensão distribuída unitária de 1 MPa.

Tendo em conta a simetria do problema, modelou-se apenas um quarto da placa, permitindo assim uma maior discretização da malha de elementos finitos. As forças aplicadas nos nós dos elementos são as indicadas na figura 7.1. Para este exemplo, utilizaram-se as três discretizações seguintes para a malha quadrada: 30×30 , 40×40 e 50×50 . O objetivo da utilização destas malhas será perceber quanto é que o seu o refinamento consegue melhorar o resultado final tanto em termos de *design* como de valor da tensão. Na figura 7.2 apresenta-se a modelação de um quarto de placa através de uma malha de elementos finitos discretizada em 30×30 elementos. Note-se que as correspondentes forças concentradas nos nós dos elementos equivalem a aplicar uma tensão distribuída unitária de 1 MPa nas respetivas arestas da placa.

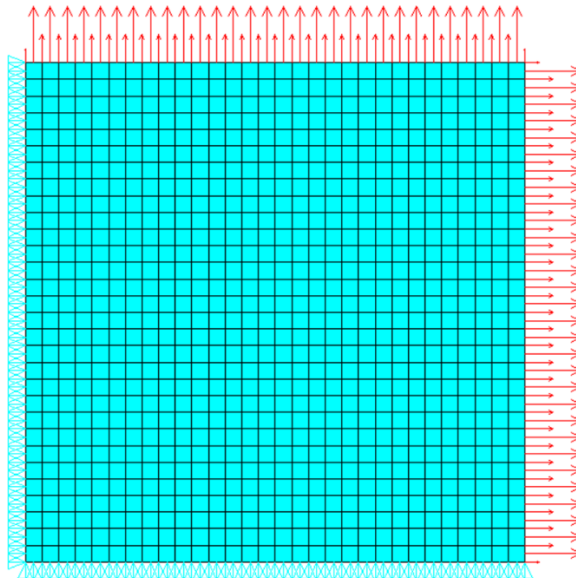


Figura 7.2: Modelação em elementos finitos de um quarto de uma placa sujeita a um carregamento hidrostático utilizando o elemento Q8.

7.1.2 Design inicial

Usualmente e em bom rigor, o ponto de partida de um dado problema de otimização topológica não deve favorecer a solução ótima desse mesmo problema desde o início. No entanto, qualquer engenheiro que trabalhe nesta área da otimização não se pode contentar com uma única corrida, pois uma variação do *design* inicial ou dos parâmetros de otimização pode levar a soluções de *design* diferentes. Assim, cada corrida efetuada com diferentes *designs* iniciais ou parâmetros leva a uma melhor compreensão da tendência que o algoritmo tem para chegar à solução final, não deixando de ser boa prática eventualmente facilitar-lhe o caminho. Com vista a escapar a mínimos locais, o *design* inicial deste exemplo da placa contempla recursos que ajudam o algoritmo a chegar a um *design* final melhor de um ponto de vista da otimalidade em vez de utilizar um ponto de partida do espaço de projeto mais habitual. Importa mencionar também que a não introdução de uma inclusão de baixa densidade no *design* inicial da placa leva a que o algoritmo de otimização não consiga encontrar nenhuma direção de pesquisa e progredir na procura do ótimo. Por exemplo, ao resolver-se o problema clássico de minimização da *compliance* utilizando um *design* inicial homogéneo (sem inclusão), o campo de tensão é constante ao longo da placa, pois esta é discretizada numa malha regular onde todos os elementos são iguais. Tratando-se de um carregamento hidrostático, a tensão é constante e igual em todos os elementos. Inevitavelmente, não existe qualquer alteração do gradiente da função energia e a solução final é simplesmente um domínio de projeto cheio de “cinzentos”.

Uma característica de qualquer *design* inicial que é ideal para a carga hidrostática é fácil de identificar, na medida em que este deve possuir uma simetria quadrada. A escolha mais imediata para este *design* é a de um domínio homogéneo com uma inclusão em quarto de círculo no canto inferior esquerdo (só se modelou um quarto da placa), ver figura 7.3. Este tipo de *design* vai provocar uma perturbação no gradiente das funções a minimizar (seja a energia ou a tensão) e possibilitar o algoritmo de encontrar direções de pesquisa em busca do ponto ótimo. De facto, é realmente necessário baixar a densidade junto da zona onde o algoritmo encontraria o furo, caso contrário este não consegue chegar à topologia conhecida na teoria. Tipicamente, a densidade da região abrangida pela inclusão, representada a azul na figura 7.3, deve tomar valores de densidade $\rho_1 \in [0.001; 0.5]$. Note-se que para o caso FGMTO utilizou-se ρ_2 constante, $\rho_2 = 0.5$.

De salientar que, para efeitos de comparação com resultados teóricos, se teve em consideração a utilização de uma fração volúmica suficientemente elevada, como por exemplo 90%, deixando somente uma pequena região do domínio de projeto disponível para porosidades, neste caso 10%. Tal mais se aproxima da hipótese de furo em placa “infinita”, onde as tensões se consideram aplicadas no infinito.

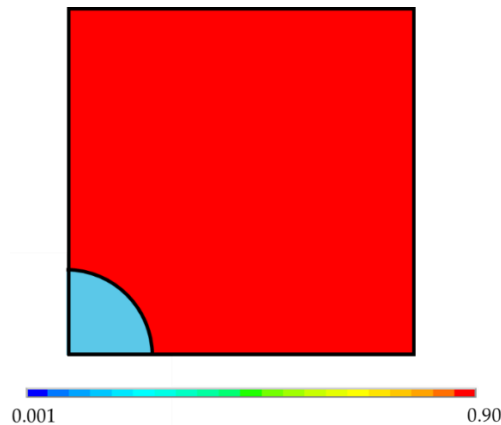


Figura 7.3: Campo de densidade inicial para o caso da placa sujeita a um carregamento hidrostático com uma fração volúmica de 90%.

7.1.3 Minimização da compliance com constrangimento de volume

Neste subcapítulo, são apresentados os resultados que advêm da resolução do problema clássico de minimização da *compliance* considerando um único constrangimento de fração volúmica. Note-se que a necessidade de resolver primeiro este problema tem que ver com o facto de ser preciso definir um valor limite para o constrangimento de *compliance* utilizado na formulação de minimização do pico de tensão. Sem o constrangimento de *compliance*, o algoritmo cairia na solução trivial, não existir estrutura. A figura 7.4 ilustra as soluções ótimas obtidas utilizando diferentes discretizações da malha, colocando-se a distribuição do módulo de Young à esquerda e a distribuição da tensão de von Mises à direita. Na tabela 7.2 apresentam-se os respetivos valores da *compliance* e da tensão máxima de von Mises para cada uma das soluções mostradas na figura 7.4. As topologias obtidas correspondem, naturalmente, às previstas por Vigdergauz ao nível microestrutural para um estado plano de tensão e um único material [131]. No entanto, aqui estas soluções são obtidas ao nível macroestrutural.

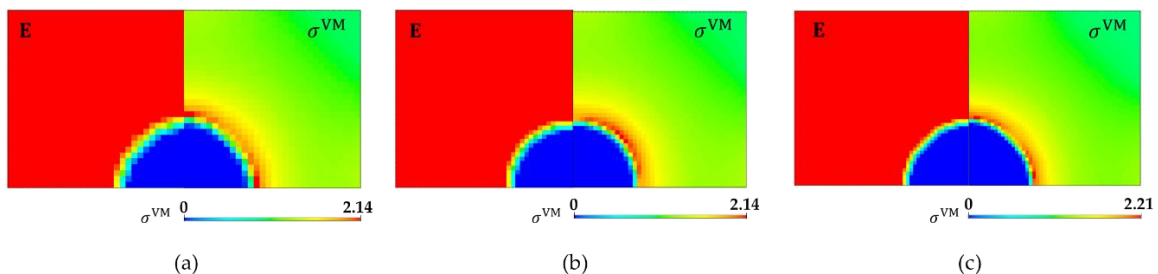


Figura 7.4: Resultados SMTO para o problema de minimização da *compliance* utilizando um carregamento hidrostático e com diferentes discretizações da malha: (a) 30×30 , (b) 40×40 e (c) 50×50 . O valor mínimo e máximo da tensão nos *designs* estão indicados na escala a cores.

Salientam-se os seguintes aspetos: (1) utilizou-se um filtro de densidades, que tem um efeito de suavização na distribuição da tensão associada a um contorno curvo, por forma a

evitar o aparecimento de degraus que gerem singularidades na tensão; (2) a escala da tensão inclui o zero porque se está a incluir a fase de vazio; (3) utilizou-se um raio de filtragem de 1.99, ou seja, a estrutura de vizinhança apenas tem em conta os vizinhos imediatamente adjacentes.

Sabe-se que as soluções microestruturais de Vigdergauz satisfazem o princípio *Equi-Stress* [132] onde a tensão tangencial ao longo da fronteira livre do furo é constante e igual a [131, 136]:

$$\sigma_t|_{\Gamma} = \frac{\text{Tr}(\langle \sigma_{ij} \rangle)}{V_f} \quad (7.1)$$

onde $\langle \sigma_{ij} \rangle$ é o tensor das tensões macroscópico médio aplicado e V_f é o valor da fração volúmica utilizada compreendido entre 0 e 1. Essencialmente, as formas *equi-stress* de um furo existem em planos infinitos e são fornecidas por um carregamento desviador remoto relativamente pequeno. Esta condição *equi-stress* encontra a forma ótima do furo tal que a *compliance* e a concentração de tensões sejam minimizadas. Posto isto, o valor teórico mínimo do pico de tensão que existe junto da fronteira do furo presente nas topologias da figura 7.4, $\sigma_{\max}^{\text{teo.}} = \sigma_t|_{\Gamma}$, pode ser aproximado através do cálculo de (7.1). Relembra-se que a equação (7.1) foi introduzida por Vigdergauz para o cálculo da tensão máxima presente numa microestrutura com furos periódicos, o que não corresponde exatamente ao presente caso. Note-se que a equação (7.1) não fornece o resultado teórico exato para o problema de uma placa única, finita, e sem condições de periodicidade. No entanto, e como em otimização topológica é vulgar trabalhar-se com frações volúmicas de material, ao estar a considerar-se uma fração volúmica suficientemente elevada, o resultado obtido por otimização topológica para este caso da placa converge para (7.1), sendo o resultado teórico proveniente desta equação tomado como referência daqui para a frente.

Tipicamente, para os problemas em que existe um resultado teórico, é habitual utilizar-se medidores de erro para avaliar a otimalidade da solução obtida. Neste caso, optou-se por se utilizar o erro relativo, $\delta^{\text{err.}}$, do pico de tensão obtido, $\sigma_{\max}^{\text{VM}}$, em relação ao valor teórico conhecido, $\sigma_{\max}^{\text{teo.}}$.

$$\delta^{\text{err.}} = \left| \frac{\sigma_{\max}^{\text{VM}} - \sigma_{\max}^{\text{teo.}}}{\sigma_{\max}^{\text{teo.}}} \right| \quad (7.2)$$

No entanto, há que ressaltar que o valor do pico de tensão que aqui é obtido resulta de um procedimento numérico. Como tal, está sujeito aos efeitos da discretização da malha e a erros numéricos, podendo culminar numa subestimação do valor real do pico de tensão.

O cálculo de (7.1) para o presente caso é rápido de efetuar. Note-se que o traço do tensor das tensões macroscópico é simplesmente igual a $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 1 + 1 = 2$ MPa. Daqui resulta,

para uma fração volúmica de 90%, um valor teórico mínimo da tensão máxima de von Mises de $\sigma_{\max}^{\text{teo.}} = 2.22$ MPa.

Tabela 7.2: Valores de *compliance* [J] e do pico de tensão [MPa] para os resultados SMTO mostrados na figura 7.4.

	Discretização da malha		
	30 × 30	40 × 40	50 × 50
C	965	955	949
$\sigma_{\max}^{\text{VM}}$	2.14	2.14	2.21
$\delta^{\text{err.}}$ [%]	3.60	3.60	0.45

Em relação aos resultados SMTO presentes na tabela 7.2, pode observar-se que o pico de tensão na placa é muito próximo do valor teórico no caso de se considerar uma discretização de 50 × 50 elementos, com um erro relativo baixo de 0.45%. Para além disso, verifica-se que, mesmo para uma malha mais refinada de 50 × 50 elementos, a tensão não se distribui uniformemente ao longo do contorno do furo, que é o resultado previsto pela teoria, embora se observe uma melhoria considerável quando se compararam as discretizações 30 × 30 e 50 × 50 da figura 7.4. Contudo, é junto da fronteira do furo que se situa o valor máximo da tensão de von Mises, resultado esse que é consistente com a teoria.

7.1.4 Minimização do pico de tensão com um só material

Os resultados SMTO para o problema de minimização do pico de tensão servem como referência para fins comparativos com o problema de minimização do pico de tensão FGMTO. Na figura 7.5 e na tabela 7.3 podem observar-se os resultados obtidos, os quais podem comparar-se desde já com os obtidos no subcapítulo anterior. Mais uma vez, à esquerda tem-se a distribuição do módulo de Young e à direita a distribuição da tensão de von Mises.

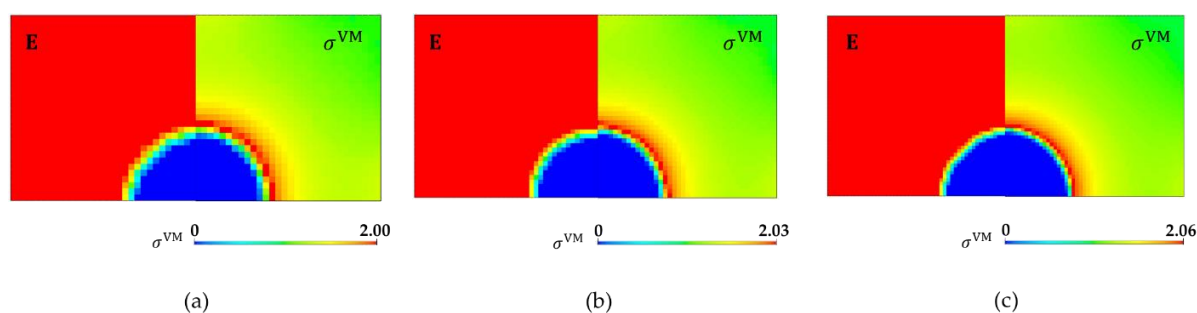


Figura 7.5: Resultados SMTO para o problema de minimização do pico de tensão utilizando um carregamento hidrostático e com diferentes discretizações da malha: (a) 30 × 30, (b) 40 × 40 e (c) 50 × 50.

Tabela 7.3: Valores de *compliance* [J] retirados do problema clássico (na verdade aumentados aqui em 0,1%), que servem como limite para o constrangimento de *compliance*, e do pico de tensão [MPa] para os resultados SMTO mostrados na figura 7.5.

	Discretização da malha		
	30 × 30	40 × 40	50 × 50
C	965	955	949
$\sigma_{\max}^{\text{VM}}$	2.00	2.03	2.06
$\delta^{\text{err.}}$ [%]	9,91	8,56	7,77

Em primeiro lugar, destaca-se imediatamente o facto de os *designs* ótimos encontrados pela via da formulação clássica e pela via da formulação com tensão, em SMTO, serem exatamente os mesmos, ou seja, os *designs* mais rígidos e mais resistentes são coincidentes aqui. De facto, através da formulação com tensão obtém-se uma distribuição de tensão aparentemente mais uniforme ao longo do contorno do furo do que através da formulação com *compliance*. Portanto, claramente que se constata que a formulação baseada na tensão é mais adequada para encontrar furos *equi-stress* em comparação com a formulação baseada na *compliance*, até como já se demonstrou em [79, 112]. Importa mencionar que a *compliance* é uma função bastante plana e insensível a mudanças locais de tensão, sendo que tal explica a não uniformidade da tensão vista na figura 7.4. Utilizando a formulação com tensão, o algoritmo não consegue chegar mais ao valor teórico mínimo do pico de tensão de 2.22 MPa, mesmo utilizando uma malha mais refinada com 50 × 50 elementos. Tal facto resulta de aplicar uma folga, embora pequena, no valor limite do constrangimento de *compliance*. Esta folga leva ao aparecimento de mais zonas de “cinzento” e, conseqüentemente, a uma maior redução do valor máximo da tensão de von Mises. De referir que estes resultados estão em concordância com a literatura [79].

Em segundo lugar, é relevante mencionar algumas estratégias utilizadas nesta formulação e que permitiram uma melhor convergência do algoritmo. Por um lado, a utilização de *designs* iniciais que exibem uma inclusão circular embutida num material homogéneo fictício obtido através de densidades intermédias (revisite-se a figura 7.3). Por outro lado, recorre-se também ao uso da estratégia *continuation approach*, primeiramente aplicada ao valor limite da *compliance*, C^* . Este é relaxado o suficiente durante as primeiras iterações de *design* para garantir a viabilidade do *design* inicial, na medida em que vai diminuindo gradualmente para o valor de C do problema de minimização da *compliance* (ligeiramente incrementado em 0,1%). Em adição, a variável z é impedida de diminuir muito rapidamente por motivos de uma convergência mais estável (ALBEFA = 0,995 no MMA [7]). Também é utilizada uma estratégia *active-set constraint* [79, 112] para reduzir o tempo de corrida que apenas envia para o MMA os constrangimentos de tensão (da análise de tensão atual) cujo valor está acima de um valor de limite, diga-se $> 0.50 \times$ tensão limite. Portanto, conectando este limite e o ALBEFA utiliza-se

uma *continuation approach* onde, à medida que as iterações de *design* vão progredindo, inicialmente o ALBEFA diminui gradualmente de 0.995 até 0.5. Seguidamente, o limite mencionado acima, que decide quais os constrangimentos de tensão são enviados para o otimizador, aumenta de 0.5 para 0.75. Não obstante, este *active-set constraint*, apesar de se mostrar útil nos problemas SMTO de minimização do pico de tensão, torna-se discutível na formulação FGMT0, pois o *design* move-se progressivamente para um *fully stress design*.

7.1.5 Minimização do pico de tensão com FGM

Os resultados FGMT0 estão ilustrados na figura 7.7 e na tabela 7.4 sumarizam-se os respectivos valores de *compliance* e pico de tensão, expandindo-se assim os estudos anteriores na redução da concentração de tensões. Podem destacar-se quatro quadrantes: o primeiro dedica-se à distribuição do campo da tensão de von Mises; o segundo mostra a distribuição do módulo de Young; o terceiro ilustra a distribuição do campo de densidades ρ_1 ; e o quarto representa a distribuição do campo de densidades ρ_2 . A partir destes resultados, consegue observar-se uma distribuição ótima do módulo de Young tal que é obtido um estado de tensão total (*fully stress design*). A título de demonstração, admite-se que a *compliance* pode ser agravada em 40% em relação ao limite anterior, C^* . Para além disso, podem agora encontrar-se furos extra nestes novos *layouts* e que resultam num uso mais eficiente dos recursos materiais no que diz respeito à redução da tensão. A abertura do furo no canto superior direito de ambas as imagens presentes na figura 7.7, é conseguida através da utilização do *design* inicial representado na figura 7.6. Tal *design* inicial é obtido correndo o algoritmo inúmeras vezes e tirando partido das suas escolhas durante o processo de otimização. O valor de densidade escolhido para a nova inclusão pertence ao intervalo $\rho_1 \in [0.001; 0.5]$ e não tem necessariamente de ser igual ao da inclusão inicial, representada no canto inferior esquerdo.

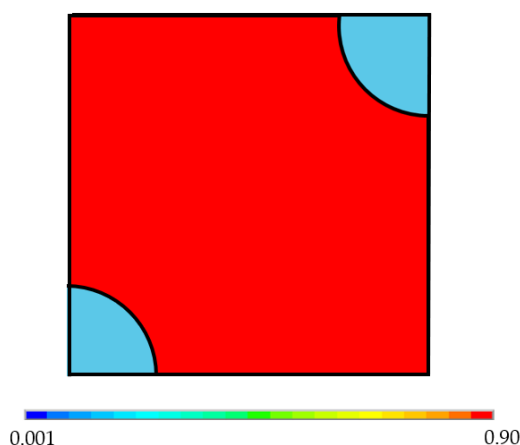


Figura 7.6: Campo de densidade inicial para o problema FGMT0 utilizando um carregamento hidrostático.

Tabela 7.4: Valores de *compliance* [J] e tensão [MPa] para os *designs* FGMTO mostrados na figura 7.7 utilizando um carregamento hidrostático e considerando duas discretizações da malha de elementos finitos.

		Discretização da malha	
		30 × 30	40 × 40
FGMTO	C	1351	1337
	σ_{\max}^{VM}	1.30	1.31
δ [%]		-35	-35.5

Na tabela 7.4, o δ pode ser interpretado como uma medida em percentagem de quanto os *designs* FGM são mitigados em termos de tensão face aos *designs* de um único material (SMTO). Tal como se consegue depreender, são alcançados *designs* com reduções de tensão significativas à custa destes se aproximarem de *fully stressed designs*, ver os mapas de tensão da figura 7.7. Existem soluções microestruturais semelhantes na literatura [112]. É importante mencionar também que todos estes resultados, em termos de *compliance*, tocam no limite C^* .

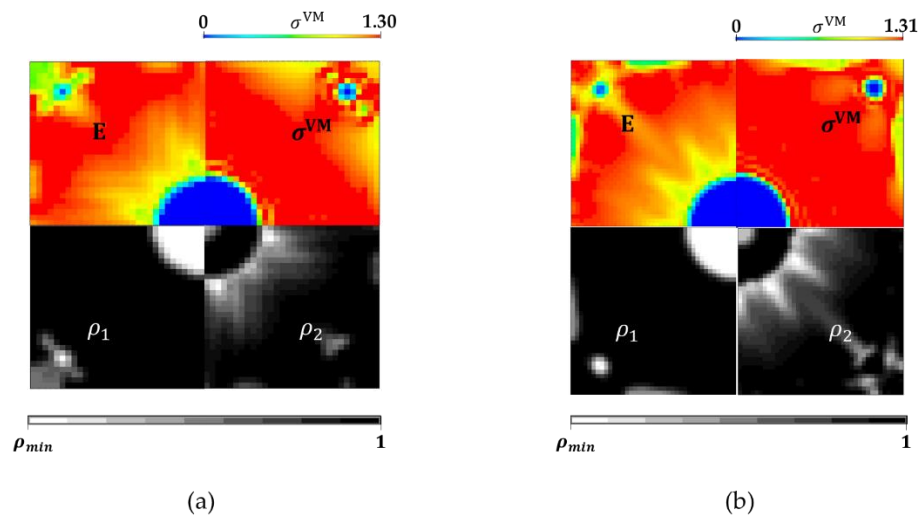


Figura 7.7: *Designs* ótimos para o problema de minimização do pico de tensão em FGM utilizando um carregamento hidrostático e considerando duas discretizações da malha: (a) 30 × 30, (b) 40 × 40.

Mais uma vez, com vista a evitar problemas de convergência, aplicou-se uma *continuation approach* durante as primeiras iterações nos parâmetros ALBEFA do MMA [7] (0.995 → 0.5) e no valor limite do constrangimento de *compliance*, tal como mencionado anteriormente. Neste caso, adicionou-se ainda mais uma *continuation approach* no parâmetro ζ_1 do constrangimento de penalização dos valores intermédios de ρ_1 . Sem dúvida, não é fácil eliminar as densidades intermédias porque os “cinzentos” dão origem a menores valores de tensão. Portanto, para eliminar tais “cinzentos”, é necessário penalizar os valores intermédios de ρ_1 através de (4.13). A escolha de um valor adequado para ζ_1 é difícil e requer que se corra o algoritmo inúmeras vezes. Por um lado, ζ_1 tem de ser um valor suficientemente elevado para gerar a

abertura de novos furos, mas, por outro lado, tem de ser um valor tal que o algoritmo construa o FGM à conta dos valores de ρ_2 e não envie os “cinzentos” para a variável ρ_1 , a qual deve unicamente ser constituída por 0 e 1. Quanto menor for o valor de ζ_1 , mais difícil se torna a convergência do algoritmo.

Analisando com maior detalhe os resultados da figura 7.7, é interessante perceber que o algoritmo opta sempre por nunca colocar a fase pura de alumínio ($\rho_1 = 1 \cap \rho_2 = 0$), escolhendo sempre ou a fase mais rígida ou a mistura (FGM). Denota-se que existe uma grande quantidade de FGM que é colocado em torno do furo central, criando uma distribuição gradual do módulo de Young. Podem observar-se soluções parecidas em [79, 112]. A abertura do novo furo no canto superior direito torna as soluções obtidas inovadoras, destoando-as tanto das soluções obtidas anteriormente para SMTO e das obtidas nas referências anteriores. Sabe-se que uma das formas de aliviar tensões é justamente à custa de abrir novos furos nas estruturas, sendo esse o papel da abertura deste novo furo. Outro aspeto relevante tem a ver com o facto de o algoritmo, servindo-se de uma malha 30×30 (ver Fig 7.7a), não conseguir fechar o domínio de material em torno do furo que abre no canto superior direito da placa, deixando uma mancha de “cinzentos”. Tal já não acontece com uma malha de 40×40 elementos, observe-se a Fig 7.7b. A alocação de uma camada FGM em torno do novo furo era expectável. Veja-se que a abertura deste furo também gera, por si só, outro pico de tensão, contudo menor face ao que existia em SMTO. Ressalva-se também que o aumento da *compliance*, neste caso piorada em 40% em relação aos resultados SMTO, não pode ser excessivo sob o risco de originar estruturas desconexas e problemas de convergência. Por fim, a não utilização da malha 50×50 elementos no caso FGMT0 prende-se essencialmente com o elevado custo computacional associado, pois note-se que o número de variáveis de projeto duplicou em comparação com a abordagem *single-material*. Em última análise, importa referir dois pontos. Por um lado, que a solução ótima trivial seria não existir estrutura. Por outro lado, que as novas topologias obtidas continuam, obviamente, a ser simétricas, em particular, simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares dado que apenas se modelou um quarto da placa.

7.2 Placa com furo sujeita ao corte puro

7.2.1 Malha de elementos finitos

À semelhança da malha de elementos finitos gerada para o caso da placa sujeita a um carregamento hidrostático, também para o caso da placa sujeita ao corte puro foi desenvolvido um código APDL idêntico. Este último é capaz de gerar uma malha quadrada e aplicar uma tensão distribuída de 1 MPa ao longo das arestas da placa em concordância com a discretização escolhida. A colocação da placa ao corte puro corresponde a multiplicar as forças aplicadas na aresta superior da placa da figura 7.2, com os valores indicados na figura 7.1, por -1. Como é evidente, também se modelou apenas um quarto da placa para este caso e consideraram-se as

discretizações 30×30 e 40×40 . A figura 7.8 contém a ilustração da malha de elementos finitos 30×30 criada para este exemplo, sendo as suas dimensões, novamente, unitárias.

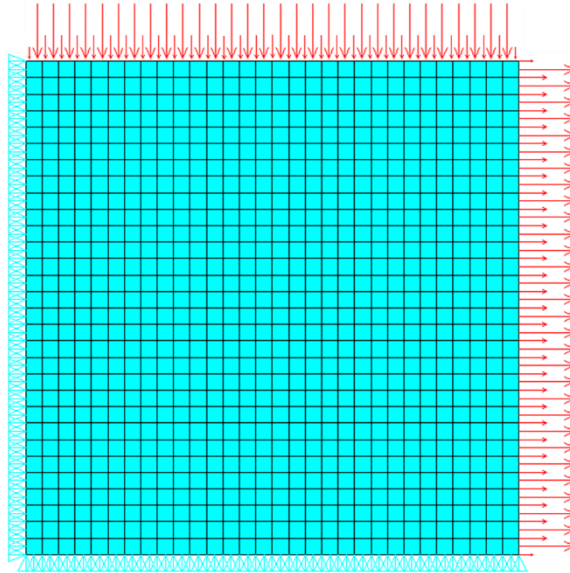


Figura 7.8: Modelação em elementos finitos de um quarto de uma placa sujeita ao corte puro utilizando o elemento Q8.

7.2.2 Design inicial

A ideia inicial para abordar o problema do corte puro era utilizar um *design* inicial homogéneo com um furo quadrado no canto inferior esquerdo. Inclusive, sabe-se que a forma ótica do furo para o problema de minimização da *compliance* de uma placa infinita sujeita ao corte puro é um quadrado com arestas arredondadas [133]. Contudo, não foi necessário partir-se de um *design* inicial com estas características, pois o algoritmo mostrou-se consistente na obtenção de um furo quadrado partindo de um *design* inicial igual ao da figura 7.3. Refira-se também que foi utilizado um limite para o constrangimento de fração volúmica V_f^* igual a 90%.

O procedimento de utilizar inclusões que perturbem o campo de densidades, na medida em que este deixa de ser uniforme, e que façam variar os gradientes das funções ajudam o algoritmo a conseguir progredir no processo de otimização e encontrar diferentes direções de pesquisa em busca do ponto ótico. Note-se que, para ambos os casos da placa, a criação deste tipo de *design* inicial é sempre necessário, senão o algoritmo não consegue chegar a outra topologia ótica que não a de um domínio totalmente preenchido com densidades intermédias (“cinzentos”).

7.2.3 Minimização da compliance com constrangimento de volume

Surpreendentemente, a resolução do problema de minimização da *compliance* para o caso placa sujeita a um carregamento de corte revelou afastar-se do resultado previsto teoricamente obtido por otimização de forma [101, 130, 133]. Tendo por base estes trabalhos, a expectativa seria obter uma topologia constituída por único furo central na placa (neste caso, no canto inferior esquerdo), onde a forma ideal desse furo conseguisse renderizar um quadrado com cantos vivos e arestas levemente arredondadas (o famoso quadrilátero curvo). À microescala, este é o resultado que minimiza quer a *compliance* como a tensão máxima de von Mises. Como é óbvio, a otimização topológica não está interessada na forma ótima do furo, pelo que esse também não seria o principal foco. Porém, mostrou-se surpreendente o aparecimento de mais rasgos, com a forma de quadriláteros, junto das arestas da placa em vez de um único furo no canto inferior esquerdo, como aconteceu por exemplo no caso anterior da placa sujeita a um carregamento hidrostático ou por otimização de forma em [130]. A figura 7.9 ilustra as topologias obtidas para o problema SMTO de minimização da *compliance* para as duas discretizações mencionadas de antemão.

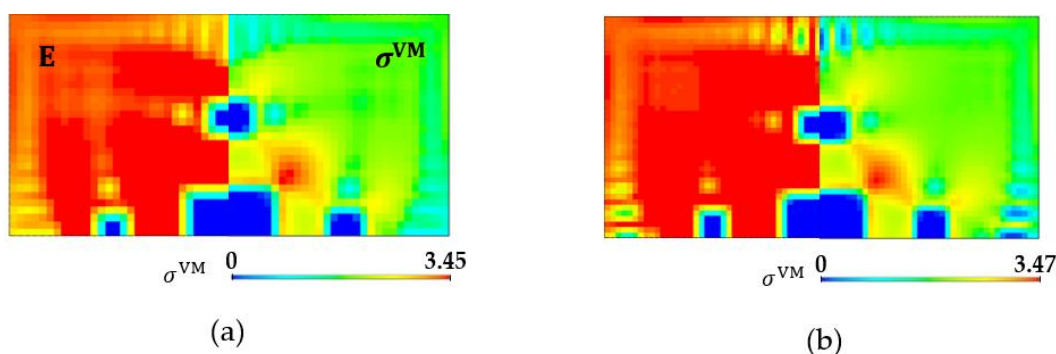


Figura 7.9: Resultados SMTO para o problema de minimização da *compliance* utilizando um carregamento de corte e com diferentes discretizações da malha: (a) 30×30 , (b) 40×40 . O valor mínimo e máximo da tensão nos *designs* estão indicados na escala a cores.

Por observação dos resultados, percebe-se que a simetria não é perdida e que o algoritmo tende a abrir tanto mais furos quanto mais refinada é a malha. A existência de zonas de “cinzentos” correspondem a potenciais regiões onde o algoritmo quer abrir mais furos, o que se vem a comprovar com o refinamento da malha na figura 7.9b, onde já é possível constatar a abertura de pequenos furos junto dos cantos superior direito e inferior esquerdo da placa. Todos os furos têm efetivamente a forma de quadriláteros. Em adição, salienta-se que os furos não apresentam cantos afiados dada a aplicação do filtro de densidades que suaviza a sua forma. A teoria mostra que o pico de tensão aparece limitado a um vértice do furo central [130], o que claramente é observado em ambas as figuras presentes em 7.9. Não obstante, os furos finos adicionais são aparentemente bem definidos para a discretização utilizada e os seus limites são suaves o suficiente para que não surjam singularidades na tensão.

A obtenção destes resultados requereu a utilização de uma *continuation approach* no raio de filtragem. Verificou-se que sem ela o algoritmo tendia a abrir ainda mais furos, tal como se pode observar na figura 7.10. Naturalmente, sabe-se que a abertura de novos furos favorece a tensão, mas em contrapartida piora o valor da *compliance* (avaliada em 1873 J na solução da Fig. 7.10) que é o objetivo do problema de otimização neste momento. Nos exemplos da figura 7.9, o raio de filtragem vai gradualmente diminuindo desde 3.99 até 1.99 durante as primeiras 70 iterações. O expoente de penalização do método SIMP é mantido constante e igual a 4.

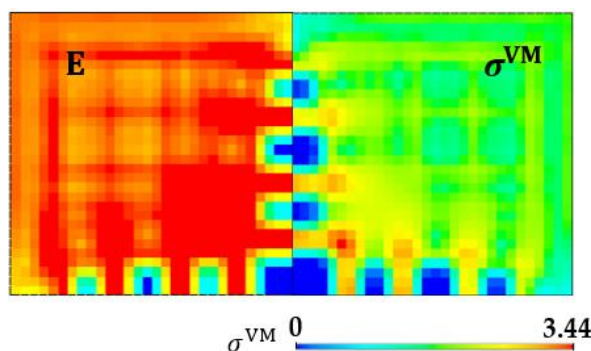


Figura 7.10: Resultado SMTO para o problema de minimização da *compliance* e considerando corte puro para uma malha quadrada discretizada em 30×30 elementos sem recorrer a uma *continuation approach* no raio de filtragem.

Finalmente, na tabela 7.5 estão registados os valores de *compliance* e pico de tensão obtidos para o problema de minimização da *compliance* e cujas topologias estão ilustradas na figura 7.9.

Tabela 7.5: Valores de *compliance* [J] e do pico de tensão [MPa] para os resultados SMTO mostrados na figura 7.9.

	Discretização da malha	
	30×30	40×40
C	1840	1807
$\sigma_{\max}^{\text{VM}}$	3.45	3.47

7.2.4 Minimização do pico de tensão com um só material

Os *designs* obtidos para o problema SMTO de minimização do pico de tensão estão representados na figura 7.11. Fica claro que, mesmo utilizando uma formulação diferente, os *designs* ótimos deste problema e do problema clássico de minimização da *compliance* são claramente muito semelhantes. Interessantemente, também aqui o campo de tensão é caracterizado por ter apenas um pico de tensão relevante no domínio de material situado num dos vértices do furo quadrado central.

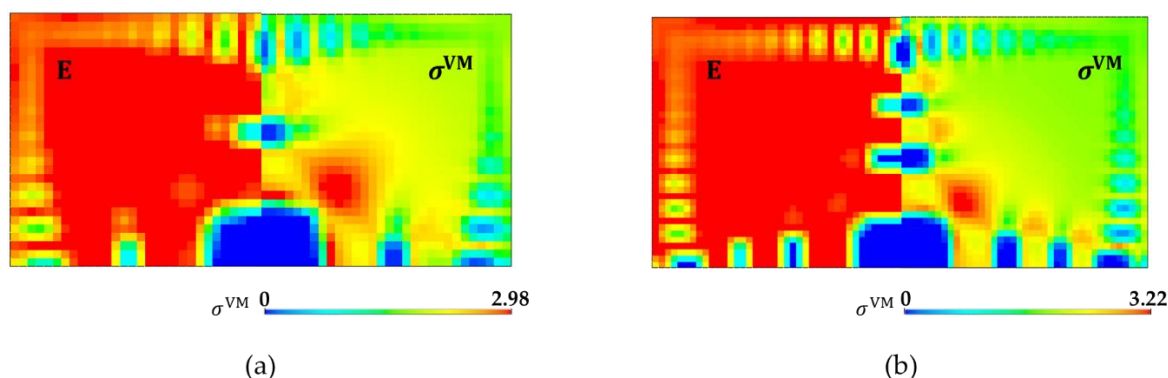


Figura 7.11: Resultados SMTO para o problema de minimização do pico de tensão utilizando um carregamento de corte e com diferentes discretizações da malha: (a) 30×30 , (b) 40×40 .

A constatação imediata é a obtenção de *designs* praticamente iguais aos obtidos no subcapítulo anterior. Neste caso, o campo de tensão, embora não uniforme, distribui-se de uma forma muito mais suave ao longo da placa comparativamente aos casos anteriores. Inevitavelmente, a tendência de o algoritmo abrir mais furos torna-se mais evidente agora. Note-se que o objetivo é minimizar o pico de tensão que, como se observou anteriormente, também é conseguido à custa de abrir novos furos. Mais uma vez, na malha de 40×40 elementos, o algoritmo abre um número de furos superior ao número de furos presentes na malha 30×30 . Note-se que as formas dos furos periódicos, à parte do furo central, estão em concordância com as formas dos furos no problema da *compliance*. Novamente, observa-se um único pico de tensão relevante junto do vértice do furo central. Em todos os *designs*, verifica-se que a simetria nunca é perdida. Por outro lado, as estratégias mencionadas no subcapítulo 7.1.4 perpetuam-se para este exemplo pelo que não serão novamente discutidas.

Os resultados *single-material* para o problema de minimização do pico de tensão estão exibidos na tabela 7.6. Como seria de esperar, os *designs* obtidos são melhores de um ponto de vista do pico da tensão equivalente do que os *designs* ótimos resultantes do problema de minimização da *compliance*. No entanto, estes valores de tensão são sempre discutíveis dada a adequabilidade das malhas escolhidas, as quais têm obviamente de corresponder a um tempo de corrida razoável, e devido à folga atribuída ao valor limite do constrangimento de *compliance*, que gera naturalmente valores de tensão mais baixos.

Tabela 7.6: Valores de *compliance* [J] retirados do problema clássico (aumentados aqui em 0,1%), que servem como limite para o constrangimento de *compliance*, e do pico de tensão [MPa] para os resultados SMTO mostrados na figura 7.11.

	Discretização da malha	
	30×30	40×40
C	1840	1807
$\sigma_{\max}^{\text{VM}}$	2.98	3.22

7.2.5 Minimização do pico de tensão com FGM

A figura 7.12 exibe os resultados FGMTO para o caso do carregamento de corte. A tabela 7.7 resume os valores obtidos de *compliance* e pico de tensão e quanto é que este último é reduzido (δ) à custa da introdução do FGM. A apresentação dos resultados é semelhante à discutida no subcapítulo 7.1.5 dada a conveniência de utilizar a simetria dos *designs*. O *layout* ótimo encontrado aqui difere em alguns aspetos do resultado obtido na resolução do problema de minimização do pico de tensão em SMTO, onde este tipicamente exibia um furo quadrado no centro com outras pequenas ranhuras paralelas às suas bordas. O algoritmo obtém agora soluções onde remove material perto das bordas da placa (abertura de novos furos), não encontrando aparentemente tantos furos paralelos aos lados do furo central.

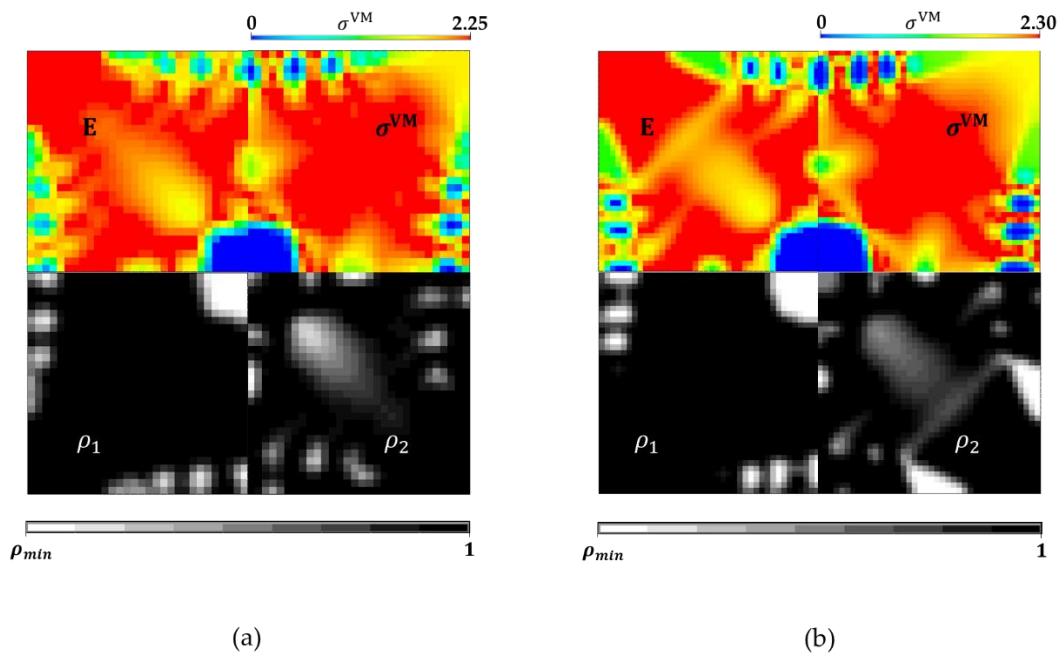


Figura 7.12: *Designs* ótimos para o problema de minimização do pico de tensão em FGM utilizando um carregamento de corte e considerando duas discretizações da malha: (a) 30×30 , (b) 40×40 .

Tabela 7.7: Valores de *compliance* [J] e tensão [MPa] para os *designs* FGMTO mostrados na figura 7.12 utilizando um carregamento de corte e considerando duas discretizações da malha de elementos finitos.

		Discretização da malha	
		30×30	40×40
FGMTO	\mathcal{C}	2576	2440
	$\sigma_{\max}^{\text{VM}}$	2.25	2.30
δ [%]		-24.5	-28.6

Os mapas de tensão na figura 7.12 mostram basicamente uma grande área com o mesmo nível de tensão. A redistribuição de tensões que ocorre quando o problema é abordado com base no FGM aproxima-se de uma solução *fully stress design*, o que é naturalmente expectável na otimalidade. O *design* inicial usado neste caso (não representado) é semelhante ao da figura 7.6, mas são utilizadas duas inclusões nos cantos superior esquerdo e inferior direito em vez de uma no canto superior direito. São aplicadas as mesmas discretizações que nos subcapítulos 7.2.3 e 7.2.4 e a mesma estratégia em termos de *continuation approach* descrita em 7.1.5.

Detalhando criticamente os resultados observados na figura 7.12, note-se que o algoritmo colocou pela primeira vez a fase pura de alumínio, a qual é notoriamente mais evidente na malha mais refinada. São abertos novos furos junto das bordas da placa pelo algoritmo, sendo sempre preservada a simetria dos *designs*. Adicionalmente, é colocada uma enorme camada de FGM junto do vértice do furo quadrado central que é posteriormente espalhada por grande parte do domínio material. Denote-se a semelhança com resultado obtido no caso da placa sujeita a um carregamento hidrostático. De forma expectável, o algoritmo coloca também FGM em torno dos novos furos. Tais furos estão obviamente associados à criação de novos picos de tensão que, por sinal, são inferiores aos observados no problema SMTO. Na verdade, os resultados presentes na figura 7.12 são impressionantes e originais. Numa tentativa de comparação de soluções, um levantamento da literatura revela resultados à microescala que destoam de alguma forma dos obtidos nesta dissertação à macroescala para um carregamento de corte puro. Por um lado, o trabalho de Coelho *et al.* [101] que se serve de uma formulação com tensão constrangida e utiliza a estratégia de relaxamento *qp-approach*. Por outro lado, o trabalho de Coelho *et al.* [79] que utiliza uma formulação de minimização do pico de tensão em conjunto com a *Bound Formulation*. Em ambos os trabalhos, os autores relatam que os resultados SMTO sugerem uma aproximação às microestruturas extremas *rank2* obtidas por Sigmund [134] onde o campo de tensão se uniformiza nas fases constituintes da microestrutura. Nestas circunstâncias, não se ganha muito com FGMT em relação ao resultado de SMTO. Em contraste, os resultados obtidos para a macroescala revelam que só à custa do FGM é possível uniformizar o campo de tensão para um carregamento de corte, soluções com um pico de tensão naturalmente mais reduzido face às soluções SMTO. A explicação mais imediata é o facto de não existirem as condições de periodicidade que existem ao nível microestrutural. Repare-se que aqui não existe propriamente a repetição de uma célula unitária nem se aplica a teoria da homogeneização. Nestes casos à macroescala, aplicam-se condições de fronteira de tensão aplicada (tração e compressão) nos bordos da placa enquanto à microescala se aplicam condições de fronteira de deslocamento imposto para impor periodicidade.

7.3 MBB-beam

7.3.1 Malha de elementos finitos

Para este exemplo, o domínio de projeto corresponde a um retângulo com 3 metros de comprimento e 1 metro de altura. A discretização utilizada foi de 60×20 elementos. Repetidamente, serviu-se da simetria desta estrutura e modelou-se somente metade. Por isso, existem condições de fronteira de simetria ao longo da aresta esquerda e a estrutura é apoiada horizontalmente no canto inferior direito. Contrariamente ao que acontece em [135], não se aplicou apenas uma carga vertical no canto superior esquerdo nem se serviu de um único apoio horizontal para apoiar a estrutura. Note-se que a aplicação de cargas e apoios pontualmente leva ao aparecimento de regiões de concentração de tensões pontuais que são puramente fictícias e que se afastam da realidade. Desta maneira, em vez de se utilizar uma força e apoio num único nó, distribuíram-se os mesmos ao longo dos restantes nós da aresta do elemento onde estavam aplicados *a priori*, tal como se ilustra na figura 7.13. Naturalmente, isto é justificável porque carregamentos e apoios pontuais são idealizações de cargas distribuídas, as quais traduzem de forma mais correta a realidade. De salientar que as cargas aplicadas no canto superior esquerdo correspondem a aplicar uma tensão distribuída unitária em [MPa]. Para finalizar, chama-se à atenção da escolha do alcance que é utilizado para a distribuição quer da força, quer do apoio. Por exemplo, a distribuição das forças e dos apoios ao longo da aresta de mais do que um elemento pode levar a um alargamento exagerado dos banzos da estrutura.

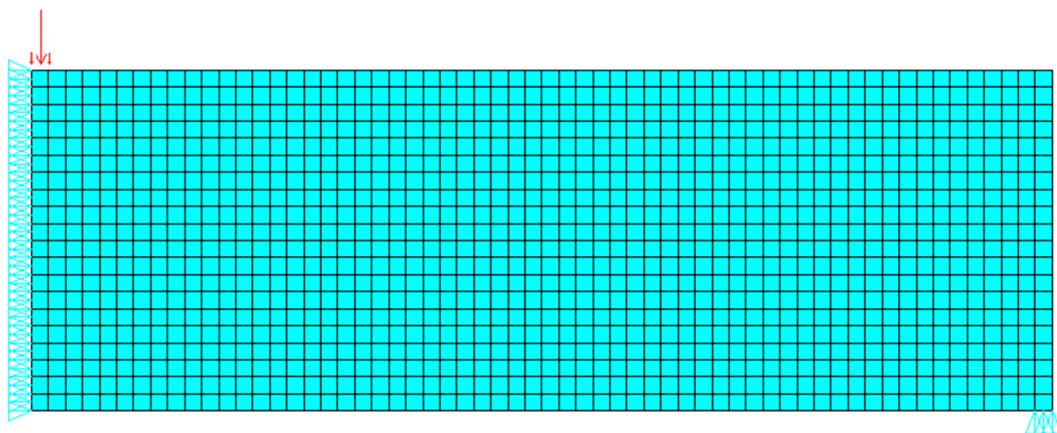


Figura 7.13: Modelação em elementos finitos de metade do *MBB-beam* utilizando o elemento Q8. As forças concentradas no canto superior esquerdo correspondem a uma tensão distribuída de 1 MPa.

7.3.2 Design inicial

No que diz respeito ao *MBB-beam*, o *design* inicial foi muito simples, pois consistiu num campo de densidades uniforme. Aqui não existe qualquer necessidade de perturbar o campo

de densidade porque as condições de fronteira aplicadas conseguem criar um campo de tensão não uniforme ao longo do domínio material. A fração volúmica escolhida foi a mesma que a utilizada em [135] para este mesmo exemplo, correspondendo a 50% do domínio de material. Eventualmente, poder-se-ia utilizar um limite para o constrangimento de fração volúmica superior aos 50%, contudo é necessário ter em conta que se iria perder a topologia ótima conhecida na literatura. Posto isto, especifica-se que o campo de densidade que funcionou como *design* inicial foi $\rho_1 = 0.5$ e, para o caso FGMTO tem-se ainda $\rho_2 = 0.5$.

7.3.3 Minimização da compliance com constrangimento de volume

A solução do problema de minimização da *compliance* em SMTO para o exemplo do *MBB-beam* também está documentada na literatura [135]. O *design* ótimo obtido, representado na figura 7.14, está em concordância com o expectável, tendo sido os resultados ótimos da *compliance* e do pico de tensão de 270.57 J e 1.74 MPa, respetivamente. Na figura 7.14, observam-se nitidamente duas regiões onde ocorrem os maiores valores de tensão. Estas regiões correspondem a pontos de aplicação de cargas ou apoios.

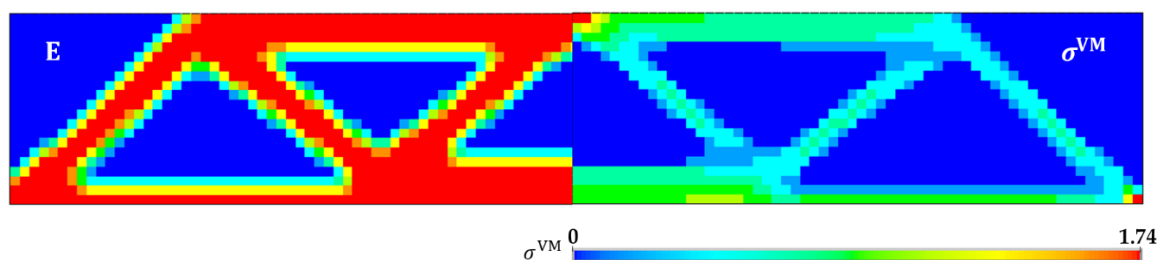


Figura 7.14: Resultado SMTO para o problema de minimização da *compliance* considerando uma malha 60×20 . O valor mínimo e máximo da tensão nos *designs* estão indicados na escala a cores.

A obtenção destes resultados requereu a utilização de duas *continuation approach*, uma no raio de filtragem ($3.99 \rightarrow 1.99$) e outra no expoente de penalização ($1 \rightarrow 4$) durante as primeiras 100 iterações do processo de otimização.

7.3.4 Minimização do pico de tensão com um só material

A figura 7.15 ilustra o *design* ótimo do problema de minimização do pico de tensão para *single-material*. Tal como tem vindo a acontecer até agora, o *design* ótimo que é solução do problema de minimização da *compliance* coincide com o *design* ótimo do problema de minimização do pico de tensão em SMTO. No entanto, com esta formulação obtém-se um pico de tensão que é inferior ao obtido no problema clássico de minimização da *compliance*, resultado esse que também se verifica nos problemas abordados anteriormente e que já foi explicado.

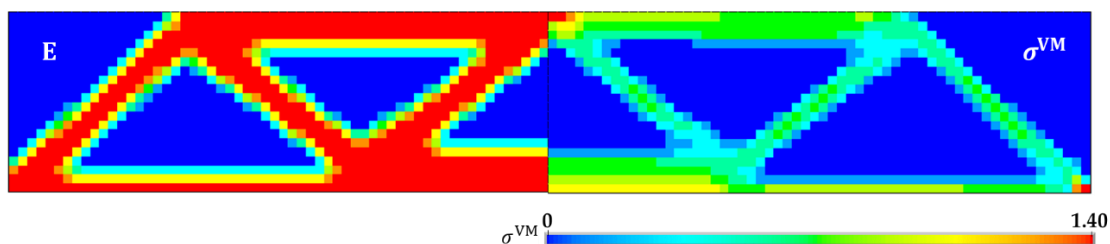


Figura 7.15: Resultado SMTO para o problema de minimização do pico de tensão com uma discretização de 60×20 elementos.

Sem grande surpresa, observam-se dois picos de tensão nas regiões de aplicação da carga e do apoio e uma distribuição do campo de tensão mais suave comparativamente com o resultado SMTO para o problema de minimização da *compliance*. Para este exemplo, utilizou-se um limite C^* para o constrangimento de *compliance* que corresponde a aumentar o valor ótimo obtido em 7.3.3 em 1% para dar alguma folga ao algoritmo e facilitar a sua convergência. São utilizadas as mesmas estratégias de convergência que as mencionadas nos subcapítulos 7.1.4 e 7.2.4 em acréscimo de uma *continuation approach* aplicada ao raio de filtragem, igual à referida no subcapítulo anterior. Por fim, o valor ótimo do pico de tensão para o presente caso pode ser consultado na escala de cores da tensão representada na figura 7.15.

7.3.5 Minimização do pico de tensão com FGM

O resultado FGMTO para o problema do *MBB-beam* pode ser consultado na figura 7.16 e os valores ótimos da *compliance* e pico de tensão (e respetiva redução) estão resumidos na tabela 7.8. A interpretação deve ser a seguinte: no topo visualizam-se as distribuições do módulo de Young e do campo de tensão pelo domínio material; no fundo visualizam-se as distribuições do campo de densidade ρ_1 e ρ_2 , respetivamente. A obtenção deste *design* pressupõe o aumento do limite do constrangimento de *compliance* em 50%.

Tal como seria de esperar, observa-se uma uniformização do campo de tensão à medida que a estrutura se aproxima de um estado de tensão total (topo da figura 7.16), tal que se depreende a ativação quase total dos constrangimentos de tensão. Este estado de tensão mais uniforme é gerado à custa da distribuição do FGM ao longo do domínio de projeto.

Claramente, o algoritmo chega a uma solução ótima que não produziu alterações significativas no *design* à parte de uma distribuição de material que a torna mais resistente. Não obstante, podem destacar-se duas regiões para análise, região 1 e 2, as quais estão assinaladas no topo da figura 7.16 na parte respetiva à distribuição do módulo de Young. Observa-se que o algoritmo rigidifica muito mais a região 2, tornando-a mais espessa, em comparação com a região 1, a qual é nitidamente mais delgada. Note-se que é na região 2 onde estão aplicadas as forças. De forma notória, o algoritmo consegue reduzir o pico de tensão em cerca de 45%.

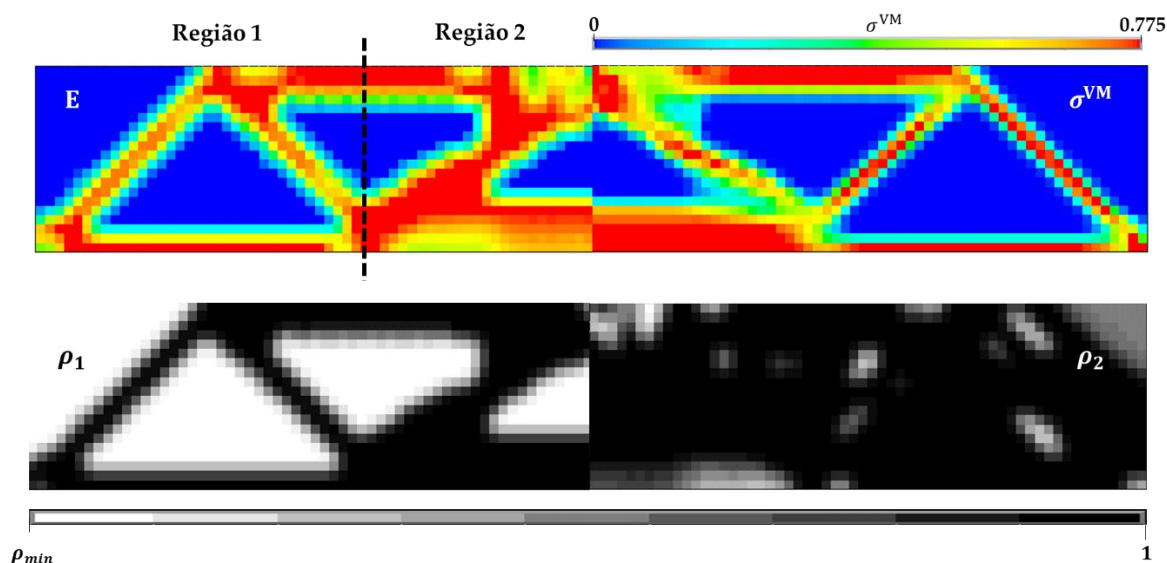


Figura 7.16: *Design* ótimo para o problema de minimização do pico de tensão em FGM. No topo tem-se a distribuição do módulo de Young (à esquerda) e a distribuição do campo de tensão (à direita) e no fundo tem-se a distribuição de ρ_1 (à esquerda) e a distribuição de ρ_2 (à direita). A discretização é de 60×20 elementos.

Tabela 7.8: Valores de *compliance* [J] e tensão [MPa] para os problemas SMTO e FGMTO de minimização do pico de tensão e respetiva comparação de resultados.

	SMTO	FGMTO
C	270	405
$\sigma_{\max}^{\text{VM}}$	1.40	0.775
δ [%]		-44.6

A escolha do *MBB-beam* enquanto *benchmark* torna-se uma escolha interessante porque esta dissertação é a primeira a obter o *design* ótimo desta estrutura em FGM. Para além disso, a análise do *MBB-beam* coloca em evidência a importância de não aplicar carregamentos nem utilizar apoios pontuais aquando da modelação das estruturas em elementos finitos. A experiência adquirida mostra que a utilização de carregamentos e apoios pontuais levam a que o algoritmo não consiga resolver corretamente o problema FGMTO. Dada a criação de picos de tensão locais, o algoritmo revela dificuldade em convergir para uma solução tipo FGM em *fully stress design*. Este problema não se faz notar nos problemas de minimização da *compliance* nem minimização do pico de tensão em SMTO. Por um lado, porque a *compliance* é uma função completamente insensível a mudanças de tensão locais, pelo que lhe é completamente indiferente se os carregamentos e os apoios são pontuais ou distribuídos. Por outro lado, no caso do problema de minimização do pico de tensão em SMTO, porque a convergência do algoritmo para a solução ótima é influenciada pela atribuição do valor ótimo do problema de minimização da *compliance* ao valor limite do constrangimento de *compliance* presente nesta formulação mediante uma folga muito pequena.

CONCLUSÕES E TRABALHOS PARA O FUTURO

8.1 Conclusões

A otimização topológica tem sido extensivamente aplicada no projeto de estruturas constituídas por um único material. Apenas recentemente é que foi estendida a estruturas constituídas por vários materiais considerando ou fases discretas, ou a mistura de fases, a primeira com maior abundância que a segunda. Esta dissertação aparece como um contributo para o avanço científico no que toca à elaboração de uma formulação capaz de resolver problemas de otimização topológica que visam a minimização do pico de tensão em estruturas à macroescala. Esta formulação difere da formulação clássica com tensão, onde tipicamente se minimiza a *compliance* e se impõe constrangimentos de tensão, porque tira partido da mistura de materiais que dão origem a um novo material com gradiente de propriedades, permitindo assim reduções notórias do pico de tensão nas estruturas.

Os principais desafios relacionados com o controlo da tensão em otimização estrutural são a não linearidade, o fenómeno da singularidade e o elevado custo computacional associado à natureza local dos constrangimentos de tensão [100]. A antecipação da influência da tensão nos estágios iniciais do projeto ajuda a alcançar *designs* viáveis mais eficientes no estágio final do desenvolvimento do produto. De facto, a otimização topológica com constrangimentos de tensão é atualmente um tema de pesquisa bastante ativo, pois traz para a fase conceptual do projeto um importante critério de projeto na prática de engenharia que é a tensão admissível. Contudo, trabalhar com tensões admissíveis em materiais com gradiente de funcionalidade torna-se complicado, visto que não é fácil estimar a tensão admissível de misturas de materiais. Assim, optou-se por uma formulação, pouca abordada na literatura, que evita a utilização de tensões admissíveis e que consegue minimizar diretamente a tensão, tirando o melhor partido daquilo que são os materiais com gradiente de funcionalidade (FGMs) e de como estes são excecionais na mitigação de tensões e na uniformização do campo de tensão.

Reconhecendo todos os pontos mencionados no parágrafo anterior, este trabalho é uma contribuição para o estado da arte da otimização topológica de macroestruturas orientadas para serem altamente resistentes. A minimização da tensão máxima de von Mises é explorada e, em função do trabalho desenvolvido em [112], é estendida para a configuração à macroescala multimaterial envolvendo a mistura dos materiais de base para encontrar os benefícios na

mitigação de tensões considerando alguns exemplos de teste. Sem dúvida, sabe-se que a concentração de tensões geralmente preocupa os engenheiros envolvidos na parte do projeto estrutural. Sendo assim, o problema de *design* pode ser convenientemente formulado para minimizar a tensão com constrangimentos de *compliance* e volume. O potencial para minimizar o pico das tensões equivalentes é aumentado considerando soluções de *design* em FGM.

No entanto, é necessário ter em atenção que os problemas min-max levantam problemas de diferenciabilidade. Portanto, para os enfrentar, é utilizada a *Bound Formulation* [123] que não só permite resolver o problema da não diferenciabilidade como também permite tratar as tensões tais como elas são, locais. Claro que aparecerão agora muitos constrangimentos na formulação do problema, mas este trabalho está munido de ferramentas para acelerar o processo de otimização.

Em primeiro lugar, refira-se que a sensibilidade da função tensão foi calculada através do método adjunto. Este método analítico, embora bastante difícil de implementar, constituiu um avanço vantajoso para avaliar a sensibilidade da tensão. Este método permitiu explorar, dentro do possível, a utilização de malhas mais refinadas para o mesmo problema sem ser necessário proceder a qualquer paralelização da análise de sensibilidades da tensão, programada dentro do programa de elementos finitos FEM 2D. De frisar que foi utilizada uma abordagem preliminar onde as derivadas da tensão foram calculadas através de aproximações por diferenças finitas, mostrando que os resultados fornecidos pelo método adjunto eram confiáveis. Em otimização topológica baseada na tensão, este mostra ser o método ideal. Repare-se que numa formulação *single-material* o número de constrangimentos é aproximadamente igual ao número de variáveis de projeto, mas através da utilização de uma metodologia *active set constraint* é possível reduzir significativamente o número de constrangimentos, tornando este método uma escolha perfeita. Para além disso, com a transformação do problema *single-material* num problema *multi-material*, com mistura de fases, o número de variáveis de projeto duplica, mas o número de constrangimentos mantém-se.

Em segundo lugar, denote-se que o problema de otimização é resolvido usando um algoritmo de programação matemática de primeira ordem (MMA), sendo sempre necessário proceder a uma análise de sensibilidades. De referir que o problema se agrava ainda mais quando se utiliza uma abordagem de tensão local. Assim sendo, a maior parte do esforço de computação e armazenamento de dados envolvidos são gastos no cálculo da derivada de primeira ordem dos constrangimentos de tensão e no MMA. A fim de contornar este problema, e como as derivadas dos constrangimentos de tensão podem ser calculadas independentemente, são utilizadas técnicas de computação paralela para reduzir o tempo de cálculo, tal como propostas em [112]. Esta paralelização veio melhorar quantitativamente os tempos de espera porque o otimizador MMA era o principal *bottleneck* de todo o processo de otimização, pois tinha de lidar com centenas ou até milhares de constrangimentos. Os detalhes da paralelização podem ser consultados em apêndice em [112] e não são discriminados aqui por estarem fora do âmbito desta dissertação. Os autores mostram que adicionando algumas linhas extra

de código no MMA original é possível acelerar os cálculos quando são considerados problemas que envolvam muitos constrangimentos.

Portanto, o presente trabalho utiliza a otimização topológica para projetar compósitos avançados (FGMs) onde é procurada uma adequada variação contínua das propriedades do material (mais concretamente, do módulo de Young) que vise a diminuição da tensão máxima na estrutura. Posto isto, é explorado um problema baseado na tensão de tal forma que se otimiza a variação (gradação) das propriedades do material ao longo de todo o domínio contínuo à conta da mistura de dois sólidos isotrópicos. Tal resulta no compósito avançado conhecido como FGM. Na verdade, importa lembrar que variar as propriedades do material através de uma variação das frações volúmicas dos materiais de base não é a única forma de obter um FGM. Este último também pode ser criado variando a microestrutura com a posição, assumindo um material com microarquitetura.

Assim, o problema macroestrutural de minimizar o máximo da tensão de von Mises sujeito a um constrangimento de fração volúmica e *compliance* é resolvido nesta dissertação. De notar que este problema ainda não foi suficientemente coberto em otimização de topologia, tendo poucas contribuições ao nível microestrutural [101, 102] e apenas uma com recurso ao FGM [112], o que motiva ainda mais o presente trabalho. Como é evidente, trabalhar com um constrangimento de energia pode parecer estranho porque um engenheiro quando projeta uma estrutura claramente que não sabe qual o limite de energia que a estrutura terá mediante as exigências que lhe são atribuídas. Na eventualidade de não existir este constrangimento de *compliance*, o melhor para a minimização da tensão significaria uma distribuição uniforme de densidade (provavelmente um valor intermédio para cumprir o requisito de volume) ou até mesmo a ausência de estrutura. Estas soluções triviais são, portanto, inadmissíveis dado que a *compliance* está sempre suficientemente limitada.

A metodologia desenvolvida é numa etapa final testada em três *benchmarks* onde se procurou que pelo menos uma tivesse um resultado analítico que pudesse ser comparado com o resultado numérico. Este aspeto motivou que se abordasse o problema de tensão plana em vez de deformação plana, pois a literatura fornece soluções analíticas considerando o primeiro. A escolha do caso da placa com furo sujeita a um carregamento hidrostático teve os seus fundamentos aqui. Por um lado, é um problema que admite um resultado teórico à microescala [131, 136] que se pode reproduzir à macroescala considerando uma fração volúmica suficientemente elevada. Por outro lado, é um problema que já foi resolvido ao nível microestrutural através da mesma metodologia que a abordada nesta dissertação servindo-se do FGM [112]. Esta *benchmark* permitiu assim ganhar confiança no algoritmo desenvolvido e despistar quaisquer erros na programação.

À parte da correção de erros no código, a literatura existente fornece soluções analíticas de tensão para o caso da placa que ajudam a avaliar a qualidade das soluções numéricas obtidas. Com base em distribuições de referência de tensão [101, 112], concluiu-se que uma formulação baseada na tensão prova ser mais confiável do que a formulação clássica baseada na

compliance, especialmente no que diz respeito à obtenção de furos *equi-stress*. Na prática, a experiência adquirida com o critério local de tensões (avaliadas por elemento) mostra que os resultados são muito sensíveis a pequenas perturbações na forma do contorno do furo enquanto o critério global de *compliance* é bastante insensível. Este ponto motiva ainda mais o uso de uma formulação baseada na tensão.

No que diz respeito ao problema do corte, a macroescala mostra soluções diferentes das soluções obtidas à microescala. De acordo com alguns trabalhos realizados ao nível microestrutural para um carregamento de corte [79, 91], o pico de tensão nas soluções é reduzido à custa da introdução de ranhuras paralelas às arestas do furo central, o que se parecia aproximar das microestruturas extremas obtidas por Sigmund [134]. Tais ranhuras permitiam que a distribuição da tensão equivalente na célula unitária fosse quase uniforme para soluções *single-material*. A aproximação a um estado de tensão total (*fully stress design*) torna a solução de material único ótima de um ponto de vista da tensão, desencorajando o uso do FGM. O estudo do problema de uma placa sujeita a corte puro à macroescala mostra uma uniformização do campo de tensão gerada pelas propriedades funcionais do FGM e pela abertura de furos. A solução deste problema em SMTO não revela qualquer uniformização da tensão apesar da abertura de furos paralelos às arestas do furo central. Em adição, a abordagem deste problema através da formulação com *compliance* revelou soluções completamente novas e distintas das observadas na literatura [101, 130, 133]. Para além do orifício quadrado no centro da placa, o algoritmo encontra mais furos que se estendem ao longo dos bordos da placa e que se tornam mais evidentes com o refinamento da malha.

O *MBB-beam* é uma estrutura que apresenta dois picos de tensão locais. Tais picos estão situados em regiões dos banzos e decorrem da aplicação de cargas ou da utilização de apoios. Em contraste com os casos anteriores da placa, a topologia FGMTO do *MBB-beam* não diferiu muito da topologia obtida em SMTO à parte da alocação de camadas de FGM. Estas camadas são distribuídas pelas zonas críticas onde existem as concentrações de tensões aproximando a solução de um *fully stress design*. Denote-se que esta dissertação é pioneira na obtenção da topologia em FGM desta estrutura.

Como comentários gerais, todos os casos estudados implicam simetria em relação a um ou mais eixos. Assim, foi apenas necessário modelar um quarto nos casos da placa e metade no caso do *MBB-beam* do domínio de projeto, o que permitiu refinar um pouco mais as malhas de elementos finitos. Além disso, são alcançadas boas aproximações a *fully stressed designs* através da formulação FGMTO, que resultaram em níveis de tensão bastante baixos. O limite superior da *compliance* usado em FGMTO aumenta ainda mais, em comparação com SMTO, tal que é dada liberdade suficiente para a gradação de propriedades resultando em maiores benefícios na mitigação de tensões. Outro aspeto a sublinhar é o facto de o campo de tensão ser altamente não linear e fortemente dependente do projeto estrutural. Os níveis de tensão são drasticamente afetados pelas características geométricas locais das fronteiras e, portanto, o método de filtragem de densidade tem um efeito de suavização (benéfico) nas tensões, embora

leve a um contorno menos ténue entre o material sólido e o vazio. Aqui, a questão essencial é a escolha adequada da discretização de elementos finitos para garantir uma avaliação robusta e precisa do campo de tensão preservando um custo computacional razoável.

Para terminar, diga-se que a experiência adquirida mostrou ser proveitoso partir, numa etapa inicial, de *designs* iniciais com bastantes “cinzentos” (densidades intermédias). Este tipo de *designs* favorecem a abertura de novos furos caso o algoritmo os encontre. No entanto, pode acontecer que ainda assim o algoritmo não o consiga fazer com um *design* inicial muito cinzento. Nestas situações, deve proceder-se a uma diminuição da densidade nestas zonas onde ele potencialmente abriria esses novos furos. Por vezes, partir logo de *designs* quase preto e branco pode despistar o algoritmo e fazer com que ele não consiga descobrir mais furos para além dos já existentes no *design* inicial por estar muito estrangido.

8.2 Trabalhos futuros

O presente trabalho deixa portas abertas para novos desenvolvimentos. Refira-se a hipótese de explorar com mais detalhe a otimização topológica para fornecer *designs* com fases de material discretas por simples alteração da lei de interpolação material, tal como foi necessário no caso das soluções FGM (onde é procurada a mistura de fases de dois sólidos homogéneos). A resolução de tal problema ao nível microestrutural [112] mostra que, para uma formulação baseada na tensão, *designs* multimateriais com fases discretas também podem superar os de material único em termos de distribuições favoráveis de tensão. Portanto, seria sempre interessante verificar estas conclusões ao nível macroestrutural. Não obstante, numa abordagem multimaterial com fases discretas, assume-se que as fases de material estão rigidamente ligadas, isto é, a interface entre os materiais é perfeita. Na prática, não existem tais interfaces, sendo que o material compósito atingir a sua tensão de cedência não é a única forma de falha, a delaminação também é um dos modos de falha mais notórios. Sem dúvida, demonstra-se que o FGM consegue aproximar-se muito mais da realidade, mas o objetivo aqui seria provar, ao nível da macroescala, que o FGM consegue fornecer ainda melhores resultados que abordagens com fases discretas (onde se espera maiores dificuldades de convergência). Em adição, alerta-se para a necessidade de adicionar um novo estrangimento à formulação (4.9), que penalize os valores intermédios de $\tilde{\rho}_2$, dada a imposição de um filtro que abre necessariamente uma exceção quanto à presença de “cinzentos” porque este aparecerá sempre na fronteira entre duas fases de material vizinhas, tal como se observa em [112].

A metodologia FGMTTO baseada na densidade que é proposta nesta dissertação tem os seus prós e contras. Embora ofereça uma maior liberdade para capturar eficientemente *layouts* ideais disruptivos, falha na renderização de contornos sólidos bem definidos. No entanto, era proveitoso ver outros métodos de otimização topológica (por exemplo, o *Level-Set Method* [21]) a serem aplicados ao mesmo problema que possivelmente poderá lidar melhor com este tipo de problemas de modelação multimaterial. Não esquecer que o *Level-Set Method* também se

debate com um problema fundamental relacionado com o facto de o *design* final nunca poder ter mais furos que o *design* inicial.

Num futuro próximo, poder-se-ia aplicar esta formulação a outro tipo de *benchmarks* ainda mais complexas. A título de exemplo, sugerem-se a placa sujeita a um carregamento de corte a 45° [101] e o *L-bracket* [130]. De salientar que este último caso implicaria precauções relativamente à utilização do filtro de densidades, o qual foi programado para funcionar em malhas quadradas ou retangulares e não em malhas com um formato em “L”.

Como um desenvolvimento mais exigente para este trabalho, sugere-se a implementação do método da Lagrangiana Aumentada para resolver o problema da tensão. Sabe-se que um dos principais desafios na otimização de topologia baseada na tensão é o grande número de estrangimentos de tensão que têm de existir para evitar a falha do material em cada ponto do domínio de projeto que é avaliado. Note-se que o número de estrangimentos é tão grande quanto o número de elementos finitos da malha. Neste método, a solução de um problema de otimização estrangido é obtida como a solução de uma série de problemas de otimização não estrangidos, cada um visando minimizar a função Lagrangiana Aumentada do problema de otimização original [137, 138]. As vantagens mais diretas que resultam da sua utilização são o facto de o otimizador deixar de ser um *bottleneck* e ser possível resolver problemas com centenas de milhões de estrangimentos [139]. Contudo, continua a ser necessário ter em atenção à forma como certas variáveis de projeto variam, como é o caso da variável artificial z . À data da publicação desta dissertação, não foram encontradas publicações onde o problema de otimização min-max baseado na tensão fosse resolvido através deste método.

Outro desenvolvimento interessante seria estender este trabalho, realizado no âmbito da resolução do problema da elasticidade, para incluir o problema da termoelasticidade onde, para além do efeito da carga mecânica, se teria em conta o efeito da temperatura.

Para finalizar, e no decorrer de alguma pesquisa, também se pode colocar a hipótese de utilizar outro otimizador que não o MMA. Para o efeito, sugere-se o experimento do otimizador IBM ILOG CPLEX. Este último tem a capacidade de resolver, entre outras, mas as mais importantes neste contexto, programação matemática e programação estrangida, mostrando-se muito útil para problemas altamente estrangidos. Contudo, funcionando como uma “caixa preta”, isto é, não existe propriamente um acesso ao seu código fonte, levanta-se a questão de como seria possível controlar a descida da variável artificial z no início do processo de otimização. Para mais informação, consultar [140].

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. C. Maxwell, "On reciprocal figures, frames and diagrams of forces", *Sci Pap.*, vol. 2, pp. 175-177, 1890. [DOI:10.1017/S0080456800026351](https://doi.org/10.1017/S0080456800026351).
- [2] A. G. M. Mitchell, "The limit of economy of material in frame structures", *Philosophical Mag.*, vol. 6, pp. 589-597, 1904. [DOI:10.1080/14786440409463229](https://doi.org/10.1080/14786440409463229).
- [3] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations", *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 49, pp. 1-23, 1943. [DOI:10.1090/S0002-9904-1943-07818-4](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1943-07818-4).
- [4] R. W. Clough, "The finite element method in plane stress analysis", *J. Struct. Div. ASCE, Proc. 2nd Conf. Electron. Comput.*, pp. 345-378, 1960.
- [5] L. A. Schmit, "Structural design by systematic synthesis", in *Proceedings: 2nd Conference on Electronic Computation*, pp. 105-132, 1960.
- [6] K. Schittkowski, "NLPQL: A fortran subroutine solving constrained nonlinear programming problems", *Ann. Oper. Res.*, vol. 5, no. 1-4, pp. 485-500, 1986. [DOI:10.1007/BF02739235](https://doi.org/10.1007/BF02739235).
- [7] K. Svanberg, "The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 24, no. 2, pp. 359-373, 1987. [DOI:10.1002/nme.1620240207](https://doi.org/10.1002/nme.1620240207).
- [8] F. Glover, "Future paths for integer programming and links to artificial intelligence," *Comput. Oper. Res.*, vol. 13, no. 5, pp. 533-549, 1986. [DOI:10.1016/0305-0548\(86\)90048-1](https://doi.org/10.1016/0305-0548(86)90048-1).
- [9] A. Francavilla and C. V. Ramakrishnan, "Optimization of shape to minimize stress concentration", *Strain. Anal. Eng. Des.*, vol. 10, pp. 63-70, 1975. [DOI:10.1243/03093247V102063](https://doi.org/10.1243/03093247V102063).
- [10] R. T. Haftka and R. V. Grandhi, "Structural shape optimization - A survey", 1 ed., *Appl. Mech. Eng.*, vol. 57, pp. 91-106, 1986. [DOI:10.1016/0045-7825\(86\)90072-1](https://doi.org/10.1016/0045-7825(86)90072-1).
- [11] W. S. Dorn, R. E. Gomory and H. J. Greenberg, "Automatic design of optimal structures", *J. Mech.*, vol. 3, pp. 25-52, 1964.
- [12] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi, "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 71, pp. 197-224, 1988. [DOI:10.1016/0045-7825\(88\)90086-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90086-2).

- [13] J. M. Guedes and N. Kikuchi, "Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 83, no. 2, pp. 143–198, 1990. [DOI:10.1016/0045-7825\(90\)90148-F](https://doi.org/10.1016/0045-7825(90)90148-F).
- [14] L. Krog, A. Tucker, M. Kemp and R. Boyd, "Topology Optimization of Aircraft Wing Box Ribs", *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, 2004. [DOI:10.2514/6.2004-4481](https://doi.org/10.2514/6.2004-4481).
- [15] J.-H. Zhu, W.-H. Zhang and L. Xia, "Topology Optimization in Aircraft and Aerospace Structures Design", *Arch. Comput. Methods Eng.*, vol. 23, n. 4, pp. 595–622, 2016. [DOI:10.1007/s11831-015-9151-2](https://doi.org/10.1007/s11831-015-9151-2).
- [16] A. Remouchamps, M. Bruyneel, C. Fleury and S. Grihon, "Application of a bi-level scheme including topology optimization to the design of an aircraft pylon", *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 44, n. 6, pp. 739–750, 2011. [DOI:10.1007/S00158-011-0682-3](https://doi.org/10.1007/S00158-011-0682-3).
- [17] M. P. Bendsøe, "Optimal shape design as a material distribution problem", *Struct. Optim.*, vol. 1, no. 4, pp. 193–202, 1989. [DOI:10.1007/BF01650949](https://doi.org/10.1007/BF01650949).
- [18] O. Sigmund and K. Maute, "Topology optimization approaches", *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 48, n. 6, pp. 1031–1055, 2013. [DOI:10.1007/s00158-013-0978-6](https://doi.org/10.1007/s00158-013-0978-6).
- [19] M. Stolpe e K. Svanberg, "An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization", *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 22, n. 2, pp. 116–124, 2001. [DOI:10.1007/s001580100129](https://doi.org/10.1007/s001580100129).
- [20] G. Allaire, F. Jouve, and A.-M. Toader, "Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method", *J. Comput. Phys.*, vol. 194, n. 1, pp. 363–393, 2004. [DOI:10.1016/j.jcp.2003.09.032](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.09.032).
- [21] M. Y. Wang, X. Wang, and D. Guo, "A level set method for structural topology optimization", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 192, n. 1–2, pp. 227–246, 2003. [DOI:10.1016/S0045-7825\(02\)00559-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00559-5).
- [22] M. Y. Wang, X. Wang, "A level-set based variational method for design and optimization of heterogeneous objects", *Computer-Aided Design*, vol.37, pp. 321-337, 2005. [DOI:10.1016/j.cad.2004.03.007](https://doi.org/10.1016/j.cad.2004.03.007).
- [23] B. Bourdin and A. Chambolle, "Design-dependent loads in topology optimization", *ESAIM Control. Optim. Calc. Var.*, vol. 9, pp. 19–48, 2003. [DOI:10.1051/cocv:2002070](https://doi.org/10.1051/cocv:2002070).
- [24] B. Bourdin and A. Chambolle, "The Phase-Field Method in Optimal Design", *Solid Mechanics and its Applications*, vol. 137, pp. 207-215, 2006. [DOI:10.1007/1-4020-4752-5_21](https://doi.org/10.1007/1-4020-4752-5_21).
- [25] M. P. Bendsøe and O. Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, 2 ed., Springer Berlin Heidelberg, 2004. [DOI:10.1007/978-3-662-05086-6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-05086-6).
- [26] M. P. Bendsøe and O. Sigmund, "Material interpolation schemes in topology optimization.", *Arch Appl Mech*, vol. 69, pp. 635-654, 1999. [DOI:10.1007/s004190050248](https://doi.org/10.1007/s004190050248).

- [27] M. Y. Wang and X. Wang, "Color level sets: a multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 193, n. 6–8, pp. 469–496, 2004. [DOI: 10.1016/j.cma.2003.10.008](https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.10.008).
- [28] K. Svanberg, "On local and global minima in structural optimization", *New Dir. Optim. Struct. Des.*, pp. 327–341, 1984.
- [29] D. Li e I. Y. Kim, "Multi-material topology optimization for practical lightweight design", *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 58, n. 3, pp. 1081–1094, 2018. [DOI:10.1007/s00158-018-1953-z](https://doi.org/10.1007/s00158-018-1953-z).
- [30] S. Lu, H. Ma, L. Xin and W. Zuo, "Lightweight design of bus frames from multi-material topology optimization to cross-sectional size optimization", *Eng. Optim.*, vol. 51, n. 6, pp. 961–977, 2019. [DOI:10.1080/0305215X.2018.1506770](https://doi.org/10.1080/0305215X.2018.1506770).
- [31] C. Li and I. Y. Kim, "Multi-material topology optimization for automotive design problems," *Proc IMechE Part D: J Automobile Engineering*, 2017. [DOI: 10.1177/0954407017737901](https://doi.org/10.1177/0954407017737901).
- [32] C. F. Hvejsel and E. S. Lund, "Material interpolation schemes for unified topology and multi-material optimization", *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 43, n. 6, pp. 811–825, 2011. [DOI:10.1007/s00158-011-0625-z](https://doi.org/10.1007/s00158-011-0625-z).
- [33] O. Sigmund and S. Torquato, "Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method", *Mech. Phys. Solids*, vol. 45, n. 6, pp. 1037–1067, 1997. [DOI:10.1016/S0022-5096\(96\)00114-7](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(96)00114-7).
- [34] L. V. Gibiansky and O. Sigmund, "Multiphase composites with extremal bulk modulus", *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 48, n. 3, pp. 461–498, 2000. [DOI:10.1016/S0022-5096\(99\)00043-5](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00043-5).
- [35] E. Lund and J. Stegmann, "On structural optimization of composite shell structures using a discrete constitutive parametrization", *Wind Energy*, vol. 8, n. 1, pp. 109–124, 2005. [DOI:10.1002/we.132](https://doi.org/10.1002/we.132).
- [36] J. Stegmann and E. Lund, "Discrete material optimization of general composite shell structures", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 62, n. 14, pp. 2009–2027, 2005. [DOI:10.1002/nme.1259](https://doi.org/10.1002/nme.1259).
- [37] J. Pinto, "Otimização topológica multimaterial de estruturas com critérios de rigidez massa e custo", Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, 2021.
- [38] E. D. Sanders, M.A. Aguiló and G.H. Paulino, "Multi-material continuum topology optimization with arbitrary volume and mass constraints", *Comput Methods Appl Mech Eng.*, vol. 340, pp. 798–823, 2018. [DOI: 10.1016/j.cma.2018.01.032](https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.032).
- [39] C. Woischwill and I.Y. Kim, "Multi-material multi-joint topology optimization", *Int J Numer Methods Eng.*, vol. 115, n. 13, pp.1552–1579, 2018. [DOI:10.1002/nme.5908](https://doi.org/10.1002/nme.5908).
- [40] G. J. Kennedy and T.W. Chin, "A sequential convex optimization method for multimaterial compliance design problems", *Comput Struct.*, vol. 212, pp. 110–124, 2019. [DOI:10.1016/j.compstruc.2018.10.007](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.10.007).

- [41] W. Zuo and K. Saitou, "Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 55, no. 2, pp. 477–491, 2017. [DOI:10.1007/s00158-016-1513-3](https://doi.org/10.1007/s00158-016-1513-3).
- [42] Y. Jung, S. Lim, J. Kim and S. Min, "Lightweight design of electric bus roof structure using multi-material topology optimisation", *Struct Multidiscip Optim.*, vol. 61, n. 3, pp.1273–1285, 2020. [DOI: 10.1007/s00158-019-02410-8](https://doi.org/10.1007/s00158-019-02410-8).
- [43] K. Long, X. Wang and X. Gu, "Local optimum in multi-material topology optimization and solution by reciprocal variables", *Struct Multidiscip Optim.*, vol. 57, n. 3, pp. 1283–1295, 2018. [DOI:10.1007/s00158-017-1811-4](https://doi.org/10.1007/s00158-017-1811-4).
- [44] T. M. L. Pratas, "Otimização topológica multimaterial de estruturas reticuladas com restringimentos de tensão", Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, 2019.
- [45] C. Almeida, "Projeto de estruturas reticuladas leves e resistentes utilizando variáveis de área e de seleção de material," Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, 2020.
- [46] T. Hirano, J. Teraki and T. Yamada, "On the design of functionally gradient materials", in *Proceedings: The First International Symposium*, 1990.
- [47] T. Hirai and L. Chen, "Recent and Prospective Development of Functionally Graded Materials in Japan", *Materials Science Forum*, vol. 308–311, pp. 509–514, 1999. [DOI: 10.4028/www.scientific.net/msf.308-311.509](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.308-311.509).
- [48] M. Koizumi, "FGM activities in Japan", *Composites Part B: Engineering*, vol. 28, pp. 1-4, 1997. [DOI:10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9).
- [49] K. Tsuda, A. Ikegaya, K. Isobe, N. Kitagawa and T. Nomura, "Development of Functionally Graded Sintered Hard Materials", *Powder Metallurgy*, vol.39, no. 4, pp. 296-300, 1996. [DOI:10.1179/pom.1996.39.4.296](https://doi.org/10.1179/pom.1996.39.4.296).
- [50] D. Gao, N. Ruan and W. Xing, *Advances in Global Optimization*, 1 ed., *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2015.
- [51] A. Radman X. Hang and Y.M. Xie, "Topology optimization of functionally graded cellular materials ", *J Mater Sci*, vol.48, pp. 1503-1510, 2013. [DOI:10.1007/s10853-012-6905-1](https://doi.org/10.1007/s10853-012-6905-1).
- [52] K. Ichikawa, *Functionally Graded Materials in the 21st Century: A Workshop on Trends and Forecasts*, Boston: *Kluwer Academic Publishers*, 2001. [DOI:10.1007/978-1-4615-4373-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4373-2).
- [53] P. G. Coelho, P.R Fernandes, J.M. Guedes and H.C. Rodrigues, "A hierarchical model for concurrent material and topology optimization of three-dimensional structure ", *Struct Multidisc Optim.*, vol 35, no.2, pp. 107-115, 2008. [DOI:10.1007/s00158-007-0141-3](https://doi.org/10.1007/s00158-007-0141-3).
- [54] Y. Miyamoto, W.A. Kaysser and B.H. Rabin, *Functionally graded materials: design, processing, and applications*, *Materials technology series*, 1999. [DOI 10.1007/978-1-4615-5301-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4).

- [55] S. Nikbakht, S. Kamarian and M. Shakeri, "A Review on Optimization of Composite Structures Part II: Functionally Graded Materials", *Composite Structures*, vol.214, pp. 83-102, 2019. DOI: [10.1016/j.compstruct.2019.01.105](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.01.105).
- [56] J. E. Cadman, S. Zhou, Y. Chen and Q. Li, "On design of multi-functional microstructural materials", *Journal of Materials Science*, vol. 48, n. 1, pp. 51-66, 2013. DOI:[10.1007/s10853-012-6643-4](https://doi.org/10.1007/s10853-012-6643-4).
- [57] E. C. N. Silva, M. C. Walters and G.H. Paulino, " Modeling bamboo as a functionally graded material: lessons for the analysis of affordable materials", *J Mater Sci.*, vol. 41, pp. 6991–7004, 2006. DOI:[10.1007/s10853-006-0232-3](https://doi.org/10.1007/s10853-006-0232-3).
- [58] A. K. Ray, S. K. Das, S. Mondal and P. Ramachandrarao, "Microstructural characterization of bamboo", *Journal of Materials Science*, vol.39, pp. 1055–1060, 2004. DOI:[10.1023/B:JMISC.0000012943.27090.8f](https://doi.org/10.1023/B:JMISC.0000012943.27090.8f).
- [59] P.G. Coelho, P.R. Fernandes, H.C. Rodrigues, J.B Cardoso e J.M. Guedes, "Numerical modeling of bone tissue adaptation – a hierarchical approach for bone apparent density and trabecular structure ", *Journal of Biomechanics*, vol.42, no.7, pp. 830-837, 2009. DOI: [10.1016/j.jbiomech.2009.01.020](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2009.01.020).
- [60] D. Taylor, "Fracture and repair of bone: a multiscale problem", *Journal of Materials Science*, vol. 42, pp. 8911–8918, 2007. DOI [10.1007/s10853-007-1698-3](https://doi.org/10.1007/s10853-007-1698-3).
- [61] F. Nogata and H. Takahashi, "Intelligent functionally graded material: Bamboo", *Composites Engineering*, vol. 5, n. 7, pp. 743-751, 1995. DOI:[10.1016/0961-9526\(95\)00037-N](https://doi.org/10.1016/0961-9526(95)00037-N).
- [62] B. Saleh, J. Jiang, R. Fathi, T. Al-hababi, Q. Xu, L. Wang, D. Song and A. Ma, "30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges", *Composites Part B: Engineering*, vol. 201, 2020. DOI: [10.1016/j.compositesb.2020.108376](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108376).
- [63] P. G. Coelho, "Modelos hierárquicos para a análise e síntese de estruturas e materiais com aplicações à remodelação óssea", Tese de Doutorado, Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, 2009.
- [64] A. J. Markworth, K. S. Tamesh and W. P. Parks Jr, "Modeling studies applied to functionally graded materials", *Journal of Material Science*, vol. 30, pp. 2183–2193, 1995. DOI: [10.1007/BF01184560](https://doi.org/10.1007/BF01184560).
- [65] F. Stump, E. Silva and G. Paulino, "Optimization of material distribution in functionally graded structures with stress constraints ", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, pp. 535-551, 2006. DOI: [10.1002/cnm.910](https://doi.org/10.1002/cnm.910).
- [66] S. Zhou and Q. Li, "Design of graded two-phase microstructures for tailored elasticity gradients", *J Mater Sci.*, vol. 43, pp. 5157–5167, 2008. DOI: [10.1007/s10853-008-2722-y](https://doi.org/10.1007/s10853-008-2722-y).

- [67] G. Paulino, E. Silva and C. Le, "Optimal design of periodic functionally graded composites with prescribed properties", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol.38, pp. 469–489, 2009. [DOI: 10.1007/s00158-008-0300-1](https://doi.org/10.1007/s00158-008-0300-1).
- [68] O. Sigmund, "Materials with prescribed constitutive parameters: an inverse homogenization problem", *Int. J. Solids Struct.*, vol. 31, n. 17, pp. 2313–2329, 1994. [DOI: 10.1016/0020-7683\(94\)90154-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)90154-6).
- [69] A. H. Mostefa, S. Merdaci and N. Mahmoudi, "An Overview of Functionally Graded Materials «FGM»", in *Proceedings of the Third International Symposium on Materials and Sustainable Development*, pp. 267–278, 2018. [DOI:10.1007/978-3-319-89707-3_30](https://doi.org/10.1007/978-3-319-89707-3_30).
- [70] J. Simonet, G. Kapelski and D. Bouvard, "A sedimentation process for the fabrication of solid oxide fuel cell cathodes with graded composition", *J. Eur. Ceram. Soc.*, vol. 27, pp. 3113–3116, 2007. [DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2006.11.075](https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2006.11.075).
- [71] F. Watari, A. Yokoyama, F. Saso, M. Uo and T. Kawasaki, "Fabrication and properties of functionally graded dental implant", *Compos. Part B*, vol. 28, pp. 5–11, 1997. [DOI: 10.1016/s1359-8368\(96\)00021-2](https://doi.org/10.1016/s1359-8368(96)00021-2).
- [72] Q. Xia, M.Y. Wang, "Simultaneous optimization of the material properties and the topology of functionally graded structures", *Computer-Aided Design*, vol. 40, pp. 660-675, 2008. [DOI: 10.1016/j.cad.2008.01.014](https://doi.org/10.1016/j.cad.2008.01.014).
- [73] C. Conlan-Smith and K. A. James, "A stress-based topology optimization method for heterogeneous Structures", *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 60, pp. 167–183, 2019. [DOI:10.1007/s00158-019-02207-9](https://doi.org/10.1007/s00158-019-02207-9).
- [74] I. Ituarte, N. Boddeit, V. Hassani, M. Dunn and D. Rosen, "Design and additive manufacture of functionally graded structure based on digital materials", *Additive Manufacturing*, vol.30, pp.1-14, 2019. [DOI:10.1016/j.addma.2019.100839](https://doi.org/10.1016/j.addma.2019.100839).
- [75] N. Vermaak, G. Michailidis, G. Parry, R. Estevez, G. Allaire and Y. Bréchet, "Material interface effects on the topology optimization of multi-phase structures using a level set method", *Struct and Multidisc Optim.*, vol. 50, no. 4, pp. 623-644, 2014. [DOI:10.1007/s00158-014-1074-2](https://doi.org/10.1007/s00158-014-1074-2).
- [76] Z. Kang, C. Wu, Y. Luo and M. Li, "Robust topology optimization of multi-material structures considering uncertain graded interface", *Composite Structures*, vol. 208, pp. 395-406, 2019. [DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.10.034](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.10.034).
- [77] S. Nagpal, N. Jain and S. Sanyal, "Stress concentration and its mitigation techniques in flat plate with singularities: A critical review", *Engineering Journal*, vol. 16, no. 1, pp. 1-16, 2012. [DOI:10.4186/ej.2012.16.1.1](https://doi.org/10.4186/ej.2012.16.1.1).
- [78] S. Vigdergauz, "Optimal stiffening of holes under equibiaxial tension", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30, no. 4, pp. 569-577, 1993. [DOI: 10.1016/0020-7683\(93\)90188-d](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90188-d).
- [79] P. G. Coelho, B. C. Barroca, F. M. Conde, J. M. Guedes, "Minimization of maximal von Mises stress in porous composite microstructures using shape and topology optimization",

Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 64, pp. 1781–1799, 2021. [DOI: 10.1007/s00158-021-02942-y](https://doi.org/10.1007/s00158-021-02942-y).

[80] V. Goyat, S. Verma and R. K. Garg, " On the reduction of stress concentration factor in an infinite panel using different radial functionally graded materials ", *Int. J. Materials and Product Technology*, vol. 57, no. 1-3, pp.109-131, 2018. [DOI:10.1504/IJMPT.2018.092937](https://doi.org/10.1504/IJMPT.2018.092937).

[81] J. H. Kim and G. H. Paulino," Isoparametric Graded Finite Elements for Nonhomogeneous Isotropic and Orthotropic Materials ", *J. Appl. Mech.*, vol. 69, no. 4, pp. 502-514, 2002. [DOI:10.1115/1.1467094](https://doi.org/10.1115/1.1467094).

[82] C. O. Horgan, A. M. Chan, " The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials", *J. Elasticity*, vol. 55, pp. 43–59, 1999. [DOI:10.1023/A:1007625401963](https://doi.org/10.1023/A:1007625401963).

[83] N. Noda, "Thermal stresses in functionally graded materials", *J. Therm. Stresses*, vol. 22, no. 4-5, pp. 477–512, 1999. [DOI:10.1080/014957399280841](https://doi.org/10.1080/014957399280841).

[84] R. W. Zimmerman and M. P. Lutz, " Thermal stresses and thermal expansion in a uniformly heated functionally graded cylinder", *Journal of Thermal Stresses*, vol. 22, no. 2, pp. 177-188. [DOI:10.1080/014957399280959](https://doi.org/10.1080/014957399280959).

[85] D. V. Kubair and B. Bhanu-Chandar, "Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension", *Int J Mech Sci.*, vol. 50, pp. 732–742, 2008. [DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2007.11.009](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2007.11.009).

[86] Q. Yang, C. F. Gao and W. Chen, " Stress analysis of a functional graded material plate with a circular hole.", *Arch Appl Mech*, vol. 80, pp. 895-907, 2010. [DOI:10.1007/s00419-009-0349-3](https://doi.org/10.1007/s00419-009-0349-3).

[87] M. Mohammadi, J. R. Dryden and L. Jiang, "Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, pp. 483 –491. [DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.10.013](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.10.013).

[88] R. Sburlati, S. R. Atashipour and S. A. Atashipour, " Reduction of the stress concentration in a homogeneous panel with hole by using a functionally graded layer", *Composites: Part B*, vol. 61, pp. 99-109, 2014. [DOI: 10.1016/j.compositesb.2014.01.036](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.01.036).

[89] R. Sburlati, "Stress concentration factor due to a functionally graded ring around a hole in an isotropic plate", *Int J Solids and Structures*, vol. 50, no. 22-23, pp. 3649-3658, 2013. [DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.07.007](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.07.007).

[90] V. Goyat, S. Verma and R. K. Garg, " Stress concentration reduction using different functionally graded materials layer around their hole in an infinite panel ", *Strength, Fracture and Complexity*, vol. 12, no. 1, pp. 31-45, 2019. [DOI: 10.3233/SFC-190232](https://doi.org/10.3233/SFC-190232).

[91] B. Barroca, "Optimal shape and topology of multi-material microstructures in min-max stress design problems", Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, 2019.

- [92] L. Meng, W. Zhang, D. Quan, G. Shi, L. Tang, Y. Hou, P. Breilkopf, J. Zhu and T. Gao, "From topology optimization design to additive manufacturing: today's success and to-morrow's roadmap", *Arch Computat Methods Eng.*, vol. 27, pp. 805-830, 2019. [DOI:10.1007/s11831-019-09331-1](https://doi.org/10.1007/s11831-019-09331-1).
- [93] J. Zhu, H. Zhou, C. Wang, L. Zhou, S. Yuan and W. Zhang "A review of topology optimization for additive manufacturing: status and challenges", *Chinese Journal of Aeronautics*, vol. 34, no. 1, pp. 91-110, 2020. [DOI: 10.1016/j.cja.2020.09.020](https://doi.org/10.1016/j.cja.2020.09.020).
- [94] E. L. Doubrovski, E. Y. Tsai, D. Dikovskiy, J. M. P. Geraedts, H. Herr and N. Oxman, "Voxel-based fabrication through material property mapping: a design method for bitmap printing ", *Comput. Aided Des.*, vol. 60, pp. 3–13, 2015. [DOI: 10.1016/j.cad.2014.05.010](https://doi.org/10.1016/j.cad.2014.05.010).
- [95] G. H. Loh, E. Pei, D. Harrison and M. D. Monzón, "An overview of functionally graded additive manufacturing ", *Addit. Manuf.*, vol. 23, pp. 34–44, 2018. [DOI: 10.1016/j.addma.2018.06.023](https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.06.023).
- [96] S. Chandrasekaran, S. Hari and M. Amirthalingam, "Wire arc additive manufacturing of functionally graded material for marine risers", *Materials Science & Engineering A*, vol. 792, pp. 139530, 2020. [DOI: 10.1016/j.msea.2020.139530](https://doi.org/10.1016/j.msea.2020.139530).
- [97] T. A. Rodrigues, N. Bairrão, F. W. C. Farias, A. Shamsolhodaei, J. Shen, N. Zhou, E. Maawad, N. Schell, T. G. Santos, J. P. Oliveira, "Steel-copper functionally graded material produced by twin-wire and arc additive manufacturing (T-WAAM) ", *Materials & Design*, vol. 213, pp. 110270, 2022. [DOI: 10.1016/j.matdes.2021.110270](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2021.110270).
- [98] L. Yan, Y. Chen and F. Liou, " Additive manufacturing of functionally graded metallic materials using laser metal deposition", *Additive Manufacturing*, vol. 31, pp. 100901, 2020. [DOI: 10.1016/j.addma.2019.100901](https://doi.org/10.1016/j.addma.2019.100901).
- [99] V. A. Popovich, E. V. Borisov, A. A. Popovich, V. Sh. Sufiiarov, D. V. Masaylo and L. Alzine, "Functionally graded Inconel 718 processed by additive manufacturing: Crystallographic texture, anisotropy of microstructure and mechanical properties", *Materials & Design*, vol. 114, pp. 441-449, 2017. [DOI: 10.1016/j.matdes.2016.10.075](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.10.075).
- [100] J. D. Deaton and R. V. Grandhi, "A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000", *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 49, no. 1, pp. 1–38, 2014. [DOI:10.1007/s00158-013-0956-z](https://doi.org/10.1007/s00158-013-0956-z).
- [101] P. G. Coelho, J. M. Guedes and J. B. Cardoso, "Topology optimization of cellular materials with periodic microstructure under stress constraints", *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 59, no. 26-27, pp. 1-13, 2018. [DOI:10.1007/s00158-018-2089-x](https://doi.org/10.1007/s00158-018-2089-x).
- [102] M. Collet, L. Noel, M. Bruggi and P. Duysinx, "Topology optimization for microstructural design under stress constraints", *Struct Multidiscip Optim.*, vol. 58, no. 6, pp. 2677–2695. [DOI:10.1007/s00158-018-2045-9](https://doi.org/10.1007/s00158-018-2045-9).
- [103] U. Kirsch, "On singular topologies in optimum structural design", *Struct. Optim.*, vol. 2, n. 3, pp. 133–142, 1990. [DOI:10.1007/bf01836562](https://doi.org/10.1007/bf01836562).

- [104] G. I. N. Rozvany, "On design-dependent constraints and singular Topologies", *Struct Multidisc Optim.*, vol. 21, no. 2, pp.164–172, 2001. [DOI:10.1007/s001580050181](https://doi.org/10.1007/s001580050181).
- [105] M. Bruggi, "On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization", *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 36, n. 2, pp. 125–141, 2008. [DOI:10.1007/s00158-007-0203-6](https://doi.org/10.1007/s00158-007-0203-6).
- [106] G. D. Cheng and X. Guo, " ϵ -relaxed approach in structural topology optimization", *Struct. Optim.*, vol. 13, no. 4, pp. 258–266, 1997. [DOI:10.1007/BF01197454](https://doi.org/10.1007/BF01197454).
- [107] P. Duysinx and M. P. Bendsøe, "Topology optimization of continuum structures with local stress constraints", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 43, no. 8, pp. 1453–1478, 1998. [DOI: 10.1002/\(sici\)1097-0207\(19981230\)43:8<1453::aid-nme480>3.0.co;2-2](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0207(19981230)43:8<1453::aid-nme480>3.0.co;2-2).
- [108] M. Bruggi and P. Venini, "A mixed FEM approach to stress-constrained topology optimization", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 73, n. 12, pp. 1693–1714, 2008. [DOI:10.1002/nme.2138](https://doi.org/10.1002/nme.2138).
- [109] M. Bruggi and P. Duysinx, "Topology optimization for minimum weight with compliance and stress constraints", *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 46, n. 3, pp. 369–384, 2012. [DOI: 10.1007/s00158-012-0759-7](https://doi.org/10.1007/s00158-012-0759-7).
- [110] G. Kreisselmeier and R. Steinhauser, "Systematic Control Design by Optimizing a Vector Performance Index", *IFAC Proc. Vol.*, vol. 12, n. 7, pp. 113–117, 1979. [DOI: 10.1016/s1474-6670\(17\)65584-8](https://doi.org/10.1016/s1474-6670(17)65584-8).
- [111] P. Duysinx and O. Sigmund, "New developments in handling stress constraints in optimal material distribution", in *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, 1998. [DOI:10.2514/6.1998-4906](https://doi.org/10.2514/6.1998-4906).
- [112] F. M. Conde, P. G. Coelho and J. M. Guedes, "Multi-material and strength-oriented microstructural topology optimization applied to discrete phase and functionally graded materials", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 65, no. 4, 2022.
- [113] A. Verbart, "Topology Optimization with Stress Constraints", Tese de Doutorado, TU Delft, Delft University of Technology, 2015.
- [114] O. Sigmund and M. P. Bendsøe, "Topology optimization - from airplanes to nanooptics", K. Stubbjær and T. Kortenbach, Eds. Kgs. Lyngby: Technical University of Denmark (DTU), 2004, pp. 40-51 BT-BRIDGING from technology to society. Disponível em [http://www2.mat.dtu.dk/education/phd/DCAMM-2005-06-08-14/OS MPB bridging](http://www2.mat.dtu.dk/education/phd/DCAMM-2005-06-08-14/OS_MPB_bridging) (consultado em abril 2022).
- [115] E. Haug, K. Choi and V. Komkov, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, Inc, 1986.
- [116] P. G. Coelho, "A few notes for TAME classes", Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2019.
- [117] R. T. Haftka and Z. Gürdal, *Elements of Structural Optimization*, vol. 11. Dordrecht: Springer Netherlands, 1992.

- [118] S. Suresh and A. Mortensen, *Fundamentals of functionally graded materials*, IOM Communications Ltd, 1998.
- [119] C. C. Swan and I. Kosaka, "Voigt–Reuss topology optimization for structures with linear elastic material behaviours", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 3033–3057, 1997. [DOI: 10.1002/\(sici\)1097-0207\(19970830\)40:16<3033::aid-nme196>3.0.co;2-z](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0207(19970830)40:16<3033::aid-nme196>3.0.co;2-z).
- [120] Z. Hashin and S. Shtrikman, "A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials", *J Mech Phys Solids*, vol. 11, no. 2, pp. 127–140, 1963. [DOI: 10.1016/0022-5096\(63\)90060-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7).
- [121] C. Charalambous and J. W. Bandler, "Non-linear minimax optimization as a sequence of least pth optimization with finite values of p", *International Journal of Systems Science*, vol. 7, no. 4, pp. 377–391, 1976. [DOI: 10.1080/00207727608941924](https://doi.org/10.1080/00207727608941924).
- [122] R. Chen, "Solution of minimax problems using equivalent differentiable functions", *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 11, no. 12, pp. 1165–1169, 1985. [DOI: 10.1016/0898-1221\(85\)90104-X](https://doi.org/10.1016/0898-1221(85)90104-X).
- [123] J. E. Taylor and M. P. Bendsøe, "An interpretation of min-max structural design problems including a method for relaxing constraints", *Int J Solids Struct.*, vol. 20, pp. 301–314, 1984. [DOI:10.1016/0020-7683\(84\)90041-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90041-6).
- [124] O. Sigmund and J. Petersson, "Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima", *Structural optimization*, vol. 16, no. 1, pp. 68–75, 1998. [DOI:10.1007/BF01214002](https://doi.org/10.1007/BF01214002).
- [125] O. Sigmund, "Design of material structures using topology Optimization", Ph.D. Thesis, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, 1994.
- [126] O. Sigmund, "Morphology-based black and white filters for topology optimization", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 33, no. 4, pp. 401–424, 2007. [DOI:10.1007/s00158-006-0087-x](https://doi.org/10.1007/s00158-006-0087-x).
- [127] T. E. Bruns and D. A. Tortorelli, "Topology optimization of nonlinear elastic structures and compliant mechanisms", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, no. 26–27, pp. 3443–3459, 2001. [DOI: 10.1016/s0045-7825\(00\)00278-4](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(00)00278-4).
- [128] N. Kikuchi, *Finite element methods in mechanics*, Cambridge University Press, 1986.
- [129] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha and R. J. Witt, *Concepts and applications of finite element analysis*, 4 ed., John Wiley & Sons, 2001.
- [130] H. Lian, A. N. Christiansen, D. Tortorelli, O. Sigmund and N. Aage, "Combined shape and topology optimization for minimization of maximal von Mises stress", *Struct Multidisc Optim.*, vol. 55, no. 5, pp. 1541–1557, 2017. [DOI 10.1007/s00158-017-1656-x](https://doi.org/10.1007/s00158-017-1656-x).

- [131] S. Vigdergauz, "The effective properties of a perforated elastic plate numerical optimization by genetic algorithm", *Int J Solids Struct.*, vol. 38, no. 48-49, pp. 8593–8616, 2001. [DOI:10.1016/S0020-7683\(01\)00189-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00189-5).
- [132] G.P. Cherepanov, "Inverse problems of the plane theory of elasticity", *J Appl Math Mech*, vol. 38, no. 6, pp. 915–931, 1974. [DOI:10.1016/0021-8928\(75\)90085-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(75)90085-4).
- [133] S. Vigdergauz, "The stress-minimizing hole in an elastic plate under remote shear", *J Mech Mater Struct*, vol. 1, no. 2, pp. 387–406, 2006. [DOI:10.2140/jomms.2006.1.387](https://doi.org/10.2140/jomms.2006.1.387).
- [134] O. Sigmund, "A new class of extremal composites", *J Mech Phys Solids*, vol. 48, no. 2, pp. 397–428, 2000. [DOI:10.1016/S0022-5096\(99\)00034-4](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00034-4).
- [135] O. Sigmund, "A 99 Line Topology Optimization Code Written in MATLAB", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 21, no. 2, pp. 120-127, 2001. [DOI:10.1007/s001580050176](https://doi.org/10.1007/s001580050176).
- [136] S. Vigdergauz, "Two-dimensional grained composites of extreme rigidity", *J Appl Mech*, vol. 61, no. 2, pp. 390–394, 1994. [DOI:10.1115/1.2901456](https://doi.org/10.1115/1.2901456).
- [137] O. Giraldo-Londoño and G. H. Paulino, "PolyStress: a Matlab implementation for local stress-constrained topology optimization using the augmented Lagrangian method", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 63, no. 4, pp. 2065–2097, 2021. [DOI:10.1007/s00158-020-02760-8](https://doi.org/10.1007/s00158-020-02760-8).
- [138] K. Deb and S. Srivastava, "A genetic algorithm based augmented Lagrangian method for constrained optimization", *Computational Optimization and Applications*, vol. 53, no. 3, pp. 869–902, 2012. [DOI 10.1007/s10589-012-9468-9](https://doi.org/10.1007/s10589-012-9468-9).
- [139] G. A. da Silva, N. Aage, A. T. Beck, O. Sigmund, "Three-dimensional manufacturing tolerant topology optimization with hundreds of millions of local stress constraints", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 122, no. 47, pp. 548–578, 2020. [DOI:10.1002/nme.6548](https://doi.org/10.1002/nme.6548).
- [140] IBM, "IBM ILOG CPLEX Optimizer". Disponível em <https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer> (consultado em setembro de 2022).

VALIDAÇÃO DE RESULTADOS ENTRE FEM 2D E ANSYS®

Este anexo serve o intuito de dar a conhecer ao leitor a fase preparatória de teste dos programas FEM 2D e ANSYS® enquanto forma de consolidação do estudo realizado sobre os mesmos e que deveria ser efetuado numa etapa inicial desta dissertação. Estudaram-se 5 casos distintos. Para cada um, foi calculada a tensão de von Mises no interior dos elementos finitos da malha e estabelecida a comparação dos resultados obtidos entre os dois programas e também com a solução analítica conhecida.

É importante notar que o FEM 2D é um código aberto enquanto o ANSYS® é um código comercial. Este aspeto torna-se relevante na medida em que o FEM 2D apenas calcula a tensão de von Mises em cada um dos pontos de Gauss de um determinado elemento. Para efeitos de comparação este resultado não é conveniente. Faz mais sentido comparar um único valor de tensão, calculado por elemento, do que comparar tantos valores de tensão quanto o número de pontos de Gauss escolhidos em cada uma das direções do referencial natural do elemento. Assim, teve-se o cuidado de implementar no FEM 2D uma média volumétrica das tensões de von Mises calculadas nos pontos de Gauss de cada elemento. Desta forma, consegue-se facilitar a comparação de resultados e existe uma preservação do rigor do cálculo que pode não ser igual a uma simples média aritmética das tensões de von Mises nos pontos de Gauss.

A.1 Cálculo analítico da tensão de von Mises

A tensão de von Mises pode ser calculada essencialmente de duas formas: (1) a partir das componentes do tensor das tensões ou (2) a partir das tensões principais. Ambas as expressões fornecem o mesmo valor da tensão equivalente. A equação da tensão equivalente, de acordo com (1) e (2), respetivamente, é então:

$$\sigma^{\text{VM}} = \left[\frac{1}{2} \left((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 \right) + 3\tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma^{\text{VM}} = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.2})$$

Repare-se que as equações (A.1) e (A.2) foram escritas para o caso de estado plano de tensão, logo as componentes do tensor das tensões $\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

A.2 Média volumétrica da tensão de von Mises

Tal como referido anteriormente, o FEM 2D calcula a tensão de von Mises em cada ponto de Gauss de um dado elemento. Neste sentido, seria tentador efetuar uma média aritmética destes valores para obter um único valor de tensão equivalente por elemento. No caso de existir uma malha regular de elementos finitos, onde todos os elementos são quadriláteros perfeitos em que as suas arestas fazem um ângulo de 90° entre si, esta metodologia está sempre correta e verifica-se que as médias volumétrica e aritmética fornecem exatamente o mesmo resultado. Não obstante, num modelo de elementos finitos como o representado na figura A.1 (as condições de apoio escolhidas são suficientes para evitar o movimento de corpo rígido), os resultados fornecidos por ambas as metodologias são discordantes. De um ponto de vista de estabelecer um código o mais generalista possível, e mesmo tendo em conta que em otimização estrutural as malhas de elementos finitos têm forçosamente de ser regulares, adicionou-se ao código FEM 2D, escrito em linguagem FORTRAN, o cálculo da média volumétrica das tensões de von Mises calculadas em cada ponto de Gauss.

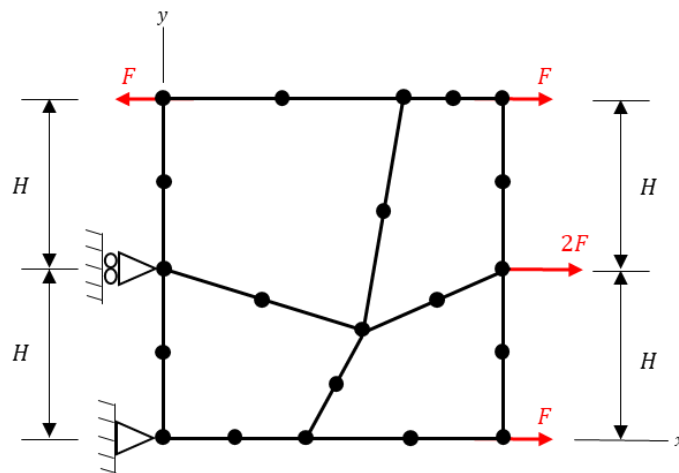


Figura A.1: *Patch test* para validação da média volumétrica.

Considere-se um domínio Ω discretizado por uma malha quadrada de elementos finitos, possuindo cada elemento e uma área $|\Omega_e|$. A tensão de von Mises para estado plano de tensão σ_e^{VM} , em cada $|\Omega_e|$, programada para ser uma média volumétrica dos valores calculados nos pontos de Gauss de cada elemento finito, é dada por:

$$\sigma_e^{\text{VM}} = \frac{\int_{\Omega_e} \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{xx}^e - \sigma_{yy}^e)^2 + (\sigma_{xx}^e)^2 + (\sigma_{yy}^e)^2] + 3(\tau_{xy}^e)^2} d\Omega_e}{|\Omega_e|} \quad (\text{A.3})$$

onde σ_e^{VM} é assumido uniforme em $|\Omega_e|$.

A.3 Correspondência entre carregamento distribuído e cargas nodais no elemento quadrilátero de 8 nós

Antes de divulgar os casos estudados, esclarece-se a equivalência existente entre um carregamento exterior distribuído aplicado ao longo da fronteira da estrutura e as forças concentradas que efetivamente são aplicadas nos nós dos elementos Q8 que discretizam a estrutura. Para o efeito, considere-se que o vetor das cargas aplicadas nos nós de uma estrutura, por elementos, devido a diversas fontes, mas excetuando a deformação dos elementos, é dado por [129]:

$$\{\mathbf{r}_e\} = \int [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{F}\} dV + \int [\mathbf{N}]^T \{\Phi\} dS + \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] \{\epsilon_0\} dV - \int [\mathbf{B}]^T \{\sigma_0\} dV \quad (\text{A.4})$$

Tal equação é determinada pelo uso das mesmas funções de forma, $[\mathbf{N}]$, que as que são utilizadas para determinar a matriz de rigidez do elemento. Aqui, $\{\mathbf{F}\}$ denota as forças mássicas, $\{\Phi\}$ as trações de superfície, $[\mathbf{B}]$ a matriz de deformação-deslocamento, $[\mathbf{E}]$ a matriz constitutiva que contém as constantes elásticas, $\{\epsilon_0\}$ e $\{\sigma_0\}$ os vetores dos valores iniciais de deformação e de tensão, respetivamente. De notar que, num dado problema específico, qualquer termo integral situado no lado direito da equação (A.4) pode desaparecer, ou até, mesmo esses termos estando presentes, para a maioria dos elementos podem desaparecer. Por exemplo, $\{\sigma_0\}$ pode ser diferente de zero em apenas alguns elementos que estejam situados numa porção da estrutura, e $\{\Phi\}$ ser diferente de zero apenas para arestas de elementos localizadas na fronteira da estrutura e que estão sujeitas a um esforço de tração superficial.

Esta expressão permite, portanto, obter uma correspondência entre um carregamento distribuído e as respetivas forças aplicadas nos nós de um dado elemento. Considere-se somente o caso de existir uma tração distribuída $\{\Phi\}$, tal que:

$$\{\mathbf{r}_e\} = \int [\mathbf{N}]^T \{\Phi\} dS \quad (\text{A.5})$$

Como um exemplo para estudar a aplicação da equação (A.5), atente-se na figura A.2 que ilustra uma situação de carregamento distribuído quadrático $q = q(x)$, em que q representa uma força por unidade de comprimento de tal forma que a pressão na aresta do elemento seja q/t , sendo t a espessura do elemento. As funções de forma da aresta formada pelos nós 4-

7-3 são obtidas com recurso à fórmula de Lagrange. Este resultado pode ser consultado em [129]. Portanto, para a aresta superior da figura A.2, tem-se:

$$\{\Phi\} = \frac{1}{t} [\mathbf{N}] \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_7 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.6) em (A.5) e fazendo $dS = tdx$, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} F_4 \\ F_7 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \int_{-a}^a [\mathbf{N}]^T \frac{1}{t} [\mathbf{N}] \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_7 \\ q_3 \end{Bmatrix} t dx = \frac{a}{15} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_7 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Particularizando para o caso de o carregamento ser uniforme, isto é, $q_4 = q_7 = q_3 = q$, fica:

$$\begin{Bmatrix} F_4 \\ F_7 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{a}{15} q \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix} = aq \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \quad (\text{A.8})$$

Assumindo ainda que o elemento tem lado L e que $L = 2a$, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} F_4 \\ F_7 \\ F_3 \end{Bmatrix} = Lq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \quad (\text{A.9})$$

Portanto, a equação (A.9) diz que, da força total que atua na aresta 4-7-3, são colocados $1/6$ em cada um dos nós da extremidade e $2/3$ no nó central. De notar que este resultado não implica que o carregamento seja normal a um dos lados do elemento. Por exemplo, caso se considere um carregamento uniforme, que é tangente a um dos lados de dois elementos Q8 de igual comprimento L , são obtidas as forças nodais que estão representadas na figura A.3.

Por fim, note-se que, para qualquer caso, as cargas nodais são estaticamente equivalentes à carga original distribuída. O que quer dizer que ambos os sistemas de carga têm a mesma força resultante e o mesmo momento em relação a um ponto arbitrário.

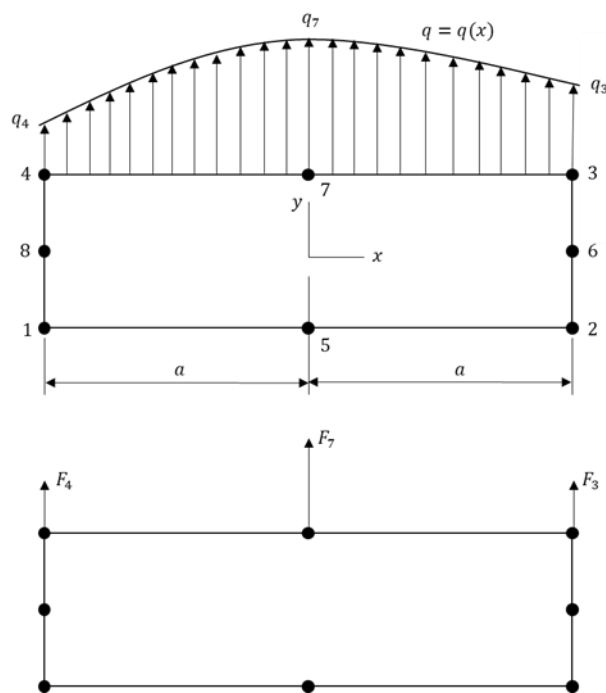


Figura A.2: Carregamento distribuído q , aplicado num dos lados do elemento Q8, e respetivas forças nodais equivalentes.

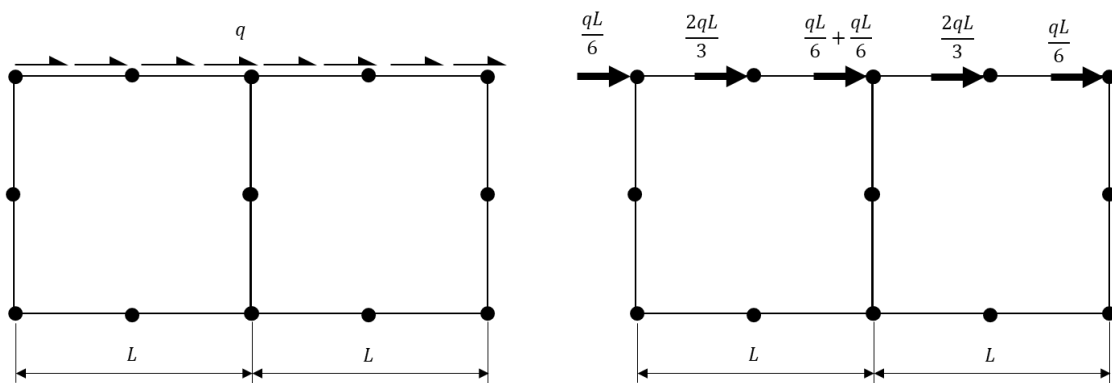


Figura A.3: Alocação de um carregamento tangente distribuído uniformemente ao longo de nós igualmente espaçados.

A.4 Casos de estudo

Todos os casos ilustrados abaixo consistem em modelar uma placa de dimensões unitárias, sujeita a diferentes cenários de carga, utilizando apenas um único elemento Q8. Estes são exemplos didáticos, simples o suficiente para que fosse possível ter um resultado teórico com que comparar com os dois programas de elementos finitos utilizados na dissertação, i.e., o ANSYS® e o FEM 2D. Estes casos de estudo acabam por ter bastante interesse porque a tensão de von Mises é uniforme no interior da placa. De um ponto de vista prático, estes exemplos facilitam imenso a comparação de resultados porque existe um único valor analítico. Considerou-se o mesmo referencial cartesiano que o representado na figura A.2, com a exceção de que agora a origem está situada no nó 1 do elemento, e que todos os elementos tinham dimensões unitárias segundo as direções x , y e z .

- CASO 1 - Placa à tração

O primeiro caso estudado consiste numa placa quadrada sujeita a uma tensão de tração σ_{xx} , tal como ilustrado na figura A.4.



Figura A.4: Placa de dimensões unitárias sujeita a uma tensão de tração σ_{xx} .

Tendo em conta a informação fornecida no subcapítulo anterior, em particular pela equação (A.9), esta placa pode ser modelada numericamente utilizando um único elemento Q8 sujeito às condições de apoio e forças nos nós representados na figura A.5.

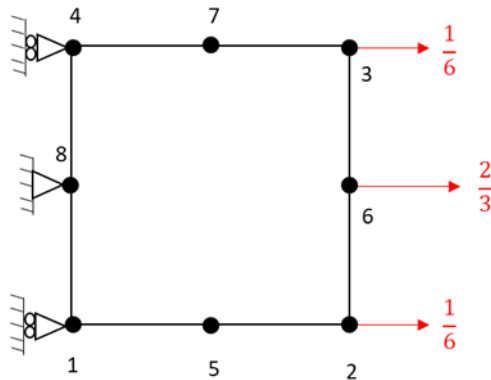


Figura A.5: Modelação numérica da placa da figura A.4 utilizando um único elemento Q8.

Note-se que se assumiu σ_{xx} unitário. Posto isto, o valor da tensão de von Mises, em qualquer ponto no interior da placa, pode ser calculado analiticamente através da equação (A.1), obtendo-se $\sigma_1^{VM} = 1$ Pa. Este resultado foi depois confirmado através do ANSYS® e do FEM 2D com recurso à malha de elementos finitos representada na figura A.5 que se resume somente a um elemento.

- CASO 2 – Carregamento hidrostático

O segundo caso é semelhante ao anterior com a adição de uma tensão de tração segundo a direção y. Veja-se a figura A.6.

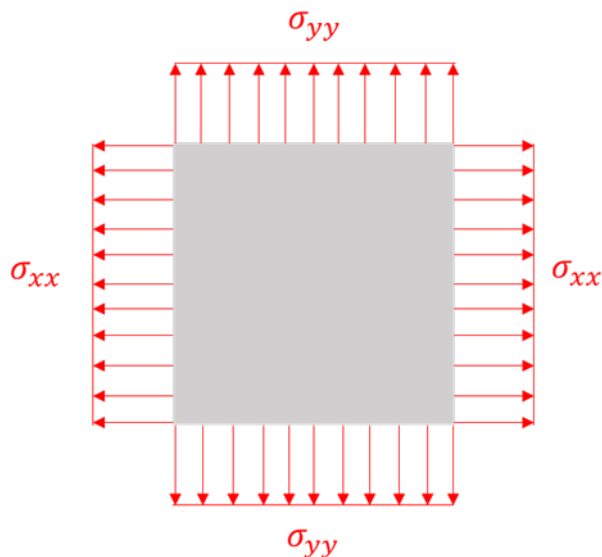


Figura A.6: Placa de dimensões unitárias sujeita às tensões de tração σ_{xx} e σ_{yy} .

Assumindo que $\sigma_{xx} = 2\sigma_{yy}$ e que σ_{yy} é unitário, a modelação da placa completa para este caso está representada na figura A.7.

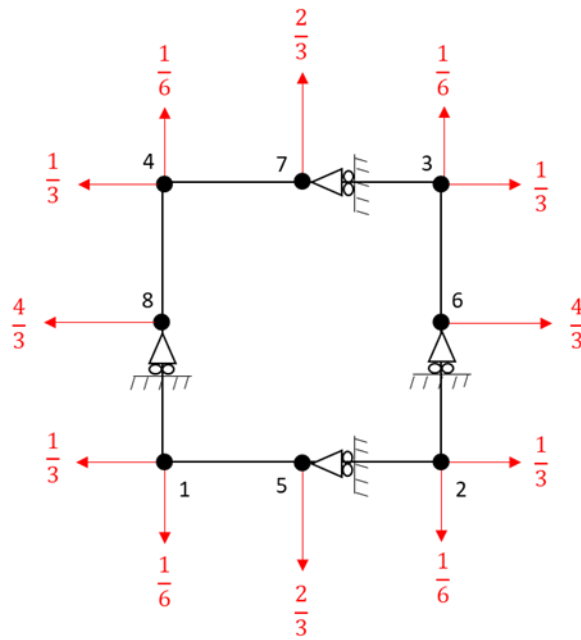


Figura A.7: Modelação completa da placa da figura A.6 com recurso a um único elemento Q8.

Por conveniência, e tirando partido da simetria tanto em relação à geometria como em relação ao carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa. Novamente, utilizou-se um único elemento Q8. Esta modelação encontra-se na figura A.8.

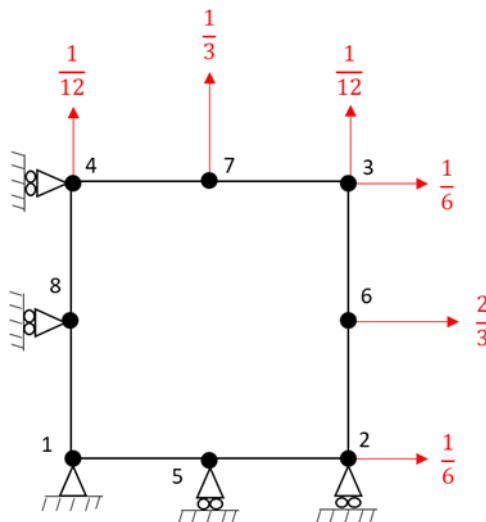


Figura A.8: Modelação de um quarto da placa da figura A.7.

Repare-se que as forças nos nós deixaram de ter os valores indicados na figura A.7. Este resultado pode ser facilmente explicado recuperando a equação (A.8) do subcapítulo A.3.

Note-se que as forças presentes na figura A.7 foram deduzidas para um elemento de comprimento $L = 2a$ e que agora se assumiu igual a 1. Ao estar a modelar-se apenas um quarto da placa, vem que:

$$\frac{L}{2} = 2a \Leftrightarrow a = L/4 \quad (\text{A.10})$$

Substituindo este resultado em (A.8), tem-se para um carregamento unitário:

$$\begin{Bmatrix} F_4 \\ F_7 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 3 & 12 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.11})$$

Obviamente que sendo σ_{xx} o dobro de σ_{yy} , as forças equivalentes que atuam no lado do elemento onde está aplicada esta tensão correspondem a multiplicar o resultado da equação (A.11) por 2. A solução analítica deste caso corresponde a $\sigma_2^{\text{VM}} = \sqrt{3}$ Pa, resultado esse que também foi confirmado através do ANSYS® e do FEM 2D.

- CASO 3 – Corte a 0°

O próximo caso corresponde a uma placa quadrada sujeita a um carregamento de tração e compressão que é equivalente a ter uma placa sujeita ao corte a 0° . Veja-se a figura A.9.

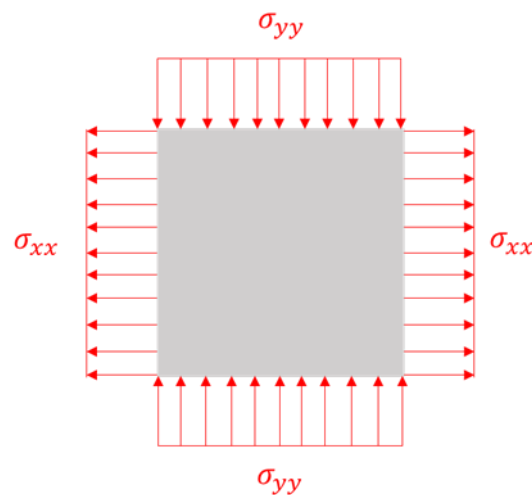


Figura A.9: Placa de dimensões unitárias sujeita a uma tensão de tração σ_{xx} e uma tensão de compressão σ_{yy} .

A análise deste caso é semelhante ao anterior, tendo-se assumido que $\sigma_{xx} = -2\sigma_{yy}$ e efetuado uma modelação de somente um quarto da placa. O resultado analítico, confirmado entre o ANSYS® e o FEM 2D, é $\sigma_3^{VM} = \sqrt{7}$ Pa.

- CASO 4 – Corte a 45°

O quarto caso pretende representar uma placa sujeita ao corte a 45°, tal como ilustra a figura A.10.

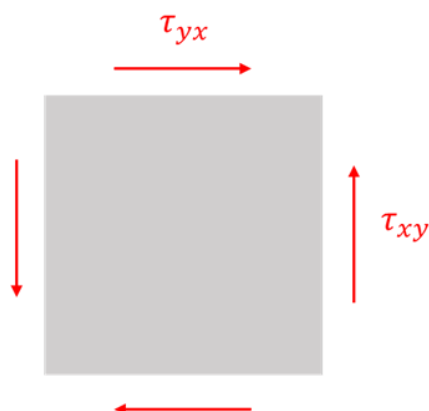


Figura A.10: Placa de dimensões unitárias sujeita às tensões de corte τ_{xy} e τ_{yx} .

Em relação aos casos anteriores, este é provavelmente o mais desafiador. A sua modelação através de um elemento Q8 está representada na figura A.11 e é conseguida com base na informação fornecida pela figura A.3 e pensando na forma como a placa se iria deformar.

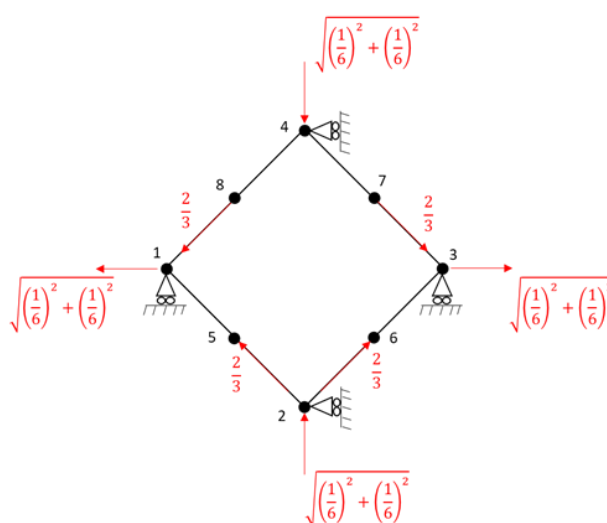


Figura A.11: Modelação da placa da figura A.10 com recurso a um único elemento Q8.

Salienta-se que o elemento foi rodado de 45° em torno do nó 1. O resultado analítico para este caso é $\sigma_4^{VM} = \sqrt{3}$ Pa e também foi confirmado através do ANSYS® e do FEM 2D.

- CASO 5 - Misto

O caso 5 é idêntico ao caso 4, com a diferença de que agora se adicionou um carregamento de tração a cada um dos lados da placa, tal como representado na figura A.12. A modelação deste caso com recurso a um elemento Q8 está ilustrada na figura A.13. Assumindo que $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 1$ Pa, o resultado analítico para este caso é $\sigma_5^{VM} = 2$ Pa. Também o ANSYS® e o FEM 2D forneceram o mesmo resultado.

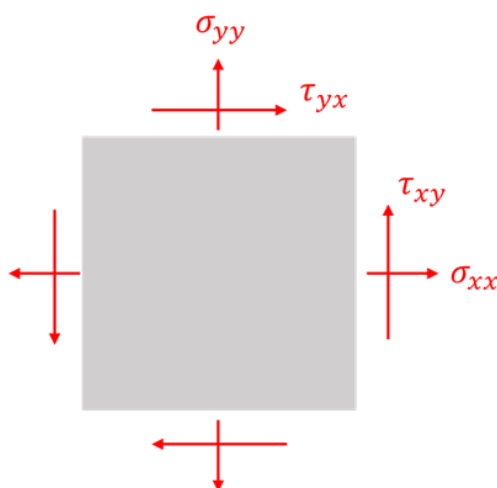


Figura A.12: Placa de dimensões unitárias sujeita às tensões de corte τ_{xy} e τ_{yx} e às tensões de tração σ_{xx} e σ_{yy} .

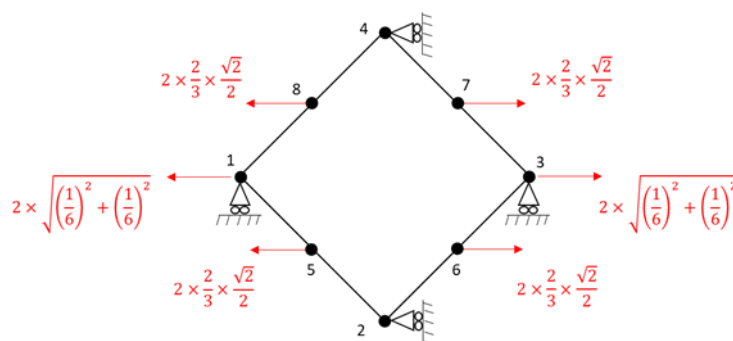


Figura A.13: Modelação da placa da figura A.12 com recurso a um único elemento Q8.

Por fim, termina-se este anexo deixando uma nota de aviso no que diz respeito ao valor da tensão equivalente obtida através do comando ETABLE do ANSYS®. Durante a série de

testes que se apresentaram no decorrer deste anexo, constatou-se que a tensão de von Mises que o ANSYS® fornece através do comando ETABLE, valor único por cada elemento, não correspondia a uma média volumétrica, nem aritmética, das tensões de von Mises calculadas nos pontos de Gauss do elemento. Infelizmente, não foi possível perceber, através da consulta do manual do programa, como é que o valor da tensão de von Mises pelo comando da ETABLE era calculado. No entanto, suspeita-se que pode ter que ver com o uso de funções de extrapolação. Os resultados referidos nesta secção como tendo sendo obtidos através do ANSYS®, e comparados com o FEM2D, correspondem a uma média aritmética dos valores lidos nos pontos de Gauss conforme listados pelo programa através do Menu: General Postproc → List Results → Element Solution → Stress → von Mises stress.

B

MATERIAIS LINEAR ELÁSTICOS E ISOTRÓPICOS

Este anexo aparece no sentido de oferecer a esta dissertação um caráter não só científico, mas também didático. A obtenção da equação constitutiva para materiais isotrópicos com um comportamento linear elástico, tanto para o caso de estado plano de tensão como para o caso de estado plano de deformação, é aqui demonstrada. A escolha de um material isotrópico prende-se com o facto de em engenharia a grande maioria dos materiais serem homogêneos e isotrópicos.

B.1 Materiais com comportamento linear elástico

Neste anexo, a atenção é restrita a materiais com um comportamento linear elástico descrito pela equação constitutiva:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\text{B.1})$$

onde σ_{ij} representa o tensor das tensões, ε_{kl} o tensor das deformações e E_{ijkl} o tensor da elasticidade do material. Visto que o tensor das tensões e o tensor das deformações são simétricos, as componentes de E_{ijkl} têm de satisfazer:

$$E_{ijkl} = E_{jtkl} = E_{ijlk} \quad (\text{B.2})$$

Se, além disso, for assumida a existência de uma densidade de energia de deformação, as componentes de E_{ijkl} devem satisfazer as condições adicionais de simetria:

$$E_{ijkl} = E_{klij} \quad (\text{B.3})$$

Posto isto, o tensor E_{ijkl} assume a sua forma mais simples para materiais isotrópicos:

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (\text{B.4})$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé relacionadas com o módulo de Young, E , e o coeficiente de Poisson, ν . δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Neste caso, a equação constitutiva (B.1) fica:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= \left(\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right) \varepsilon_{kl} \\
 &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl} + 2\mu \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} \varepsilon_{kl} \right) \\
 &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + 2\mu \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ji} \right) \\
 &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2\}
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Repare-se que a equação (B.5) corresponde à lei de *Hooke* 2D escrita para o caso particular dos materiais isotrópicos. A fim de manter alguma especificidade, assumem-se apenas problemas no plano. Expandindo (B.5) através de uma rotação dos índices i, j entre os valores 1 e 2, obtém-se:

$$\sigma_{11} = \lambda \delta_{11} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu \varepsilon_{11} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{22} + 0 \varepsilon_{12} \tag{B.6}$$

$$\sigma_{22} = \lambda \delta_{22} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu \varepsilon_{22} = \lambda \varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{22} + 0 \varepsilon_{12} \tag{B.7}$$

$$\sigma_{12} = \lambda \delta_{12} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu \varepsilon_{12} = 0 \varepsilon_{11} + 0 \varepsilon_{22} + \mu 2 \varepsilon_{12} \tag{B.8}$$

No formato matricial, pode escrever-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & \lambda & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{B.9}$$

B.2 Estado plano de tensão

No caso de se considerar um estado plano de tensão, as constantes de Lamé, $\hat{\lambda}$ e μ , são dadas por:

$$\hat{\lambda} = \frac{Ev}{1 - \nu^2} \quad (\text{B.10})$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{B.11})$$

Sublinhe-se a utilização de $\hat{\lambda}$ em vez de λ como forma de distinguir as expressões desta constante entre os diferentes estados planos de tensão e de deformação.

Substituindo (B.10) e (B.11) em (B.9), e utilizando um pouco de álgebra, resulta:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

que corresponde à equação constitutiva para materiais isotrópicos com um comportamento linear elástico considerando um estado plano de tensão.

B.3 Estado plano de deformação

Para o caso de estado plano de deformação, a constante de Lamé μ continua a ser igual à expressão (B.11). A constante $\hat{\lambda}$, anteriormente definida para estado plano de tensão, é agora substituída pela letra grega λ e dada por:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad (\text{B.13})$$

A substituição de (B.13) e (B.11) em (B.9) origina:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \begin{bmatrix} (1 - \nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1 - \nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - 2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

que corresponde à equação constitutiva para materiais isotrópicos com um comportamento linear elástico considerando um estado plano de deformação.

VALIDAÇÃO DE RESULTADOS ENTRE MÉTODO ADJUNTO E DIFERENÇAS FINITAS

O intuito deste anexo é validar os resultados obtidos pelo método adjunto implementado no programa FEM 2D e utilizado para calcular a sensibilidade da tensão de von Mises em ordem às variáveis de densidade artificial. Para esse efeito, recorreu-se ao método das diferenças finitas calculadas por intermédio da subrotina FiniteDiff implementada no programa *Main*. Os resultados presentes neste anexo comprovam a correta implementação do método adjunto, i.e., validam os resultados fornecidos pelo mesmo.

C.1 Exemplo prático para validação de resultados

Com vista a demonstrar a concordância de resultados entre as duas metodologias mencionadas anteriormente, considere-se o exemplo de uma viga em balanço constituída por 6 elementos Q8, de dimensões $DIM_X = 1$ e $DIM_Y = 0.2$, sujeita às forças concentradas nos nós da extremidade livre representadas na figura C.1.

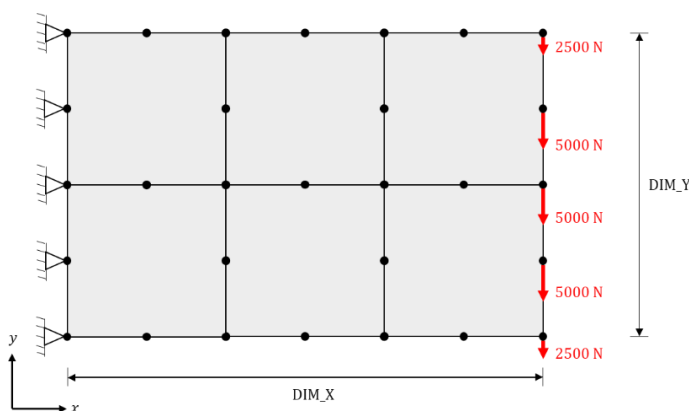


Figura C.1: Viga em balanço para validação de resultados entre método adjunto e diferenças finitas.

Os resultados obtidos numericamente através do método adjunto e do método das diferenças finitas estão indicados nas tabelas C.1 e C.2, bem como o respetivo erro relativo, em

percentagem, entre eles. A primeira contém os valores da derivada da tensão de von Mises, σ_i^{VM} , em ordem à variável topológica $\tilde{\rho}_{1,i}$ e a segunda os valores da derivada em ordem à variável de seleção de material $\tilde{\rho}_{2,i}$. O índice i corresponde ao elemento i , com $i \in \{1, \dots, 6\}$ para o presente caso de estudo. Note-se que como a malha é formada por 6 elementos e a tensão de von Mises tem de ser derivada em ordem a cada uma das variáveis de densidade associadas a cada elemento, ambas as tabelas terão 36 entradas.

De seguida, clarificam-se alguns pormenores subjacentes ao cálculo da derivada da tensão de von Mises, nomeadamente, quais os valores de densidade, expoentes de penalidade e propriedades dos materiais utilizados e quais as expressões a que se recorreram. Por um lado, esclarece-se primeiro que se fixaram os valores do vetor densidade, tanto topológica como de seleção de material, em 0.5. Por outro lado, diga-se que o expoente de penalidade associado à variável topológica tem o valor de 4 e o associado à variável de seleção de material o valor de 1.6. Refira-se ainda que os materiais utilizados neste exemplo são o aço e o alumínio com as mesmas propriedades normalizadas descritas em [112], com um módulo de Young $E = 1$ [GPa] e um coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Por fim, os resultados obtidos numericamente através do método adjunto resultam da implementação da expressão (5.15) e os obtidos através das diferenças finitas resultam da implementação da diferença finita *forward* descrita pela equação:

$$\frac{d\sigma_i^{\text{VM}}}{d\tilde{\rho}_{j,i}} \approx \frac{\sigma_i^{\text{VM}}(\tilde{\rho}_{j,i} + \Delta x) - \sigma_i^{\text{VM}}(\tilde{\rho}_{j,i})}{\Delta x}, \quad j \in \{1,2\}; i \in \{1, \dots, 6\} \quad (\text{C.1})$$

sendo o valor da perturbação igual a $\Delta x = 10^{-6}$. Naturalmente, sendo uma diferença finita do tipo *forward*, se o valor da densidade fosse igual ao *upper bound* do seu intervalo de variação ter-se-ia que fazer uma diferença finita *backward*. No entanto, importa mencionar que se testaram vários valores de perturbação, numa gama bastante alargada de valores, onde foi possível perceber a influência deste parâmetro nos resultados obtidos por diferenças finitas. Este estudo também é aqui apresentado nas tabelas C.3 e C.4. Na primeira é possível observar o valor da derivada da tensão de von Mises relativamente à variável de densidade topológica $\tilde{\rho}_{1,i}$ obtido através da equação (C.1) e testando vários valores de perturbação Δx . Na segunda apresenta-se o erro relativo em percentagem entre os valores obtidos pelas diferenças finitas *forward* para vários valores de perturbação e os valores obtidos através do método adjunto, ambos para a variável topológica $\tilde{\rho}_{1,i}$. Os resultados permitem perceber claramente que existe uma gama de valores de perturbação onde o valor da derivada da tensão de von Mises em ordem às variáveis de densidade é consistente. Repare-se que se o valor de perturbação for muito baixo ou muito elevado os resultados são inconsistentes e afastam-se do valor real da derivada (valores assinalados a vermelho correspondem a desvios superiores a 5%).

Tabela C.1: Comparação de resultados entre método adjunto e diferenças finitas para o cálculo da derivada da tensão de von Mises em relação à variável de densidade $\tilde{\rho}_{1,i}$.

$d\sigma_i^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,i}$	Método Adjunto	Diferenças Finitas	erro (%) = $\frac{\chi^{Finit Diff} - \chi^{Adj Meth}}{\chi^{Adj Meth}} \times 100\%$
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	394367.7	394365.1	-0.00066
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	-82730	-82729.6	-0.00049
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	20270.04	20270.18	0.000704
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	-333654	-333656	0.000604
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	-40539.7	-40539.2	-0.00136
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	-2682.89	-2682.66	-0.0086
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	-129962	-129961	-0.00092
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	412160.3	412159.5	-0.00019
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	-60938.1	-60937.7	-0.00061
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	60892.77	60893.4	0.001033
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	-258413	-258413	9.51E-05
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	16549.33	16549.49	0.001003
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	-434.866	-436.736	0.429872
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	-70756.7	-70757.2	0.000629
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	254462.6	254462.3	-0.00012
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	8790.023	8788.192	-0.02083
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	40279.37	40278.74	-0.00156
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	-227661	-227661	-0.00022
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	-333654	-333656	0.000742
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	-40539.7	-40539.5	-0.0005
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	-2682.89	-2682.81	-0.00287
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	394367.7	394364.7	-0.00077
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	-82730	-82729.9	-9.4E-05
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	20270.05	20270.04	-6.1E-05
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	60892.76	60893.31	0.000901
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	-258413	-258414	0.000182
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	16549.24	16549.24	-2.5E-05
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	-129962	-129961	-0.00086
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	412160.3	412159.3	-0.00023
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	-60938.1	-60937.9	-0.00019
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	8790.023	8789.739	-0.00323
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	40279.37	40279.28	-0.00024
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	-227661	-227661	-0.00013
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	-434.869	-435.163	0.067618
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	-70756.7	-70756.6	-0.00011
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	254462.6	254462.2	-0.00017

Tabela C.2: Comparação de resultados entre método adjunto e diferenças finitas para o cálculo da derivada da tensão de von Mises em relação à variável de densidade $\tilde{\rho}_{2,i}$.

$d\sigma_i^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,i}$	Método Adjunto	Diferenças Finitas	erro (%) = $\frac{\chi^{Finit Diff} - \chi^{Adj Meth}}{\chi^{Adj Meth}} \times 100\%$
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,1}$	61580.33	61581	0.001083
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,2}$	-12918.2	-12917.6	-0.00477
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,3}$	3165.157	3165.446	0.009134
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,4}$	-52099.9	-52099.2	-0.00122
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,5}$	-6330.26	-6329.65	-0.00963
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,6}$	-418.932	-418.634	-0.07104
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,1}$	-20293.5	-20294.3	0.003914
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,2}$	64358.63	64358.31	-0.00051
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,3}$	-9515.45	-9515.49	0.000432
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,4}$	9508.376	9507.606	-0.0081
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,5}$	-40351.1	-40351.4	0.000742
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,6}$	2584.169	2584.113	-0.00219
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,1}$	-67.9042	-66.1439	-2.59226
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,2}$	-11048.6	-11047.4	-0.01144
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,3}$	39734.22	39734.88	0.001653
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,4}$	1372.558	1374.353	0.13079
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,5}$	6289.604	6290.908	0.020728
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,6}$	-35549.2	-35548.5	-0.00188
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,1}$	-52099.9	-52100.1	0.000357
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,2}$	-6330.26	-6330.3	0.000682
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,3}$	-418.932	-418.926	-0.00139
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,4}$	61580.33	61580.16	-0.00027
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,5}$	-12918.2	-12918.3	0.000284
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,6}$	3165.158	3165.148	-0.00032
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,1}$	9508.375	9507.506	-0.00914
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,2}$	-40351.1	-40351.4	0.00072
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,3}$	2584.156	2584.171	0.000577
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,4}$	-20293.5	-20294.3	0.004146
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,5}$	64358.63	64358.36	-0.00042
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,6}$	-9515.45	-9515.45	-2.1E-05
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,1}$	1372.558	1373.153	0.043344
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,2}$	6289.605	6289.94	0.005332
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,3}$	-35549.2	-35549.1	-0.00016
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,4}$	-67.9046	-67.3018	-0.88775
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,5}$	-11048.6	-11048.3	-0.0032
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{2,6}$	39734.21	39734.27	0.000144

Tabela C.3: Valor da derivada da tensão de von Mises relativamente à variável de densidade topológica $\tilde{\rho}_{1,i}$ calculado por diferenças finitas para vários valores de perturbação Δx .

Δx	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	381640.8	365616	391310.8	394060.2	394336.9	394365.1	394347.3	394331.4	393501.9	404238.2	71292.74
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	-76537.7	-82818.3	-82748.6	-82731.9	-82730.2	-82729.6	-82737.9	-82730.8	-83052.7	-75127.5	-222982
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	21630.03	20401.92	20282.76	20271.3	20270.16	20270.18	20269.8	20272.77	20266.74	24017.65	2590.241
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	-603332	-359435	-336170	-333905	-333679	-333656	-333674	-333690	-334506	-323879	-657630
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	-33159.8	-39319.9	-40409	-40526.6	-40538.4	-40539.2	-40547.5	-40538.8	-40846.8	-32950.2	-180746
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	2558.123	-1823.88	-2592.04	-2673.76	-2681.98	-2682.66	-2683.01	-2677.6	-2660.5	1020.962	-20046.7
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	-94722.2	-125371	-129489	-129914	-129957	-129961	-129972	-130071	-130261	-127633	-130432
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	420328.4	399874.8	410825.1	412025.7	412146.8	412159.5	412156.8	412118.2	412117.1	416995	412820.4
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	-49141.3	-59922	-60840	-60928.3	-60937.1	-60937.7	-60937	-60932.1	-60886.1	-57186.7	-67753.7
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	56837.51	60109.49	60809.41	60884.36	60891.84	60893.4	60882.88	60782.72	60587.42	63090.12	63329.94
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	-358855	-267241	-259255	-258497	-258422	-258413	-258417	-258456	-258444	-253522	-254007
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	10285.03	16109.68	16509.24	16545.32	16548.88	16549.49	16550.3	16553.71	16606.82	20202.71	11234.08
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	-1234.42	-508.4	-442.07	-435.612	-434.86	-436.736	-439.147	-475.836	1893.844	-6542.54	40512.53
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	-56398.4	-69039.8	-70581.6	-70739.2	-70754.9	-70757.2	-70756.8	-70764.5	-69466.4	-69177.5	-23620.7
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	250619.6	250886.9	254069.3	254423	254458.7	254462.3	254464.1	254468.6	254749	258530.5	286585.4
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	8268.79	8731.315	8784.089	8789.402	8790.042	8788.192	8785.867	8749.24	11118.13	2828.892	53667.46
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	36258.11	39750.08	40224.78	40273.89	40278.92	40278.74	40279.55	40273.09	41586.58	42230.82	91514.08
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	-214873	-224258	-227283	-227623	-227657	-227661	-227659	-227653	-227384	-223628	-195444
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	-603332	-359435	-336170	-333905	-333679	-333656	-333658	-333592	-333434	-337258	-316533
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	-33159.8	-39319.9	-40409	-40526.6	-40538.5	-40539.5	-40541.4	-40512.8	-40552.8	-41467.1	-25820.9
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	2558.123	-1823.88	-2592.05	-2673.75	-2681.98	-2682.81	-2683.61	-2684.07	-2764.34	-2677.55	-2462.18
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	381640.8	365616	391310.8	394060.2	394336.8	394364.7	394363.8	394429.2	394585.5	390850.5	411737.7
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	-76537.7	-82818.3	-82748.6	-82731.9	-82730.2	-82729.9	-82731.5	-82702.3	-82730.3	-83547.8	-66985.4
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	21630.03	20401.92	20282.76	20271.3	20270.16	20270.04	20269.35	20269.12	20188.34	20292.94	20285.37
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	56837.51	60109.49	60809.41	60884.37	60891.91	60893.31	60875.76	60907.17	59968.79	65527.86	-47870
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	-358855	-267241	-259255	-258497	-258422	-258414	-258420	-258400	-258826	-255791	-296882
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	10285.03	16109.68	16509.24	16545.32	16548.88	16549.24	16548.72	16548.66	16476.67	16506.53	17549.61
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	-94722.2	-125371	-129489	-129914	-129957	-129961	-129979	-129948	-130886	-125414	-239303
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	420328.4	399874.8	410825.1	412025.7	412146.8	412159.3	412153.2	412173.8	411766.9	414837.9	374193.8
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	-49141.3	-59922	-60840	-60928.3	-60937.1	-60937.9	-60938.7	-60937.8	-60990	-60991.7	-61368.3
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	8268.79	8731.315	8784.091	8789.393	8789.923	8789.739	8788.151	8786.446	7802.155	18547.29	-214390
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	36258.11	39750.08	40224.79	40273.89	40278.83	40279.28	40279.11	40280.69	39683.65	47951.47	-76671.1
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	-214873	-224258	-227283	-227623	-227657	-227661	-227660	-227662	-227894	-223888	-265136
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	-1234.42	-508.4	-442.068	-435.621	-434.979	-435.163	-436.86	-438.42	-1426.55	9122.305	-225450
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	-56398.4	-69039.8	-70581.6	-70739.2	-70755	-70756.6	-70756.9	-70755.4	-71348.6	-63245	-189303
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	250619.6	250886.9	254069.3	254423	254458.7	254462.2	254463.5	254460	254228.4	258072.4	214215.8

Tabela C.4: Erro relativo em percentagem entre os valores obtidos por diferenças finitas para vários valores de perturbação e os valores obtidos através do método adjunto, ambos para a variável topológica $\tilde{\rho}_{1,i}$.

Δx	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	-3.22717	-7.2906	-0.77514	-0.07797	-0.00781	-0.00066	-0.00518	-0.00921	-0.21953	2.502872	-81.9223
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	-7.48494	0.106797	0.022535	0.002366	0.000222	-0.00049	0.009631	0.000981	0.390064	-9.18954	169.5298
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	6.709356	0.650595	0.062727	0.00621	0.000568	0.000704	-0.00118	0.013481	-0.01627	18.48839	-87.2213
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	80.82572	7.726972	0.754299	0.075219	0.00752	0.000604	0.006125	0.010776	0.255481	-2.92958	97.09959
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	-18.2043	-3.00899	-0.32259	-0.0325	-0.00327	-0.00136	0.019234	-0.00229	0.757316	-18.7213	345.8499
$d\sigma_1^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	-195.35	-32.0182	-3.38605	-0.34041	-0.03374	-0.0086	0.00439	-0.19717	-0.83459	-138.055	647.2065
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	-27.1154	-3.53269	-0.36392	-0.03649	-0.00359	-0.00092	0.007636	0.083581	0.2302	-1.7919	0.361519
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	1.981763	-2.98077	-0.32395	-0.03266	-0.00328	-0.00019	-0.00086	-0.01022	-0.01048	1.173018	0.160147
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	-19.3587	-1.66737	-0.16094	-0.01606	-0.00162	-0.00061	-0.00175	-0.00974	-0.08529	-6.15602	11.18457
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	-6.65967	-1.28632	-0.13689	-0.01381	-0.00152	0.001033	-0.01623	-0.18072	-0.50145	3.608559	4.002392
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	38.86861	3.416	0.325618	0.03239	0.003254	9.51E-05	0.001275	0.016413	0.011818	-1.89267	-1.70526
$d\sigma_2^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	-37.8523	-2.6566	-0.24224	-0.02422	-0.00271	0.001003	0.00589	0.026501	0.347413	22.07576	-32.1176
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	183.8625	16.90953	1.656505	0.171349	-0.00146	0.429872	0.984233	9.42118	-535.5	1404.494	-9416.09
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	-20.2925	-2.42659	-0.24755	-0.0248	-0.00262	0.000629	0.000108	0.011001	-1.82361	-2.23197	-66.6171
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	-1.51026	-1.40522	-0.15456	-0.0156	-0.00154	-0.00012	0.000579	0.002349	0.112543	1.598601	12.62377
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	-5.92982	-0.66789	-0.06751	-0.00706	0.000221	-0.02083	-0.04728	-0.46396	26.48578	-67.817	510.5498
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	-9.98342	-1.31405	-0.13552	-0.0136	-0.00112	-0.00156	0.000432	-0.0156	3.245355	4.84479	127.1984
$d\sigma_3^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	-5.61703	-1.49496	-0.16607	-0.01679	-0.00171	-0.00022	-0.00073	-0.00358	-0.12183	-1.7715	-14.1514
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	80.82571	7.726968	0.754296	0.075214	0.007543	0.000742	0.001162	-0.01844	-0.06594	1.080093	-5.13121
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	-18.2043	-3.00897	-0.32256	-0.03248	-0.00315	-0.0005	0.004062	-0.06644	0.032256	2.287638	-36.3071
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	-195.35	-32.0182	-3.38604	-0.34045	-0.03373	-0.00287	0.02676	0.044095	3.035959	-0.1989	-8.22638
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	-3.22717	-7.29059	-0.77514	-0.07797	-0.00782	-0.00077	-0.00099	0.015594	0.055239	-0.89186	4.404522
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	-7.48494	0.106799	0.022539	0.002364	0.00027	-9.4E-05	0.001826	-0.03341	0.000421	0.988537	-19.0313
$d\sigma_4^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	6.709311	0.650553	0.062683	0.006176	0.000522	-6.1E-05	-0.00345	-0.00459	-0.40312	0.112912	0.075581
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	-6.65966	-1.28631	-0.13688	-0.01378	-0.00139	0.000901	-0.02792	0.023662	-1.51737	7.611899	-178.614
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	38.8686	3.415995	0.325612	0.032383	0.003239	0.000182	0.00279	-0.00525	0.159757	-1.01465	14.88667
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	-37.852	-2.65611	-0.24174	-0.02372	-0.00221	-2.5E-05	-0.00315	-0.00352	-0.43853	-0.2581	6.044795
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	-27.1154	-3.53269	-0.36391	-0.03649	-0.00364	-0.00086	0.012965	-0.01035	0.71069	-3.49923	84.13347
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	1.981773	-2.98076	-0.32394	-0.03264	-0.00326	-0.00023	-0.00172	0.003275	-0.09543	0.649645	-9.21159
$d\sigma_5^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	-19.3587	-1.66737	-0.16094	-0.01605	-0.00162	-0.00019	0.001135	-0.00039	0.085313	0.088083	0.706093
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,1}$	-5.92983	-0.66789	-0.06749	-0.00717	-0.00114	-0.00323	-0.0213	-0.04069	-11.2385	111.0039	-2539.02
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,2}$	-9.98343	-1.31405	-0.13553	-0.01363	-0.00135	-0.00024	-0.00065	0.003268	-1.47897	19.04721	-290.348
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,3}$	-5.617	-1.49493	-0.16605	-0.01676	-0.00166	-0.00013	-0.00035	0.000653	0.102477	-1.65719	16.46084
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,4}$	183.8607	16.90875	1.655374	0.17283	0.025358	0.067618	0.45782	0.816541	228.0419	-2197.71	51743.15
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,5}$	-20.2924	-2.42653	-0.2475	-0.02473	-0.00243	-0.00011	0.000306	-0.00179	0.83655	-10.6163	167.5407
$d\sigma_6^{VM}/d\tilde{\rho}_{1,6}$	-1.51025	-1.40521	-0.15455	-0.01558	-0.00154	-0.00017	0.000332	-0.00101	-0.09203	1.418593	-15.8164

C.2 Observações

Para finalizar este anexo, é conveniente deixar algumas observações no que diz respeito ao exemplo escolhido e aos fatores que podem influenciar os resultados. Em primeiro lugar, diga-se, em abono da verdade, que embora aqui se tenha considerado um exemplo simples com apenas 6 elementos finitos, foram efetivamente testadas malhas mais refinadas para o exemplo ilustrado na figura C.1. Tal permitiu avaliar a robustez da implementação do método adjunto que foi um dos maiores desafios desta dissertação. Chegaram mesmo a ser testadas malhas constituídas por 1000 elementos. Neste cenário, repare-se que as tabelas C.1 até C.4, em vez de terem 36 entradas, teriam 10^6 . Neste exemplo, foi evidente o quão mais rápido era o método adjunto face ao método das diferenças finitas na execução da análise de sensibilidades da tensão. Por curiosidade, para uma estrutura igual à da figura C.1 constituída por

1000 elementos, o programa demorava poucos segundos a executar todos os cálculos através do método adjunto enquanto demorava várias horas a efetuá-los caso se recorre-se ao método das diferenças finitas.

Por outro lado, não se pode deixar de mencionar a importância do carregamento escolhido. A escolha de um carregamento que colocasse a estrutura da figura C.1 à flexão não foi um mero acaso, embora os valores das forças concentradas aplicadas na extremidade direita tenham sido escolhidos arbitrariamente. Um carregamento de flexão contribui para um aumento da exigência do cálculo destas derivadas, pois todos os termos do tensor das tensões e do tensor das deformações são diferentes de zero. Desta forma, garante-se que não existem termos nulos que possam estar a esconder erros na implementação do método adjunto.

Em adição, observou-se que existem alguns fatores que contribuem para um maior afastamento entre os resultados obtidos através do método adjunto e através do método das diferenças finitas. Por um lado, notou-se que, quanto maior era o número de elementos da malha, mais influência tinha a perturbação Δx escolhida no cálculo das diferenças finitas. Observava-se que a gama de valores de perturbação onde existia uma consistência no valor da derivada (reveja-se as tabelas C.3 e C.4 onde $\Delta x \in [10^{-3}, \dots, 10^{-8}]$) tornava-se cada vez mais pequena. Por exemplo, na malha de 1000 elementos, observou-se que o único valor de perturbação que fornecia bons resultados era $\Delta x = 10^{-3}$, e que era nos casos onde o valor da derivada se aproximava de zero que o desvio entre o método adjunto e o método das diferenças finitas tendia a ser maior. A experiência adquirida mostra que, quanto maior for o número de elementos da malha, mais curto é o intervalo de consistência de resultados no cálculo das diferenças finitas e o valor da perturbação recomendado é mais grosseiro do que mais pequeno. Embora $\Delta x = 10^{-3}$ (perturbação de 0.1%) fosse um valor empírico, fornecia bons resultados.

Por último, observou-se também que o programa FEM 2D, ao utilizar o *Penalty Method* para impor condições de fronteira de deslocamento nulo, atribuía uma constante elástica (*spring constant*) suficientemente elevada aos nós a serem constrangidos. Este método coloca uma mola extremamente rígida nesses graus de liberdade para não os deixar deslocar. O valor desta constante é fornecido ao programa através de um ficheiro "FEM.dat" e deve ser ajustada consoante a intensidade do carregamento que se está a considerar. Não deve, contudo, ser muito baixa sob o risco de não conseguir constranger adequadamente os graus de liberdade pretendidos, ou muito elevada sob o risco de causar erros numéricos tanto no cálculo dos deslocamentos como no cálculo da derivada da tensão.

D

REPRESENTAÇÃO DO VETOR DE CARGA FICTÍCIA NO ELEMENTO Q8 À FLEXÃO

Este anexo destina-se a ilustrar um exemplo concreto da representação do vetor de carga fictícia (*dummy load vector*) num elemento quadrilátero de 8 nós, Q8, sujeito a um carregamento de flexão com vista a validar os comentários referidos no tópico 5.1.2.

D.1 Exemplo

Comece-se por considerar a estrutura representada na figura D.1. Esta última corresponde a uma adaptação da figura A.4 tendo em conta os seguintes aspetos: (1) são considerados agora quatro elementos Q8; (2) as dimensões da placa continuam unitárias, mas agora a dimensão L de cada elemento reduz-se a metade, reveja-se a equação (A.9) do anexo A; (3) as forças concentradas nos nós foram movidas para a aresta inferior da placa.

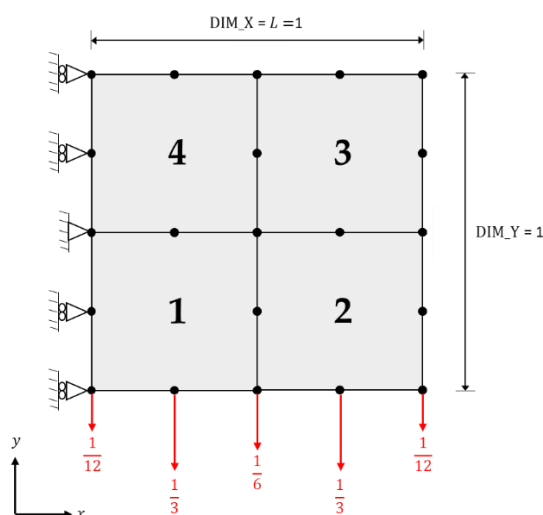


Figura D.1: Modelação de uma placa de dimensões unitárias através de quatro elementos quadriláteros de 8 nós sujeita a uma tensão distribuída unitária $\sigma_{yy} = 1$ Pa aplicada na aresta inferior.

D.2 Representação do vetor de carga fictícia

O cálculo do vetor de carga fictícia foi efetuado com recurso à equação (5.22) considerando as propriedades normalizadas referidas em [112], com $E = 1$ [GPa] e $\nu = 0.3$. Todos os valores dos vetores densidade artificial topológica e de seleção de material, $\tilde{\rho}_{1,i}$ e $\tilde{\rho}_{2,i}$, com $i \in \{1, \dots, ne\}$, respetivamente, foram tomados constantes e iguais a 0.5. Os expoentes de penalidade são $p_1 = 4$ e $p_2 = 1.6$. Posto isto, encontra-se na figura D.2 a representação dos valores de carga fictícia nos nós de cada um dos elementos da estrutura da figura D.1.

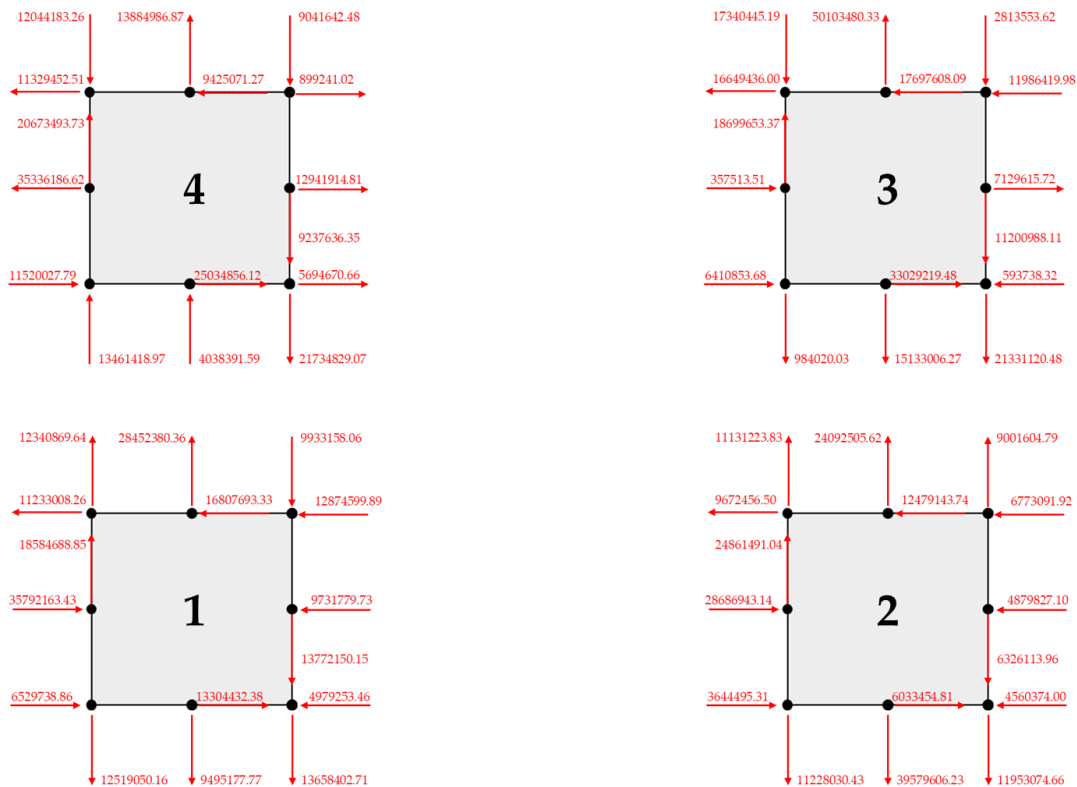


Figura D.2: Ilustração do vetor de carga fictícia em cada um dos quatro elementos da estrutura da figura D.1.

Da análise da figura D.2, percebe-se que todas as cargas fictícias são diferentes, mesmo nos nós partilhados. Inclusive, as cargas podem ainda ter sentidos contrários ou o mesmo sentido nesses mesmos nós. Tal não se verificaria se as forças concentradas aplicadas nos nós da aresta inferior da placa da figura D.1 estivessem aplicadas nos nós da aresta vertical livre da placa (simulação de uma placa à tração). Nesse caso, as forças concentradas aplicadas em nós opostos teriam o mesmo valor e sentidos contrários. A justificação mais plausível para estes resultados está relacionada com os valores das componentes do tensor das tensões. No caso de a placa estar à tração, o que corresponderia a mover as forças concentradas da figura D.1 para a aresta vertical livre, as componentes do tensor das tensões são iguais entre pontos de Gauss e entre elementos. Na situação da placa estar sujeita a um carregamento de flexão, todas

as componentes do tensor são diferentes entre pontos de Gauss e entre elementos (o mesmo verifica-se para as componentes do tensor das deformações).



(2022)

Rui Miguel Ferreira da Silva

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA BASEADA NA TENSÃO DE ESTRUTURAS COM
GRADIENTE DE FUNCIONALIDADE