Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

"OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS EN MERCADOS COMPLETOS E INCOMPLETOS"

TESIS

QUE PRESENTA

GONZALO COLIN CERON

MATRÍCULA 2183802559

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DIRECTORA:

DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA

JURADO:

DR. CARLOS IBARRA VALDEZ
DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA
DR. ERICK TREVIÑO AGUILAR

Iztapalapa, Ciudad de México, junio 2021.

A mis amados padres y hermanos.

Agradecimientos

A la doctora Patricia Saavedra Barrera por su guía, atención, tiempo y todo apoyo proporcionado durante el proceso de elaboración de la presente tesis.

A los doctores Carlos Ibarra Valdez y Erick Treviño Aguilar por su tiempo y atención en la revisión del trabajo, así como sus valiosos comentarios.

A la Universidad Autónoma Metropolitana y la Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales por proveer todos los elementos académicos para mi formación.

Al CONACYT por brindarme la beca gracias a la cual pude dedicarme a la maestría en tiempo completo.

Mi mayor agradecimiento a mis padres y hermanos por apoyarme de forma incondicional en todos los aspectos en el transcurso de esta etapa, así como lo han hecho durante toda mi vida. A ustedes dedico mi esfuerzo, los amo.

Índice general

Introducción

Uno de los problemas principales en finanzas matemáticas es el de maximizar la utilidad esperada de la riqueza terminal de un inversionista que participa en un mercado financiero. La relevancia de su estudio radica en la noción básica de que un agente económico, al participar como inversionista en un mercado financiero, busca satisfacer una expectativa sobre su riqueza. Dicha expectativa difiere en cada individuo e, incluso, en cada inversión. Dos de los factores principales que determinan qué espera el agente de su riqueza inicial al participar en un mercado, son el monto de riqueza terminal y el riesgo en que se incurre. Estas dos consideraciones son capturadas en una función de utilidad, la cual refleja las preferencias del inversionista ante variaciones en los niveles de riesgo y monto de la riqueza. Son estas características las que diferencian el problema de maximizar la utilidad esperada y el de maximizar el monto de la riqueza terminal o el de minimizar el riesgo de un decremento en la riqueza.

Existen distintos enfoques desde los que se aborda este problema. En el marco de tiempo continuo fue estudiado por primera vez por Robert Merton en dos publicaciones de 1969 y 1971. Mediante el uso de métodos de control óptimo estocástico, Merton derivó una ecuación diferencial parcial no lineal, conocida como ecuación de Bellman, para la función de valor del problema de optimización. Y presentó la solución en forma cerrada de esta ecuación, para los casos de función de utilidad de potencia, exponencial y logarítmica. La ecuación de Bellman de programación estocástica está basada en el supuesto de procesos de Markov. El enfoque moderno al problema de maximización de la utilidad esperada, que permite evitar el supuesto de procesos de precios de Markov, se basa en caracterizaciones duales de portafolios, ofrecidas por la existencia de medidas de probabilidad equivalentes a la medida de probabilidad original y por lo cual puede hacerse un cambio de medida. Estas medidas reciben el nombre de medidas martingala, debido a que los procesos estocásticos que modelan los precios descontados de los activos que componen el mercado deben satisfacer la propiedad de martingala bajo estas medidas de probabilidad.

Al invertir en un mercado financiero se tiene la intención de hacer un reclamo por un monto mayor en un horizonte de tiempo determinado. Dado un reclamo de la riqueza, puede presentarse el caso de que exista una estrategia de inversión mediante la cual se puede alcanzar el monto reclamado, así como puede presentarse el caso contrario. La posibilidad de estas situaciones da lugar a una clasificación de los mercados financieros. Un primer tipo son los mercados completos, en los que cualquier reclamo puede ser alcanzado mediante una estrategia de inversión. Los mercados incompletos, por otra parte, son aquellos en los que se puede presentar un reclamo que no se puede satisfacer con alguna estrategia. En términos de medidas de probabilidad; en un mercado completo se cuenta con una única medida equivalente a la medida original, que cumple con los requerimientos necesarios para poder hacer el cambio de medida; mientras que en los incompletos no es única la medida que los satisface.

Para el caso de mercados financieros completos, esta metodología de martingalas fue desarrollada por Stanley R. Pliska en [Pl 86]. En donde se prueba que la utilidad marginal de la riqueza terminal del portafolio óptimo es proporcional a la densidad de la medida martingala.

El estudio de la metodología en mercados financieros incompletos tiene un mayor grado de dificultad. Fue presentado por He y Pearson [HePea 91], y por Karatzas et al. [KLSX 91]. La idea principal es resolver un problema variacional dual y después encontrar la solución del problema original por dualidad convexa. El estudio de la maximización de la utilidad esperada en modelos de mercados incompletos es de particular importancia, debido a que tienen una mayor cercanía con la realidad en comparación con los mercados completos, en los que cualquier reclamo puede ser alcanzado mediante alguna estrategia de inversión.

Este trabajo presenta una introducción a los conceptos básicos de finanzas matemáticas y su aplicación en el desarrollo de la teoría utilizada para poder plantear y resolver el problema de optimizar un portafolio de inversión en mercados completos e incompletos, con respecto a una función de utilidad, mediante un enfoque que aprovecha las ventajas que ofrece la teoría de dualidad convexa. Este enfoque es el que presenta Walter Schachermayer en [Sc 03]. Esta teoría se desarrolla en etapas para facilitar su entendimiento.

Primero se tratan modelos de mercados financieros definidos sobre espacios de probabilidad finitos, tanto completos como incompletos, lo cual reduce las dificultades técnicas. Posteriormente se discute sobre las ideas principales de la teoría general para modelos sobre espacios de probabilidad de dimensión infinita. Se acompaña cada uno de estos casos con ejemplos de mercados, en los que se corroboran los supuestos necesarios para hacer uso de los resultados presentados y, de forma adicional, se obtienen las estrategias que permiten generar los reclamos contingentes que optimizan la utilidad esperada de una inversión.

Objetivo

Presentar la metodología en que consiste el enfoque moderno para resolver el problema de optimizar la utilidad esperada de la riqueza terminal de un portafolio de inversión en un mercado incompleto, acompañada de ejemplos prácticos que muestren su implementación.

Contenido

El trabajo se desarrolla en 3 capítulos, basándose ampliamente en el artículo de W. Schachermayer [Sc 03]. El primero introduce los conceptos básicos de finanzas matemáticas en el marco simplificado que ofrecen los modelos de mercado de un solo periodo, siguiendo la presentación de Pliska [Pl 97]. El objetivo es brindar un panorama del problema que se trata y del enfoque con el que se aborda, de una forma accesible y breve.

El segundo capítulo se restringe al caso de un espacio de probabilidad finito, con la finalidad de reducir las dificultades teóricas que se presentan en los teoremas principales y en su lugar se gana una mayor claridad en el entendimiento de las ideas básicas que presentan los problemas de finanzas matemáticas. En este capítulo se enuncia y demuestra un teorema de existencia y unicidad de la estrategia de inversión óptima, así como su relación con el problema dual. El teorema tiene su versión para mercados completos y otra para incompletos. En esta última, el resultado se basa en encontrar una medida martingala equivalente óptima, con respecto a la función conjugada de la función de utilidad. El capítulo finaliza con ejemplos de cada tipo de modelo sobre espacios de probabilidad de dimensión finita, para presentar la forma de aplicar los resultados y, adicionalmente, se obtienen las estrategias de inversión mediante las cuales se alcanza el optimizador que se enuncia en el teorema.

En el último capítulo se trata el problema de la maximización de utilidad y de su teoría de dualidad para un modelo general, es decir, sobre un espacio de probabilidad infinito. En este caso se deben imponer algunas condiciones de regularidad para obtener un resultado de existencia, similar al que se encuentra en el caso de un espacio de probabilidad finito. Se explica que se puede dar una condición necesaria y suficiente, la cual trata sobre el comportamiento asintótico de la función de utilidad y recibe el nombre de elasticidad asintótica razonable. Este término se debe a una interpretación económica y está relacionado con la aversión al riesgo relativa de la función de utilidad. Una observación importante es que la condición de regularidad se hace únicamente sobre la función de utilidad, sin imponer alguna condición adicional al proceso estocástico que modela los precios de los activos que componen al mercado financiero. De igual forma, en este capítulo se presentan ejemplos de cada tipo de modelo sobre espacios de probabilidad de dimensión infinita. En este caso, el teorema no indica la forma del optimizador, lo cual sí se puede observar en los ejemplos y, además, se presentan también las estrategias mediante las que se alcanza el optimizador de cada problema.

En los apéndices se pueden encontrar los antecedentes teóricos que se requieren para desarrollar la metodología que resuelve el problema. Se presentan los elementos necesarios de la teoría de probabilidad y procesos estocásticos, así como algunos resultados de análisis funcional y análisis convexo que se requieren para poder demostrar la validez de los principales teoremas de este estudio. Posteriormente se presenta la teoría de optimización convexa que se requiere para poder desarrollar la solución del problema en cuestión.

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Modelos de mercado de un solo periodo

1.1.1. Portafolios de inversión

Un mercado financiero se compone de un conjunto de activos, cuyo precio varía con el tiempo, afectados por diversos factores económicos. El objetivo de los participantes es obtener rendimientos al invertir en el mercado. Para la toma de decisiones se estudian los mercados con la ayuda de modelos, los cuales son representaciones simplificadas basadas en supuestos. En esta sección se presenta un primer tipo de modelo, en el que se consideran únicamente dos tiempos, el inicio y el final de un periodo determinado. Esta sección está ampliamente basada en [Pl 97].

La variable que se utiliza para denotar los dos momentos en que se observa el valor de la inversión es t, tomando los valores cero y uno. Las circunstancias con las que se cuenta al inicio del periodo se suponen conocidas, al pensarse como actuales, sin embargo, se tiene incertidumbre sobre las que se presentarán al final del periodo. En este caso se supone que se conocen los posibles estados del mundo, que conforman un espacio muestral finito $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, además de sus probabilidades, las cuales son estrictamente positivas para cada estado, para alguna medida de probabilidad $\mathbf{P}$, sobre Ω. Los precios de los activos se modelan mediante un proceso $S = ((S_t^i)_{t=0,1})_{i=0}^d$. Donde d denota el número de activos disponibles en el mercado. De esta forma, la variable S_t^i indica el precio del activo i al tiempo t. El precio S_t^0 corresponde a un activo libre de riesgo. Sin pérdida de generalidad, siempre se puede considerar el precio inicial $S_0^0 = 1$, ya que se puede elegir este activo como numéraire, es decir, la unidad estándar base. Recibe la denominación "libre de riesgo"debido a que su precio solamente es afectado por una tasa de interés no negativa. En este caso se considera una tasa de interés determinista, denotada por la constante no negativa r, es decir, $S_1^0 = 1 + r$.

Estrategias de inversión

Dadas las especificaciones previas que conforman el modelo, se define una estrategia de inversión como un vector $H = (H_0, H_1, \ldots, H_d)$ en $\mathbb{R}^{d+1}$, donde la primera entrada indica un monto a invertir en el activo libre de riesgo y las siguientes d, la cantidad de cada activo disponible a mantener durante todo el periodo. La posibilidad de que las entradas de H sean negativas, se explica por la posibilidad de realizar ventas en corto, o de mantener préstamos.

La valuación de cada estrategia está dada por el proceso $X = (X_t)_{t=0,1}$, donde

$$X_t = H_0 S_t^0 + \sum_{i=1}^{d} H_i S_t^i, \tag{1.1}$$

para $t = 0, 1$. Si se denota por ΔS^i a la variación en el precio del activo i, es decir, $S_1^i - S_0^i$; se puede definir un proceso para las ganancias por

$$G = H_0 r + \sum_{i=1}^{d} H_i \Delta S^i, \tag{1.2}$$

de donde puede observarse que $X_1 = X_0 + G$. Con la finalidad de estudiar la relación que existe en las variaciones de los precios asociados a los activos, se definen los procesos de precios, valor y ganancias descontados. El primero se obtiene descontando con respecto al proceso S^0, es decir, $S_t^{i*} = S_t^i / S_t^0$. El proceso del valor descontado es

$$X_t^* = H_0 + \sum_{i=1}^{d} H_i S_t^{i*} \tag{1.3}$$

y el proceso de ganancias descontadas es

$$G^* = \sum_{i=1}^{d} H_i \Delta S^{i*}. \tag{1.4}$$

Son observaciones importantes las igualdades $X_t^* = X_t/S_t^0$ y $X_1^* = X_0^* + G^*$. Tomando en cuenta los conceptos definidos hasta este punto, es posible comparar estrategias de inversión tomando en cuenta sus valores al inicio y final del periodo, así como sus procesos de ganancias. Estas comparaciones serían suficientes para elegir entre las posibles estrategias. Es claro que este modelo es muy simple aún, por lo que dista mucho de la realidad. En los mercados financieros existen muchas situaciones no previstas en estos conceptos que dificultan la valuación y elección de estrategias. Es por estas circunstancias que deben considerarse más conceptos que acerquen el modelo a la realidad.

Oportunidades de arbitraje

Un primer caso de interés es el pensar en estrategias que puedan otorgar ganancias sin que exista el riesgo de pérdidas. En los mercados financieros, los inversionistas buscan maximizar sus rendimientos, sujeto a una minimización del riesgo o, en caso inverso, buscan minimizar su riesgo sujeto a un nivel de ganancia. En caso de que existieran estrategias como las previamente mencionadas, serían identificables y todo mundo optaría por ellas.

Un primer concepto relacionado con este tipo de situaciones es el de estrategia dominante, el cual hace una comparación entre las valuaciones al final del periodo de dos estrategias que tienen un mismo valor al inicio. La definición concreta es la siguiente:

Definición 1.1. *Sean H, H' dos estrategias tales que $X_0 = X_0'$; se dice que H es dominante si $X_1(\omega) > X_1'(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$. Donde X_0, X_1 son las valuaciones de la estrategia H, mientras que X_0', X_1' son las valuaciones de la estrategia H'.*

Lo que indica esta definición es la posibilidad de existencia de estrategias que inician con el mismo valor y que, sin embargo, una de ellas tiene un valor mayor al final del periodo sin importar cuales sean las circunstancias que se presenten, es decir, de forma segura se tendrá una mayor ganancia.

Existen caracterizaciones que expresan de forma más dramática la trascendencia que tiene la existencia de este tipo de estrategias.

Proposición 1.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- *Existe una estrategia dominante.*
- *Existe una estrategia con* $X_0 = 0$ *y* $X_1(\omega) > 0$ $\forall \omega \in \Omega$.
- *Existe una estrategia con* $X_0 < 0$ *y* $X_1(\omega) \geq 0$ $\forall \omega \in \Omega$.

Como ya se mencionó, el primer tipo de estrategia, que es la dominante, indica que existe una estrategia que en cualquier escenario terminará con un valor mayor al de otra con el mismo valor inicial. El segundo tipo de estrategia indica que, partiendo de no hacer una inversión, existe la probabilidad de tener una ganancia sin tener riesgo de pérdida. La existencia del tercer tipo de estrategia tiene una implicación de impacto conceptual aún mayor. Partiendo de una riqueza negativa, o un estado de endeudamiento, se da que en cualquier escenario al final del periodo esa riqueza habrá aumentado al pasar de ser negativa a nula o, incluso, ser positiva.

La existencia de este tipo de estrategias está claramente fuera de lo que se espera en un mercado real, por lo que se requiere agregar al modelo una restricción para evitar que éstas se susciten. La forma de asegurar su ausencia es que exista una medida lineal de precio, la cual es un vector no negativo $\pi = (\pi(\omega_1), \ldots, \pi(\omega_N))$ que cumple

$$X_0^* = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) X_1^*(\omega),$$

para toda estrategia H.

De esta forma, si una estrategia tiene un valor mayor que otra al tiempo 1, bajo cualquier escenario, entonces también tendrá un valor inicial mayor, evitando así la existencia de estrategias dominantes.

Sustituyendo los valores de X_0^* y X_1^*, en la condición que satisface el vector para ser medida lineal de precio, se tiene la igualdad

$$H_0 + \sum_{i=1}^{d} H_i S_0^{i*} = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \left[H_0 + \sum_{i=1}^{d} H_i S_1^{i*}(\omega) \right]. \tag{1.5}$$

Al tomar $H_i = 0$ para $i = 1, \ldots, d$ se tiene que

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1, \tag{1.6}$$

por lo que π se puede considerar como una medida de probabilidad sobre Ω. Si en lugar de considerar como cero a todas las $H_i, i \geq 1$, se toma una de ellas diferente a cero, se obtiene la igualdad

$$S_0^{i*} = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) S_1^{i*}(\omega). \tag{1.7}$$

Recíprocamente, si se toman como ciertos estos dos hechos para π, se cumple también la condición para que sea medida lineal de precio. Por lo tanto, π es medida lineal de precio si y sólo si es una medida de probabilidad sobre Ω que cumple 1.7.

Al entenderse π como una medida de probabilidad, se puede interpretar que el valor descontado al inicio del periodo es la esperanza bajo π del valor descontado al final del periodo. Y de forma similar para el precio descontado de cada activo.

Se han considerado pares de estrategias con un mismo valor inicial y que el valor de una de ellas es mayor al de la otra en cualquier escenario al final del periodo. Con un enfoque un tanto distinto, se dice que la *ley de un solo precio* se cumple si no existen dos estrategias que tengan un mismo valor descontado al tiempo uno bajo cualquier escenario, siendo que su valor inicial es distinto. Por otro lado, si la ley de un solo precio no se cumple, se puede construir una estrategia dominante, partiendo de las estrategias con mismo valor final y diferente valor inicial.

En los casos de las estrategias dominantes, se tiene como consecuencia que un inversionista tiene a su disposición la posibilidad de iniciar con una riqueza cero y sin riesgo alguno obtener al final del periodo una ganancia, bajo cualquier escenario. Este tipo de escenarios son muy drásticos y por ello se descarta su consideración, sin embargo, existen estrategias que se encuentran más acercadas a la realidad, al relajar la condición de que el valor final sea estrictamente positivo para cualquier escenario que se suscite. A estas estrategias se les conoce como oportunidades de arbitraje, y se encuentran definidas por tres características.

Definición 1.3. *Se dice que una estrategia H es una oportunidad de arbitraje si satisface:*

- $X_0 = 0$,
- $X_1 \geq 0$, y
- $\mathbf{E}[X_1] > 0$.

Esta sutil diferencia hace un cambio que acerca a la realidad estas estrategias que desequilibran al mercado. En estas, sigue sin haber riesgo de pérdida, solamente que al iniciar con un valor cero ya no se tiene la certeza de terminar con alguna ganancia en todos los escenarios. Aquí existe la oportunidad de tener alguna ganancia en algún escenario. De hecho, al ser $\mathbf{E}[X_1] > 0$, se tiene que $X_1(\omega) > 0$, al menos para un ω. De estas observaciones se sigue que la existencia de estrategias dominantes garantiza la existencia de oportunidades de arbitraje, aunque el recíproco no es necesariamente cierto.

Un par de caracterizaciones de las oportunidades de arbitraje son los siguientes conjuntos de condiciones.

Proposición 1.4. *Una estrategia es una oportunidad de arbitraje si y solo si*

- $X_0^* = 0$,
- $X_1^* \geq 0$, y
- $\mathbf{E}[X_1^*] > 0$.

Este primer conjunto de condiciones se sigue del hecho de que $S_t^0 > 0$ para ambos tiempos. De este conjunto se puede construir el siguiente par de condiciones, que también es una equivalencia con las condiciones en la definición de oportunidad de arbitraje.

Proposición 1.5. *Una estrategia es una oportunidad de arbitraje si y solo si*

- $G^* \geq 0$, y
- $\mathbf{E}[G^*] > 0$.

1.1.2. Medidas de probabilidad neutrales al riesgo

Para anular la posibilidad de que existan estrategias dominantes, se introdujo el concepto de medida lineal de precio. Sin embargo, aún pueden presentarse oportunidades de arbitraje, por lo que se requieren introducir medidas de probabilidad que asignen un valor estrictamente positivo para cada escenario ω.

Definición 1.6. *Sea* $\mathbf{Q}$ *una medida de probabilidad sobre* Ω*, se dice que* $\mathbf{Q}$ *es una medida de probabilidad neutral al riesgo, si satisface:*

- $\mathbf{Q}(\omega) > 0 \ \forall \omega \in \Omega$, *y*
- $\mathbf{E_Q}[\Delta S^{i*}] = 0, \quad i = 1, ..., d.$

Dado que S_0^{i*} es una constante para $i = 1, \ldots d$, se sigue de la segunda condición y de la linealidad de la esperanza que $\mathbf{E_Q}[S_1^{i*}] = S_0^{i*}$ para los d activos disponibles en el mercado. Es decir, se mantiene la observación de que el valor esperado del precio descontado de un activo, al final del periodo, es justamente su precio descontado inicial, bajo una medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbf{Q}$.

De la definición de oportunidad de arbitraje, se tiene que es una estrategia que cuenta con una probabilidad estrictamente positiva de hacer una ganancia en al menos un escenario, sin riesgo de pérdida. Lo cual implica, activo por activo, que se cumple alguna de las siguientes condiciones.

- $\Delta S^{i*}(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega$, con $\Delta S^{i*}(\omega) > 0$ para algún $\omega \in \Omega$.
- $\Delta S^{i*}(\omega) \leq 0 \ \forall \omega \in \Omega$, con $\Delta S^{i*}(\omega) < 0$ para algún $\omega \in \Omega$.

Por lo que $\mathbf{E_Q}[\Delta S^{i*}]$ no podría ser igual a cero en cualquiera de los dos casos, para cualquier medida de probabilidad, $\mathbf{Q}$, anulando así la posibilidad de existencia de medidas de probabilidad neutrales al riesgo. De forma inversa, la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbf{Q}$, indica que $\mathbf{E_Q}[\Delta S^{i*}] = 0$ para cualquier activo i. Por lo tanto, no se podría contar con que algún activo cumpla alguna de las características mencionadas previamente para los incrementos de sus precios descontados, eliminando así la posibilidad de existencia de oportunidades de arbitraje.

A continuación, se presenta una primera versión del resultado central de la teoría de valuación de activos por no-arbitraje, conocido como el teorema fundamental de valuación de activos, el cual prueba la equivalencia entre la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo y el cumplimiento de la condición de no arbitraje en un mercado. Más recientemente, este resultado se conoce también como primer teorema fundamental de valuación de activos, debido a la introducción del segundo teorema fundamental de valuación de activos, el cual muestra que un mercado que cumpla la condición de no arbitraje es completo si y solo si existe una única medida de probabilidad neutral al riesgo.

Proposición 1.7. ***(Teorema fundamental de valuación de activos).*** *Existe una medida de probabilidad neutral al riesgo si y solo si no existen oportunidades de arbitraje.*

Demostración. La explicación previa a la afirmación muestra la recíproca implicación cuando se trabaja con un solo activo a la vez, aun así, la afirmación es válida aun cuando se trabaje con dos o más activos a la vez. Al trabajar con más de un activo, las implicaciones se complican en su explicación, por la interacción que existe entre los activos. Esta interacción puede devenir en tres posibles situaciones con respecto a las medidas de probabilidad neutrales al riesgo; puede darse la existencia con condición de unicidad, existencia de una infinidad de ellas o puede no existir medida de probabilidad neutral al riesgo alguna.

Para el caso en el que se tienen dos o más activos, se considera al conjunto de variables aleatorias G^*, denotado por $\mathcal{W}$. Donde cada elemento es la ganancia descontada de una estrategia H. Se considera también al conjunto $\mathcal{A}$ como el ortante no negativo de $\mathbb{R}^N$, donde N es el número de posibles escenarios a presentarse al tiempo 1. Se observa entonces que existe una oportunidad de arbitraje si y solo si $\mathcal{W} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Por otra parte, si se considera $\mathcal{W} \cap \mathcal{A} = \emptyset$, por el teorema de separación se implica la existencia de un rayo en $\mathcal{W}^{\perp}$, cuyos puntos, exceptuando el origen, tienen componentes positivas. Uno de estos puntos tiene, adicionalmente, la característica de que sus componentes suman uno. Este punto se entiende como una medida de probabilidad. Se tiene entonces el indicio de que $\mathcal{W} \cap \mathcal{A} = \emptyset$ si y sólo si $\mathcal{W}^{\perp} \cap \mathcal{P}^{+} \neq \emptyset$. Donde $\mathcal{P}^{+}$ es el conjunto de puntos en el ortante no negativo de $\mathbb{R}^N$ cuyos componentes son todos positivos y suman uno. Tomando d estrategias tales que sus componentes del segundo al $d+1-$ésimo coinciden con los vectores de la matriz identidad de $d \times d$, se puede observar que ΔS^{i*}

$\in \mathcal{W}$, $i = 1, \ldots, d$; y, por lo tanto, todos los elementos de $\mathcal{W}^{\perp} \cap \mathcal{P}^{+}$ son medidas de probabilidad neutrales al riesgo. Por otra parte, si se toma $\mathbf{Q}$ medida de probabilidad neutral al riesgo, se tiene que para cualquier estrategia H se cumple $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[G^*] = 0$, ya que $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\Delta S^{i*}] = 0$; $i = 1, \ldots, d$. Por lo tanto $\mathbf{Q} \in \mathcal{W}^{\perp} \cap \mathcal{P}^{+}$, es decir, $\mathcal{W}^{\perp} \cap \mathcal{P}^{+}$ es el conjunto de todas las medidas de probabilidad neutrales al riesgo. En otras palabras, se confirma que no existen oportunidades de arbitraje si y solo si existe una medida de probabilidad neutral al riesgo. $\square$

1.1.3. Valuación

Después de definir el modelo de un solo periodo, los conceptos que pueden alejarlo de la realidad y las formas de evitar caer en estas situaciones, se introducen ahora conceptos sobre valuación y se identifican tipos de mercados en los que se harán estas valuaciones.

Reclamos contingentes

Un reclamo contingente es una variable aleatoria K que representa el valor de un pago a realizarse al tiempo terminal. Se puede interpretar este pago como parte de un contrato entre dos partes al tiempo inicial $t = 0$, en el que un vendedor acuerda pagarle a un comprador el monto $K(\omega)$ en el tiempo terminal si ω resulta ser el estado del mercado en dicho momento. Por lo tanto, el valor de dicha variable va a depender de la ocurrencia del escenario ω. La aleatoriedad de este pago se encuentra en el desconocimiento al inicio del periodo del escenario a suscitarse al tiempo final. El problema de interés es obtener el valor inicial k que resulte justo para ambas partes, mediante el cual se crea el compromiso de cumplir con el reclamo contingente al final del horizonte de tiempo. Debido a la teoría de valuación enfocada en el concepto de arbitraje, es usual que el valor justo para ambas partes en el contrato al tiempo cero sea único.

Un reclamo contingente K es replicable si existe una estrategia H tal que $X_1 = K$. A la estrategia que cumple esta característica se le conoce como portafolio replicante y se dice que genera a K. Si se denota por k al valor de K al tiempo cero y se considera que $k \neq X_0$, entonces se puede generar una ganancia $\mid k - X_0 \mid$ si se sigue la estrategia H o $-H$, dependiendo si $k - X_0$ es positivo o negativo, sin incurrir en riesgo de pérdida. Si $k = X_0$ aún podría existir la posibilidad de generar una ganancia sin riesgo si es que existe una estrategia H' que también genera a K, pero tiene un valor inicial $X'_0 \neq X_0$. En otras palabras, se podría generar aún una ganancia sin riesgo si la ley de un solo precio no se cumple. Este escenario puede ser cubierto mediante la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo e, incluso, con la existencia de una medida lineal de precio.

Como se ha mencionado previamente, si existe una medida de probabilidad neutral al riesgo, $\mathbf{Q}$, entonces $\mathbf{E_Q}[X_1^*] = X_0^*$ para cualquier estrategia H. Adicionalmente, si se tiene un reclamo contingente K, replicable, y la ley de un solo precio se cumple, lo cual está garantizado ante la existencia de $\mathbf{Q}$; entonces el valor inicial k de K es el valor al inicio del periodo, X_0^*, de su correspondiente portafolio replicante. Estas dos observaciones dan lugar al siguiente enunciado.

Proposición 1.8. ***Principio de valuación neutral al riesgo.*** *En un modelo de un solo periodo libre de oportunidades de arbitraje, el valor inicial de un reclamo contingente K es $\mathbf{E_Q}[K/S_1^0]$, donde $\mathbf{Q}$ es una medida de probabilidad neutral al riesgo.*

1.1.4. Mercados completos e incompletos

Aún dada la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo, el principio de valuación enunciado no es siempre aplicable. Esto depende de que el reclamo contingente sea replicable. Se introduce ahora una clasificación de los modelos de mercados.

Definición 1.9. *Se dice que un modelo es completo si todo reclamo contingente puede ser generado por una estrategia, en otro caso se llama incompleto.*

Para los modelos completos se cuenta con la siguiente proposición.

Proposición 1.10. *Si no existen oportunidades de arbitraje, un modelo es completo si y solo si el número de escenarios que se pueden presentar al final del periodo $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$, coincide con el número de vectores independientes en $\{S_1^0, S_1^1, \ldots, S_1^d\}$. Donde cada uno de los elementos de este conjunto es un vector, cuyas entradas son la valuación en cada ω_n, $n = 1, \ldots, N$.*

La verificación de este hecho es sencilla al observar que lo que se pide es que la matriz cuyas columnas son los vectores indicados tenga rango N, siendo que tiene N filas. De esta forma, denotando a dicha matriz por A y viendo a K como un vector cuyas entradas son los valores del reclamo contingente ante cada escenario $\omega_n, n = 1, \ldots, N$. Entonces el sistema $AH = K$ tiene solución. Donde H es un vector de tamaño $d + 1$ que se interpreta como el portafolio replicante de dicho reclamo contingente K.

Otra observación útil para valuar en mercados completos está dada por:

Proposición 1.11. *Un reclamo contingente es replicable si y solo si* $\mathbf{E_Q}[K/S_1^0]$ *toma el mismo valor para toda medida de probabilidad neutral al riesgo* $\mathbf{Q}$.

De donde se sigue:

Proposición 1.12. ***(Segundo teorema fundamental de valuación de activos).***

Un mercado es completo si y solo si existe una única medida de probabilidad neutral al riesgo.

Con estas consideraciones, se tiene la forma de valuar cualquier reclamo contingente en un modelo completo que es mediante el principio de valuación neutral al riesgo. Sin embargo, para los modelos incompletos, este principio nos da la forma de valuar únicamente los reclamos contingentes replicables.

En un mercado incompleto, se tiene que buscar entonces la forma de valuar los reclamos contingentes que no sean replicables. El precio, o los precios adecuados, que deben tener al inicio del periodo se pueden aproximar con los valores de reclamos contingentes replicables.

Se definen los siguientes valores.

$$V_+(K) \equiv inf\{\mathbf{E_Q}[J/S_1^0] : J \geq K, \quad J \text{ replicable}\}.$$
$$V_-(K) \equiv sup\{\mathbf{E_Q}[J/S_1^0] : J \leq K, \quad J \text{ replicable}\}.$$

Ambos conjuntos involucrados están bien definidos, dado que cualquier múltiplo de S_1^0 es un reclamo contingente alcanzable y existen múltiplos tanto mayores como menores a K.

Si se denota por $\mathcal{M}$ al conjunto de todas las medidas de probabilidad neutrales al riesgo sobre Ω y éste es no vacío, se cumplen además las siguientes igualdades para cualquier reclamo contingente K:

$$V_+(K) = sup\{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[K/S_1^0] : \mathbf{Q} \in \mathcal{M}\}.$$
$$V_-(K) = inf\{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[K/S_1^0] : \mathbf{Q} \in \mathcal{M}\}.$$

En el caso en que el reclamo contingente sea replicable, estos valores son los mismos y coinciden con su valuación mediante el principio de valuación neutral al riesgo. Con esto se tiene entonces la forma de valuar cualquier reclamo contingente, tanto en mercados completos como incompletos. Todo esto es para un modelo de un solo periodo, con N posibles escenarios al tiempo 1 y d activos con riesgo disponibles en el mercado.

1.1.5. Portafolios óptimos

Al contar con un procedimiento para valuar cualquier estrategia en modelos completos e incompletos, se requiere un criterio para reconocer la estrategia que genera un mayor incremento en la riqueza durante el periodo considerado.

Definición 1.13. *Sea $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, cóncava y estrictamente creciente, entonces a $U(x)$ se le llama la utilidad de la riqueza x.*

El criterio por considerar es la utilidad esperada del valor del portafolio al tiempo terminal uno, definida por la expresión:

$$\mathbf{E}[U(X_1)] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\omega) U(X_1(\omega)). \tag{1.8}$$

Tomando en cuenta este criterio, la mejor estrategia a elegir es aquella que tenga la mayor utilidad esperada del valor terminal del portafolio.

Por lo tanto, el problema de interés es

$$\begin{array}{ll} \textit{maximizar} & \mathbf{E}[U(X_1)] \\ H \in \mathcal{H} & \\ & \\ \text{sujeto a} & X_0 = x. \end{array} \tag{1.9}$$

Donde $\mathcal{H}$ es el conjunto de todas las estrategias de inversión. Un primer aspecto relevante en este problema es si tiene solución cuando existen oportunidades de arbitraje, para lo cual se presenta la siguiente proposición.

Proposición 1.14. *Dado un monto inicial $X_0 = x$, si existe una estrategia que maximice $\boldsymbol{E}[U(X_1)]$, entonces no existen oportunidades de arbitraje.*

Demostración. Sea $\hat{H}$ una solución de (1.9) y supóngase que H es una oportunidad de arbitraje, entonces la estrategia $\bar{H} := \hat{H} + H$ satisface

$$x + \sum_{i=1}^{d} \bar{H}_i \Delta S^{i*} = x + \sum_{i=1}^{d} \hat{H}_i \Delta S^{i*} + \sum_{i=1}^{d} H_i \Delta S^{i*} \geq x + \sum_{i=1}^{d} \hat{H}_i \Delta S^{i*}. \tag{1.10}$$

La desigualdad se cumple debido a que H es una oportunidad de arbitraje y, de hecho, la desigualdad es estricta al menos para un $\omega \in \Omega$. Dado que U es estrictamente creciente y $\mathbf{P}(\omega) > 0 \ \forall \omega \in \Omega$, se tiene que la esperanza de la utilidad de la riqueza terminal es mayor para la estrategia $\bar{H}$ que para la estrategia $\hat{H}$, lo cual contradice que $\hat{H}$ es una solución óptima de (1.9). □

Por (1.7), la proposición 1.14 implica que si existe solución al problema (1.9), entonces existe una medida de probabilidad neutral al riesgo. De hecho, existe una relación entre la estrategia óptima y esta medida de probabilidad.

Proposición 1.15. *Si $\hat{H}$ es una estrategia que maximiza $\mathbf{E}[U(X_1)]$, entonces*

$$\boldsymbol{Q}(\omega) = \frac{\boldsymbol{P}(\omega) S_1^0(\omega) U'(X_1(\omega))}{\mathbf{E}[S_1^0 U'(X_1)]}, \tag{1.11}$$

es una medida de probabilidad neutral al riesgo.

Si se considera una tasa de interés constante, entonces $S_1^0 = S_0^0(1+r)$ es constante, por lo que de 1.11, se tiene que

$$\frac{\mathbf{Q}(\omega)}{\mathbf{P}(\omega)} = \frac{U'(X_1(\omega))}{\mathbf{E}[U'(X_1)]}.$$

A $\frac{\mathbf{Q}(\omega)}{\mathbf{P}(\omega)}$ se le conoce como la densidad del precio del estado ω y se denota por $Z(\omega)$. Entonces se observa que cuando se tiene una tasa de interés constante, la densidad de precio de estado es proporcional a la utilidad marginal de la riqueza terminal.

Aun cuando la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo no garantiza la existencia de una estrategia que maximice la utilidad esperada para cualquier función U y cualquier monto, siempre se pueden encontrar alguna función de utilidad y un monto para los que sí se puede.

Definición 1.16. *Se dice que un modelo es viable si existe una función $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un monto inicial x, tales que U es cóncava y estrictamente creciente, y tal que existe H cuya $\mathbf{E}[U(X_1)]$ es máxima.*

Por lo mencionado previamente a la definición, se tiene:

Proposición 1.17. *Un modelo de mercado es viable si y solo si existe una medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbf{Q}$.*

La suficiencia de esta proposición es fácil de verificar si se considera x arbitrario y

$$U(X_1(\omega)) = X_1(\omega)\frac{\mathbf{Q}(\omega)}{\mathbf{P}(\omega)S_1^0(\omega)},$$

ya que $\mathbf{E}[U(X_1)] = x \ \forall H \in \mathcal{H}$.

El problema de optimizar el portafolio es un problema de optimización convexa estándar, por lo que se puede trabajar con las condiciones de primer orden, que es un sistema de d ecuaciones y d incógnitas. Sin embargo, estas ecuaciones pueden ser no lineales en H y, por lo tanto, ser difíciles de resolver. Una técnica alterna se obtiene con la medida de probabilidad neutral al riesgo. Este método se basa en que la función objetivo $H \to \mathbf{E}[U(X_1)]$ es igual a la composición de dos funciones. Una primera función $H \to X_1$ que mapea estrategias en variables aleatorias que representan el valor del portafolio al tiempo $t = 1$. Y otra función $X_1 \to \mathbf{E}[U(X_1)]$ que mapea variables aleatorias en números reales. Por lo que primero se identifica el valor X_1 que maximiza $\mathbf{E}[U(X_1)]$ sobre el conjunto de las posibles variables aleatorias y después se calcula la estrategia H que genera esta X_1, es decir, la estrategia que replica el reclamo contingente X_1.

El segundo paso es fácil, si se elige correctamente el conjunto de variables aleatorias posibles en el primer paso, entonces la estrategia que replique a X_1 corresponde al valor inicial especificado x.

En el primer paso, si el modelo es completo, se especifica el conjunto de variables aleatorias posibles, llamado conjunto de riquezas alcanzables, por $\mathcal{W}_x = \{W \in \mathbb{R}^N : \mathbf{E_Q}[W/S_1^0] = x\}$. Esto se debe a que para cualquier estrategia H con $X_0 = x$ se tiene $\mathbf{E_Q}[X_1/S_1^0] = x$ por el principio de valuación neutral al riesgo. Inversamente, para cualquier reclamo contingente $W \in \mathcal{W}_x$ existe una estrategia H tal que $X_0 = x$ y $X_1 = W$, ya que el mercado es completo.

El primer paso es resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \mathbf{E}[U(W)] \\ \text{sujeto a} & W \in \mathcal{W}_x, \end{array} \tag{1.12}$$

lo cual se hace con ayuda de un multiplicador de Lagrange y. El problema 1.12 es equivalente a

$$\text{maximizar} \quad \mathbf{E}[U(W)] - y\mathbf{E_Q}[W/S_1^0],$$

donde el multiplicador de Lagrange y se elige de tal forma que la solución de 1.1.5 satisfaga

$$\mathbf{E_Q}[W/S_1^0] = x.$$

Tomando la densidad del precio de estado $Z = \mathbf{Q}/\mathbf{P}$ la función objetivo de 1.1.5 es

$$\mathbf{E}[U(W)] - y\mathbf{E_Q}[W/S_1^0] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\omega)[U(W(\omega)) - yZ(\omega)W(\omega)/S_1^0(\omega)].$$

Tomando W que satisfaga la ecuación, se satisfacen las condiciones de primer orden y se tiene una ecuación para cada ω de la forma

$$U'(W(\omega)) = yZ(\omega)/S_1^0(\omega).$$

Para calcular W se tiene entonces

$$W(\omega) = I[yZ(\omega)/S_1^0(\omega)],$$

donde I denota a la función inversa de U'. De donde también se observa que el valor correcto para y es aquel que cumpla

$$\mathbf{E_Q}[I(yZ/S_1^0)/S_1^0] = x.$$

Portafolios óptimos en mercados incompletos

En el caso de los modelos incompletos se requiere de más trabajo para identificar el conjunto de riquezas alcanzables. Con ese conjunto se calcula la riqueza alcanzable óptima y posteriormente la estrategia que genera dicha riqueza, al igual que en los modelos completos. El enfoque estándar no es mucho más complicado en modelos incompletos que en completos, por lo que la ventaja del método basado en la medida de probabilidad neutral al riesgo disminuye en el caso de modelos incompletos.

El conjunto de riquezas alcanzables con una riqueza inicial x, está dado por

$$\mathcal{W}_x = \{W \in \mathbb{R}^N : \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[W/S_1^0] = x, \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{M}\}.$$

Sin embargo, está definición no es práctica dado que $\mathcal{M}$ es infinito en los modelos incompletos. Dado que $\mathcal{M}$ es la intersección de un subespacio lineal y el conjunto de medidas de probabilidad positivas, se puede obtener una base en el sentido de programación lineal $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, ..., \mathbf{Q}_m$ de $\mathcal{M}$, donde los coeficientes de cualquier combinación lineal de estos vectores que genere un elemento de $\mathcal{M}$ suman uno. Por lo que $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[W/S_1^0] = x \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{M}$ si y solo si $\mathbf{E}_{\mathbf{Qj}}[W/S_1^0] = x$; $j = 1, ..., m$. Y, por lo tanto

$$\mathcal{W}_x = \{W \in \mathbb{R}^N : \mathbf{E}_{\mathbf{Qj}}[W/S_1^0] = x, \quad j = 1, ..., m\}.$$

Por lo que el problema de optimización 1.12 para mercados incompletos es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \mathbf{E}[U(W)] \\ \text{sujeto a} & \mathbf{E}_{\mathbf{Qj}}[W/S_1^0] = x, \quad j = 1, ..., m. \end{array} \tag{1.13}$$

El cual se puede resolver incorporando m multiplicadores de Lagrange con respectivas densidades de precio de estado $Z^j = \mathbf{Q}_j/\mathbf{P}$, con lo que equivale a resolver el problema de la forma:

$$\text{maximizar} \quad \mathbf{E}[U(W)] - \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbf{E}[Z^j W/S_1^0] \tag{1.14}$$

Las condiciones de primer orden para cada $\omega \in \Omega$ son:

$$U'(W(\omega)) = \sum_{j=1}^{m} y_j Z^j(\omega)/S_1^0.$$

Si se denota por I a la inversa de U', las condiciones de primer orden pueden ser escritas

$$W(\omega) = I[\sum_{j=1}^{m} y_j Z^j(\omega)/S_1^0]. \tag{1.15}$$

Al substituir los valores de los multiplicadores de Lagrange que satisfagan

$$\mathbf{E}[Z^j I(y_1 Z^1/S_1^0 + ... + y_m Z^m/S_1^0)/S_1^0] = x, \quad j = 1, ..., m; \tag{1.16}$$

en las condiciones de primer orden, se obtiene la solución óptima de 1.13. Esta solución es la riqueza alcanzable óptima, con la cual se calcula la estrategia óptima.

1.1.6. Ejemplos

Ejemplo 1.18. *Considérese un modelo con $d = 1$ activos, $N = 3$ posibles estados, $S_0^1 = 9$, $r = 1/5$ y*

ω	$S_1^1(\omega)$	$S_1^{1*}(\omega)$	$\mathbf{P}(\omega)$
ω_1	12	10	2/3
ω_2	48/5	8	1/6
ω_3	42/5	7	1/6

Dado que una medida de probabilidad neutral al riesgo debe satisfacer (1.6) y (1.7), se obtiene que este es un modelo incompleto con una infinidad de medidas de probabilidad neutrales al riesgo de la forma

$$\boldsymbol{Q} = (\theta, 2 - 3\theta, 2\theta - 1), \quad \textit{con} \quad 1/2 < \theta < 2/3.$$

Para formar una base de $\mathcal{M}$ se pueden tomar los valores $\theta = 1/2$ y $\theta = 2/3$, con los que se obtiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_1 &= (1/2, 1/2, 0) \quad Z^1 = (3/4, 3, 0) \\ \boldsymbol{Q}_2 &= (2/3, 0, 1/3) \quad Z^2 = (1, 0, 2). \end{aligned}$$

Si se toma como función de utilidad $U(x) = ln(x)$, entonces $U'(x) = 1/x$ y su inversa es $I(y) = 1/y$, por lo que el sistema de ecuaciones (1.16) es:

$$\frac{2}{3y_1 + 4y_2} + \frac{1}{6y_1} = x$$

$$\frac{8}{9y_1 + 12y_2} + \frac{1}{6y_2} = x,$$

Cuya única solución no negativa es

$$y_1 = 0.371333x^{-1} \quad y_2 = 0.628667x^{-1},$$

por lo que la ecuación (1.15), de la riqueza alcanzable óptima, da como resultado:

$$W(\omega) = \frac{x}{0.371333Z^1(\omega)(5/6) + 0.628667Z^2(\omega)(5/6)} = \begin{cases} 1.3228x, & \omega = \omega_1 \\ 1.0772x, & \omega = \omega_2 \\ 0.9544x, & \omega = \omega_3 \end{cases}$$

Se cuenta con una tercera táctica en el caso de los modelos incompletos, la cual consiste en incorporar uno o más activos ficticios de tal forma que el modelo se vuelva completo, sin agregar oportunidades de arbitraje y agregar restricciones que eviten que se tomen posiciones en esos activos.

Para agregar los activos ficticios se trabaja con la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} S_1^0(\omega_1) & S_1^1(\omega_1) & \cdots & S_1^d(\omega_1) \\ S_1^0(\omega_2) & S_1^1(\omega_2) & \cdots & S_1^d(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^0(\omega_N) & S_1^1(\omega_N) & \cdots & S_1^d(\omega_N) \end{pmatrix}$$

la cual tiene rango menor a N, dado que el modelo es incompleto. Se agregan columnas no negativas para que la matriz tenga rango N, sin agregar oportunidades de arbitraje. A continuación, se presenta un ejemplo.

Ejemplo 1.19. *Tomando el mismo modelo del ejemplo 1.18 se observa que solamente debe agregarse una columna para completar el rango y sea* $N = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 6/5 & 12 & S_1^2(\omega_1) \\ 6/5 & 48/5 & S_1^2(\omega_2) \\ 6/5 & 42/5 & S_1^2(\omega_3) \end{pmatrix}$$

Se pueden asignar los valores $(10, 42/5, 48/5)$ *a esta columna con lo que la matriz tiene rango 3. Dado que todas las medidas de probabilidad en el modelo original son de la forma* $\boldsymbol{Q} = (\theta, 2-3\theta, 2\theta-1), \quad$ *con* $\quad 1/2 < \theta < 2/3$*, se puede tomar* $\theta = 5/8$*, con lo que se tiene* $\boldsymbol{Q} = (5/8, 1/8, 2/8)$ *y se obtiene que* $S_0^2 = \mathbf{E_Q}[(5/6)S_1^2] = 97/12$.

Al contar con todos estos valores, se procede a trabajar como se haría en un mercado completo, contemplando restricciones para no tomar posiciones en el activo ficticio.

Capítulo 2

Modelos en espacios de probabilidad finitos

2.1. Modelos en espacios de probabilidad finitos

En esta sección se considera un espacio de estados finito $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$, con la finalidad de presentar de forma más accesible lo que es un modelo de un mercado financiero y algunos resultados que posteriormente se van a generalizar. En este caso, los espacios $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ y $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, definidos sobre el espacio de probabilidad finito $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, son isomorfos a $\mathbb{R}^N$. Sin embargo, se especifica cada uno de estos espacios para mantener en mente el espacio con el que se trabaja en la generalización de los resultados.

2.1.1. Estrategias de inversión

A diferencia de los modelos de un solo periodo, al tratar con modelos con un horizonte finito de tiempo T, se requiere de un submodelo que describa la información disponible a los inversionistas dentro de este horizonte de tiempo. Información mediante la cual se determinan los precios de los activos. Este submodelo consiste en una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ de Ω. La definición de filtración, así como otros elementos importantes de probabilidad y procesos estocásticos que se emplean en adelante, se encuentra en el apéndice A.

Definición 2.1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *un espacio de probabilidad finito con espacio de estados* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$*, un modelo de un mercado financiero finito es un proceso estocástico* $S = (S_t)_{t=0}^T = (S_t^0, S_t^1, ..., S_t^d)_{t=0}^T$*, adaptado al espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \boldsymbol{P})$.

Sin pérdida de generalidad se asume que $\mathcal{F}_0$ es trivial, que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ es el conjunto potencia de Ω y que $\mathbf{P}(\omega_n) > 0$ para $1 \leq n \leq N$. Adicionalmente se asume que $S_t^0 = 1$ para $t = 0, 1, ..., T$.

Definición 2.2. *Una estrategia de inversión del mercado financiero* S *es un proceso* $\mathbb{R}^d$*-valuado* $H = (H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, H_t^2, ..., H_t^d)_{t=1}^T$*, adaptado al espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \boldsymbol{P})$*, que es predecible, es decir, que cada* H_t *es* $\mathcal{F}_{t-1}$*-medible.*

Al conjunto de estrategias de inversión del mercado financiero S se le denota por $\mathcal{H}$.

En este caso, la integral estocástica $(H \cdot S) = ((H \cdot S)_t)_{t=0}^T$ está dada por:

$$(H \cdot S)_t = \sum_{k=1}^{t} (H_k, \Delta S_k), \quad t = 0, ..., T,$$

donde $(.,.)$ denota al producto interior en $\mathbb{R}^d$ y $\Delta S_t = S_t - S_{t-1}$ para $t = 1, ..., T$.

Las variables aleatorias $(H \cdot S)_T$ son las funciones de pago que un inversionista puede replicar al tiempo T con inversión inicial cero siguiendo la estrategia H, dependiendo del estado ω en el que se encuentre el mercado en ese tiempo.

Definición 2.3. *El subespacio* $\mathcal{K} = \{(H \cdot S)_T : H \in \mathcal{H}\}$ *de* $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *es llamado el conjunto de reclamos contingentes alcanzables al precio* 0.

De forma similar, el espacio afín $\mathcal{K}_a$ es el conjunto de reclamos contingentes alcanzables al precio a, con $a \in \mathbb{R}$, es decir, el conjunto de variables aleatorias $a + (H \cdot S)_T$ con $H \in \mathcal{H}$. Y representa a las funciones de pago que un inversionista puede replicar al tiempo T con inversión inicial a siguiendo la estrategia H.

En el desarrollo de este estudio es de utilidad el conjunto de otro tipo de reclamos contingentes, llamados superreplicables. Reciben este nombre debido a que, para cada uno de ellos, siempre existe otro reclamo contingente que es alcanzable, iniciando con la misma riqueza, y que lo acota superiormente. Es decir, se puede seguir una estrategia mediante la cual se alcance un reclamo mayor o igual al deseado y posteriormente, de ser necesario, se puede deshacer del dinero sobrante.

Definición 2.4. *Se dice que un reclamo contingente $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ es superreplicable al precio* 0 *si existe un reclamo contingente f, alcanzable al precio* 0*, tal que $f \geq g$.*

Se denota por $\mathcal{C}$ al conjunto de reclamos contingentes superreplicables al precio 0.

Puede observarse que $\mathcal{C}$ es convexo, dado que para $g_1, g_2 \in \mathcal{C}$ y $\lambda \in [0,1]$ existen $f_1, f_2 \in K$ tales que $g_1 \leq f_1$ y $g_2 \leq f_2$. Claramente $(1-\lambda)g_1 + \lambda g_2 \leq (1-\lambda)f_1 + \lambda f_2$ y este último pertenece a $\mathcal{K}$. Lo que es más, $\mathcal{C}$ es un cono convexo ya que para cualquier $\lambda \geq 0$ y $g \in \mathcal{C}$, existe $f \in \mathcal{K}$ tal que $\lambda g \leq \lambda f$ y $\lambda f \in \mathcal{K}$. Adicionalmente, se observa que $\mathcal{C}$ contiene al ortante negativo $L^\infty_-(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, ya que cualquier función en este ortante está acotado por la función $\{0\} \in \mathcal{K}$.

De forma similar, se puede definir a $\mathcal{C}_a$, el conjunto de reclamos contingentes superreplicables al precio a, que se obtiene al trasladar al conjunto $\mathcal{C}$ por la función $a\mathbf{1}$.

2.1.2. Condición de no arbitraje

Una de las pocas condiciones que se requieren del mercado financiero para que se mantengan válidos los resultados desarrollados para este enfoque de optimización, es que satisfaga la ausencia de oportunidades de arbitraje, por lo que es de suma importancia caracterizar esta condición para este marco.

Definición 2.5. *Un mercado financiero S satisface la condición de no arbitraje (NA) si*

$$\mathcal{K} \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}) = \{0\}$$

o, equivalentemente,

$$\mathcal{C} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}) = \{0\}$$

donde 0 *denota a la función idénticamente igual a cero.*

Definición 2.6. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *un espacio de probabilidad, una medida de probabilidad* $\boldsymbol{Q}$ *sobre el espacio medible* $(\Omega, \mathcal{F})$ *es absolutamente continua respecto a* $\boldsymbol{P}$ *si* $\boldsymbol{P}(A) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{Q}(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$.

Definición 2.7. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *un espacio de probabilidad, una medida de probabilidad* $\boldsymbol{Q}$ *sobre el espacio medible* $(\Omega, \mathcal{F})$ *es equivalente a* $\boldsymbol{P}$*, y se denota* $\boldsymbol{Q} \sim \boldsymbol{P}$*, si* $\boldsymbol{Q}$ *es absolutamente continua respecto a* $\boldsymbol{P}$ *y* $\boldsymbol{P}$ *lo es respecto a* $\boldsymbol{Q}$.

Definición 2.8. *Una medida de probabilidad* $\boldsymbol{Q}$ *sobre el espacio medible* $(\Omega, \mathcal{F})$ *es una medida martingala equivalente para el mercado* S*, definido sobre el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$*, si* $\boldsymbol{Q} \sim \boldsymbol{P}$ *y* S *es una martingala bajo* $\boldsymbol{Q}$.

Se denota por $\mathcal{M}^e(S)$ al conjunto de medidas de probabilidad martingala equivalentes para S y por $\mathcal{M}^a(S)$ al conjunto de medidas de probabilidad absolutamente continuas respecto a $\mathbf{P}$, bajo las cuales S es martingala. La letra e es por equivalentes y la letra a se refiere a absolutamente continuas con respecto a $\mathbf{P}$. Usualmente se identifica a la medida $\mathbf{Q}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ con su derivada de Radon-Nikodym $Z = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, la cual es una variable aleatoria positiva casi seguramente que cumple $\mathbf{E}[Z] = 1$ y

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbf{P}(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Lema 1. *Para una medida de probabilidad* $\mathbf{Q}$ *en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S)$,

(ii) $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f] = 0 \quad \forall f \in \mathcal{K}$,

(iii) $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[g] \leq 0 \quad \forall g \in \mathcal{C}$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$

Sea $f \in \mathcal{K}$, existe $H \in \mathcal{H}$ predecible tal que $f = (H \cdot S)_T$. Por lo tanto

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[(H \cdot S)_T] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[\sum_{k=1}^{T} H_k \Delta S_k\right] = \sum_{k=1}^{T} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[H_k \Delta S_k].$$

Para cada uno de estos sumandos, dado que $\mathcal{F}_{k-1} \subseteq \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, se cumple

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[H_k \Delta S_k] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[H_k \Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1}]]$$

y, dado que H es predecible, lo anterior es igual a

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[H_k \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1}]] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[H_k \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_k - S_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}]].$$

Por la linealidad de la esperanza y el hecho de que S es martingala bajo $\mathbf{Q}$, es igual a

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[H_k(\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_k | \mathcal{F}_{k-1}] - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}])] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[H_k(S_{k-1} - S_{k-1})] = 0.$$

Por lo tanto $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[H_k \Delta S_k] = 0$ para cualquier $f \in \mathcal{K}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Se sigue de la definición de $\mathcal{C}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$

Supóngase que S no es martingala bajo $\mathbf{Q}$, entonces existe $f \in \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f] \neq 0$. En particular, existe $f = (H \cdot S)_T \in \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f] > 0$ ya que si se tiene $f' = (H' \cdot S)_T \in \mathcal{K}$ que cumple $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f'] < 0$, basta con tomar $H = -H'$. Se puede entonces encontrar una $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tal que $0 < g \leq f$ y por lo tanto $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[g] > 0$, lo cual es una contradicción al inciso (iii). □

A continuación se presenta el resultado central de la teoría de valuación de activos por no-arbitraje para este marco.

Teorema 2.9. ***Teorema fundamental de valuación de activos.***

Para un mercado financiero S, modelado sobre un espacio de probabilidad filtrado de dimensión finita $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \boldsymbol{P})$, se cumple la condición de no-arbitraje (NA) si y solo si $\mathcal{M}^e(S) \neq \emptyset$.

Demostración. $\Rightarrow)$

El teorema de separación de Hahn-Banach indica, para dimensiones finitas, que se pueden separar conjuntos convexos no vacíos disjuntos por un hiperplano inducido por un funcional lineal, asumiendo que alguno de los conjuntos es compacto y el otro cerrado, para obtener una separación estricta.

Por hipótesis se cumple (NA), es decir, $\mathcal{K} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\}$, por lo que los conjuntos convexos $\mathcal{K}$ y $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \setminus \{0\}$ son disjuntos.

Si se considera la envolvente convexa de vectores unitarios $(\mathbf{1}_{\{\omega_n\}})_{n=1}^N$ en $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, dada por

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{n=1}^{N} \mu_n \mathbf{1}_{\{\omega_n\}} : \mu_n \geq 0, \sum_{n=1}^{N} \mu_n = 1 \right\},$$

se observa que es un subconjunto compacto y, por el supuesto de (NA), es disjunto de $\mathcal{K}$. Por lo que se puede separar de forma estricta a los conjuntos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{K}$ por un funcional lineal $\mathbf{Q} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Esto quiere decir que se pueden encontrar $\alpha < \beta$ tales que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f] = \langle \mathbf{Q}, f \rangle \leq \alpha, \quad f \in \mathcal{K},$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[h] = \langle \mathbf{Q}, h \rangle \geq \beta, \quad h \in \mathcal{P}.$$

Como $\mathcal{K}$ es un espacio lineal, se tiene que $\alpha \geq 0$. Sin pérdida de generalidad, puede considerarse $\alpha = 0$ y se tiene entonces que $\beta > 0$. Por lo tanto $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{1} \rangle > 0$ y se puede normalizar $\mathbf{Q}$ de tal modo que $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{1} \rangle = 1$. Como $\mathbf{Q}$ es estrictamente positivo en cada $\mathbf{1}_{\omega_n}$, se tiene que $\mathbf{Q}$ es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ equivalente a $\mathbf{P}$, tal que se cumple la condición (ii) del lema 1 y, por lo tanto, $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$.

$\Leftarrow$)

Sea $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$, entonces por el lema 1 se tiene que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[g] \leq 0, \quad g \in \mathcal{C}.$$

Supóngase que no se cumple la propiedad de (NA), es decir, existe

$g \in \mathcal{C} \cap L^{\infty}_{+}$, $g \neq 0$. Y dado que $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$, esto implica

$$\mathbf{E_Q}[g] > 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto S satisface (NA). □

Corolario 2.10. *Sea S un mercado que satisface (NA) y $f \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ un reclamo contingente alcanzable tal que*

$$f = a + (H \cdot S)_T$$

para alguna $a \in \mathbb{R}$ y alguna estrategia H. Entonces la constante a y el proceso $(H \cdot S)$ están determinados de forma única y satisfacen, para cada $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$,

$$a = \mathbf{E_Q}[f], \quad y \quad a + (H \cdot S)_t = \mathbf{E_Q}[f|\mathcal{F}_t] \quad para \quad 0 \leq t \leq T.$$

Demostración. Con respecto a la unicidad de $a \in \mathbb{R}$, supóngase que existen dos representaciones distintas de f, es decir, $f = a_1 + (H_1 \cdot S)_T$ y $f = a_2 + (H_2 \cdot S)_T$, con $a_1 \neq a_2$. Sin pérdida de generalidad, se puede tomar $a_1 > a_2$, con lo cual $a_1 - a_2 > 0$. Si se parte de la observación

$$f = a_1 + (H_1 \cdot S)_T = a_2 + (H_2 \cdot S)_T,$$

se tiene que

$$a_1 - a_2 = (H_1 \cdot S)_T - (H_2 \cdot S)_T = ((H_1 - H_2) \cdot S)_T$$

lo que indica que la estrategia $H_1 - H_2$ genera un resultado estrictamente positivo al tiempo T, lo cual es una contradicción al supuesto de (NA).

Con respecto a la unicidad de $H \cdot S$, supóngase que $f = a_1 + (H_1 \cdot S)_T$ y $f = a_2 + (H_2 \cdot S)_T$ con $(H_1 \cdot S), (H_2 \cdot S)$ no idénticas, es decir, que para alguna $t \in (0, T)$ se cumple $(H_1 \cdot S)_t \neq (H_2 \cdot S)_t$. Sin pérdida de generalidad, se puede considerar que existe un evento $A := (H_1 \cdot S)_t > (H_2 \cdot S)_t$ y este evento pertenece a $\mathcal{F}_t$. Al definir la estrategia $H := (H_1 - H_2)_{\chi A \cdot \chi]t,T]}$ se produce una oportunidad de arbitraje, ya que $(H \cdot S)_T = 0$ fuera de A y $(H \cdot S)_T = (H_1 \cdot S)_t - (H_2 \cdot S)_t > 0$ en A, lo cual contradice el supuesto de (NA).

Sea $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S)$, dado un proceso predecible H se tiene que el proceso $(H \cdot S)$ es una martingala bajo $\mathbf{Q}$. Al tomar $f = a + (H \cdot S)_T$, se tiene

$$\mathbf{E_Q}[f] = \mathbf{E_Q}[a + (H \cdot S)_T] = a + \mathbf{E_Q}(H \cdot S)_T = a,$$

y

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f|\mathcal{F}_t] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[a + (H \cdot S)_T|\mathcal{F}_t] = a + \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[(H \cdot S)_T|\mathcal{F}_t] = a + (H \cdot S)_t.$$

□

2.1.3. Relación polar de $\mathcal{C}$ y *cono*$(\mathcal{M}^a(S))$

Se denota por $cono(\mathcal{M}^e(S))$ y $cono(\mathcal{M}^a(S))$ a los conos generados por los conjuntos convexos $\mathcal{M}^e(S)$ y $\mathcal{M}^a(S)$, es decir, a los conos más pequeños que contienen a $\mathcal{M}^e(S)$ y $\mathcal{M}^a(S)$, respectivamente. Se presentan algunos conceptos, como los muestra Schaefer [Sch 66], para hacer clara la relación polar que existe entre estos conos y el cono $\mathcal{C}$.

Definición 2.11. *Sea $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ un par de espacios vectoriales en dualidad de separación vía el producto escalar $\langle ., . \rangle$, el polar $\mathcal{C}^0$ de un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ se define como*

$$\mathcal{C}^0 = \{g \in \mathcal{E}' : \langle f, g \rangle \leq 1, \forall f \in \mathcal{C}\}.$$

En el caso en que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo la multiplicación con escalares positivos, por ejemplo, en conos convexos, el polar $\mathcal{C}^0$ se puede definir de forma equivalente por

$$\mathcal{C}^0 = \{g \in \mathcal{E}' : \langle f, g \rangle \leq 0, \forall f \in \mathcal{C}\}.$$

Una consecuencia del teorema de Hahn-Banach es el teorema bipolar, el cual establece que el bipolar de un subconjunto de un espacio vectorial localmente convexo es igual a su envolvente convexa cerrada.

Teorema 2.12. ***(Teorema bipolar)****.*

Sea $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$ una dualidad. Para cualquier subconjunto $A \subset \mathcal{F}$, el bipolar A^{00} es la envolvente convexa $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-cerrada de $A \cup \{0\}$.

Se sigue del teorema bipolar que para subespacios $A \subset \mathcal{F}$, $A = A^{00}$ si y solo si A es cerrado para $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

El espacio $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ dotado de la topología de convergencia en medida no es localmente convexo. Brannath y Schachermayer muestran en

[BrSc 99] un análogo del teorema bipolar para subconjuntos del ortante positivo $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ al ponerlo en dualidad consigo mismo y obtienen que el bipolar de un subconjunto de $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ es igual a su envolvente sólida, convexa y cerrada.

Teorema 2.13. ***(Teorema bipolar para*** $\mathbf{L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, P)}$***).***

Para un conjunto $\mathcal{C} \subseteq L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *el polar* $\mathcal{C}^0$ *es un subconjunto sólido, convexo, cerrado de* $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$.

El bipolar

$$\mathcal{C}^{00} = \{f \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}) : \boldsymbol{E}[fg] \leq 1, \quad \forall g \in \mathcal{C}^0\}$$

es el conjunto sólido, convexo, cerrado de $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *más pequeño que contiene a* $\mathcal{C}$.

Con estas consideraciones se pone atención ahora en el caso del cono $\mathcal{C} \subset L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ de los reclamos contingentes superreplicables al precio 0. En el caso finito-dimensional este cono convexo es cerrado al ser la suma algebraica del espacio lineal cerrado $\mathcal{K}$ y el cono poliédrico cerrado $L^\infty_-(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Por lo que, del teorema bipolar, se tiene que $\mathcal{C}$ es igual a su bipolar $\mathcal{C}^{00}$.

Proposición 2.14. *Sea* S *un mercado financiero que satisface* (NA). *Entonces el polar de* $\mathcal{C}$ *es igual a* $cono(\mathcal{M}^a(S))$ *y* $\mathcal{M}^e(S)$ *es denso en* $\mathcal{M}^a(S)$. *Por lo tanto, las siguientes afirmaciones son equivalentes para un elemento* $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$

(i) $g \in \mathcal{C}$,

(ii) $\mathbf{E_Q}[g] \leq 0 \quad \forall g \in \mathcal{M}^a(S)$,

(iii) $\mathbf{E_Q}[g] \leq 0 \quad \forall g \in \mathcal{M}^e(S)$.

Demostración. Como se hizo notar previamente $\mathcal{C} \supseteq L^\infty_-(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ y, por definición para $g \in \mathcal{C}^0$ se tiene que $\langle f, g \rangle \leq 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}$, por lo que $\mathcal{C}^0 \subseteq L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. De esta observación y del hecho que $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S) \Leftrightarrow \mathbf{E_Q}[g] \leq 0 \quad \forall g \in \mathcal{C}$, presentado en el lema 1, se sigue que $\mathcal{C}^0 = cono(\mathcal{M}^a(S))$.

Del teorema 2.9 y el supuesto de (NA) existe $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{M}^e(S)$. Si se toman $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S)$ y $0 < \mu \leq 1$ se tiene que $\mu\mathbf{Q}^* + (1-\mu)\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$, lo cual implica la densidad de $\mathcal{M}^e(S)$ en $\mathcal{M}^a(S)$

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ La equivalencia de (i) y (ii) se sigue de la igualdad $\mathcal{C}^0 = cono(\mathcal{M}^a(S))$ y del teorema bipolar.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$

Se sigue de la densidad de $\mathcal{M}^e(S)$ en $\mathcal{M}^a(S)$. □

2.1.4. Valuación por no arbitraje

El siguiente teorema precisa la información sobre los posibles precios para un reclamo contingente f que se puede obtener del principio de no arbitraje.

Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un precio libre de arbitraje para un $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, si al introducirlo al mercado financiero S como un reclamo contingente que al tiempo $t = T$ paga el monto aleatorio f puede ser vendido o comprado a precio a al tiempo $t = 0$, sin crear una oportunidad de arbitraje. En otras palabras, si $\mathcal{C}^{f,a}$ denota al cono generado por $\mathcal{C}$ y el espacio lineal generado por $f-a$, entonces a es un precio libre de arbitraje para f si $\mathcal{C}^{f,a} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\}$.

Teorema 2.15. ***Valuación por no arbitraje.*** *Sea S un mercado financiero que satisface (NA) y sea $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$. Sean*

$$\overline{\pi}(f) = sup\{\mathbf{E_Q[f]} : \boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^{\mathrm{e}}(\mathbf{S})\},$$

$$\underline{\pi}(f) = inf\{\mathbf{E_Q[f]} : \boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^{\mathrm{e}}(\mathbf{S})\}.$$

Entonces $\underline{\pi}(f) = \overline{\pi}(f)$ o $\underline{\pi}(f) < \overline{\pi}(f)$.

En el primer caso f es alcanzable al precio $\pi(f) := \underline{\pi}(f) = \overline{\pi}(f)$, es decir, $f = \pi(f) + (H \cdot S)_T$ para algún $H \in \mathcal{H}$; por lo tanto $\pi(f)$ es el único precio libre de arbitraje para f.

En el segundo caso $\{\mathbf{E_Q}[f] : \boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\}$ es igual al intervalo abierto $]\underline{\pi}(f), \overline{\pi}(f)[$, que es el conjunto de precios libres de riesgo para el reclamo contingente f.

Demostración. El conjunto $\mathcal{I} = \{\mathbf{E_Q}[f] : \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\}$ forma un intervalo no vacío, acotado en $\mathbb{R}$.

Un número a pertenece a $\mathcal{I}$ si y solo si a es un precio libre de riesgo para f, ya que, suponiendo que $a \in \mathcal{I}$ se puede encontrar $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ tal que $\mathbf{E_Q}[f - a] = 0$ y, por lo tanto, $\mathcal{C}^{f,a} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\}$. Por otra parte, si se supone que $\mathcal{C}^{f,a} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\}$, y se hace notar que $\mathcal{C}^{f,a}$ es un cono convexo cerrado al ser la suma algebraica del espacio lineal generado por $(\mathcal{K}, f - a)$ y el cono poliédrico cerrado $L^\infty_-(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, se tiene que existe una medida de probabilidad $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ tal que $\mathbf{Q}|_{\mathcal{C}^{f,a}} \leq 0$. Esto implica que $\mathbf{E_Q}[f - a] = 0$, es decir, $a \in \mathcal{I}$.

En el caso frontera, se supone que a es el supremo de $\mathcal{I}$, es decir, $a = \overline{\pi}(f) \in \mathcal{I}$ y se considera el reclamo contingente $f - \overline{\pi}(f)$; por definición se tiene que $\mathbf{E_Q}[f - \overline{\pi}(f)] \leq 0$, $\forall \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ y por lo tanto, por la proposición 2.14, que $f - \overline{\pi}(f) \in \mathcal{C}$. Se puede encontrar $g \in \mathcal{K}$ tal que $g \geq f - \overline{\pi}(f)$. Si el supremo de $\mathcal{I}$ es alcanzado, es decir, si existe $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{M}^e(S)$ tal que $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*}[f] = \overline{\pi}(f)$, entonces se tiene que $0 = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*}[g] \geq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*}[f - \overline{\pi}(f)] = 0$, que en vista de $\mathbf{Q}^* \sim \mathbf{P}$ implica que $f - \overline{\pi}(f) = g$; lo que quiere decir que f es alcanzable al precio $\overline{\pi}(f)$. Esto implica que $\mathbf{E_Q}[f] = \overline{\pi}(f)$, $\forall$ $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$, y por lo tanto $\mathcal{I}$ se reduce a $\{\overline{\pi}(f)\}$.

Por lo tanto, si $\underline{\pi}(f) < \overline{\pi}(f)$, $\overline{\pi}(f)$ no puede estar en el intervalo $\mathcal{I}$, por lo que es abierto en el lado derecho. Al tomar $-f$ en lugar de f, se obtiene un análogo para el lado izquierdo de $\mathcal{I}$, que por lo tanto es igual a $\mathcal{I} =]\underline{\pi}(f), \overline{\pi}(f)[$. □

Corolario 2.16. ***Mercados financieros completos.***

Para un mercado financiero S que satisface la condición de no arbitraje (NA), las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) *$\mathcal{M}^e(S)$ consiste en un solo elemento $\boldsymbol{Q}$.*

(ii) *Cada $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ se puede representar de la forma*

$$f = a + (H \cdot S)_T, \quad \textit{para algún } a \in \mathbb{R} \textit{ y } H \in \mathcal{H}.$$

En este caso $a = \mathbf{E_Q}[f]$, la integral estocástica $(H \cdot S)$ es única y se tiene que

$$\mathbf{E_Q}[f|\mathcal{F}_t] = \mathbf{E_Q}[f] + (H \cdot S)_t, \quad t = 0, ..., T.$$

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$

Se sigue del teorema previo.

$(ii) \Rightarrow (i)$

$f = a + (H \cdot S)_T$, para algún $a \in \mathbb{R}$ y $H \in \mathcal{H}$ implica que, para elementos $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathcal{M}^a(S)$, se cumple $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_1}[f] = a = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_2}[f]$; por lo tanto basta con notar que si $\mathcal{M}^e(S)$ contiene dos elementos diferentes $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, se puede encontrar $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tal que $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_1}[f] \neq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_2}[f]$. $\square$

2.2. Maximización de la utilidad

En esta sección se busca calcular una estrategia de inversión óptima en mercados completos e incompletos, cuyo espacio de probabilidad está definido sobre un espacio de estados finito. Para ello se requiere definir una medida de desempeño.

2.2.1. Función de utilidad

La medida que se utiliza es la esperanza de la función de utilidad $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, la cual refleja las preferencias del inversionista frente al riesgo y debe cumplir con el siguiente importante supuesto.

Supuesto 1. ***(Condiciones de regularidad usuales)****. Una función de utilidad $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ satisface las condiciones de regularidad usuales si es creciente en $\mathbb{R}$, continua en $\{U > -\infty\}$, diferenciable, estrictamente cóncava en el interior de $\{U > -\infty\}$ y satisface*

$$U'(\infty) := \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0.$$

El comportamiento de U' en el otro extremo del dominio de U se analiza en dos casos:

caso 1: *$dom(U) = (0, \infty)$ y U satisface*

$$U'(0) := \lim_{x\to 0} U'(x) = \infty.$$

caso 2: *$dom(U) = \mathbb{R}$ y U satisface*

$$U'(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} U'(x) = \infty$$

Ejemplo 1. 1. *Un tipo de función de utilidad que cumple el caso 1 del supuesto 1 es el de las funciones con aversión relativa al riesgo constante, conocidas como funciones CRRA. Estas funciones son de la forma:*

$$U(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, & \alpha \in (0,\infty) \setminus \{1\} \\ \\ ln(x), & \alpha = 1 \end{cases}$$

donde $x > 0$ *y* α *es el coeficiente de aversión absoluta al riesgo, el cual está definido por* $\frac{-U''(x)}{U'(x)}$.

La función es creciente, continua, diferenciable, estrictamente cóncava y satisface

$$U'(\infty) = \lim_{x\to\infty} U'(x) = \lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} = 0.$$

Al tomar $dom(U) = (0, \infty)$, *satisface*

$$U'(0) = \lim_{x\to 0} U'(x) = \lim_{x\to 0} x^{-\alpha} = \infty.$$

Ejemplo 2. 1. *Las funciones con aversión al riesgo absoluta constante, conocidas como funciones CARA, son un tipo de función que satisface las condiciones del caso 2 del supuesto 1. Son de la forma:*

$$U(x) = \frac{-e^{-\alpha x}}{\alpha}, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde $\alpha > 0$ *es el coeficiente de aversión al riesgo.*

La función es creciente, continua, diferenciable, estrictamente cóncava y satisface

$$U'(\infty) = \lim_{x\to\infty} U'(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x} = 0.$$

Al tomar $dom(U) = \mathbb{R}$, *satisface*

$$U'(0) = \lim_{x\to -\infty} U'(x) = \lim_{x\to -\infty} e^{-\alpha x} = \infty.$$

2.2.2. Caso completo

Se puede plantear el problema de maximizar la utilidad esperada de la riqueza terminal al definir la función de valor

$$u(x) := \sup_{H\in\mathcal{H}} \mathbf{E}[U(x + (H \cdot S)_T)], \quad x \in dom(U). \tag{2.1}$$

Para realizar la maximización de la utilidad de un portafolio se replantea la función de valor u, definida en (2.1), como un problema de optimización convexa. En este cambio de planteamiento se introduce un tipo de instrumentos, llamados activos Arrow y denotados por $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}$. Un activo de este tipo paga 1 al tiempo T, si en ese momento el estado del mercado es ω_n y paga 0 en cualquier otro estado. Al denotar por q_n a la probabilidad de ocurrencia del estado ω_n, $n = 1, ..., N$, bajo la medida de probabilidad $\mathbf{Q}$, se tiene la siguiente expresión para el valor esperado del activo $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}$:

$$\mathbf{E_Q}[\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}] = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{\{\omega_n\}}(\omega_i)\mathbf{Q}(\omega_i) = \mathbf{Q}[\omega_n] = q_n.$$

Por el corolario 2.16, cada activo $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}$ se puede representar como $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}} = a + (H \cdot S)_T$, donde $a = \mathbf{E_Q}[\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}]$; por lo tanto $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}} = \mathbf{Q}[\omega_n] + (H \cdot S)_T$, para alguna $H \in \mathcal{H}$.

Sea $(X_T(\omega_n))_{n=1}^N = (\xi_n)_{n=1}^N$ la variable aleatoria que representa el valor del portafolio $\Pi = (x, H)$ al tiempo terminal T. Por el corolario 2.16, al ser $\mathcal{M}^e(S) = \{\mathbf{Q}\}$, se tiene que $X_T = \mathbf{E_Q}[X_T] + (H \cdot S)_T$, para una integral estocástica única $(H \cdot S)$. Puede observarse que esta variable aleatoria puede ser dominada por otra variable aleatoria de la forma $x + (H \cdot S)_T$, siempre que $\mathbf{E_Q}[X_T]$ esté dominada por un valor x, es decir,

$$X_T = \mathbf{E_Q}[X_T] + (H \cdot S)_T \leq x + (H \cdot S)_T \Leftrightarrow \mathbf{E_Q}[X_T] \leq x.$$

De forma más explícita, la variable aleatoria $(X_T(\omega_n))_{n=1}^N = (\xi_n)_{n=1}^N$ puede ser dominada por una variable aleatoria de la forma $x + (H \cdot S)_T = x + \sum_{t=1}^T H_t \Delta S_t$ si y solo si $\mathbf{E_Q}[X_T] = \sum_{n=1}^N q_n \xi_n \leq x$, donde q_n es el precio del activo Arrow $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}$. La finalidad de denotar a $X_T(\omega_n)$ por ξ_n es enfatizar que el problema que se va a plantear es una maximización cóncava en $\mathbb{R}^N$ con una restricción lineal.

De esta forma, al tomar en cuenta una riqueza inicial fija $x \in dom(U)$, se puede reinterpretar la función de valor u, definida en (2.1) para plantear el problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad \mathbf{E_P}[U(X_T)] = \sum_{n=1}^N p_n U(\xi_n) \\ &\text{sujeto a} \qquad \mathbf{E_Q}[X_T] = \sum_{n=1}^N q_n \xi_n \leq x. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Para resolver este problema se define su lagrangiano por

$$L(\xi_1, ..., \xi_N, y) = \sum_{n=1}^N p_n U(\xi_n) - y \left(\sum_{n=1}^N q_n \xi_n - x \right). \tag{2.3}$$

Con una factorización se obtiene otra expresión del lagrangiano, dada por

$$L(\xi_1, ..., \xi_N, y) = \sum_{n=1}^{N} p_n \left(U(\xi_n) - y\frac{q_n}{p_n}\xi_n \right) + yx. \tag{2.4}$$

Para corroborar que, en efecto, el planteamiento de este problema es igual al de la función de valor definida en (2.1), se presentan algunas funciones:

Sea

$$\Phi(\xi_1, ..., \xi_N) = \inf_{y>0} L(\xi_1, ..., \xi_N, y), \quad \xi_n \in dom(U), \tag{2.5}$$

si $(\xi_1, ..., \xi_N)$ se encuentra en la región admisible del problema (2.2), es decir, $\sum_{n=1}^{N} q_n\xi_n \leq x$, entonces $\Phi(\xi_1, ..., \xi_N) = L(\xi_1, ..., \xi_N, 0) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n)$; mientras que si se encuentra fuera de la región admisible $\sum_{n=1}^{N} q_n\xi_n > x$, entonces $\Phi(\xi_1, ..., \xi_N) = -\infty$.

Al considerar el supremo sobre la región admisible se tiene

$$\sup_{\xi_1,...,\xi_N} \Phi(\xi_1, ..., \xi_N) = \sup_{\substack{\xi_1,...,\xi_N \\ \sum_{n=1}^{N} q_n\xi_n \leq x}} \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) = u(x), \tag{2.6}$$

con lo cual se corrobora que este problema de maximización es un replanteamiento de la función $u(x)$.

Se define ahora

$$\Psi(y) = \sup_{\xi_1,...,\xi_N} L(\xi_1, ..., \xi_N, y), \quad y \geq 0, \tag{2.7}$$

si se considera la forma del lagrangiano (2.4) con $y > 0$, entonces (2.7) se puede separar en N problemas de optimización independientes, de la forma

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad U(\xi_n) - y\frac{q_n}{p_n}\xi_n \\ &\text{sujeto a} \qquad \xi_n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

El planteamiento de estos N problemas independientes facilita la observación de una forma alterna de escribir a la función Ψ, en términos de la función conjugada de la función de utilidad.

De acuerdo con la definición 3.44, la conjugada convexa de una función convexa $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, está dada por $f^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle - f(x) :$

$x \in \mathbb{R}^N\}$. Por lo que para una función cóncava $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ su función conjugada V está dada por

$$V(\eta) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} [U(\xi) - \eta\xi], \quad \eta > 0, \tag{2.8}$$

la cual es la transformada de Legendre de $x \mapsto -U(-x)$.

Ejemplo 1. 2. *Para la función de utilidad*

$$U(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, & \alpha \in (0,\infty) \setminus \{1\} \\ \\ ln(x), & \alpha = 1 \end{cases}$$

su función conjugada está dada por

$$V(y) = \begin{cases} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} - xy\right] = \frac{\alpha y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}-1}{1-\alpha}, & \alpha \in (0,\infty) \setminus \{1\} \\ \\ \sup_{x\in\mathbb{R}}[ln(x) - xy] = ln(\frac{1}{y}) - 1, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2. 2. *En el caso de la función de utilidad*

$$U(x) = \frac{-e^{-\alpha x}}{\alpha}, \quad x \in \mathbb{R},$$

su función conjugada es

$$V(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{-e^{-\alpha x}}{\alpha} - xy\right] = \frac{y}{\alpha}(ln(y) - 1).$$

Las condiciones usuales de regularidad para la función de utilidad U, presentadas en el supuesto 1, tienen un símil en supuestos de regularidad para su función conjugada V. Las condiciones de regularidad presentadas para ambas funciones presentan una relación de implicación mediante una fórmula que se presenta más adelante, llamada fórmula de inversión.

Supuesto 2. *La función $V : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, conjugada de la función U, satisface los supuestos usuales de regularidad, si es finito valuada, diferenciable, estrictamente convexa en $(0,\infty)$ y satisface*

$$V'(0) := \lim_{y\to 0} V'(y) = -\infty, \tag{2.9}$$

y su comportamiento al tender a infinito cumple alguno de los siguientes casos, que se corresponden con los casos del supuesto 1:

caso 1: $\lim_{y\to\infty} V(y) = \lim_{x\to 0} U(x), \qquad \lim_{y\to\infty} V'(y) = 0.$

caso 2: $\lim_{y\to\infty} V(y) = \infty \qquad \lim_{y\to\infty} V'(y) = \infty.$

Ejemplo 1. 3. *Para las funciones CRRA se tiene que*

$$V'(y) = -y^{\frac{-1}{\alpha}}, \quad \alpha \in (0, \infty),$$

por lo que

$$\lim_{y \to 0} V'(y) = -\infty \quad y \quad \lim_{y \to \infty} V'(y) = 0.$$

Además

$$\lim_{y \to \infty} V(y) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1}, & \alpha \in (0, 1) \\ \\ -\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Es decir, la función conjugada V cumple el caso 1 del supuesto 2.

Ejemplo 2. 3. *Al derivar la función conjugada de las funciones CARA se obtiene*

$$V'(y) = \frac{ln(y)}{\alpha}.$$

Sus límites en 0 *e* ∞ *son*

$$\lim_{y \to 0} V'(y) = -\infty \quad y \quad \lim_{y \to \infty} V'(y) = \infty.$$

Adicionalmente

$$\lim_{y \to \infty} V(y) = \infty.$$

Por lo tanto, estas funciones cumplen el caso 2 del supuesto 2.

Proposición 2.17. *Si U satisface el supuesto 1, entonces V satisface el supuesto 2 y la fórmula de inversión*

$$U(\xi) = \inf_{\eta} [V(\eta) + \eta\xi], \quad \xi \in dom(U).$$

Inversamente, si V satisface el supuesto 2, entonces la función U, definida en la fórmula de inversión, satisface el supuesto 1.

Adicionalmente, $-V'(y)$ *es la función inversa de* $U'(x)$ *y se denota por* I.

Demostración. $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es cóncava y creciente, entonces $V(\eta) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} [U(\xi) - \eta\xi]$ es finito valuada.

Sea $a \in \mathbb{R}$,

$$V(y) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} [U(\xi) - y\xi] \leq a \Leftrightarrow U(x) - yx \leq a \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow U(x) \leq a + yx \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particular, si $a = V(y)$, para alguna $y > 0$, entonces

$$U(x) \leq V(y) + yx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lo cual implica la fórmula de inversión.

$\square$

Con estas observaciones sobre la función conjugada V, se puede redefinir a la función Ψ, al tomar $\eta = y\frac{q_n}{p_n}$ en (2.8) y sustituirlo en la expresión del lagrangiano (2.4):

$$\Psi(y) = \sum_{n=1}^{N} p_n V\left(y\frac{q_n}{p_n}\right) + yx.$$

Que es la función a minimizar del problema dual. El primer sumando recibe el nombre de función de valor dual, y se denota

$$v(y) := \sum_{n=1}^{N} p_n V\left(y\frac{q_n}{p_n}\right), \quad y > 0.$$

Esta función v hereda las propiedades del supuesto 2, al ser una combinación convexa de V. Su derivada es

$$v'(y) = \sum_{n=1}^{N} q_n V'\left(y\frac{q_n}{p_n}\right) = \mathbf{E_Q}\left[V'\left(y\frac{q_n}{p_n}\right)\right].$$

Del supuesto 2 se observa que si $dom(U) = (0, \infty)$, entonces $V'(y)$ varía de $-\infty$ a cero. Al ser V diferenciable y estrictamente convexa, su derivada es creciente, por lo que para un $x \in dom(U)$ existe un único $\hat{y} = \hat{y}(x)$, tal que $v'(\hat{y}(x)) = -x$. De forma similar, si $dom(U) = \mathbb{R}$, existe un único $\hat{y}(x)$ en el cual la derivada de v toma el valor $-x$. La notación $\hat{y}(x)$ es para expresar que el valor de $\hat{y}$ depende de x y que este valor es el único minimizador de la función dual $\Psi(y)$.

Al ser $\hat{y}$ el minimizador del problema dual, la valuación del lagrangiano (2.4) en $(\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_N)$ alcanza su único máximo, que satisface:

$$U'(\hat{\xi}_n) = \hat{y}(x)\frac{q_n}{p_n},$$

para cada $n \in \{1, ..., N\}$. Lo cual es equivalente a

$$\hat{\xi}_n = I\left(\hat{y}(x)\frac{q_n}{p_n}\right), \tag{2.10}$$

donde I es la función inversa de U'.

De forma abreviada, se tiene que

$$\inf_{y>0} \Psi(y) = \inf_{y>0}(v(y) + xy) = v(\hat{y}(x)) + x\hat{y}(x) = L(\hat{\xi}_1, ...\hat{\xi}_N, \hat{y}(x)). \tag{2.11}$$

Que L se maximice en $(\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_N, \hat{y}(x))$ implica que

$$\frac{\partial}{\partial y} L(\xi_1, ..., \xi_N, y)|_{(\hat{\xi}_1,...,\hat{\xi}_N,\hat{y}(x))} = x - \sum_{n=1}^{N} q_n \hat{\xi}_n = 0.$$

De aquí se observa

$$\sum_{n=1}^{N} q_n \hat{\xi}_n = x. \tag{2.12}$$

Por lo tanto

$$L(\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_N, \hat{y}(x)) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n).$$

Para relacionar esta última expresión con la función de valor u, se retoma la expresión (2.6) y se hace notar que $(\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_N)$ se encuentra dentro de la región admisible, como se muestra en (2.12); lo cual implica que

$$u(x) \geq \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n). \tag{2.13}$$

Por otra parte, para $(\xi_1, ..., \xi_N)$ en la región admisible y $\hat{y}(x) \geq 0$, se cumple

$$\sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) \leq \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) - \hat{y}(x)\left(\sum_{n=1}^{N} q_n \xi_n - x\right) = L(\xi_1, ..., \xi_N, \hat{y}(x)).$$

Esta última expresión alcanza su máximo en $(\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_N)$, es decir, su máximo es $L(\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_N, \hat{y}(x))$. En particular, la definición (2.6) se hace sobre la región admisible, por lo que

$$u(x) \leq L(\hat{\xi})_1, ..., \hat{\xi}_N, \hat{y}(x)) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n). \tag{2.14}$$

De (2.13) y (2.14) se sigue

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n). \tag{2.15}$$

Para regresar a la notación anterior, se denota al optimizador $\hat{X}_T^x(\omega_n) = \hat{\xi}_n$, para $n = 1, ..., N$.

De (2.11) y (2.15) se observa que las funciones u y v son conjugadas, ya que

$$\inf_{y>0}(v(y) + xy) = v(\hat{y}(x)) + x\hat{y}(x) = u(x), \quad x \in dom(U).$$

De donde se sigue que $u'(x) = \hat{y}(x)$ para $x \in dom(U)$. Además, por la fórmula de inversión, u hereda las propiedades de U del supuesto 1.

A continuación, se presenta un teorema que enuncia los resultados previamente demostrados. (Teorema 2.3 de [Sc 03]).

Teorema 2.18. (***Ω finito, mercado completo)***.

Sea $S = (S_t)_{t=0}^T$ un mercado financiero definido sobre un espacio de probabilidad finito filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \boldsymbol{P})$ que satisface $\mathcal{M}^e(S) = \{\boldsymbol{Q}\}$, y sea U una función de utilidad que satisface el supuesto 1. Si se denota por $u(x)$ y $v(x)$ a las funciones de valor

$$u(x) = \sup_{X_T} \boldsymbol{E}[U(X_T)], \quad x \in dom(U), \tag{2.16}$$

$$v(y) = \boldsymbol{E}\left[V\left(y\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}}\right)\right], \quad y > 0. \tag{2.17}$$

Entonces:

(i) Las funciones $u(x)$ y $v(y)$ son conjugadas y u hereda las propiedades de U del supuesto 1.

(ii) El optimizador $\hat{X}_T(x)$ de la función u existe, es único y satisface

$$\hat{X}_T(x) = I\left(y\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}}\right), \text{ o, equivalentemente, } y\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}} = U'(\hat{X}_T(x)),$$

donde $x \in dom(U)$, $y > 0$ se relacionan vía $u'(x) = y$ o, equivalentemente, $x = -v'(y)$.

(iii) Se cumplen las siguientes fórmulas para u' y v':

$$u'(x) = \mathbf{E_P}[U'(\hat{X}_t(x))], \quad v'(y) = \mathbf{E_Q}\left[V'\left(y\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}}\right)\right],$$

$$xu'(x) = \mathbf{E_P}[\hat{X}_t(x)U'(\hat{X}_t(x))], \quad yv'(y) = \mathbf{E_P}\left[y\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}}V'\left(y\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}}\right)\right].$$

Demostración. Los incisos (i) y (ii) fueron demostrados previamente.

(iii)

Para la primera fórmula, se observa del inciso (ii) que $u'(x) = y$, por lo que se tiene

$$u'(x) = y = y\sum_{n=1}^{N} q_n = \sum_{n=1}^{N} p_n y \frac{q_n}{p_n} = \mathbf{E_P}\left[y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right].$$

Para obtener la expresión de $v'(y)$ únicamente se deriva (2.17), para obtener

$$v'(y) = \sum_{n=1}^{N} q_n V'\left(y\frac{q_n}{p_n}\right) = \mathbf{E_Q}\left[V'\left(y\frac{q_n}{p_n}\right)\right].$$

Del inciso (ii) se tienen las igualdades $u'(x) = y$ y $y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = U'(\hat{X}_T(x))$, así que por (2.12) se sigue

$$\begin{aligned} xu'(x) = y\mathbf{E_Q}[\hat{X}_T(x)] &= \sum_{n=1}^{N} \hat{X}_T(x) y q_n = \sum_{n=1}^{N} p_n \hat{X}_T(x) U'(\hat{X}_T(x)) \\ &= \mathbf{E_P}[\hat{X}_T(x)U'(\hat{X}_T(x))]. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} yv'(y) = y\mathbf{E_Q}\left[V'\left(y\frac{q_n}{p_n}\right)\right] &= y\sum_{n=1}^{N} q_n V'\left(y\frac{q_n}{p_n}\right) = \sum_{n=1}^{N} p_n y \frac{q_n}{p_n} V'\left(y\frac{q_n}{p_n}\right) \\ &= \mathbf{E_P}\left[y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} V'\left(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)\right]. \end{aligned}$$

□

2.2.3. Caso Incompleto

Para el caso incompleto primero se hace la observación de que el conjunto de medidas martingala es un politopo convexo que tiene un número finito de puntos extremos $\{\mathbf{Q}^1, ..., \mathbf{Q}^M\}$. Para cada $1 \leq m \leq M$ se identifica a $\mathbf{Q}^m$ con las probabilidades $(q_1^m, ..., q_N^m)$.

El problema de optimización es:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad \mathbf{E_P}[U(X_T)] = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) \\ &\text{sujeto a} \qquad \mathbf{E_{Q^m}}[X_T] = \sum_{n=1}^{N} q_n^m \xi_n \leq x, \quad m = 1, ..., M. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Para resolverlo se integran M multiplicadores de Lagrange η_m, los cuales también deben satisfacer $\eta_m \geq 0 \quad \forall m \in \{1, ..., M\}$ para satisfacer las condiciones KKT; por lo que el lagrangiano es:

$$L(\xi_1, ..., \xi_N, \eta_1, ..., \eta_M) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) - \sum_{m=1}^{M} \eta_m \left(\sum_{n=1}^{N} q_n^m \xi_n - x \right).$$

Denotando $y = \sum_{m=1}^{M} \eta_m$, $\mu_m = \frac{\eta_m}{y}$, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_M)$ y

$$\mathbf{Q}^\mu = \sum_{m=1}^{M} \mu_m \mathbf{Q}^m,$$

se observa que el lagrangiano puede escribirse como

$$L(\xi_1, ..., \xi_N, y, \mathbf{Q}) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) - y \left(\sum_{n=1}^{N} q_n \xi_n - x \right),$$

donde $\mathbf{Q} = (q_1, ..., q_N) \in \mathcal{M}^a(S)$.

La función a optimizar en este caso es

$$\Psi(y, \mathbf{Q}) = \sum_{n=1}^{N} p_n V\left(y \frac{q_n}{p_n} \right) + yx, \quad y > 0, \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S).$$

La minimización se hace en dos pasos, primero fijando $y > 0$ y se minimiza sobre $\mathcal{M}^a(S)$

$$\Psi(y) = \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S)} \Psi(y, \mathbf{Q}), \quad y > 0.$$

El minimizador $\hat{\mathbf{Q}}(y) = (\hat{q}_1(y), ..., \hat{q}_N(y))$ es único y de forma similar al caso completo, se llega al valor que optimiza la función original:

$$\hat{\xi}_n = I\left(\hat{y}(x) \frac{\hat{q}_n(y)}{p_n} \right). \tag{2.19}$$

En resumen, el valor que maximiza la esperanza de la función de utilidad es (2.10) para modelos completos y (2.19) para incompletos, donde I es la función inversa de U' y $\hat{y}(x) = \mathbf{E_P}[U'(X_T)]$.

2.3. Ejemplos

Ejemplo de mercado completo con Ω finito (Modelo Binomial)

Se presenta el modelo binomial como un ejemplo de mercado financiero que satisface las condiciones y resultados del teorema 2.18.

Se modela el precio de un solo activo con riesgo en el transcurso de una secuencia de periodos de tiempo. En cada periodo existen dos posibilidades para el precio. Puede elevarse por un factor $u > 1$ o puede decrecer por un factor d, $0 < d < 1$. Para cada periodo, la probabilidad de que el precio incremente está dada por p, por lo que la probabilidad de que el precio disminuya es el complemento $1-p$. Se observa que para cada periodo, el comportamiento de precio se determina por una variable aleatoria con distribución Bernoulli, mientras que el número de incrementos acumulados en cada periodo sigue una distribución binomial.

Un proceso estocástico $\{B_t : t = 1, 2, ...\}$ es un proceso Bernoulli con parámetro p, si las variables aleatorias $B_1, B_2, ...$ son independientes y $\mathbf{P}(X_t = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_t = 0) = p$.

Un proceso estocástico $\{N_t : t = 1, 2, ...\}$ tal que $N_t = X_1 + ... + X_t$, donde las variables $X_1, X_2, ...$ corresponden a un proceso Bernoulli con parámetro p, se llama proceso binomial con parámetro p.

Definición del modelo

Un mercado financiero $S = (S_t)_{t=0}^{T}$, definido sobre un espacio de probabilidad finito filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T}, \mathbf{P})$, sigue un modelo de precio binomial si $S_0 > 0$ y

$$S_t = S_0 u^{N_t} d^{t-N_t}, \quad t = 1, 2, ..., T; \quad 0 < d < 1 < u;$$

donde N_t es un proceso binomial con parámetro $p > 0$.

Como consecuencia de esta definición del mercado S, se sigue que

$$\mathbf{P}(S_t = S_0 u^n d^{t-n}) = \mathbf{P}(N_t = n) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}, \quad \text{para } n = 0, 1, ..., t.$$

En cada periodo t, la variable S_t puede tomar $t+1$ valores distintos y se llega a ellos mediante 2^t trayectorias distintas.

El modelo es completo

Para verificar que el modelo es completo y por lo tanto sirva como ejemplo del teorema, se debe corroborar la existencia de una única medida de probabilidad martingala. Para que el proceso S sea martingala bajo una medida de probabilidad $\mathbf{Q}$, se requiere que se cumpla la relación

$$\mathbf{E_Q}[S_{t+1}|\mathcal{F}_t] = S_t, \quad \text{para cada } t = 0, 1, ..., T;$$

es decir,

$$\mathbf{E_Q}[S_0 u^{N_{t+1}} d^{t+1-N_{t+1}}|\mathcal{F}_t] = S_0 u^{N_t} d^{t-N_t}, \quad \text{para cada } t = 0, 1, ..., T-1.$$

Si se denota por $q = \mathbf{Q}(N_{t+1} = N_t + 1|\mathcal{F}_t)$ a la probabilidad condicional bajo la medida $\mathbf{Q}$ de que el siguiente movimiento en el precio del activo sea un incremento, dada la información que se tiene al tiempo t ($t = 0, 1, ..., T-1$), la condición anterior es equivalente a las siguientes condiciones:

$$q[S_0 u^{N_t+1} d^{t-N_t}] + (1-q)[S_0 u^{N_t} d^{t+1-N_t}] = S_0 u^{N_t} d^{t-N_t}$$

$$q u^{N_t} d^{t-N_t}[u-d] = u^{N_t} d^{t-N_t}[1-d]$$

$$q = \frac{1-d}{u-d}.$$

Dado que $0 < d < 1 < u$, se cumple que $0 < q < 1$. Con esto se corrobora que existe una medida de probabilidad martingala $\mathbf{Q}$ y dado que la condición que se debe cumplir es la misma para cualquier t y $\omega \in \Omega$, la medida es única.

La medida martingala está dada por

$$\mathbf{Q}(\omega) = q^n (1-q)^{T-n},$$

para cualquier estado $\omega \in \Omega$ que consista en n incrementos y $T-n$ decrementos.

La distribución de S_t bajo la medida martingala es

$$\mathbf{Q}(S_t = S_0 u^n d^{t-n}) = \binom{t}{n} q^n (1-q)^{t-n}, \quad n = 0, 1, ..., t. \tag{2.20}$$

Maximización de la utilidad esperada

Se considera un mercado $S = (S_t^0, S_t^1)_{t=0}^T$ en el que el precio del activo con riesgo S^1 sigue un modelo binomial. El mercado es completo y si se considera la función de utilidad $U(x) = ln(x)$, que satisface las condiciones usuales de regularidad planteadas en el supuesto 1.2, entonces pueden corroborarse los resultados que se presentan en el teorema 2.3.

Si se plantea el problema

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad \mathbf{E_P}[U(X_T)] = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) \\ &\text{sujeto a} \qquad \mathbf{E_Q}[X_T] = \sum_{n=1}^{N} q_n \xi_n \leq x. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Su lagrangiano está dado por

$$L(\xi_1, ..., \xi_N, y) = \sum_{n=1}^{N} p_n ln(\xi_n) - y \left(\sum_{n=1}^{N} q_n \xi_n - x \right), \tag{2.22}$$

equivalente a

$$L(\xi_1, ..., \xi_N, y) = \sum_{n=1}^{N} p_n \left(ln(\xi_n) - y \frac{q_n}{p_n} \xi_n \right) + yx. \tag{2.23}$$

Para plantear el problema dual se define la función

$$\Psi(y) = sup_{\xi_1, ..., \xi_N, y} L(\xi_1, ..., \xi_N, y). \tag{2.24}$$

De la expresión (2.23) se observa que obtener el valor de la función Ψ se puede separar en N problemas de la forma

$$maximizar_{\xi_n \in (0,\infty)} ln(\xi_n) - y \frac{q_n}{p_n} \xi_n$$

Para resolver estos problemas se ocupa la función conjugada, que para la función de utilidad cóncava está dada por

$$V(\eta) = \sup_{\xi} [ln(\xi) - \eta \xi] = ln \left(\frac{1}{\eta} \right) - 1.$$

Se puede observar que U satisface la fórmula de inversión, ya que

$$\inf_{\eta} [V(\eta) + \eta \xi] = \inf_{\eta} [ln \left(\frac{1}{\eta} \right) - 1 + \eta \xi] = ln(\xi).$$

Además $V'(y) = \frac{-1}{y}$, por lo que $-V'$ es la inversa de U. Con esta definición de V se puede reexpresar la función Ψ como

$$\Psi(y) = \sum_{n=1}^{N} p_n V\left(y\frac{q_n}{p_n}\right) + yx = \sum_{n=1}^{N} p_n\left(ln\left(\frac{p_n}{yq_n}\right) - 1\right) + yx$$

Si se toma la definición de la función v

$$v(y) := \mathbf{E_P}\left[V\left(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)\right] = \sum_{n=1}^{N} p_n V\left(y\frac{q_n}{p_n}\right) = \sum_{n=1}^{N} p_n\left(ln\left(\frac{p_n}{yq_n}\right) - 1\right)$$

y el hecho de que para un $x \in dom(U)$ existe un único $\hat{y}$ tal que

$$v'(\hat{y}) = \sum_{n=1}^{N} \frac{-p_n}{\hat{y}} = \frac{-1}{\hat{y}} = x,$$

entonces se tiene que $\hat{y} = \frac{1}{x}$, por lo que

$$\inf_{y>0} \Psi(y) = \mathbf{E_P}\left[V\left(\hat{y}\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)\right] + x\hat{y} = \sum_{n=1}^{N} p_n ln\left(\frac{xp_n}{q_n}\right).$$

La valuación del Lagrangiano con $\hat{y}$ fijo se maximiza en un $(\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_N)$ que debe satisfacer

$$U'(\hat{\xi}_n) = \hat{y}\frac{q_n}{p_n}, \quad \text{para cada } n = 1, ..., N;$$

lo que implica que

$$\hat{\xi}_n = x\frac{p_n}{q_n}, \quad n = 1, ..., N. \tag{2.25}$$

Con lo que se corrobora que

$$L(\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_N, \hat{y}) = \sum_{n=1}^{N} p_n\left(ln(\hat{\xi}_n) - \hat{y}\frac{q_n}{p_n}\hat{\xi}_n\right) + \hat{y}x = \sum_{n=1}^{N} p_n ln\left(x\frac{p_n}{q_n}\right), \tag{2.26}$$

es decir,

$$\inf_{y>0} \Psi(y) = L(\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_N, \hat{y}) = u(x). \tag{2.27}$$

Se hace la observación de que en $(\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_N)$, la restricción de (2.21) satisface la igualdad

$$\sum_{n=1}^{N} q_n\hat{\xi}_n = \sum_{n=1}^{N} q_n x\frac{p_n}{q_n} = x. \tag{2.28}$$

Se tiene entonces que el valor del portafolio al tiempo T, siguiendo la estrategia que optimiza la utilidad esperada para una riqueza inicial x, está dado por $\hat{X}_T = x\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}$. Al ser T cualquier horizonte de tiempo finito, se puede expresar un resultado similar para el valor óptimo del portafolio en cualquier tiempo $t = 0, 1, ..., T$.

Sea ω_n la unión de los eventos que consisten en $n = 0, 1..., t$ incrementos de precio hasta el tiempo t y sean $p_{n,t}$, $q_{n,t}$ sus respectivas probabilidades con respecto a las medidas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$, descritas en (2.3) y (2.20); entonces se puede expresar el valor óptimo del portafolio al tiempo t por

$$\hat{X}_t(\omega_n) = x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}}. \tag{2.29}$$

Estrategia de inversión

Si se denota por $\hat{H} = (\hat{H}_t^0, \hat{H}_t^1)_{t=1}^T$ al proceso que representa la estrategia de inversión y, considerando que $S_t^0 = 1$ para cualquier tiempo t, se puede expresar el valor óptimo del portafolio al tiempo t por

$$\hat{X}_t = \hat{H}_t^0 + \hat{H}_t^1 S_t^1. \tag{2.30}$$

En cada periodo, los valores $\hat{H}_t^0$ y $\hat{H}_t^1$ se establecen en el tiempo t y se mantienen hasta el tiempo $t+1$, por lo que antes de ser modificados se cumple

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{H}_t^0 + \hat{H}_t^1 S_{t+1}^1. \tag{2.31}$$

Para poder caracterizar a la estrategia $\hat{H}$ en términos de los parámetros conocidos p, u, d; se utiliza (2.30) y se reformula (2.31) en términos de S_t^1. Dado que S_{t+1}^1 tiene los posibles valores uS_t^1 y dS_t^1 para cualquier t, se analizan dos casos.

Caso 1: $S_{t+1}^1 = uS_t^1$

De (2.29) se tiene

$$\hat{X}_{t+1}(\omega_{n+1}) = x\frac{p_{n+1,t+1}}{q_{n+1,t+1}} = x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}}\frac{p}{q} = \hat{X}_t(\omega_n)\frac{p}{q}. \tag{2.32}$$

Por otra parte, de (2.29) y (2.30) se obtiene

$$\hat{H}_t^1(\omega_n)S_t^1 = x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}} - \hat{H}_t^0(\omega_n). \tag{2.33}$$

De (2.31) y (2.32) se sigue

$$\hat{H}_t^0(\omega_n) + \hat{H}_t^1(\omega_n)uS_t^1 = \hat{X}_t(\omega_n)\frac{p}{q}. \tag{2.34}$$

Al sustituir (2.33) en (2.34) se obtiene la ecuación

$$\hat{H}_t^0(\omega_n) + \left(x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}} - \hat{H}_t^0(\omega_n)\right)u = x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}}\frac{p}{q}. \tag{2.35}$$

De donde se obtiene

$$\hat{H}_t^0(\omega_n) = x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}}\left(\frac{p-qu}{q(1-u)}\right). \tag{2.36}$$

Esta expresión se sustituye en (2.33) para obtener

$$\hat{H}_t^1 S_t^1(\omega_n) = x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}}\left(1 - \frac{p-qu}{q(1-u)}\right). \tag{2.37}$$

Caso 2: $S_{t+1}^1 = dS_t^1$

De (2.29) y (2.31) se sigue

$$\hat{X}_{t+1}(\omega_n) = \hat{H}_t^0(\omega_n) + \hat{H}_t^1(\omega_n)S_{t+1}1 = x\frac{p_{n,t+1}}{q_{n,t+1}} = x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}}\frac{1-p}{1-q}, \tag{2.38}$$

es decir,

$$\hat{H}_t^0(\omega_n) + \hat{H}_t^1(\omega_n)dS_t^1 = x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}}\frac{1-p}{1-q}. \tag{2.39}$$

En este caso se mantiene válida la expresión (2.33) y al sustituir en (2.39) se obtiene

$$\hat{H}_t^0(\omega_n) + \left(x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}} - \hat{H}_t^0(\omega_n)\right)d = x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}}\frac{1-p}{1-q}. \tag{2.40}$$

De donde se sigue que

$$\hat{H}_t^0(\omega_n) = x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}}\left(\frac{1-p-d(1-q)}{(1-q)(1-d)}\right) = x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}}\left(\frac{p-qu}{q(1-u)}\right). \tag{2.41}$$

Entonces se observa que $\hat{H}_t^0(\omega_n)$ coincide en ambos casos. Por lo tanto $\hat{H}_t^1 S_t^1(\omega_n)$ también coincide. Puede observarse que en ambas expresiones se presenta la porción del valor del portafolio al tiempo t que debe asignarse a cada activo y mantenerse hasta al tiempo $t+1$.

En términos de los parámetros p, u, d; al tiempo $t = 0, 1, ..., T-1$, la porción del valor del portafolio que debe invertirse en el activo sin riesgo es

$$\frac{u(1-d)-(u-d)p}{(u-1)(1-d)}. \tag{2.42}$$

En el activo con riesgo se invierte el complemento y se mantiene esta asignación hasta que el precio S^1 haya cambiado en el tiempo $t+1$.

El modelo con algunos datos

Considérese que el activo con riesgo inicia con un precio $S_0^1 = 10$. En cada periodo el precio incrementa en un factor $u = 1.4$ con probabilidad $p = 0.55$ o disminuye en un factor $d = 0.6$ con probabilidad $1-p$. Se toman en cuenta $T = 3$ periodos y una riqueza inicial de $x = 100$.

De acuerdo con (2.3)

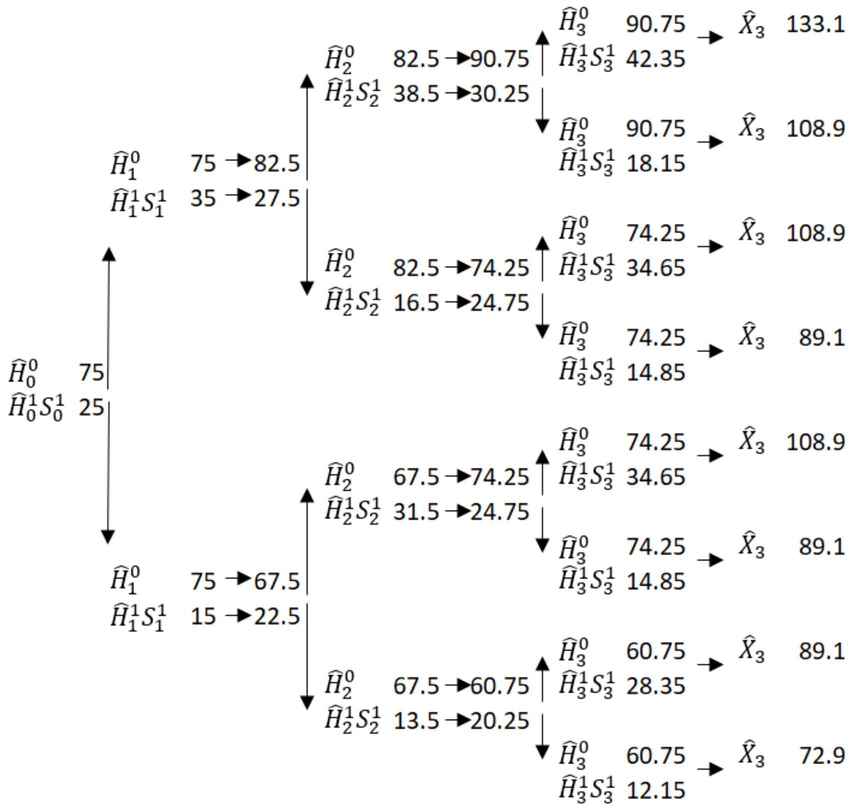
$$q = \frac{1-d}{u-d} = 0.5,$$

con lo que se puede obtener:

$$\frac{u(1-d)-(u-d)p}{(u-1)(1-d)} = 0.75; \tag{2.43}$$

que es la proporción del valor del portafolio que debe invertirse en el activo libre de riesgo. Como puede observarse, esta proporción no depende del periodo t, por lo que se mantiene sin cambio en los 3 periodos.

En el siguiente esquema se muestran las diferentes trayectorias que puede seguir el valor del portafolio y las reasignaciones que se deben hacer en cada periodo.



Como se muestra, al tiempo $t = 0$ el valor del portafolio es $x = 100$ y se distribuye con 75 unidades en el activo sin riesgo y 25 en el activo con riesgo. Al tiempo $t = 1$ el precio S_1^1 puede incrementar a 14 o disminuir a 6. En caso de incrementar el portafolio tendría un valor de 110, con las mismas 75 unidades en el activo sin riesgo y 35 unidades en el activo con riesgo. Este nuevo valor se redistribuye con las mismas proporciones, con lo que el activo libre de riesgo queda con 82.5 unidades. Se continua de esta forma y se obtienen los $T + 1 = 4$ posibles valores para el portafolio: 133.1, 108.9, 89.1 y 72.9; a los que se puede llegar mediante $2^T = 8$ trayectorias distintas.

Al seguir esta estrategia, la riqueza terminal esperada es $\mathbf{E}[X_3] = 103.0301$, con una utilidad esperada $\mathbf{E}[U(X_3)] \approx 4.62$. Si se considera la estrategia de mayor riesgo, en la que se invierte toda la riqueza en el activo con riesgo durante los 3 periodos, se obtiene una riqueza terminal esperada $\mathbf{E}[X_3] = 112.4864$, sin embargo, la utilidad esperada es $\mathbf{E}[U(X_3)] \approx 4.47$; donde se observa la diferencia entre optimizar la utilidad y el valor del portafolio.

Ejemplo de mercado incompleto con Ω finito (Modelo Trinomial)

De forma similar al modelo binomial, se presenta un modelo de un mercado financiero que contempla un solo activo con riesgo. En este caso el precio del activo con riesgo puede modificarse de 3 formas diferentes en cada periodo. Esta modificación en el número de posibles cambios del precio resulta en hacer incompleto el modelo.

El modelo consiste entonces de un activo con riesgo, cuyo precio se ve afectado por una secuencia de factores en el transcurso de determinados periodos de tiempo. En cada periodo existen tres posibilidades para el precio. Se contempla un incremento del precio por un factor $u > 1$, lo cual puede ocurrir con una probabilidad p_u; un decremento por un factor $d < 1$, con probabilidad p_d; o una variación por un factor intermedio m, tal que $d < m < u$, con probabilidad $p_m = 1 - p_u - p_d$.

Hasta un tiempo $t \in \mathbb{N}$, el número de veces que el precio inicial S_0 se ha afectado por los factores u, m, d está dado por un vector aleatorio (U_t, M_t, D_t) con distribución de probabilidad multinomial con parámetros $(t; p_u, p_m, p_d)$:

$$\mathbf{P}(U_t = n_1, M_t = n_2, D_t = n_3) = \frac{t!}{n_1!n_2!n_3!} p_u^{n_1} p_m^{n_2} p_d^{n_3},$$

donde $n_1 + n_2 + n_3 = t$.

Definición del modelo

El proceso de precio de un activo $(S_t)_{t=0}^{T}$, definido sobre un espacio de probabilidad finito filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T}, \mathbf{P})$, sigue un modelo de precio trinomial si $S_0 > 0$ y

$$S_t = S_0 u^{U_t} m^{M_t} d^{D_t}, \quad t = 1, 2, ..., T; \quad 0 < d < 1 < u,\ d < m < u;$$

donde (U_t, M_t, D_t) es un vector multinomial con parámetros $(t; p_u, p_m, p_d)$.

Por lo que las probabilidades de que el activo tome alguno de sus valores posibles en cada tiempo t está dado por una expresión de la forma

$$\mathbf{P}(S_t = S_0 u^{n_1} m^{n_2} d^{n_3}) = \mathbf{P}(U_t = n_1, M_t = n_2, D_t = n_3), \quad n_1 + n_2 + n_3 = t.$$

En cada periodo t, la variable S_t puede tomar, a lo más, $(t+1)(t+2)/2$ valores distintos y se llega a ellos mediante 3^t trayectorias distintas.

El modelo es incompleto

Para verificar que el modelo es incompleto, se debe corroborar la existencia de una infinidad de medidas de probabilidad martingala. Para que el proceso S sea martingala bajo una medida de probabilidad $\mathbf{Q}$, se requiere que se cumpla la relación

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_{t+1}|\mathcal{F}_t] = S_t, \quad \text{para cada } t = 0, 1, ..., T-1;$$

es decir,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_0 u^{U_{t+1}} m^{M_{t+1}} d^{D_{t+1}}|\mathcal{F}_t] = S_0 u^{U_t} m^{M_t} d^{D_t}, \quad \text{para cada } t = 0, 1, ..., T-1.$$

Se hace la observación de que con la información que se tiene al tiempo t, los valores que puede tomar S_{t+1} son $S_t u, S_t m, S_t d$. Si se denota por q_u, q_m, q_d a las probabilidades condicionadas a $\mathcal{F}_t$, bajo una medida de probabilidad $\mathbf{Q}$, de que el valor de S_{t+1} sea $S_t u$, $S_t m$ o $S_t d$, respectivamente, se tiene que la medida $\mathbf{Q}$ debe cumplir:

$$q_u S_t u + q_m S_t m + q_d S_t d = S_t, \quad t = 0, 1, ..., T-1.$$

Además, las probabilidades condicionales deben satisfacer

$$q_u + q_m + q_d = 1.$$

Las dos condiciones anteriores que debe satisfacer una medida de probabilidad para ser medida martingala plantean un sistema de ecuaciones. Una forma de presentar las posibles soluciones del sistema es la siguiente:

$$q_u = \frac{1-m}{u-m} + \frac{m-d}{u-m} q_d, \tag{2.44}$$

$$q_m = \frac{u-1}{u-m} - \frac{u-d}{u-m} q_d, \tag{2.45}$$

$$\text{máx}\{\frac{m-1}{m-d}, 0\} < q_d < \frac{1-u}{d-u}. \tag{2.46}$$

Las cotas de q_d garantizan que q_u y q_m sean positivas y menores a uno.

Las cotas entre las que debe encontrarse el valor q_d son distintas, siempre que $u \neq m$ y $d \neq 1$, lo cual se satisface desde que se establece $d < m < u$ en la definición del modelo. De esta forma, q_d puede tomar una infinidad de valores, dando lugar a una infinidad de soluciones del sistema de ecuaciones que representan las condiciones para que una medida sea medida martingala. De esta forma se corrobora que el mercado financiero es incompleto.

Las medidas martingala satisfacen

$$\mathbf{Q}(\omega) = q_u^{x_1} q_m^{x_2} q_u^{x_3}, \quad x_1 + x_2 + x_3 = T$$

para cualquier estado $\omega \in \Omega$ que consista en x_1 incrementos por el factor u, x_2 modificaciones por el factor m y x_3 decrementos por el factor d. En total hay $\frac{t!}{x_1!x_2!x_3!}$ trayectorias diferentes que consisten en ese número de movimientos de cada tipo y se considera a cada trayectoria como un estado diferente ω.

Maximización de la utilidad esperada

Se considera un mercado $S = (S_t^0, S_t^1)_{t=0}^T$ que consiste en un activo libre de riesgo y de un solo activo con riesgo, cuyo precio sigue un modelo trinomial. El mercado es incompleto y si se considera la función de utilidad $U(x) = ln(x)$, que satisface las condiciones usuales de regularidad planteadas en el supuesto 1.2, entonces pueden corroborarse los resultados que se presentan en el teorema 2.4.

Si se escribe el dominio sobre el que varían las X_T de la definición de la función $u(x)$ como

$$\mathcal{C}(x) = \{X_T \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) | \mathbf{E_Q}[X_T] \leq x, \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S)\},$$

entonces se puede replantear esta función u como un problema de optimización, de la forma

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad \mathbf{E_P}[U(X_T)] = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) \\ &\text{sujeto a} \qquad \mathbf{E_{Q^m}}[X_T] = \sum_{n=1}^{N} q_n^m \xi_n \leq x, \quad m = 1, ..., M. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Su lagrangiano está dado por

$$L(\xi_1, ..., \xi_N, \eta_1, ..., \eta_M) = \sum_{n=1}^{N} p_n ln(\xi_n) - \sum_{m=1}^{M} \eta_m \left(\sum_{n=1}^{N} q_n^m \xi_n - x \right), \tag{2.48}$$

equivalente a

$$L(\xi_1, ..., \xi_N, , \eta_1, ..., \eta_M) = \sum_{n=1}^{N} p_n \left(ln(\xi_n) - \sum_{m=1}^{M} \frac{\eta_m q_n^m}{p_n} \xi_n \right) + \sum_{m=1}^{M} \eta_m x, \quad (2.49)$$

donde $(\xi_1, ..., \xi_N) \in dom(U)^N$, $(\eta_1, ..., \eta_M) \in \mathbb{R}_+^M$.

Se denotan $y = \eta_1 + ... + \eta_M$, $\mu_m = \frac{\eta_m}{y}$, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_M)$ y

$$\mathbf{Q}^\mu = \sum_{m=1}^{M} \mu_m \mathbf{Q}^m.$$

Se puede escribir el lagrangiano como

$$L(\xi_1, ..., \xi_N, y, \mathbf{Q}) = \sum_{n=1}^{N} p_n \left(ln(\xi_n) - y \frac{q_n}{p_n} \xi_n \right) + yx, \quad (2.50)$$

que es una expresión análoga a la que se tiene en el caso completo.

Para plantear el problema dual se define la función

$$\Psi(y, \mathbf{Q}) = \sup_{\xi_1, ..., \xi_N} L(\xi_1, ..., \xi_N, y, \mathbf{Q}). \quad (2.51)$$

La minimización de $\Psi(y, \mathbf{Q})$ se hace en dos pasos. Del teorema se tiene que existe una única medida martingala $\hat{\mathbf{Q}}$ que la minimiza para una y fija, de tal forma que

$$\Psi(y) = \Psi(y, \hat{\mathbf{Q}}).$$

Por lo que al determinar $\hat{\mathbf{Q}}$ se llega a una expresión de Ψ análoga a la que se tiene en el caso completo.

De esta forma se obtienen

$$\hat{y} = \frac{1}{x}, \quad \hat{\xi}_n = x \frac{p_n}{\hat{q}_n}.$$

Esto indica que el valor del portafolio al tiempo T, siguiendo la estrategia que optimiza la utilidad esperada para una riqueza inicial x, está dado por

$\hat{X}_T = x\frac{d\mathbf{P}}{d\hat{\mathbf{Q}}}$. T es un horizonte de tiempo finito, lo que indica que pueden obtenerse expresiones similares para el valor óptimo del portafolio en cualquier tiempo $t = 1, ..., T$.

Estrategia óptima

En el modelo existen 3^t trayectorias distintas que puede seguir el precio del activo con riesgo hasta un tiempo t. Cada una consiste en n_1 incrementos por el factor u, n_2 modificaciones por el factor m y n_3 decrementos por el factor d, de tal forma que $n_1 + n_2 + n_3 = t$. A cada uno de los valores distintos que se pueden alcanzar al tiempo t se puede llegar mediante $\frac{t!}{n_1!n_2!n_3!}$ trayectorias, por lo que, sin pérdida de generalidad, se puede denotar por ω_{n_1,n_2,n_3} al evento que consiste en n_1, n_2, n_3 variaciones por los factores u, m, d respectivamente; sin distinción de la trayectoria por la que se haya llegado a ese valor. Sean $p_{n_1,n_2,n_3;t}$ y $q_{n_1,n_2,n_3;t}$ las respectivas probabilidades de este evento con respecto a las medidas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$, entonces se puede expresar el valor óptimo del portafolio al tiempo t por

$$\hat{X}_t(\omega_{n_1,n_2,n_3}) = x\frac{p_{n_1,n_2,n_3;t}}{\hat{q}_{n_1,n_2,n_3;t}}. \tag{2.52}$$

De forma análoga al caso del modelo binomial, al denotar por $\hat{H} = (\hat{H}_t^0, \hat{H}_t^1)_{t=1}^T$ al proceso que representa la estrategia de inversión óptima, se tienen las expresiones:

$$\hat{X}_t = \hat{H}_t^0 + \hat{H}_t^1 S_t^1, \tag{2.53}$$

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{H}_t^0 + \hat{H}_t^1 S_{t+1}^1. \tag{2.54}$$

Para poder obtener una expresión de la estrategia $\hat{H}$ en términos de los parámetros conocidos u, m, d, p_u, p_m, p_d; se utiliza (2.53) y se expresa (2.54) en términos de S_t^1. Este procedimiento se considera en 3 distintos casos, determinados por los posibles valores que puede tener S_{t+1}^1 en términos de S_t^1. De forma similar a como se presentó en el modelo binomial, los 3 casos llegan a la misma determinación de la estrategia, por lo que se presenta aquí solamente uno de los casos.

Caso $S_{t+1}^1 = dS_t^1$:

De (2.52) se tiene

$$\hat{X}_{t+1}(\omega_{n_1+1,n_2,n_3}) = x\frac{p_{n_1+1,n_2,n_3;t+1}}{\hat{q}_{n_1+1,n_2,n_3;t+1}} = x\frac{p_{n_1,n_2,n_3;t}}{\hat{q}_{n_1,n_2,n_3;t}}\frac{p_d}{\hat{q}_d} = \hat{X}_t(\omega_{n_1,n_2,n_3})\frac{p_d}{\hat{q}_d}. \tag{2.55}$$

Al considerar (2.53), (2.54), (2.55) y el hecho que $S^1_{t+1} = dS^1_t$, se obtiene

$$\hat{H}^0_t(\omega_{n_1,n_2,n_3}) + \left(x\frac{p_{n_1,n_2,n_3;t}}{\hat{q}_{n_1,n_2,n_3;t}} - \hat{H}^0_t(\omega_{n_1,n_2,n_3})\right) d = x\frac{p_{n_1,n_2,n_3;t}}{\hat{q}_{n_1,n_2,n_3;t}}\frac{p_d}{\hat{q}_d}. \tag{2.56}$$

De donde finalmente se llega a la expresión

$$\hat{H}^0_t(\omega_{n_1,n_2,n_3}) = x\frac{p_{n_1,n_2,n_3;t}}{\hat{q}_{n_1,n_2,n_3;t}}\left(\frac{p_d}{\hat{q}_d} - d\right)\frac{1}{1-d}. \tag{2.57}$$

Se hacen dos observaciones de esta última expresión. La primera es que el factor $x\frac{p_{n_1,n_2,n_3;t}}{\hat{q}_{n_1,n_2,n_3;t}}$ es el valor óptimo del portafolio al tiempo t, por lo que el factor restante corresponde a la proporción de la riqueza que debe asignarse al activo libre de riesgo para ser mantenida hasta el tiempo $t+1$. La segunda observación es que esta proporción no depende del tiempo.

Por lo tanto, el monto que debe asignarse al activo con riesgo es

$$\hat{H}^1_t S^1_t(\omega_{n_1,n_2,n_3}) = x\frac{p_{n_1,n_2,n_3;t}}{\hat{q}_{n_1,n_2,n_3;t}}\left[1 - \left(\frac{p_d}{\hat{q}_d} - d\right)\frac{1}{1-d}\right]. \tag{2.58}$$

Muestra con valores determinados

Se considera que el activo con riesgo tiene un precio inicial de $S^0_1 = 10$. Los factores de cambio son $u = \frac{7}{5}$, $m = \frac{4}{5}$, $d = \frac{3}{5}$ con probabilidades respectivas $p_u = \frac{1}{2}$, $p_m = \frac{1}{5}$, $p_d = \frac{3}{10}$. Si se consideran $T = 2$ periodos, por (2.44), (2.45), (2.46), las medidas de probabilidad martingala deben satisfacer

$$q_u = \frac{1+q_d}{3}, \quad q_m = \frac{2-4q_d}{3}, \quad 0 < q_d < \frac{1}{2}. \tag{2.59}$$

En este caso, la medida $\hat{\mathbf{Q}}$ que minimiza (2.51) tiene q_d tal que minimiza

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} p_n ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \quad & \frac{1}{4} ln\left(\frac{9/4}{(1+q_d)^2}\right) + \frac{1}{5} ln\left(\frac{9/10}{(1+q_d)(2-4q_d)}\right) \\
& + \frac{3}{10} ln\left(\frac{9/20}{(1+q_d)q_d}\right) + \frac{1}{25} ln\left(\frac{9/25}{(2-4q_d)^2}\right) \\
& + \frac{3}{25} ln\left(\frac{9/50}{(2-4q_d)q_d}\right) + \frac{9}{100} ln\left(\frac{9/100}{q_d^2}\right).
\end{aligned}
$$

Se minimiza en

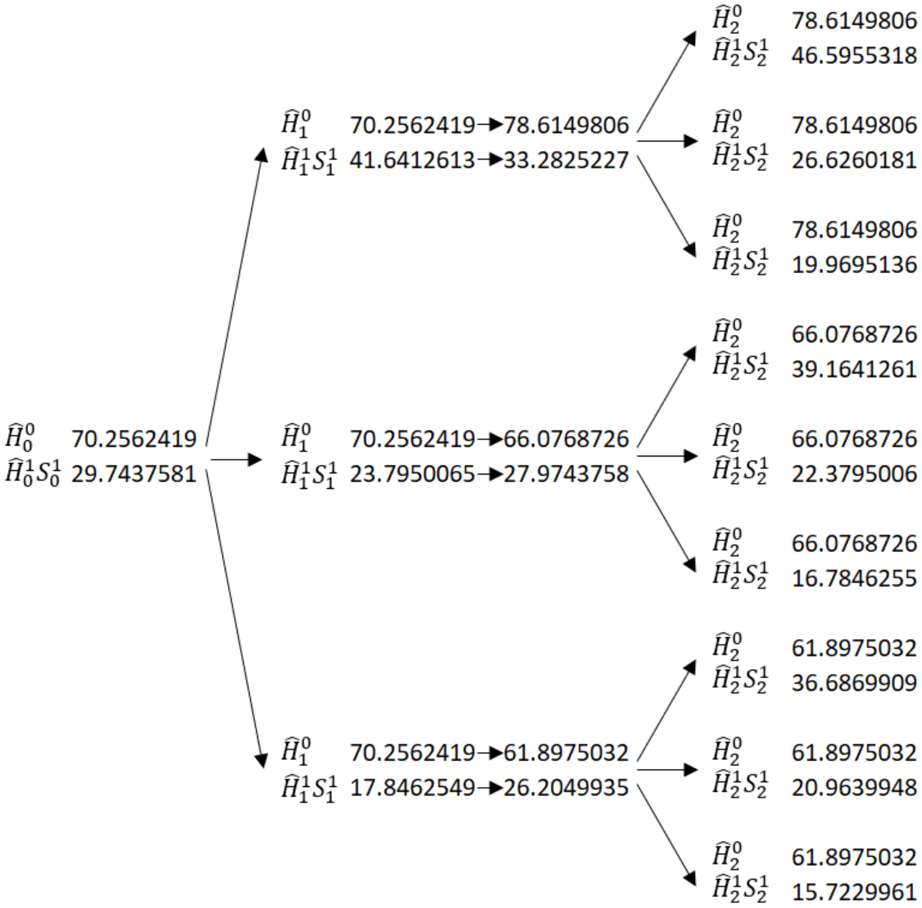
$$
q_d = \frac{\sqrt{61}-1}{20}. \tag{2.60}
$$

Por lo tanto, la medida martingala óptima es

$$
\hat{\mathbf{Q}} = \left(\frac{19+\sqrt{61}}{60}, \frac{11-\sqrt{61}}{15}, \frac{\sqrt{61}-1}{20}\right). \tag{2.61}
$$

Con esta medida de probabilidad y la expresión obtenida en (2.57) se pueden obtener las proporciones de la riqueza que deben asignarse a los activos en cada periodo de tiempo. La porción que debe asignarse al activo libre de riesgo es aproximadamente 0.702562419, mientras que la porción para el activo con riesgo es aproximadamente 0.297437581.

En el siguiente esquema se muestran las diferentes trayectorias y las asignaciones de riqueza a cada activo si se considera una riqueza inicial de $x = 100$.



Al seguir esta estrategia, la riqueza terminal esperada es $\mathbf{E}[\hat{X}_2] \approx 102.3936557$, con una utilidad terminal esperada $\mathbf{E}[U(\hat{X}_2)] \approx 4.617$. Si se considera, por ejemplo, la estrategia de mayor riesgo, en la que se invierte toda la riqueza en el activo con riesgo durante ambos periodos, se obtiene una riqueza terminal esperada de $\mathbf{E}[X_2] = 108.16$, que es mayor a la de la estrategia óptima, pero con una utilidad terminal esperada $\mathbf{E}[U(X_2)] \approx 4.54589$, la cual es menor a la que se obtiene con la estrategia óptima.

Capítulo 3

Modelos en espacios de probabilidad infinitos

La generalización de los resultados previos hacia espacios de probabilidad de dimensión infinita implica un mayor desarrollo teórico para poder solventar las nuevas dificultades que se presentan. Por ejemplo, el hecho de que los espacios $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ y $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ya no son isomorfos. Su estudio se justifica por la mayor cercanía que existe de estos modelos con los mercados financieros reales, en los cuales los posibles estados del mundo son infinitos, determinando los infinitos posibles precios que pueden tener los activos involucrados.

La descripción general de los modelos contempla un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$, en donde Ω es un conjunto infinito. El mercado consta de $d+1$ activos financieros, d de los cuales son activos con riesgo y uno es libre de riesgo. El proceso S correspondiente a los precios de los d activos riesgosos es una semimartingala con respecto a este espacio filtrado con horizonte de tiempo finito T.

Existen dos complicaciones importantes que se deben tratar para poder obtener resultados análogos a los obtenidos en el capítulo anterior, ahora para el marco de un espacio de probabilidad de dimensión infinita. El primero es que, en general, la función $u(x)$ no satisface los supuestos de ser creciente, estrictamente cóncava, continuamente diferenciable, $u'(0) = \infty$, $u'(\infty) = 0$. Y la solución óptima $\hat{X}$, de la definición de la función $u(x)$, no existe. El concepto clave para que se cumplan estas características es una condición de regularidad en la función de utilidad U, llamada elasticidad asintótica razonable. El segundo tema es que se debe hacer una elección adecuada de los conjuntos en los que X_T y $\mathbf{Q}$ pueden variar para obtener la optimización. La elección de estos conjuntos es diferente para cada caso del supuesto 1, es decir, para el caso 1, en el que $dom(U) = \mathbb{R}_+$, y para el caso 2, donde $dom(U) = \mathbb{R}$.

3.1. Caso 1. $dom(U) = \mathbb{R}_+$

3.1.1. Elasticidad asintótica razonable

El primer concepto que se debe considerar para mantener los resultados obtenidos es la elasticidad de la función de utilidad, la cual está dada por el cociente de la utilidad marginal $U'(x)$ y la utilidad promedio $U(x)/x$. El interés está en su comportamiento asintótico, al hacer a x tender a infinito. Que la utilidad marginal se aproxime a la utilidad promedio conforme x tiende a infinito quiere decir que, para un agente económico cuya utilidad está modelada por la función U, el incremento de utilidad al variar de x a $x+1$, cuando x es grande, es aproximadamente igual al promedio del incremento de utilidad al cambiar la riqueza de n a $n+1$, donde n corre de $1, \ldots, x-1$. La utilidad marginal debería ser substancialmente menor que la utilidad promedio, por lo que a una función en la que se hacen arbitrariamente cercanos se designa como no razonable, lo cual lleva a la siguiente definición.

Definición 3.1. *Sea U una función de utilidad que satisface el supuesto1, se dice que tiene elasticidad asintótica razonable si*

$$EA_{+\infty}(U) = \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1.$$

El siguiente lema muestra que para una función de utilidad cóncava se cumple $EA_{+\infty}(U) \leq 1$.

Lema 2. *Sea U una función real-valuada, diferenciable, creciente, estrictamente cóncava; su elasticidad asintótica $(EA(U))$ satisface*

(i) $\quad U(\infty) = \infty \Leftrightarrow EA(U) \in [0, 1]$, *(ii)* $0 < U(\infty) < \infty \Leftrightarrow EA(U) = 0$,

(iii) $-\infty < U(\infty) \leq 0 \Leftrightarrow EA(U) \in [-\infty, 0]$.

Donde $U(\infty) = \text{lím}_{x\to\infty} U(x)$.

Demostración. *(i)* Por la monotonicidad y la positividad de U' se tiene

$$0 \leq xU'(x) = (x-1)U'(x) + U'(x) \leq [U(x) - U(1)] + U'(1). \tag{3.1}$$

Por lo que para $U(\infty) = \infty$ se cumple

$$0 \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{U(x) - U(1) + U'(1)}{U(x)} = 1. \tag{3.2}$$

(ii) Para cualquier $x_0 > 0$,

$$\limsup_{x\to\infty} xU'(x) = \limsup_{x\to\infty}(x - x_0)U'(x) \leq \limsup_{x\to\infty}(U(x) - U(x_0)). \tag{3.3}$$

Como $U(\infty) < \infty$, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede elegir x_0 tal que

$$\limsup_{x\to\infty} U(x) - U(x_0) < \varepsilon. \tag{3.4}$$

(iii) De $U(\infty) \leq 0$ se sigue que $U(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$, por lo tanto $\frac{xU'(x)}{U(x)} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$. □

Existe una relación entre el comportamiento asintótico de la elasticidad de la función de utilidad y el comportamiento asintótico de la aversión al riesgo relativa, correspondiente a la misma función U, dada por -$\frac{xU''(x)}{U'(x)}$.

Si existe el límite

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{xU''(x)}{U'(x)}\right),$$

entonces se puede aplicar la regla de L'Hopital para obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{U'(x) + xU''(x)}{U'(x)} = 1 - \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{xU''(x)}{U'(x)}\right).$$

Esta relación indica, siempre que el límite exista, que la elasticidad asintótica de U es estrictamente menor que uno si la aversión al riesgo relativa asintótica es estrictamente positiva.

3.1.2. Elección de los conjuntos para X_T y $\mathbf{Q}$

De forma análoga al teorema 2.18, en el modelo general de un espacio de probabilidad infinito, se requiere plantear el problema de optimización y su lagrangiano para resolverlo a través del problema dual. Para poder encontrar el punto silla de este lagrangiano se requiere hacer uso del teorema minimax en versión infinito-dimensional. En [Sc 03], Schachermayer lo presenta de la siguiente forma.

Teorema 3.2. *Sean $\langle \mathcal{E}, \mathcal{F} \rangle$ espacios vectoriales localmente convexos en dualidad de separación, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ un par de subconjuntos convexos y $L(x,y)$ una función definida sobre $C \times D$, cóncava en la primera entrada y convexa en la segunda. Si uno de los conjuntos es compacto y el otro es completo, entonces existe un punto silla $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ tal que*

$$L(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \sup_{\xi \in \mathcal{C}} \inf_{\eta \in \mathcal{D}} L(\xi, \eta) = \inf_{\eta \in \mathcal{D}} \sup_{\xi \in \mathcal{C}} L(\xi, \eta).$$

Para este problema, el planteamiento infinito dimensional el lagrangiano está dado por

$$L^{x,y}(X_T, \mathbf{Q}) = \mathbf{E_P}[U(X_T)] - y(\mathbf{E_Q}[X_T - x]) = \mathbf{E_P}[U(X_T) - y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}X_T] + yx. \tag{3.5}$$

En principio, X_T se encuentra en las funciones no negativas $\mathcal{F}_T$-medibles y $\mathbf{Q}$ en el conjunto de medidas martingala absolutamente continuas respecto a $\mathbf{P}$, $\mathcal{M}^a(S)$.

Se observa que $\inf_{y>0, \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S)} L^{x,y}(X_T, \mathbf{Q}) > -\infty$ si y solo si $\mathbf{E_Q}[X_T] \leq x \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S)$. Así como en el teorema 2.15 del caso finito, se puede verificar que una variable no negativa X_T satisface esta última condición si y solo si existe una estrategia admisible H tal que $X_T \leq x + (H \cdot S)_T$.

Este resultado corresponde al teorema de supercobertura, que se demuestra en [KaQu 95] y que se generaliza para modelos semimartingala localmente acotados y no acotados en [DeSc 94] y [DeSc 98], respectivamente.

Por lo tanto, se puede definir

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x) &= \{X_T \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}) : X_T \leq x + (H \cdot S)_T, \text{ H admisible}\} \\ &= \{X_T \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}) : \mathbf{E_Q}[X_T] \leq x \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S)\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por otra parte, se denota por $\mathcal{D}$ a la envolvente sólida, convexa, cerrada de $\mathcal{M}^a(S)$ en $L^0_+(\mathbf{P})$ para poder usar el siguiente lema.

Lema 3. *Sea A un subconjunto acotado, convexo, cerrado de $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$. Entonces para cualquier sucesión $(h_n)_{n=1}^{\infty} \in A$ existe una sucesión de combinaciones convexas $k_n \in conv(h_n, h_{n+1}, ...)$ que converge casi seguramente a una función $k \in A$.*

Por lo tanto, al pasar de combinaciones convexas de sucesiones de optimización $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{C}$, y $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{D}$, se pueden encontrar límites en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ con respecto a convergencia casi segura. De esta forma, se tiene que

$$\mathcal{D} = \left\{ Y_T \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}) : \text{ existe } (\mathbf{Q}_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{M}^a(S),\, Y_T \leq \lim_{n\to\infty} \frac{d\mathbf{Q}_n}{d\mathbf{P}} \right\}. \tag{3.7}$$

Con estas definiciones se pueden garantizar dos equivalencias:

$$X_T \in \mathcal{C}(x) \Leftrightarrow \mathbf{E_P}[X_T Y_T] \leq 1, \quad \forall Y_T \in \mathcal{D}, \tag{3.8}$$

$$Y_T \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \mathbf{E_P}[X_T Y_T] \leq 1, \quad \forall X_T \in \mathcal{C}(x). \tag{3.9}$$

Esta relación es importante ya que en general el punto silla $(\hat{X}_T, \hat{\mathbf{Q}})$ del lagrangiano no satisface que $\hat{\mathbf{Q}}$ sea medida de probabilidad, solamente satisface $\mathbf{E}\left[\frac{d\hat{\mathbf{Q}}}{d\mathbf{P}}\right] \leq 1$, pero $\frac{d\hat{\mathbf{Q}}}{d\mathbf{P}}$ siempre se encuentra en $\mathcal{D}$.

Se observa entonces que $\mathcal{C}(x)$ y $\mathcal{D}$ son subconjuntos acotados, convexos y cerrados de $L^0_+(\mathbf{P})$ y por el lema 3 se tiene una metodología para encontrar límites puntuales usando combinaciones convexas, que se usa como un sustituto de la compacidad.

Finalmente, se observa que $\mathcal{C}(x)$ y $\mathcal{D}$ son subconjuntos de $L^0_+(\mathbf{P})$. Por lo que se puede utilizar el teorema minimax para encontrar el punto silla del lagrangiano.

Bajo estas condiciones es posible plantear la generalización del teorema 2.18 para el caso 1.

Teorema 3.3. (***Ω infinito, mercado incompleto, dom(U)*** $= \mathbb{R}_+$).

Sea $S = (S_t)_{0\leq t\leq T}$ un mercado financiero definido sobre un espacio de probabilidad infinito filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \boldsymbol{P})$, sea U una función de utilidad que satisface el supuesto 1 caso 1 y que tiene elasticidad asintótica razonable. Si se denota por $u(x)$ y $v(x)$ a las funciones de valor

$$u(x) = \sup_{X_T\in\mathcal{C}(x)} \boldsymbol{E}[U(X_T)], \quad x \in dom(U), \tag{3.10}$$

$$v(y) = \inf_{Y_T\in\mathcal{D}} \boldsymbol{E}[V(Y_T)], \quad y > 0. \tag{3.11}$$

Entonces:

(i) Las funciones $u(x)$ y $v(y)$ son conjugadas, continuamente diferenciables, estrictamente cóncava la primera y convexa la segunda en $(0,\infty)$ y satisfacen.

$$u'(0) = -v'(0) = \infty, \quad u'(\infty) = v'(\infty) = 0.$$

(ii) Los optimizadores $\hat{X}_T(x)$ y $\hat{Y}_T(x)$ de las funciones u y v existe, son únicos y satisfacen

$$\hat{X}_T(x) = I(\hat{Y}_T(y)), \quad \hat{Y}_T(y) = U'(\hat{X}_T(x)),$$

donde $x \in dom(U)$, $y > 0$ se relacionan vía $u'(x) = y$ o, equivalentemente, $x = -v'(y)$.

(iii) Se cumplen las siguientes fórmulas para u' y v':

$$u'(x) = \mathbf{E_P}\left[\frac{\hat{X}_T(x)U'(\hat{X}_T(x))}{x}\right], \quad v'(y) = \mathbf{E_P}\left[\frac{\hat{Y}_T(y)U'(\hat{Y}_T(y))}{y}\right].$$

3.2. Caso 2: $dom(U) = \mathbb{R}$

3.2.1. Elasticidad asintótica razonable

Debido al cambio en el dominio de la función de utilidad, en este caso se debe contemplar también el comportamiento asintótico de la elasticidad cuando x tiende a -∞, por lo que la definición de elasticidad asintótica razonable contempla una condición extra.

Definición 3.4. *Sea U una función de utilidad que satisface el supuesto1, se dice que tiene elasticidad asintótica razonable si*

$$EA_{+\infty}(U) = \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1 \quad y \quad EA_{-\infty}(U) = \liminf_{x\to-\infty} \frac{xU'(x)}{u(x)} > 1.$$

Schachermayer muestra en [Sc 01] que esta condición es necesaria y suficiente para la existencia del optimizador de la inversión para el caso $dom(U) = \mathbb{R}$.

3.2.2. Elección de los conjuntos para X_T y $\mathbf{Q}$

En esta sección se debe asumir que la semimartingala S es localmente acotada, ya que el caso de procesos no acotados localmente aún requiere más estudio.

Se mantiene la definición de la función de valor

$$u(x) = \sup_{H\in\mathcal{H}} \mathbf{E}[x + (H\cdot S)_T]. \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

donde $\mathcal{H}$ es el conjunto de estrategias admisibles, es decir, de estrategias H tales que el proceso $((H\cdot S)_t)_{0\leq t\leq T}$ está acotado por debajo. Esto con la finalidad de excluir estrategias duplicantes y esquemas similares.

En general, la solución óptima no es uniformemente acotada por debajo, típicamente con un mínimo igual a $-\infty$.

Para abordar este problema, para una función de utilidad $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se definen los conjuntos

$$\mathcal{C}_U^b(x) = \{G_T \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}) : \exists H \text{ admisible tal que } G_T \leq x + (H\cdot S)_T \text{ y}$$
$$\mathbf{E}[U(G_T)] < \infty\}.$$
$$\mathcal{C}_U(x) = \{X_T \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}; \mathbb{R}\cup\{+\infty\}) : U(X_T) \text{ está en la}$$
$$L^1(\mathbf{P})\text{-cerradura de } \{U(G_T) : G_T \in \mathcal{C}_U^b(x)\}\}.$$

Con lo que se replantea el problema (3.12) como

$$u(x) = \sup_{X_T \in C_U(x)} \mathbf{E}[U(X_T)], \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Las definiciones (3.12) y (3.13), de la función de valor $u(x)$ coinciden, debido a la forma en que se define $\mathcal{C}_U(x)$. Al hacer el cambio de definición se obtiene una ventaja en la oportunidad de encontrar el maximizador para la función.

En este caso, el dominio para el problema dual es $\mathcal{M}^a(S)$, sobre el cual siempre se encuentra el optimizador dual. Este hecho se prueba en [BF00].

Con estas consideraciones sobre los dominios de los problemas primal y dual, se formula el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.5. (**Ω *infinito, mercado incompleto, dom(U)*** $= \mathbb{R}$).

Sea $\mathcal{S} = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ un mercado financiero definido sobre un espacio de probabilidad infinito filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \boldsymbol{P})$, sea U una función de utilidad que satisface el supuesto 1 caso 2 y que tiene elasticidad asintótica razonable. Si se denota por $u(x)$ y $v(x)$ a las funciones de valor

$$u(x) = \sup_{X_T \in \mathcal{C}_U(x)} \boldsymbol{E}[U(X_T)], \quad x \in dom(U), \tag{3.14}$$

$$v(y) = \inf_{\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}^a(S)} \boldsymbol{E}\left[V\left(y\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}}\right)\right], \quad y > 0. \tag{3.15}$$

Entonces:

(i) Las funciones $u(x)$ y $v(y)$ son conjugadas, continuamente diferenciables, estrictamente cóncava la primera y convexa la segunda en $(0, \infty)$ y satisfacen.

$$u'(-\infty) = -v'(0) = v'(\infty) = \infty, \quad u'(\infty) = 0.$$

(ii) Los optimizadores $\hat{X}_T(x)$ y $\hat{\boldsymbol{Q}}(y)$ de las funciones u y v existen, son únicos y satisfacen

$$\hat{X}_T(x) = I\left(y\frac{d\hat{\boldsymbol{Q}}(y)}{d\boldsymbol{P}}\right), \quad y\frac{d\hat{\boldsymbol{Q}}(y)}{d\boldsymbol{P}} = U'(\hat{X}_T(x)),$$

donde $x \in dom(U)$, $y > 0$ *se relacionan vía* $u'(x) = y$ *o, equivalentemente,* $x = -v'(y)$.

(iii) Se cumplen las siguientes fórmulas para u' *y* v':

$$u'(x) = \mathbf{E_P}[U'(\hat{X}_T(x))], \quad v'(y) = \mathbf{E_{\hat{Q}}}\left[V'\left(y\frac{d\hat{\boldsymbol{Q}}(y)}{d\boldsymbol{P}}\right)\right],$$

$$xu'(x) = \mathbf{E_P}[\hat{X}_T(x)U'(\hat{X}_T(x))], \quad yv'(y) = \mathbf{E_P}\left[y\frac{d\hat{\boldsymbol{Q}}(y)}{d\boldsymbol{P}}V'\left(y\frac{d\hat{\boldsymbol{Q}}(y)}{d\boldsymbol{P}}\right)\right].$$

3.3. Estrategia óptima

Los resultados previos muestran la forma en que se puede obtener la riqueza terminal que maximiza la utilidad esperada. Un siguiente paso es encontrar la estrategia de inversión mediante la cual se obtiene dicha riqueza terminal. Los teoremas anteriores se prueban para mercados generales, en esta sección se presenta un enfoque para encontrar la estrategia de inversión óptima para modelos de mercados financieros definidos sobre espacios de probabilidad filtrados de la forma $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbf{P})$, donde la filtración $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ es generada por un $\mathbf{P}$-proceso de Wiener d-dimensional W.

El mercado financiero que se contempla consta de d activos con riesgo, cuyos precios están modelados por los procesos $S^1, ..., S^d$; y un activo libre de riesgo, modelado por el proceso de precio S^0.

Para obtener la estrategia de inversión óptima mediante este enfoque, se consideran las dinámicas de los procesos de precio de los activos, las cuales están dadas por las ecuaciones

$$dS_t^i = \mu_t^i S_t^i dt + S_t^i \sigma_t^i dW_t, \quad i = 1, ..., d. \tag{3.16}$$

Donde $\mu^1, ..., \mu^d$ son procesos $\mathbf{F}$-adaptados que modelan la tasa de retorno de cada activo con riesgo y $\sigma^1, ..., \sigma^d$ son procesos d-dimensionales, $\mathbf{F}$-adaptados que modelan la volatilidad de los precios de los activos con riesgo.

Por su parte, el proceso de precio del activo libre de riesgo tiene dinámica dada por la ecuación

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \tag{3.17}$$

donde la tasa r se asume constante.

La dinámica de los precios se puede expresar con notación matricial como

$$dS_t = D(S_t)\mu_t dt + D(S_t)\sigma_t dW_t, \tag{3.18}$$

donde $D(S_t)$ denota a la matriz diagonal de $d \times d$ con los procesos $S^1, ..., S^d$ en la diagonal, μ_t es un vector columna cuyas entradas corresponden a los procesos $\mu^1, ..., \mu^d$ y σ_t denota a la matriz cuyas filas son los procesos vector $\sigma^1, ..., \sigma^d$.

Con el objetivo de obtener resultados explícitos en la búsqueda de una estrategia mediante la cual se llegue a la riqueza terminal que maximice la utilidad esperada, usualmente se requiere suponer que el mercado es completo. Se asume entonces que la matriz de volatilidad σ_t es no singular para toda t, de tal forma que el modelo descrito previamente es completo.

La derivada de Radon-Nikodym de $\mathbf{Q}$ con respecto de $\mathbf{P}$ es una variable aleatoria integrable no negativa en $\mathcal{F}_T$, que se puede denotar por Z_T. Se cumple entonces en $\mathcal{F}_T$ que $\mathbf{Q} << \mathbf{P}$, es decir, que $\mathbf{Q}$ es absolutamente continua respecto de $\mathbf{P}$ y, por lo tanto, también lo es en $\mathcal{F}_t$ para cualquier $t \leq T$. Entonces, por el teorema de Radon-Nikodym, existe un proceso $\{Z_t; 0 \leq t \leq T\}$ definido por

$$Z_t = \mathbf{E}\left[\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}|\mathcal{F}_t\right].$$

A este proceso Z se le conoce como proceso de verosimilitud para la transformación de medida de $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$. Una observación importante es que el proceso Z es martingala con respecto a la medida $\mathbf{P}$ y la filtración $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$.

Con esta nueva notación, se puede expresar al optimizador de la riqueza terminal que maximiza la utilidad esperada por

$$\hat{X}_T = I(yZ_T). \tag{3.19}$$

Además, de la dinámica del proceso de precios (3.16) y el teorema de Girsanov, se puede encontrar la dinámica del proceso Z, dada por

$$\begin{aligned} dZ_t &= \{\sigma_t^{-1}(\mathbf{r} - \mu_t)\}' dW_t \\ Z_0 &= 1, \end{aligned} \tag{3.20}$$

en donde $'$ denota la transpuesta y $\mathbf{r}$ denota al vector columna de dimensión d con el valor r en cada entrada. De donde se obtiene la fórmula

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t [\sigma_s^{-1}(\mathbf{r}-\mu_s)]' dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_s^{-1}(\mathbf{r}-\mu_s)\|^2 ds\right\}. \tag{3.21}$$

Si se denota por $H_t = (H_t^1, ..., H_t^d)$ al vector de pesos relativos del portafolio, es decir, en el que cada H_t^i representa la porción del valor del portafolio al tiempo t que se encuentra invertido en el activo i, entonces la dinámica del proceso de valor del portafolio está dada por

$$dX_t = X_t H_t \mu_t dt + X_t(1 - H_t \mathbf{1}) r dt + X_t H_t \sigma_t dW_t, \tag{3.22}$$

donde $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^d$ se compone de 1 en cada entrada. Entonces, si se considera el proceso de valor descontado

$$X_t^* = \frac{X_t}{S_t^0} = e^{-rt} X_t, \tag{3.23}$$

entonces X^* es una $\mathbf{Q}$-martingala y de la fórmula de Itô, se tiene

$$dX_t^* = X_t^* H_t\{\mu_t - r\mathbf{1}\}t + X_t^* H_t \sigma_t dW_t. \tag{3.24}$$

De aquí es importante observar que la parte de la difusión se mantiene invariante bajo transformaciones de Girsanov, por lo que la $\mathbf{Q}$-dinámica de X^* es

$$dX_t^* = X_t^* H_t \sigma_t dW_t^{\mathbf{Q}}, \tag{3.25}$$

donde $W^{\mathbf{Q}} = (W_t^{\mathbf{Q}})_{\{0 \leq t \leq T\}}$ es un $\mathbf{Q}$-proceso de Wiener.

Si se retoma la expresión (3.19), se puede definir al proceso X^* por

$$X_t^* = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[e^{-rt}\hat{X}_T | \mathcal{F}_t]. \tag{3.26}$$

Dado que X^* es una $\mathbf{Q}$-martingala, se sigue del teorema de representación de martingalas que tiene dinámica

$$dX_t^* = h_t dW_t^{\mathbf{Q}}, \tag{3.27}$$

para algún proceso adaptado h.

De (3.25) y (3.27) se puede encontrar la estrategia H que genera la riqueza terminal óptima $\hat{X}_T$, al resolver la ecuación

$$X_t^* H_t \sigma_t = h_t. \tag{3.28}$$

Debido al supuesto de que σ_t es invertible, se puede obtener el proceso vector de los pesos óptimos del portafolio

$$\hat{H}_t = \frac{1}{X_t^*} h_t \sigma_t^{-1}. \tag{3.29}$$

De esta forma se puede encontrar la estrategia óptima $\hat{H}$. Sin embargo, esta forma no es explícita aún, ya que depende del proceso h_t dado por el teorema de representación de martingalas, el cual es un teorema de existencia, pero no indica cuál es su forma. Para obtener expresiones explícitas se toman en cuenta los supuestos particulares de cada modelo.

3.4. Ejemplos

Ejemplo de mercado completo con Ω infinito (Modelo Black-Scholes)

Para ejemplificar los mercados completos sobre espacios de probabilidad con dimensión infinita se presenta una versión simplificada del modelo Black Scholes, conocido como modelo Black-Scholes estándar, compuesto de dos activos financieros. Uno de ellos es un activo libre de riesgo y el otro un activo riesgoso. El modelo se determina mediante las dinámicas de los procesos correspondientes a los precios de ambos activos.

Definición del modelo

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad filtrado de dimensión infinita y $W = (W_t)_{0\leq t\leq T}$ un $\mathbf{P}-$proceso de Wiener, con $\mathcal{F}$ la filtración generada por W. Se define el modelo

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \\ dS_t^0 &= r S_t^0 dt. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Donde $S = (S_t)_{0\leq t\leq T}$ es el proceso de precio del activo con riesgo, $S^0 =$

$(S_t^0)_{0\le t\le T}$ es el proceso de precio del activo libre de riesgo o cuenta bancaria.

Ausencia de arbitraje y completez del modelo

Se sabe que un modelo de mercado financiero cumple con ausencia de oportunidad de arbitraje si existe una medida de probabilidad martingala. Si se considera un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, \mathbf{P})$ en un intervalo $[0,T]$ y una variable aleatoria no negativa Z_T en $\mathcal{F}_T$ con $\mathbf{E}[Z_T]=1$, se puede definir una nueva medida de probabilidad $\mathbf{Q}$ en $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ por

$$d\mathbf{Q} = Z_T d\mathbf{P}. \tag{3.31}$$

Por cómo está definida, puede observarse que Z_T es la derivada de Radon-Nikodym de $\mathbf{Q}$ con respecto de $\mathbf{P}$ en $\mathcal{F}_T$. Esto implica que $\mathbf{Q}$ es absolutamente continua con respecto de $\mathbf{P}$ en $\mathcal{F}_T$ y, por lo tanto, lo es para cualquier $\mathcal{F}_t$ con $t\le T$. De esta forma, por el teorema de Radon-Nikodym, existe un proceso $Z=(Z_t)_{0\le t\le T}$ definido por

$$Z_t = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \quad \text{en } \mathcal{F}_t. \tag{3.32}$$

Una observación importante es que el proceso Z es martingala con respecto a la medida $\mathbf{P}$ y la filtración $\mathcal{F}$. Esto se sigue del hecho de que para $0\le s\le t\le T$, y para cualquier $G\in\mathcal{F}_s$ se cumple

$$\int_G d\mathbf{Q} = \int_G Z_t d\mathbf{P}, \tag{3.33}$$

ya que $G\in\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t$. Y por definición de esperanza condicional se tiene que

$$\int_G Z_t d\mathbf{P} = \int_G \mathbf{E}[Z_t|\mathcal{F}_s] d\mathbf{P}, \tag{3.34}$$

es decir,

$$\int_G d\mathbf{Q} = \int_G \mathbf{E}[Z_t|\mathcal{F}_s] d\mathbf{P}. \tag{3.35}$$

Pero también

$$\int_G d\mathbf{Q} = \int_G Z_s d\mathbf{P}, \tag{3.36}$$

para cualquier $G\in\mathcal{F}_s$. Con lo que se concluye que

$$Z_s = \mathbf{E}[Z_t|\mathcal{F}_s]. \tag{3.37}$$

Si, de acuerdo con el teorema de representación de martingalas, se define el proceso $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ por

$$dZ_t = \theta_t Z_t dW_t, \tag{3.38}$$

entonces, por el teorema de Girsanov, se puede determinar al proceso $W^{\mathbf{Q}}$ por

$$dW_t = \theta_t dt + dW_t^{\mathbf{Q}}, \tag{3.39}$$

donde $W^{\mathbf{Q}}$ es un $\mathbf{Q}$-proceso de Wiener.

Al tomar (3.39) en la dinámica del precio S, se obtiene

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t(\theta_t dt + dW_t^{\mathbf{Q}}) = S_t(\mu + \sigma\theta_t)dt + S_t \sigma dW_t^{\mathbf{Q}}. \tag{3.40}$$

De acuerdo con la Proposición 10.23 que presenta Björk en [Bj 09], la medida de probabilidad $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ es medida martingala si y solo si S tiene dinámica

$$dS_t = S_t r dt + S_t \sigma dW_t^{\mathbf{Q}}. \tag{3.41}$$

Por lo tanto, la condición para que $\mathbf{Q}$ sea medida martingala es

$$r = \mu + \sigma\theta_t, \tag{3.42}$$

equivalente a que el proceso θ del teorema de Girsanov esté dado por

$$\theta_t = \frac{r - \mu}{\sigma}, \quad t \in [0, T]. \tag{3.43}$$

De esta forma se garantiza la existencia de una medida de probabilidad martingala y, por consiguiente, la ausencia de oportunidad de arbitraje. Adicionalmente, dado que la condición que debe cumplir una medida equivalente a $\mathbf{P}$ para ser medida martingala está determinada por una constante, ésta es única, por lo que el mercado es completo.

Maximización de la utilidad esperada

Si se considera el mercado $(S_t^0, S_t)_{0 \leq t \leq T}$ y la función de utilidad de potencia $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \quad x \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$, que satisface las condiciones usuales de regularidad planteadas en el supuesto 1.2, entonces pueden corroborarse los resultados obtenidos sobre la maximización de la utilidad esperada.

De la función de utilidad se obtiene directamente que

$$U'(x) = x^{\alpha-1} \quad \text{y, por lo tanto,} \quad I(y) = y^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{3.44}$$

De acuerdo con los resultados obtenidos, se sabe que las funciones

$$u(x) = \sup_{X_T \in \mathcal{C}(x)} \mathbf{E}[\frac{x^\alpha}{\alpha}], \quad v(y) = \mathbf{E}\left[V\left(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)\right]; \tag{3.45}$$

son funciones conjugadas. Además, que existe el optimizador

$$\hat{X}_T(x) = I\left(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) = \left(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{3.46}$$

Al retomar la definición

$$V(\eta) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}}[U(\xi) - \eta\xi], \quad \eta > 0, \tag{3.47}$$

se obtiene

$$V(\eta) = \eta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\frac{1-\alpha}{\alpha}. \tag{3.48}$$

Por lo que la función del problema dual está dada por

$$v(y) = \mathbf{E}\left[\left(y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right] = \frac{1-\alpha}{\alpha}y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\mathbf{E}\left[\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]. \tag{3.49}$$

Lo que implica que $v'(y) = -\mathbf{E}\left[\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]y^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Se sabe que este último valor debe ser igual a $-x$, por lo que

$$y = \left(\frac{x}{\mathbf{E}\left[\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]}\right)^{\alpha-1}. \tag{3.50}$$

De esta forma se llega a que el optimizador (3.46) es

$$\hat{X}_T(x) = \frac{x}{\mathbf{E}\left[\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \frac{x}{A_0}Z_T^{\frac{1}{\alpha-1}}, \tag{3.51}$$

donde $A_0 = \mathbf{E}\left[\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]$.

Estrategia óptima

El optimizador $\hat{X}_T$ determina el valor del portafolio al tiempo T que maximiza la utilidad esperada. Para poder determinar la estrategia que debe seguirse para obtener este valor terminal, se debe determinar el proceso de valor óptimo $\hat{X} = (\hat{X}_t)_{0\leq t\leq T}$. Se retoma entonces el hecho de que el proceso de valor óptimo $\hat{X}_t$ corresponde al valor descontado de un portafolio autofinanciable y que, por lo tanto, $\hat{X} = (\hat{X}_t)_{0\leq t\leq T}$ debe ser una martingala bajo $\mathbf{Q}$, es decir,

$$\hat{X}_t = \mathbf{E_Q}\left[\frac{x}{A_0} Z_T^{\frac{1}{\alpha-1}} | \mathcal{F}_t\right] = \frac{x}{A_0}\mathbf{E_Q}[Z_T^{\frac{1}{\alpha-1}} | \mathcal{F}_t]. \tag{3.52}$$

El teorema de Bayes indica que para una variable aleatoria X sobre un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, tal que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$ para una medida $\mathbf{Q}$ con derivada de Radon-Nikodym $Z = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ en $\mathcal{F}$, y para cualquier σ-álgebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, se cumple

$$\mathbf{E_Q}[X|\mathcal{G}] = \frac{\mathbf{E_P}[Z \cdot X|\mathcal{G}]}{\mathbf{E_P}[Z|\mathcal{G}]}, \quad \mathbf{Q} - c.s. \tag{3.53}$$

Entonces, considerando la observación (3.37) de que Z es una $\mathbf{P}$-martingala, se puede escribir

$$\mathbf{E_Q}[Z_T^{\frac{1}{\alpha-1}} | \mathcal{F}_t] = \frac{\mathbf{E_P}[Z_T^{\frac{1}{\alpha-1}} \cdot Z_T | \mathcal{F}_t]}{Z_t}, \quad \mathbf{Q} - c.s. \tag{3.54}$$

De donde se obtiene la siguiente expresión para el optimizador

$$\hat{X}_t = \frac{x}{A_0}\frac{\mathbf{E_P}[Z_T^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} | \mathcal{F}_t]}{Z_t}. \tag{3.55}$$

Se busca una reinterpretación de esta expresión para obtener una similar a (3.51). Para ello se consideran (3.38) y (3.43) para obtener

$$dZ_t = \frac{r-\mu}{\sigma} Z_t dW_t, \tag{3.56}$$

y por la fórmula de Itô esto lleva a que

$$Z_t = exp\left\{\int_0^t \frac{r-\mu}{\sigma} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 ds\right\}. \tag{3.57}$$

Por lo que

$$Z_T^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = exp\left\{\int_0^T \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right) dW_s + \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 ds\right\}. \tag{3.58}$$

Esta última expresión es similar a una derivada de Radon-Nikodym. Si se define la $\mathbf{P}$-martingala Z^0 por

$$Z_t^0 = exp\left\{\int_0^t \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 ds\right\}, \tag{3.59}$$

entonces se puede escribir

$$Z_T^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = Z_T^0 exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 dt\right\}. \tag{3.60}$$

Con ello se puede reexpresar

$$\mathbf{E_P}[Z_T^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}|\mathcal{F}_t] = \mathbf{E_P}\left[Z_T^0 exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 ds\right\}|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.61}$$

Por el teorema de Bayes esto es igual a

$$Z_t^0\mathbf{E_0}\left[exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 ds\right\}|\mathcal{F}_t\right], \tag{3.62}$$

donde la esperanza $\mathbf{E_0}$ integra sobre la medida $\mathbf{Q^0}$ cuya derivada de Radon-Nikodym es Z^0.

A su vez, lo anterior es igual a

$$Z_t^0 exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 ds\right\}\cdot\mathbf{E_0}\left[exp\left\{\frac{1}{2}\int_t^T \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 ds\right\}|\mathcal{F}_t\right], \tag{3.63}$$

y por (3.60) se llega a que estas expresiones son iguales a

$$Z_t^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\mathbf{E_0}\left[exp\left\{\frac{1}{2}\int_t^T \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 ds\right\}|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.64}$$

Si se denota

$$A_t = \mathbf{E_0}\left[exp\left\{\frac{1}{2}\int_t^T \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 ds\right\}|\mathcal{F}_t\right], \tag{3.65}$$

se puede reescribir (3.55) como

$$\hat{X}_t = \frac{x}{A_0}\frac{A_t}{Z_t}Z_t^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = x\frac{A_t}{A_0}Z_t^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{3.66}$$

De esta forma se cuenta con una expresión del proceso óptimo del valor descontado del portafolio, similar a la expresión (3.51) del optimizador al tiempo T. Con este proceso de valor descontado del portafolio se determina la estrategia que se debe seguir para maximizar la esperanza de la riqueza terminal.

Si se denota por μ_A y σ_A a las partes de la deriva y de la difusión del proceso A, es decir,

$$dA_t = A_t\mu_A dt + A_t\sigma_A dW_t. \tag{3.67}$$

Con esto y considerando (3.66) y (3.56), se obtiene

$$d\hat{X}_t = \hat{X}_t\mu_A dt + \hat{X}_t\left[\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) + \sigma_A\right]dW_t. \tag{3.68}$$

Por otra parte, si se denota por $\hat{H} = (\hat{H}_t^0, \hat{H}_t)_{0\leq t\leq T}$ a la estrategia óptima, mediante la cual se llega al valor terminal óptimo $\hat{X}_T$, donde $\hat{H}_t^0$ es la fracción del valor del portafolio al tiempo t que se tiene invertido en el activo libre de riesgo y $\hat{H}_t$ la correspondiente al activo con riesgo; se tiene que la dinámica del proceso de valor no descontado del portafolio, $\hat{X}^*$, está dada por

$$d\hat{X}_t^* = \hat{X}_t^* \hat{H}_t \mu dt + \hat{X}_t^*(1 - \hat{H}_t) r dt + \hat{X}_t^* \hat{H}_t \sigma dW_t. \tag{3.69}$$

De aquí se obtiene que la dinámica del proceso de valor descontado $\hat{X}_t = e^{-rt}\hat{X}_t^*$, es

$$d\hat{X}_t = \hat{X}_t \hat{H}_t (\mu - r) dt + \hat{X}_t \hat{H}_t \sigma dW_t^{\mathbf{Q}}. \tag{3.70}$$

Se toma en cuenta que la parte de la difusión no cambia bajo transformaciones de Girsanov, por lo que al comparar las partes de difusión de (3.68) y (3.70), se observa que

$$\hat{H}_t \sigma = \left(\frac{1}{\alpha - 1} \right) \left(\frac{r - \mu}{\sigma} \right) + \sigma_A. \tag{3.71}$$

Al ser μ y σ determinísticas, A también lo es, por lo que $\sigma_A = 0$. Por lo tanto, la estrategia que se debe seguir para maximizar la utilidad terminal esperada es

$$\hat{H} = \left(1 - \frac{r - \mu}{(\alpha - 1)\sigma^2}, \frac{r - \mu}{(\alpha - 1)\sigma^2} \right). \tag{3.72}$$

Aplicación del modelo con algunos datos

Se considera una riqueza inicial $x = 1$ que se invierte en un mercado que consta de dos activos financieros, uno libre de riesgo y uno con riesgo. Para este ejemplo se toman los precios diarios al cierre de la acción de CEMEX de enero de 2016 a julio de 2018 para modelar al activo riesgoso. Con los primeros dos años y medio de datos (hasta el 4 de julio de 2018) se calcula la tasa de retorno de la acción y su volatilidad. Con los datos que se presentan en el anexo 1, se toma el promedio y la desviación estándar anualizados de los rendimientos logarítmicos, con lo que se establece

$$\mu = 0.175288660712637; \quad \sigma = 0.324549669301335. \tag{3.73}$$

El mercado se complementa con un activo libre de riesgo. Se considera la tasa de cetes a 28 días correspondiente al cinco de julio de 2018 $r = 0.0772$ como la tasa libre de riesgo y se toma como constante. Esto es debido a que los datos que se emplean para estimar μ y σ corresponden a los precios observados entre el cuatro de enero de 2016 y el cuatro de julio de 2018, y posteriormente se toma como valor inicial $S_0 = 13.45$ el precio de la acción al cierre del cinco de julio de 2018 y se toma un horizonte de tiempo de 28 días naturales, es decir, hasta el 2 de agosto de 2018; lo que corresponde a 20 días de operación de la acción ($T = 20/252$). De esta forma, la expresión (3.30) del modelo es

$$\begin{aligned} dS_t &= 0.175288660712637 S_t dt + 0.324549669301335 S_t dW_t \\ dS_t^0 &= 0.0772 S_t^0 dt, \end{aligned} \tag{3.74}$$

donde W_t es un $\mathbf{P}$-proceso de Wiener.

Como en (3.39), por el teorema de Girsanov se tiene

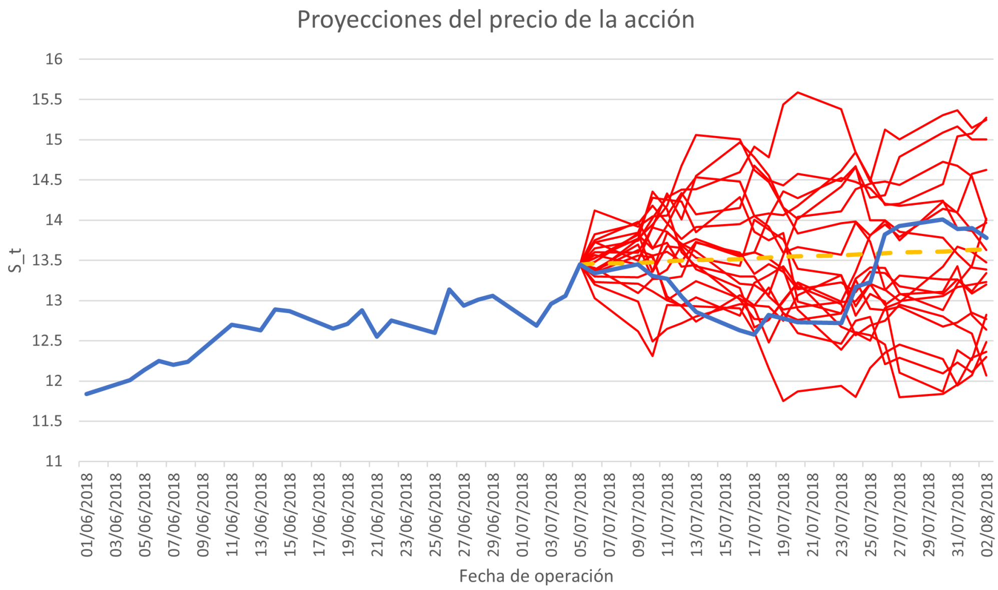
$$dW_t = \theta_t dt + dW_t^{\mathbf{Q}},$$

donde $W^{\mathbf{Q}}$ es un $\mathbf{Q}$-proceso de Wiener y el proceso θ_t está determinado por (3.43), es decir, por la constante

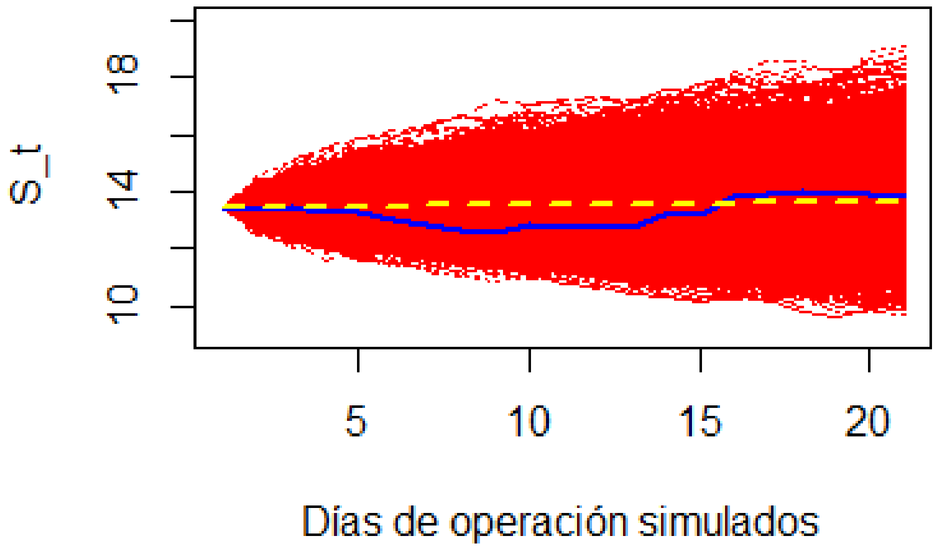
$$\theta = \frac{r - \mu}{\sigma} = \frac{0.0772 - 0.175288660712637}{0.324549669301335} \approx -0.302230043628745.$$

Este proceso representa la condición requerida para que una medida $\mathbf{Q}$ sea una medida de probabilidad martingala y, al estar determinada de forma única, la medida de probabilidad $\mathbf{Q}$ es única. Por lo tanto, el modelo es completo.

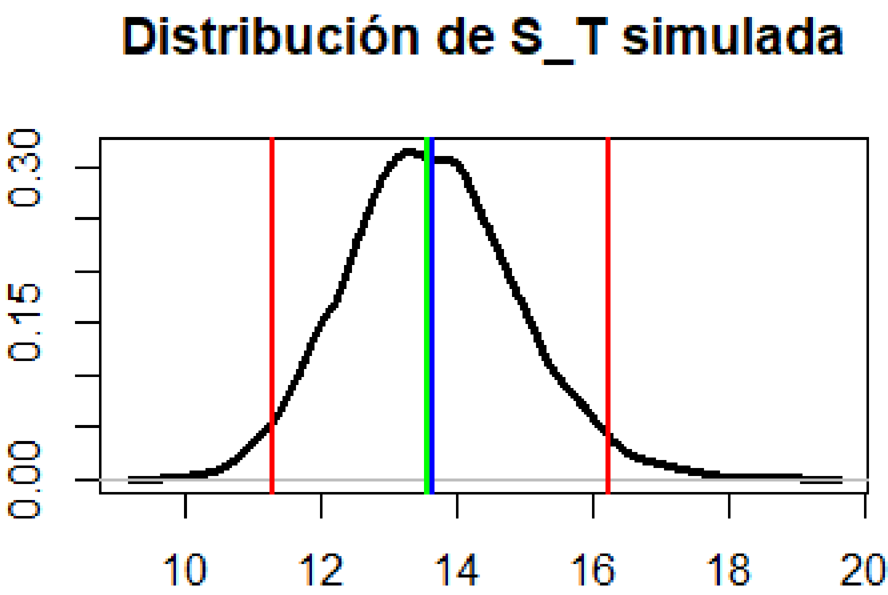
La siguiente gráfica presenta en color azul los precios observados de la acción entre el primero de junio de 2018 y el dos de agosto del mismo año. Las líneas rojas son trayectorias simuladas que pudo tener el precio a partir del 5 de julio de acuerdo con el modelo (3.74). La línea segmentada en color amarillo muestra el precio de la acción contemplando únicamente la tasa de retorno y no la parte de la difusión.



El modelo de mercado es a tiempo continuo, sin embargo, se presentan variaciones con periodicidad de un día debido a que los datos con los que se estiman los parámetros son precios diarios. En la siguiente gráfica se amplía el número de trayectorias simuladas a 10,000, que proporcionan una imagen más amplia de los precios que se pueden presentar de acuerdo con el modelo.



El gráfico anterior presenta el rango en el que se concentran los precios que puede tomar la acción durante el horizonte de tiempo en consideración, sin embargo, solamente en las trayectorias más alejadas de la línea marcada por la tasa de retorno se puede apreciar que la concentración disminuye. El gráfico siguiente muestra la distribución empírica de los precios terminales de estas trayectorias.



De esta forma se puede apreciar como disminuye la concentración de los precios terminales simulados al alejarse del precio terminal que se estima sin considerar la parte de la difusión del modelo. Este precio se indica con la línea azul, mientras que la línea verde corresponde al percentil 50 de las simulaciones. Las líneas rojas indican los percentiles 2.5 y 97.5, es decir, que el 95 % de los precios simulados se encuentra entre 11.3 y 16.2.

Al considerar la función de utilidad de potencia, con parámetro $\alpha = 0.06$, se cumple con los requerimientos para poder utilizar los resultados obtenidos en el enfoque dual de la maximización de utilidad. Entonces la riqueza terminal que optimiza la utilidad esperada es

$$\hat{X}_T(x) = \frac{x}{\mathbf{E}\left[\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \frac{x}{A_0} Z_T^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{3.75}$$

Donde la variable aleatoria Z_T está dada por (3.21), es decir,

$$Z_T = exp\left\{\int_0^T \frac{r-\mu}{\sigma} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \left\|\frac{r-\mu}{\sigma}\right\|^2 ds\right\} = exp\left\{\theta W_T - \frac{\|\theta\|^2}{2} T\right\}.$$

De (3.75) y $A_0 = \mathbf{E}\left[Z_T^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]$ se puede calcular el valor esperado óptimo para la función de utilidad de potencia, obteniendo

$$\mathbf{E}[U(\hat{X}_T(x))] = \frac{x^\alpha}{\alpha} A_0^{1-\alpha}. \tag{3.76}$$

Considerando (3.60) se puede obtener

$$A_0 = \mathbf{E_0}\left[exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}||\theta||^2 dt\right\}\right] = exp\left\{\frac{1}{2}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}||\theta||^2 T\right\}.$$

Por lo que, con los valores dados,

$$\mathbf{E}[U(\hat{X}_T(x))] \approx 16.6705232002231 \tag{3.77}$$

Lo que quiere decir que un inversionista cuyas preferencias ante el riesgo y rendimiento se modelan por la función de utilidad $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, al invertir una riqueza inicial $x = 1$ en el mercado (3.74) con precios iniciales $S_0^0 = 10$, $S_0 = 13.45$ y tasa libre de riesgo $r = 0.0772$ a un horizonte de tiempo $T = 20/252$; tiene como utilidad esperada máxima $\mathbf{E}[U(\hat{X}_T)] \approx 16.6705232002231$, al seguir la estrategia de inversión (3.72), que consiste en mantener durante todo el lapso la misma composición del portafolio, que asigna al activo libre de riesgo (bono) y al activo con riesgo (acción CEMEX) las proporciones

$$\hat{H} = \left(1 - \frac{r-\mu}{(\alpha-1)\sigma^2}, \frac{r-\mu}{(\alpha-1)\sigma^2}\right) \approx (0.00933091781775874, 0.990669082182241). \tag{3.78}$$

Ejemplo de mercado incompleto con Ω infinito (Modelo con volatilidad estocástica.)

El modelo Black-Scholes que se presentó en el ejemplo anterior fue ampliamente usado en los mercados financieros reales durante más de una década de forma satisfactoria, hasta que se presentó una caída importante en el índice Dow Jones en 1987. Una de las causas principales de este suceso es que el modelo asume una volatilidad constante, lo cual no se asemeja a la realidad. Esto dio lugar al desarrollo de nuevos tipos de modelos que consideran parámetros estocásticos, o que dependen de factores económicos externos aleatorios. Al considerar procesos estocásticos para modelar parámetros como la tasa de interés, la tasa de retorno o la volatilidad; se obtienen generalizaciones del modelo Black-Scholes que tratan de modelar de forma más precisa el precio de algún activo financiero, siendo el modelo Heston uno de los más importantes.

Definición del modelo

Castañeda y Hernández [CaHer 05] resuelven un problema de inversión-consumo óptimo para un modelo que es una generalización del de Black-Scholes, en el que los coeficientes de la difusión que modela el precio del activo con riesgo dependen de factores económicos estocásticos. Se presenta aquí una simplificación de este problema, al considerar los coeficientes de forma determinista, exceptuando la volatilidad, y se limita el problema a uno de inversión únicamente.

El mercado se compone de un activo libre de riesgo o cuenta bancaria, un activo con riesgo y un factor económico externo correlacionado que afecta a la volatilidad del modelo. Sea (W_{1t}, W_{2t}) un $\mathbf{P}$-proceso de Wiener bidimensional, definido sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_T, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbf{P})$. Donde la filtración que se muestra en el espacio es el aumento de la filtración $(\mathcal{F}_t^{(W_{1t},W_{2t})})_{0\leq t\leq T}$. El proceso que modela el precio del activo libre de riesgo está dado por $S_t^0 = e^{rt}$. La dinámica del precio no descontado del activo con riesgo está dada por

$$dS_t = S_t[\mu dt + \sigma(Y_t)dW_{1t}], \quad S_0 = 1. \tag{3.79}$$

Con $\sigma \in C^2(\mathbb{R})$ acotada, con primera y segunda derivada acotadas, y $\sigma(\cdot) \geq \sigma_0$, para alguna constante $\sigma_0 > 0$. La dinámica del factor externo Y_t está modelada por

$$dY_t = g(Y_t)dt + \rho dW_{1t} + \varepsilon dW_{2t}, \quad Y_0 = y \in \mathbb{R}, \tag{3.80}$$

con $|\rho| \leq 1, \varepsilon = \sqrt{1-\rho^2}, \beta \neq 0$ y $g(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ con $g'(\cdot)$ acotada. El parámetro ρ es el coeficiente de correlación entre el proceso de Wiener W_1 y el proceso de Wiener del factor externo $W = \rho W_1 + \varepsilon W_2$.

Sea π_t el monto de capital que se mantiene en el activo con riesgo, la dinámica del proceso de la riqueza del inversionista está dada por

$$dX_t = \frac{X_t - \pi_t}{S_t^0} dS_t^0 + \frac{\pi_t}{S_t} dS_t, \quad X_0 = x > 0. \tag{3.81}$$

El proceso de riqueza asociado al proceso del monto π_t es la solución de la ecuación integral

$$X_t^{\pi} = x + \int_0^t [rX_s^{\pi} + (\mu - r)\pi_s]ds + \int_0^t \pi_s \sigma(Y_s) dW_{1s}. \tag{3.82}$$

El proceso π_t determina una estrategia de inversión, denotada por π. Se dice que esta estrategia es admisible si $X_t^{\pi} \geq 0$. Al conjunto de estrategias admisibles se le denota por $\mathcal{H}(x, y)$.

Ausencia de arbitraje y completez del modelo

Se define la función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\theta(y) = \frac{\mu - r}{\sigma(y)}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{3.83}$$

Se denota por $\mathcal{M}$ al conjunto de procesos progresivamente medibles $(\nu_t)_{0 \leq t \leq T}$ tales que $\mathbf{E} \int_0^T \nu_u^2 du < \infty$ y la martingala local dada por

$$Z_t^{\nu} = exp\left\{ -\int_0^t [\theta(Y_u)dW_{1u} + \nu_u dW_{2u}] - \frac{1}{2}\int_0^t [\theta^2(Y_u) + \nu^2]du \right\}, \tag{3.84}$$

es una martingala $\forall y \in \mathbb{R}$.

Entonces, para cada $\nu \in \mathcal{M}$ se puede definir una medida de probabilidad $\mathbf{Q}^{\nu}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ por

$$d\mathbf{Q}^{\nu} = Z_T^{\nu} d\mathbf{P}. \tag{3.85}$$

Se observa que $\mathbf{Q}^{\nu} \sim \mathbf{P}$ y $Z_t^{\nu} = d\mathbf{Q}^{\nu}/d\mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t}$, para toda $\nu \in \mathcal{M}$ y $t \in [0, T]$.

Además, bajo la medida $\mathbf{Q}^{\nu}$, el proceso bidimensional $\{(W_{1t}^{\nu}, W_{2t}^{\nu})\}_{0 \leq t \leq T}$

$$W_{1t}^{\nu} = W_{1t} + \int_0^t \theta(Y_u)du \quad y \quad W_{2t}^{\nu} = W_{2t} + \int_0^t \nu_u du, \tag{3.86}$$

es un proceso de Wiener, y se pueden escribir las dinámicas de los procesos Y_t y Z_t como

$$dY_t = [g(Y_t) - \rho\theta(y_t) - \varepsilon\nu_t]dt + \rho dW_{1t}^{\nu} + \varepsilon dW_{2t}^{\nu}, \tag{3.87}$$

$$dZ_t^{\nu} = Z_t^{\nu}([\theta^2(Y_t) + \nu_t^2]dt - \theta(Y_t)dW_{1t}^{\nu} - \nu_t dW_{2t}^{\nu}). \tag{3.88}$$

El proceso descontado del precio satisface

$$d\left[\frac{S_t}{S_t^0}\right] = \frac{S_t}{S_t^0}\sigma(Y_t)dW_{1t}^{\nu}. \tag{3.89}$$

Lo que implica que el proceso $\frac{S_t}{S_t^0}$ es una $\mathbf{Q}^{\nu}$-martingala y por lo tanto $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^e = \{\mathbf{Q} : \mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ y S_t/S_t^0 es una $\mathbf{Q}$-martingala $\forall y \in \mathbb{R}\}$, en el sentido que $\mathbf{Q}^{\nu} \in \mathcal{M}^e \quad \forall \nu \in \mathcal{M}$.

El proceso descontado de la riqueza satisface

$$d\left[\frac{X_t^{\pi}}{S_t^0}\right] = \frac{\pi_t}{S_t^0}\sigma(Y_t)dW_{1t}^{\nu}, \quad \pi \in \mathcal{H}(x,y). \tag{3.90}$$

Por lo que el proceso descontado X_t^{π}/S_t^0 es una $\mathbf{Q}^{\nu}$-martingala local continua no negativa.

Maximización de la utilidad esperada

El problema del inversionista es

$$\text{maximizar } \mathbf{E}[U(X_T^{\pi})], \quad \text{sobre } \pi \in \mathcal{H}(x,y). \tag{3.91}$$

Por el Lema 2.2 de [CaHer 05] se puede escribir el problema del inversionista original como un problema de optimización convexa, considerado como el problema primal, descrito por

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \mathbf{E}[U(X_T)] \\ \text{sujeto a} & \displaystyle\sup_{\nu\in\mathcal{M}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^{\nu}}\left[\frac{X_T}{S_T^0}\right] \leq x. \end{array} \tag{3.92}$$

Para resolverlo se plantea el lagrangiano, dado por

$$L^{x,\lambda}(X_T,\nu) = \mathbf{E}[U(X_T)] - \lambda \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^{\nu}}\left[\frac{X_T}{S_T^0}\right] + \lambda x = \mathbf{E}\left[U(X_T) - \lambda\frac{d\mathbf{Q}^{\nu}}{d\mathbf{P}}\frac{X_T}{S_T^0}\right] + \lambda x. \tag{3.93}$$

El funcional dual es

$$\Psi(\lambda,\nu) = \sup_{X_T\in\mathcal{C}(x)} L^{x,\lambda}(X_T,\nu), \tag{3.94}$$

donde $\mathcal{C}(x) = \{X_T \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}) : \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^\nu}[X_T] \leq x \quad \forall \nu \in \mathcal{M}\}$.

Con la función conjugada de U

$$V(\eta) = \sup_{\xi>0}[U(\xi) - \eta\xi], \tag{3.95}$$

se puede reescribir el funcional dual como

$$\Psi(\lambda, \nu) = \mathbf{E}\left[V\left(\frac{\lambda}{S_T^0}\frac{d\mathbf{Q}^\nu}{d\mathbf{P}}\right)\right] + \lambda x. \tag{3.96}$$

El problema dual consiste en

$$\text{minimizar } \Psi(\lambda, \nu) \quad \text{sobre } \lambda > 0, \nu \in \mathcal{M}. \tag{3.97}$$

Al considerar la función de utilidad $U(x) = ln(x)$, se cumple con las condiciones usuales de regularidad del supuesto 1, caso 1. También satisface la elasticidad asintótica razonable (3.1), ya que $EA_{+\infty}(U) = 0$. Por lo que este modelo, con esta función de utilidad, cumple con las hipótesis del Teorema 3.3. Por lo tanto, el optimizador del problema primal está dado por

$$\hat{X}_T = I\left(\frac{\hat{\lambda}}{S_T^0}\frac{d\mathbf{Q}^{\hat{\nu}}}{d\mathbf{P}}\right), \tag{3.98}$$

donde $(\hat{\lambda}, \hat{\nu})$ es la solución óptima del problema dual.

Para la función de utilidad logarítmica, la función conjugada (3.95) está dada por $V(\eta) = -ln(\eta) - 1$. Por lo que el funcional dual (3.96) se puede reescribir como

$$\Psi(\lambda, \nu) = \lambda x - 1 + ln\left(\frac{S_T^0}{\lambda}\right) - \mathbf{E}\left[ln\left(\frac{d\mathbf{Q}^\nu}{d\mathbf{P}}\right)\right]. \tag{3.99}$$

Al considerar (3.85) y (3.84), se obtiene

$$\Psi(\lambda, \nu) = \lambda x - 1 + ln\left(\frac{S_T^0}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[\int_0^T [\theta^2(Y_u) + \nu^2]du\right]. \tag{3.100}$$

Por lo tanto, el funcional dual se minimiza para ν en $\hat{\nu} = 0$, independientemente de λ, y $\Psi(\lambda, \hat{\nu})$ se minimiza en $\hat{\lambda} = \frac{1}{x}$; es decir, la solución del problema dual se alcanza en

$$(\hat{\lambda}, \hat{\nu}) = \left(\frac{1}{x}, 0\right). \tag{3.101}$$

De esta forma se obtiene que el optimizador (3.98) del problema primal

$$\hat{X}_T = x\frac{S_t^0}{Z_T^0}. \tag{3.102}$$

Estrategia óptima

Para obtener la estrategia de inversión $\hat{\pi}_t$ mediante la cual se alcanza la riqueza terminal $\hat{X}_T$ que maximiza la utilidad esperada, se obtiene la dinámica $d\hat{X}_t$ para poder compararla con (3.90). Para ello, primero se debe obtener el proceso de riqueza óptimo $\hat{X}_t$.

Usando el teorema de Bayes y el hecho de que el proceso Z^ν es $(\mathcal{F}, \mathbf{P})$-martingala, se obtiene

$$\frac{\hat{X}_t}{S_t^0} = x\frac{\mathbf{E}[(Z_T^0)^{-1} Z_T^0 | \mathcal{F}_t]}{\mathbf{E}[Z_T^0|\mathcal{F}_t]} = \frac{x}{Z_t^0}. \tag{3.103}$$

La dinámica del proceso óptimo de riqueza es

$$d\hat{X}_t = -x\frac{S_t^0}{(Z_t^0)^2} dZ_t^0. \tag{3.104}$$

Por (3.88), se tiene

$$d\hat{X}_t = x\frac{S_t^0}{Z_t^0}(\theta(Y_t)dW_{1t}^0 - \theta^2(Y_t)dt) = \hat{X}_t(\theta(Y_t)dW_{1t}^0 - \theta^2(Y_t)dt). \tag{3.105}$$

Se toma en cuenta que la parte de la difusión no cambia bajo transformaciones de Girsanov, por lo que al comparar la parte de la difusión de esta expresión de la dinámica del proceso de riqueza con (3.90), se observa que

$$\hat{\pi}_t \sigma(Y_t) dW_{1t}^0 = \hat{X}_t \theta(Y_t) dW_{1t}^0, \tag{3.106}$$

es decir,

$$\hat{\pi}_t = \frac{\mu - r}{\sigma^2(Y_t)}\hat{X}_t. \tag{3.107}$$

Conclusiones

El enfoque expuesto en el presente trabajo para la maximización de utilidad de portafolios de inversión está basado en la posibilidad de plantear el problema del inversionista como uno de optimización convexa y aprovechar la simplificación que representa el resolver el problema dual que le corresponde. Los modelos que se contemplan son muy generales, ya que se plantean bajo supuestos mínimos, tanto para los precios de los instrumentos financieros que componen al modelo, como para la función de utilidad que refleja las preferencias del inversionista frente al riesgo y rendimiento. Los supuestos para los modelos se limitan a considerar que los precios de los activos financieros son semimartingalas, que la función de valor del problema de maximización de utilidad es finita y que el conjunto de medidas de probabilidad martingala es no vacío, este último requisito está ligado al supuesto de que el mercado satisface la condición de no arbitraje.

Los resultados se presentan en cuatro teoremas, que corresponden a distintos casos, uno cada vez más complicado que el anterior para facilitar su entendimiento hasta obtener el caso más complejo. Los primeros dos consideran mercados completos e incompletos definidos sobre espacios de probabilidad de dimensión finita. Esta consideración facilitó algunos aspectos técnicos en las demostraciones de los teoremas, ya que reduce algunas dificultades de análisis funcional a álgebra lineal. Para los últimos dos casos se consideran mercados definidos sobre espacios de probabilidad de dimensión infinita. La diferenciación entre estos radica en el dominio de la función de utilidad que se esté considerando, correspondiéndose con los casos del supuesto 1, es decir, $dom(U) = \mathbb{R}_+$ o $dom(U) = \mathbb{R}$. Se hizo la observación de que en estos modelos hay un requisito adicional para poder mantener un homologo a los resultados obtenidos en el caso discreto, descrito como elasticidad asintótica razonable.

Aun cuando los resultados obtenidos por D. Kramkov y W. Schachermayer consideran restricciones mínimas y, por lo tanto, modelos muy generales; su enfoque presenta ventajas frente a otros que se pueden encontrar en la literatura. El primer enfoque para resolver problemas de maximización de utilidad de portafolios en tiempo continuo fue el presentado por Merton. En éste, la idea es interpretar el problema de maximización de portafolio como un problema de control estocástico en el que las estrategias de inversión se consideran como procesos de control y la riqueza del portafolio como el proceso controlado. Se deriva la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman y se encuentran soluciones para los casos de función de utilidad logarítmica, exponencial y de potencia. Una principal ventaja del enfoque de Schachermayer sobre el de Merton es que no requiere que los procesos que modelan los precios de las acciones satisfagan la propiedad de Markov. Otro enfoque es el llamado método martingala, presentado por Pliska, Cox y Huang, y Karatzas. Se plantea sobre argumentos de dualidad convexa y permite transformar el problema de optimización de portafolio dinámica inicial en un problema estático y resolverlo sin requerimiento alguno de la propiedad de Markov. La adición del enfoque de Kramkov y Schachermayer con respecto al método martingala incluye la definición de condiciones necesarias y suficientes para el problema de maximización de utilidad de la riqueza terminal de un portafolio.

En el trabajo de Schachermayer se presentan teoremas de existencia de los optimizadores, tanto para el problema primal como para el dual, además de la relación que mantienen estos optimizadores entre sí. En el presente trabajo se presentaron ejemplos de modelos que satisfacen las hipótesis de estos teoremas y que por lo tanto se pueden emplear para mostrar la aplicación de estos resultados. Adicionalmente se muestra la forma de obtener la estrategia de inversión mediante la cual se puede llegar a la riqueza terminal que maximiza la utilidad esperada. Esto permite presentar posibles trayectorias de los precios y la forma en la que responde el inversionista siguiendo la estrategia.

El primer modelo presentado es el binomial. El mercado consiste en un activo libre de riesgo y un activo cuyo precio sigue un proceso binomial. En cada tiempo $t = 1, 2, ..., T$ el precio de este activo puede incrementar en un factor $u > 1$ con probabilidad $0 < p < 1$, o puede disminuir por un factor $0 < d < 1$ con probabilidad $1-p$. Al tiempo T el precio puede alcanzar $T+1$ valores distintos, mediante 2^T trayectorias distintas. Cada una de ellas es un estado distinto del espacio de estados finito Ω. Se corroboró que este modelo es completo, al contar con una única medida de probabilidad martingala $\mathbf{Q}$, que debe satisfacer $q = \frac{1-d}{u-d}$, con q la probabilidad condicional bajo la medida $\mathbf{Q}$ de que el precio incremente al tiempo $t+1$, dada la información al tiempo t. Estos aspectos permiten utilizar el teorema 2.9, al considerar la función de utilidad logarítmica. Al conocer la forma del optimizador del problema primal, dada por $\hat{X}_t(\omega_n) = x\frac{p_{n,t}}{q_{n,t}}$, se plantea un sistema de dos ecuaciones para poder encontrar la estrategia de inversión mediante la cual se obtiene dicho optimizador. La estrategia consiste en asignar la proporción $\frac{p-qu}{q-qu}$ del valor del portafolio en cada tiempo t en el activo libre de riesgo y el complemento en el activo con riesgo. Con esta información se tomaron en cuenta algunos datos numéricos para mostrar un caso concreto. Esto permite tener una imagen clara de la dinámica del precio a través del tiempo y la forma en que la estrategia reasigna los montos para llegar a los valores finales del portafolio. Al comparar gráficamente la utilidad esperada de la riqueza terminal que se obtiene en esta estrategia con la que se obtiene en las otras estrategias que reasignan en proporciones constantes a través del tiempo, se puede observar la diferencia entre maximizar la utilidad esperada y maximizar el monto de la riqueza terminal. Es un enfoque distinto en el que se consideran las preferencias del inversionista frente al rendimiento y también frente al riesgo. Es una idea que se tiene identificada desde un principio, sin embargo, se considera que este ejemplo ayuda a visualizarlo de forma más clara.

El modelo trinomial se utilizó para ejemplificar el caso de un mercado incompleto sobre un espacio de probabilidad de dimensión finita. Similar al primer ejemplo, el mercado se compone por un activo libre de riesgo y un activo con riesgo. En este caso se adiciona una modificación intermedia del precio por un factor m que se encuentra entre d y u. Este cambio deriva en que el conjunto de medidas martingala ya no consiste en un solo elemento, sino de una infinidad de ellos. Con estas características del modelo y la función de utilidad logarítmica fue posible emplear el teorema 2.18, llegando así a los optimizadores de los problemas primal y dual. Al conocer el optimizador fue posible obtener la estrategia de inversión mediante la cual se alcanza, que en este caso consiste en asignar la proporción $\left(\frac{p_d}{\hat{q}_d} - d\right)\frac{1}{1-d}$ del valor del portafolio en cada tiempo t en el activo libre de riesgo, y el complemento en el activo con riesgo. En este ejemplo es importante resaltar el hecho de que no se cuenta con una expresión general para $\hat{q}_d$ que determina a la medida de probabilidad martingala óptima $\hat{\mathbf{Q}}$. Esta medida de probabilidad se determinó para el caso particular en el que se plantearon algunos datos numéricos. La forma en que se obtuvo esta medida de probabilidad sí sería la misma para cualquier conjunto de datos que se determinen para este modelo.

Los modelos de marcado definidos sobre espacios de probabilidad de dimensión infinita tienen un mayor grado de complejidad. Con el objetivo de facilitar su entendimiento, se continuó considerando mercados que se componen únicamente de dos activos, uno con riesgo y uno libre de riesgo. Para ejemplificar el caso completo se presentó el modelo de Black-Scholes. Gracias al teorema de representación de martingalas y al teorema de Girsanov se pudo corroborar que el modelo es completo. Esto permite obtener el optimizador del problema primal de una forma más sencilla. En este caso la estrategia mediante la cual se llega a la riqueza terminal óptima para la utilidad esperada también consiste en la asignación de una proporción constante del valor del portafolio. En este ejemplo se ocuparon valores reales que presentó una acción históricamente, para poder estimar los parámetros del modelo. Esto permitió presentar posibles trayectorias del precio modelado y compararlas con la trayectoria real que siguió el precio a partir de una fecha determinada. Las gráficas presentadas permiten observar, mediante simulaciones, una aproximación de la distribución que tiene el precio terminal de la acción modelada en un horizonte de tiempo finito.

El ejemplo de modelo incompleto sobre un espacio de probabilidad de dimensión infinita se obtiene de una generalización del modelo de Black-Scholes. La generalización consiste en considerar procesos estocásticos para modelar algún parámetro, como la volatilidad, acercándose más al comportamiento real de los precios. Esta aleatoriedad en la volatilidad se encuentra dada por un factor económico externo que la afecta, lo que introduce un segundo movimiento browniano en el modelo. Se presenta la forma que tienen la infinidad de medidas martingala, con lo que se corrobora que el modelo es incompleto. Todas estas características se traducen en dificultades que hacen más complejo el modelo. Sin embargo, al considerarse junto con la función de utilidad logarítmica, se observa que cumple con las hipótesis del teorema 3.3, con lo cual se pudo obtener la forma del optimizador del problema primal.

Se espera que este trabajo facilite el entendimiento del enfoque presentado por D. Kramkov y W. Schachermayer sobre uno de los problemas de mayor interés en las finanzas matemáticas; al haber presentado la teoría que requiere de forma sintética y desde un nivel bastante accesible, recorriendo un camino que va incrementando la complejidad y que culmina con la presentación de algunos ejemplos prácticos, que pretenden clarificar aún más el objetivo de los resultados y dar un paso extra al obtener de forma explícita las estrategias de inversión mediante las cuales se logra replicar la riqueza terminal que maximiza la utilidad esperada de un inversionista.

Como posible trabajo futuro, se podrían presentar ejemplos de mercados más complejos, que contemplen una mayor cantidad de activos con riesgo o parámetros no deterministas; además de contrastar con otros enfoques. En un artículo de 2016, Christoph Czichowsky y Schachermayer abordan el tema de la optimización de portafolios para modelos no semimartingala, por ejemplo, modelos basados en movimiento Browniano fraccional (fBm). Por su parte, E. Boguslava y Yu Mishura estudiaron el problema de maximización de utilidad para una clase de mercados que incluye modelos sobre mBf y, en general, para procesos Gausianos que satisfacen ciertas condiciones de regularidad en sus funciones de covarianza. Un trabajo futuro podría estudiar los resultados obtenidos para este tipo de mercados.

APÉNDICE A: Probabilidad y procesos estocásticos

En finanzas matemáticas, los mercados financieros son modelados mediante procesos estocásticos que representan los precios de los activos que los componen. Estos procesos estocásticos están definidos sobre un espacio de probabilidad; conformado por el espacio de los posibles estados en los que se puede encontrar el mercado, una σ-álgebra de este espacio y una medida de probabilidad. A su vez, las funciones que se ocupan en la optimización de la utilidad esperada de un portafolio forman parte de los espacios vectoriales de funciones definidos sobre dicho espacio de probabilidad, llamados espacios L^p.

Espacios L^p

Siguiendo las definiciones de Williams [W 91], se introducen primero los espacios $\mathcal{L}^p$, a partir de los cuales se define a los espacios L^p.

Definición 3.6. *Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, se define a la esperanza de X por*

$$\boldsymbol{E}[X] = \int_{\Omega} X d\boldsymbol{P}.$$

Definición 3.7. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ un espacio de probabilidad se denota por $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ al conjunto de las funciones $\mathcal{F}$-medibles que son $\boldsymbol{P}$-integrables, es decir, el conjunto de variables aleatorias con esperanza finita:*

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}) := \{X : \Omega \to \mathbb{R} | \mathbf{E}[X] < \infty\}.$$

Definición 3.8. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ un espacio de probabilidad, para $p \in [1, \infty)$ se define*

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}) := \{X : \Omega \to \mathbb{R} | \mathbf{E}[|X|^p] < \infty\}.$$

Si se consideran $a, b \in \mathbb{R}^+$, se puede observar que

$$(a+b)^p \leq [2max(a,b)]^p \leq 2^p(a^p + b^p),$$

por lo que $\mathcal{L}^p$ es un espacio vectorial, para $p \in [1, \infty)$. Incluso son espacios normados, al considerar el mapeo $|| \cdot ||_p : X \to (\mathbf{E}[X]^p)^{(1/p)}$ para definir una norma, llamada norma-p. Sin embargo, no cumplen los requerimientos para ser espacios con producto interno, debido a que para una variable aleatoria X con norma-p igual a cero, lo más que se puede decir es que esa variable aleatoria tiene medida cero, es decir,

$$\|X_p\| = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ casi seguramente (c.s.).}$$

En análisis funcional se cuenta con una forma de solucionar este problema, al definir clases de equivalencia de funciones medibles. Si se tienen dos variables aleatorias (funciones medibles) X, Y sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, tales que $X = Y$ c.s., entonces se dice que son variables aleatorias equivalentes, y se denota $X \sim Y$.

De esta forma, cualquier variable aleatoria es representante de todas las que conforman su clase de equivalencia y así, se puede identificar una clase de equivalencia con cualquiera de sus representantes.

Se denota al espacio cociente $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})/\sim$ por $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, para $p \in [1, \infty)$.

Se pueden definir estos espacios L^p en términos del espacio L^0, definido en [BrSc 99]:

Definición 3.9. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ un espacio de probabilidad se denota por $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ al espacio vectorial de clases de equivalencia de variables aleatorias (funciones medibles) real-valuadas definidas sobre él.*

Definición 3.10. *Sean $p \in [1, \infty)$ y $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ un espacio de probabilidad se define*

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}) := \{f \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}) : \int_\Omega |f(\omega)|^p d\omega < \infty\}.$$

Definición 3.11. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *un espacio de probabilidad, se define el espacio vectorial*

$$L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}) := \{f \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}) : \exists M \geq 0 \text{ tal que } |f| \leq M \text{ c.s.}\}$$

Procesos de Wiener y martingalas

Definición 3.12. *Un proceso estocástico* $(W_t)_{t>0}$ *es un proceso de Wiener si*

- $W_0 = 0$;
- $W_t - W_s = (d) W_{t+h} - W_{s+h}, \quad t, s \in [0, T], \quad h \in [-s, T-t]$;
- $W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *son v.a. independientes, para cualesquiera* $t_1, t_2, ..., t_n$;
- $W_t \sim N(0, t), \quad t > 0$;
- *sus trayectorias son continuas.*

Definición 3.13. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *un espacio de probabilidad, una colección* $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *de* σ*-álgebras de* Ω *es una filtración si*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ es un espacio de probabilidad y $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ una filtración, a $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ se le denomina espacio de probabilidad filtrado.

Definición 3.14. *Se dice que un proceso estocástico* $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ *está adaptado a una filtración* $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, *si*

$$\sigma(Y_t) \subset \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0.$$

Definición 3.15. *A la filtración conformada por las* σ*-álgebras generadas por un proceso estocástico, es decir,*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, s \leq t),$$

se le denomina filtración natural generada por Y_t.

Definición 3.16. *Se dice que un proceso estocástico $X = (X_t)_{t\geq 0}$ es una martingala a tiempo continuo respecto a una filtración $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si*

- $\boldsymbol{E}[X_t] < \infty, \quad t \geq 0,$
- *X es $\boldsymbol{F}$-adaptado,*
- $\boldsymbol{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s, \quad 0 \leq s \leq t.$

Integral de Itô

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad, $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Wiener definido sobre este espacio, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtración natural generada por W y $C = (C_t)_{0\leq t\leq T}$ un proceso $\mathbf{F}$-adaptado tal que

$$\int_0^T \mathbf{E}[C_s^2]ds < \infty,$$

entonces existe la integral estocástica de Itô de C:

$$I_t(C) = \int_0^t C_s dW_s.$$

Si C es una función simple y $t_{n-1} \leq t \leq t_n$,

$$\int_0^t C_s dW_s := \sum_{i=1}^{n} C_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + C_n(W_t - W_{t_n}).$$

Si C es un proceso que varía de forma continua en el tiempo o, incluso, tiene saltos,

$$\int_0^t C_s dW_s := \lim_{n\to\infty} \int_0^t C_s^n dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

donde $(C^n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de procesos simples que converge a C.

Algunas propiedades importantes de la integral de Itô son:

- Como función del límite superior de integración t, sus trayectorias son continuas.

- Es $\mathbf{F}$-adaptado.
- Es lineal.
- Es una $(\mathbf{F}, \mathbf{P})$-martingala.
- Satisface la propiedad de asimetría $\mathbf{E}[I_t^2(C)] = \int_0^t \mathbf{E}[C_s^2]ds, \quad t \in [0,T]$.
- Su variación cuadrática $[I,I]_t(C) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |I_{t_{i+1}}(C) - I_{t_i}(C)|^2$ satisface $[I,I]_t(C) = \int_0^t C_s^2 ds$, $t \in [0,T]$; donde $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ es una partición de $[0,t]$.

Definición 3.17. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$ un espacio de probabilidad filtrado, con $\boldsymbol{F}$ la filtración generada por un proceso de Wiener W. Se dice que $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Itô que toma valores en los reales si para toda $t \geq 0$*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

donde $K_t, H_t \in L^1[0,T]$ son procesos adaptados a $\mathcal{F}_t$.

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Sea W un proceso de Wiener sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$; $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtración generada por W; $a, b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones integrables de $L^1[0,t]$, $L^2[0,T]$, respectivamente; y X_0 una v.a. $\mathcal{F}_0$-medible. Una ecuación estocástica lineal es una ecuación de la forma

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad \text{con } X(t_0) = X_0. \tag{3.108}$$

Un proceso $X = (X_t)_{t\geq 0}$, $\mathbf{F}$-adaptado, es solución de (3.108) si

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s)dW_s.$$

Sea f una función dos veces continuamente diferenciable y X_t un proceso de Itô definido por

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, \quad t \geq 0,$$

entonces se cumple la llamada fórmula de Itô:

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)H_s^2 ds, \quad t > 0. \tag{3.109}$$

Con lo que se puede obtener la solución, por ejemplo, del llamado movimiento browniano geométrico

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(0) = 0, \tag{3.110}$$

al considerar la función dos veces continuamente diferenciable, ln, y seguir las igualdades

$$\begin{aligned}
\frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma dW_t, \\
d[ln(S_t)] &= \mu dt + \sigma dW_t, \\
ln(S_t) - ln(S_0) &= \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{-1}{S_s^2}\sigma^2 S_s^2 ds, \\
ln(S_t) - ln(S_0) &= \int_0^t (\mu ds + \sigma dW_s) - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{S_s^2}\sigma^2 S_s^2 ds, \\
ln(S_t) - ln(S_0) &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t, \\
S_t &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}.
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Se presenta ahora los teoremas que se utilizan en el enfoque que se presenta para determinar la estrategia que replica la riqueza terminal que maximiza la utilidad esperada.

Teorema 3.18. ***(Teorema de representación de martingalas)***

Sean W un proceso de Wiener d-dimensional, $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtración generada por W y M una martingala $\boldsymbol{F}$ adaptada. Existen procesos $\boldsymbol{F}$-adaptados determinados de forma única $h_1, ..., h_d$ tales que M se puede representar por

$$M(t) = M(0) + \sum_{i=1}^{d}\int_0^t h_i(s)dW_i(s), \quad t \in [0, T]. \tag{3.112}$$

Si la martingala M es cuadrado integrable entonces $h_1, ...h_d \in \mathcal{L}^2$.

Teorema 3.19. ***(Teorema de Girsanov)***

Sean $W^{\boldsymbol{P}}$ un $\boldsymbol{P}$-proceso de Wiener d-dimensional sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \boldsymbol{P})$ y ϕ un proceso vector d-dimensional adaptado. Dado un horizonte finito T y defínase un proceso L en $[0,T]$ por

$$\begin{aligned} dL_t &= \phi_t^* L_t dW_t^{\boldsymbol{P}}, \\ L_0 &= 1, \end{aligned} \tag{3.113}$$

es decir,

$$L_t = e^{\int_0^t \phi_s^* dW_s^{\boldsymbol{P}} - \frac{1}{2}\int_0^t \|\phi_s\|^2 ds} \tag{3.114}$$

Asúmase que

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{P}}[L_T] = 1, \tag{3.115}$$

y defínase la nueva medida de probabilidad $\boldsymbol{Q}$ en $\mathcal{F}_T$ por

$$L_T = \frac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}}, \quad \text{en } \mathcal{F}_T. \tag{3.116}$$

Entonces

$$dW_t^{\boldsymbol{P}} = \phi_t dt + dW_t^{\boldsymbol{Q}}, \tag{3.117}$$

donde $W^{\boldsymbol{Q}}$ es un $\boldsymbol{Q}-$Proceso de Wiener.

APÉNDICE B: Análisis funcional

La teoría de finanzas matemáticas que se presenta tiene un enfoque orientado al concepto de no arbitraje. Esta característica trata sobre la ausencia de estrategias de inversión que permitan la oportunidad de generar una ganancia sin necesidad de incurrir en riesgo. En este contexto se presenta un el teorema fundamental de valuación de activos, cuyo planteamiento se hace sobre conjuntos convexos y su demostración se basa en elementos de análisis funcional. Adicionalmente, el problema principal, que es la maximización de la utilidad esperada de una inversión, es de optimización convexa; motivos por los que se requieren introducir los siguientes conceptos.

Se sigue el texto de Rockafellar [Ro 70] para presentar los términos que se refieren a conjuntos y funciones afines y convexas.

Definición 3.20. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ es un conjunto afín si satisface* $(1-\lambda)x + \lambda y \in A \quad \forall x, y \in A$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$.

En otras palabras, un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ es afín si contiene a las líneas que pasan por cualesquiera dos de sus puntos. Puede demostrarse que los subespacios de $\mathbb{R}^N$ son los conjuntos afines que contienen al origen. Si se tiene un conjunto que no contiene a un punto en particular, se puede considerar su traslación.

Definición 3.21. *Sean $M \subset \mathbb{R}^N$ y $a \in \mathbb{R}^N$. La traslación de M por a es el conjunto*

$$M + a = \{x + a : x \in M\}.$$

Por cómo está definida, una traslación de un conjunto afín es un conjunto afín. Otro resultado importante que se presenta en [Ro 70] muestra que cada espacio afín no vacío es paralelo a un único subespacio. La dimensión de un conjunto afín se define como la dimensión del subespacio al que es paralelo. A los espacios de dimensión cero, uno y dos se les llama, respectivamente, puntos, líneas y planos. A un conjunto afín de dimensión $N-1$ en $\mathbb{R}^N$ se le llama hiperplano. Más adelante se da una definición de este concepto, que tiene una gran importancia en los resultados que se presentan sobre conjuntos.

Definición 3.22. *Un espacio afín es una terna (Ω, E, ϕ) formada por un conjunto Ω, un espacio vectorial E y una aplicación $\phi : \Omega \times \Omega \to E$ que cumple:*

(i) $\forall P \in \Omega$, *y* $\forall u \in E$ *existe un único* $Q \in \Omega$ *tal que* $\phi(P,Q) = u$

(ii) $\phi(P,Q) + \phi(Q,R) = \phi(P,R) \quad \forall P,Q,R \in \Omega.$

Definición 3.23. *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^N$ es convexo si, dados $x, y \in C$, se cumple $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$, $\lambda \in [0,1]$.*

Por cómo están definidos, todos los conjuntos afines son convexos, debido a que los últimos solo deben contener el segmento de línea cerrado entre dos de sus puntos y no necesariamente a la línea completa. Un tipo de conjuntos convexos sobre los que se trabaja en modelos de mercados financieros son los conos convexos.

Definición 3.24. *Un cono convexo es un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^N$ convexo, no vacío, tal que si $x \in C$ entonces $\lambda x \in C$, $\forall \lambda \geq 0$.*

Algunos resultados que se construyen sobre conjuntos convexos, por lo que es de interés, al trabajar con un subconjunto de $\mathbb{R}^N$, el conocer al conjunto convexo más pequeño que lo contenga.

Definición 3.25. *La envolvente convexa de un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^N$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S y se denota $conv(S)$.*

En [Ro 70] se demuestra que las intersecciones de conjuntos convexos son convexas; así como el hecho de que la envolvente convexa de un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ es el conjunto convexo más pequeño que lo contiene.

Además de los conjuntos afines y convexos, se definen también a las funciones afines y convexas.

Definición 3.26. *Sean $S \subseteq \mathbb{R}^N$ y $f : S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. El conjunto*

$$\{(x, \mu) : x \in S, \mu \in \mathbb{R}, \mu \geq f(x)\}$$

se llama epígrafo de f y se denota epi f.

Definición 3.27. *Sean $S \subseteq \mathbb{R}^N$ y $f : S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Se dice que f es una función convexa si epi f es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^{N+1}$. Una función cóncava en S es una función cuyo negativo es función convexa. Una función afín en S es una función finita, convexa y cóncava.*

En torno a los conjuntos convexos, uno de los resultados principales que se ocupa trata sobre poder separar un par de ellos mediante otro conjunto, llamado hiperplano. Brezis [Bre 83] lo presenta de la siguiente forma:

Definición 3.28. *Un funcional lineal, o forma lineal, de un espacio vectorial E sobre un campo K es un mapeo lineal $f : E \to K$ tal que*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall x, y \in E, \lambda \in K.$$

Definición 3.29. *Sea E un espacio vectorial, se designa por E^* el dual (topológico) de E, es decir, el espacio de las formas lineales y continuas sobre E. E^* está dotado de la norma dual:*

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} f(x).$$

Definición 3.30. *Sean E un espacio vectorial normado, f una forma lineal sobre E no idénticamente nula y $\alpha \in \mathbb{R}$. Un hiperplano es un conjunto $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$. Se dice que H es el hiperplano de ecuación $[f = \alpha]$.*

Proposición 3.31. *El hiperplano H de ecuación $[f = \alpha]$ es cerrado si y solo si f es continua.*

Demostración. Supóngase que H es cerrado. Su complemento H^c es abierto y no vacío, ya que f es no nula, es decir, existe $x_0 \in E$ tal que $f(x_0) \neq \alpha$.

Sin pérdida de generalidad, supóngase que $f(x_0) < \alpha$. Sea $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset H^c$, donde

$$B(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\},$$

debe verificarse que $f(x) < \alpha \forall x \in B(x_0, r)$ para que f sea continua.

Supóngase que existe un $x_1 \in B(x_0, r)$ tal que $f(x_1) > \alpha$. El segmento de línea que une a x_0 y x_1 se encuentra dentro de la bola centrada en x_0 de radio r, es decir,

$$\{x_t = (1-t)x_0 + tx_1 : t \in [0,1]\} \subseteq B(x_0, r). \tag{3.118}$$

Por lo tanto $f(x_t) \neq \alpha\ \forall t \in [0,1]$, pero $f(x_t) = \alpha$ para $t = \frac{\alpha - f(x:0)}{f(x_1) - f(x_0)}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f(x) < \alpha\ \forall x \in B(x_0, r)$ y así f es continua.

Recíprocamente, si se supone que f es continua, es claro que H es cerrado. $\square$

Definición 3.32. *Sean E un espacio vectorial normado y $A, B \subset E$, se dice que el hiperplano H de ecuación $[f = \alpha]$ separa a A y B en sentido estricto si existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \quad y \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B.$$

Con estas definiciones se puede presentar el teorema de Hahn-Banach, el cual permite demostrar el llamado "teorema fundamental de valuación de activos", uno de los resultados principales en finanzas matemáticas.

Teorema 3.33. ***(Hahn-Banach, forma geométrica).***

Sean A, B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio vectorial normado E. Supóngase que A es cerrado y que B es compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa a A y B en sentido estricto.

Demostración. Sea $C \in E$ un subconjunto convexo, abierto, no vacío. Por traslación, se puede suponer siempre que $0 \in C$. Para $x \in E$ se define

$$p(x) := \text{ínf}\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}.$$

A p se le conoce como el funcional de Minkowski de C.

Se observa que para $t > 0$ se tienen las igualdades

$$p(tx) = \text{ínf}\{\beta > 0 : \beta^{-1}tx \in C\} = \text{ínf}\{t\beta t^{-1} > 0 : \beta^{-1}tx \in C\}$$

$$= t\,\text{ínf}\{\beta t^{-1} > 0 : \beta^{-1}tx \in C\} = t\,\text{ínf}\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\} = tp(x).$$

Es decir,

$$p(tx) = tp(x), \quad \forall x \in E, \quad t > 0. \tag{3.119}$$

Si se toma un elemento $x \in C$, al ser C abierto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$(1+\varepsilon)x \in C$$

y por lo tanto

$$p(x) \leq (1+\varepsilon)^{-1} < 1,$$

es decir,

$$p(x) < 1 \quad \forall x \in C.$$

De forma inversa, si se considera un $x \in E$ tal que $p(x) < 1$, existe un $\alpha > 0$ tal que

$$p(x) < \alpha < 1.$$

Entonces, por la definición de p, se tiene que

$$\alpha^{-1}x \in C.$$

Como C es convexa y $0 \in C$, la combinación convexa

$$\alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0,$$

pertenece a C, es decir, $x \in C$.

Se tiene entonces que

$$C = \{x \in E : p(x) < 1\}. \tag{3.120}$$

Sea $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin C$. Se define $G = \mathbb{R}x_0$ y una función g en G como $g(tx_0) = t$. Si se toma $x \in G$, entonces $x = tx_0$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Esto quiere decir que

$$g(x) = g(tx_0) = t.$$

Si $t > 0$, por (3.119) se sabe que

$$p(x) = p(tx_0) = tp(x_0).$$

Y como $x \notin C$, por (3.120) se tiene que $p(x_0) \geq 1$, por lo tanto

$$p(x) = tp(x_0) \geq t = g(x).$$

Por otra parte, si $t < 0$, se tiene que $g(x) \leq p(x)$, ya que $p(x) \geq 0$ por definición.

Como $g(x) \leq p(x)$ $\forall x \in G$, se puede extender g en G a una función f en E, tal que
$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$$
En particular, si $x \in C$ se tiene que $p(x) < 1$. Además, como $x_0 \in G$,
$$f(x_0) = g(x_0) = 1.$$
Por lo tanto
$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in C, \quad \forall x_0 \in E \setminus C. \tag{3.121}$$

Si se consideran $A_\varepsilon = \{x + \varepsilon z : x \in A, z \in B(0,\varepsilon)\}$ y $B_\varepsilon = \{y + \varepsilon z : y \in B, z \in B(0,\varepsilon)\}$ para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que A_ε, B_ε son convexos abiertos, no vacíos y disjuntos.

Por (3.121), para $y_\varepsilon \in B_\varepsilon$, existe una función f en E tal que
$$f(x_\varepsilon) < f(y_\varepsilon), \quad \forall x_\varepsilon \in A_\varepsilon.$$
Se puede fijar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que
$$\sup_{x_\varepsilon \in A_\varepsilon} f(x_\varepsilon) \leq \inf_{y_\varepsilon \in B_\varepsilon} f(y_\varepsilon)$$
Por lo que se obtiene
$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \varepsilon z), \quad \forall x \in A, \forall y \in B, \forall z \in B(0,1).$$
Por lo tanto
$$f(x) < \alpha < f(y), \quad \forall x \in A, \forall y \in B.$$
Lo que demuestra que existe un hiperplano de ecuación $[f = \alpha]$ que separa a A y B en sentido estricto. $\square$

Las siguientes definiciones se toman de [Sch 66].

Definición 3.34. *Sean E, F espacios vectoriales sobre un campo K y sea f una forma bilineal en $E \times F$ que satisfaga los axiomas de separación:*

1. $f(x_0, y) = 0$ $\forall y \in F \Rightarrow x_0 = 0$.

2. $f(x, y_0) = 0\ \forall x \in E \Rightarrow y_0 = 0.$

La tercia (E, F, f) se llama sistema dual o dualidad (sobre K). También se denota como $(E, F, \langle\ ,\ \rangle)$ o $\langle E, F\rangle$.

Bourbaki presenta en [B 81] la siguiente aclaración de lo que se considera una dualidad de separación.

Una dualidad $\langle E, F\rangle$ es de separación en E si $\forall x \neq 0$ en E existe $y \in F$ tal que $f(x, y) \neq 0$. Es de separación en F si $\forall y \neq 0$ en F existe $x \in E$ tal que $f(x, y) \neq 0$.

La dualidad se llama de separación si es de separación en E y en F.

Definición 3.35. *Sea $\langle E, F\rangle$ una dualidad y sea $C \subset E$, se define al polar de C por*

$$C^0 = \{y \in F : Re\langle x, y\rangle \leq 1 \quad \forall x \in C\}.$$

Si $C \subset E$, el polar de C^0 es un subconjunto de E, al que se llama bipolar de C y se denota C^{00}.

Definición 3.36. *La topología débil $\sigma(E, F)$ es la topología más gruesa sobre E para la cual las formas lineales $x \to \langle x, y\rangle$, $y \in F$ son continuas.*

Teorema 3.37. ***(Teorema Bipolar)***

Sea $\langle E, F\rangle$ una dualidad. Para cualquier subconjunto $C \subset E$, el bipolar C^{00} es la envolvente convexa $\sigma(E, F)$-cerrada de $C \cup \{0\}$.

Se sigue del teorema bipolar que para subespacios $C \subset E$, $C = C^{00}$ si y solo si C es cerrado para $\sigma(E, F)$.

Demostración. C^o es un subconjunto convexo de E que contiene a cero. Además, es $\sigma(F, E)$-cerrado, por lo que M^{oo} es convexo, $\sigma(E, F)$-cerrado y contiene a cero. Por cómo está definido, $M^{oo} \supseteq M$. Si se denota por M_1 a la envolvente convexa $\sigma(E, F)$-cerrada de $M \cup \{0\}$, entonces $M_1 \subseteq M^{oo}$.

Por otra parte, sea $x_0 \notin M_1$, como se mostró en el teorema de Hahn-Banach, existe un hiperplano H que separa a M_1 y $\{x_0\}$ en sentido estricto. Como $0 \in M_1$, H es de la forma $H = \{x \in E : f(x) = 1\}$ para una forma lineal $\sigma(E, F)$-continua. Esto implica que f es de la forma $f(x) = \langle x, y \rangle$ para un único $y \in G$.

Entonces

$$f(x) = Re\langle x, y_0 \rangle \quad \forall x \in F \text{ y algún } y_0 \in G.$$

Como $0 \in M_1$, se tiene $Re\langle x, y_0 \rangle < 1$ si $x \in M_1$. Por lo tanto $\Re\langle x_0, y_0 \rangle > 1$. De donde se sigue que $y_0 \in M_1^o \subseteq M^o$, por lo que $x_0 \notin M^{oo}$.

De esta forma se obtiene que $M^{oo} \subseteq M_1$ y, por lo tanto, $M^{oo} = M_1$. $\square$

APÉNDICE C: Optimización convexa

El problema principal que se estudia en el presente trabajo trata sobre la maximización de la utilidad esperada de la riqueza final correspondiente a una inversión, que es un problema de optimización convexa. Se presentan los elementos de esta teoría que se emplean en la solución del problema, siguiendo a Rockafellar [Ro 70], y Kuhn y Tucker [KuTu 51].

Definición 3.38. *Sea f una función de $\mathbb{R}^N$ en $[-\infty, +\infty]$ y sea x un punto en el que f es finita. La derivada direccional de f en x con respecto al vector d se define como el límite*

$$f'(x,d) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda d) - f(x)}{\lambda}$$

En particular, si e_i es el i-ésimo vector fila de la matriz identidad de $n \times n$, a la derivada direccional de f en x respecto a e_i ($f'(x, e_i)$) se le conoce como la derivada parcial de f con respecto de la i-ésima entrada. Se denota también $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ o $f_1'(x)$.

Definición 3.39. *Sea f una función de $\mathbb{R}^N$ en $[-\infty, +\infty]$ y sea x un punto en el que f es finita. Se dice que f es diferenciable si existe un vector x^* (necesariamente único) que satisface:*

$$\lim_{z \to x} \frac{z - f(x) - \langle x^*, z - x \rangle}{|z - x|} = 0.$$

Al vector x^*, si existe, se le llama gradiente de f en x y se denota por $\nabla f(x)$.

Supóngase que f es diferenciable en x, entonces para todo $y \neq 0$

$$0 = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda x) - f(x) - \langle \nabla f(x), \lambda y \rangle}{\lambda |y|} = \frac{[f'(x,y) - \langle \nabla f(x), y \rangle]}{y}.$$

Por lo tanto $f'(x,y) = \langle \nabla f(x), y \rangle, \quad \forall y \neq 0$. En particular $\langle \nabla f(x), e_i \rangle = f_i'(x)$, para $i = 1, ..., N$. Se tiene entonces que

$$\nabla f(x) = (f_1'(x), ..., f_N'(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_N}(x) \right).$$

Se sigue [KuTu 51] para presentar dos tipos de problemas. Por un lado, se tienen los problemas de programación lineal, en el que se busca maximizar una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones de desigualdad o de igualdad. Por otra parte, se presentan los problemas de valor silla, o minimax, que consisten en encontrar un par de valores para una función de dos parámetros. Los valores que se buscan en este tipo de problema deben maximizar a la función en uno de los argumentos y minimizarla en el otro. Además de introducir estos tipos de problemas, se presentan condiciones necesarias y suficientes que deben satisfacer los optimizadores de estas funciones, conocidas como condiciones de Kuhn-Tucker; así como la relación de equivalencia que existe en la optimización de ambos problemas.

En los planteamientos siguientes, los elementos de $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$ se consideran como vectores columna. La notación $x^\top$, para un $x \in \mathbb{R}^n$, denota la transpuesta de x. Las desigualdades del tipo $x \geqq y$ indican que cada entrada de x es mayor o igual a cada entrada de y.

Un problema de programación lineal consiste en maximizar una función lineal

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

donde $x_1, ..., x_n$ son las entradas de $x \in \mathbb{R}^n$ y $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Restringida por m desigualdades lineales

$$f_h(x) = b_h - \sum_{i=1}^{n} a_{hi} x_i \geq 0, \quad h = 1, ..., m;$$

y n desigualdades lineales

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Puede plantearse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\text{maximizar} && g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
&\text{sujeto a} && f_h(x) = b_h - \sum_{i=1}^{n} a_{hi} x_i \geq 0, \quad h = 1, ..., m \\
& && x_i \geq 0, \quad i = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Si se considera un mapeo diferenciable F de vectores de $\mathbb{R}^n$ a vectores de $\mathbb{R}^m$, es decir, que $F(x)$, para $x \in \mathbb{R}^n$, sea un vector cuyas componentes $f_1(x), ..., f_m(x)$ sean funciones diferenciables para $x \geqq 0$. Y sea $g(x)$ una función diferenciable también definida para $x \geqq 0$. Entonces se puede definir un problema de programación lineal de particular interés:

Problema de Máximo. Encontrar un x^0 que maximice a $g(x)$ restringido por $F(x) \geqq 0$ y $x \geqq 0$.

Este problema puede transformarse en un problema equivalente de valor silla (minimax). Se consideran las mismas funciones $g, f_1, ..., f_m$ y para $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ se define a la función Lagrangiana:

$$L(x, y) = g(x) + \sum_{i=1}^{m} y_h f_h(x).$$

Problema de valor silla. Encontrar vectores no negativos $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$ tales que

$$L(x, y^0) \leqq L(x^0, y^0) \leqq L(x^0, y), \quad \forall x \geqq 0, y \geqq 0. \tag{3.122}$$

Sea $L(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, se denota por

$$L_x^0 = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial L}{\partial x_n} \right) (x^0, y^0), \quad L_y^0 = \left(\frac{\partial L}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial L}{\partial y_m} \right) (x^0, y^0),$$

a las derivadas parciales evaluadas en un par x^0, y^0.

A continuación, se listan las llamadas condiciones de Kuhn-Tucker, cuya relevancia se muestra en dos lemas y dos teoremas que tratan sobre la necesidad y suficiencia de estas condiciones para que un punto (x^0, y^0) provea una solución al problema de máximo o al problema de valor silla.

Condiciones de Kuhn-Tucker.

$$L_x^0 \leqq 0, \quad {L_x^0}^\top x^0 = 0, \quad x^0 \geqq 0; \tag{3.123}$$

$$L_y^0 \geqq 0, \quad {L_y^0}^\top y^0 = 0, \quad y^0 \geqq 0. \tag{3.124}$$

$$L(x, y^0) \leqq L(x^0, y^0) + {L_x^0}^\top (x - x^0) \quad \forall x, y \geqq 0; \tag{3.125}$$

$$L(x^0, y) \geqq L(x^0, y^0) + {L_y^0}^\top (y - y^0) \quad \forall x, y \geqq 0; \tag{3.126}$$

Lema 4. *Las condiciones (3.123) y (3.124) son necesarias para que x^0, y^0 sean solución del problema de valor silla.*

Demostración. Sean $x,^0, y^0$ que satisfacen (3.122), entonces los componentes de L_x^0 y L_u^0 se hacen cero, excepto posiblemente cuando las respectivas componentes de x^0 y y^0 son cero, en cuyo caso deben ser no positivas y no negativas respectivamente. Por lo tanto, se cumplen (3.123) y (3.124). □

Lema 5. *Las condiciones (3.123), (3.124), (3.125) y (3.126) son suficientes para que x^0, y^0 sean solución del problema de valor silla.*

Demostración. Por (3.125) se tiene que

$$L(x, y^0) \leqq L(x^0, y^0) + {L_x^0}^\top (x - x^0).$$

De (3.123) se obtiene

$$ {L_x^0}^\top x > 0, \text{ para } x \geqq 0 \quad y \quad {L_x^0}^\top x^0 = 0. \tag{3.127}$$

Por lo que

$$L(x, y^0) \leqq L(x^0, y^0).$$

De forma similar, de (3.124) se observa que

$$ {L_y^0}^\top y > 0, \text{ para } y \geqq 0 \quad y \quad {L_y^0}^\top y^0 = 0.$$

De donde se sigue que

$$L(x^0, y^0) \leqq L(x^0, y^0) + {L_y^0}^\top (y - y^0).$$

Lo que por (3.126) implica

$$L(x^0, y^0) \leqq L(x^0, y).$$

□

Teorema 3.40. *Para que x^0 sea solución del problema de máximo junto con algún y^0, es necesario que satisfagan las condiciones (3.123) y (3.124) para $L(x, y) = g(x) + y^\top F(x)$.*

Teorema 3.41. *Para que x^0 sea solución del problema de máximo junto con algún y^0, es suficiente que satisfagan las condiciones (3.123), (3.124) y (3.125) para $L(x, y) = g(x) + y^\top F(x)$.*

Con estos pares de lemas y teoremas se obtiene el siguiente resultado, el cual tiene una utilidad importante para resolver problemas de máximo, ya que garantiza la equivalencia de su solución con la de un problema de valor silla, a partir de la función lagrangiana introducida anteriormente y bajo ciertos supuestos de convexidad. Debido a esta relación entre sus soluciones, al problema de máximo se le llama primal, mientras que al problema de valor silla se le llama dual lagrangiano, o simplemente dual.

Teorema 3.42. ***(Teorema de equivalencia).***

Sean $f_1, ..., f_m, g$ funciones cóncavas y diferenciables para $x \geqq 0$. Entonces x^0 es solución del problema de máximo, si y solo si, x^0 y algún y^0 son solución del problema de valor silla para $L(x, y) = g(x) + y^\top F(x)$.

Demostración. Se denota por

$$F^0 = \left[\frac{\partial f_h}{\partial x_i}\right]^0, \quad g^0 = \left[\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]^0,$$

a las derivadas parciales de F y g valuadas en un x^0. De tal forma que $F^0 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $g \in \mathbb{R}^n$.

De donde puede observarse que

$$L_x^0 = g^0 + {F^0}^\top y^0, \quad L_y^0 = F(x^0).$$

Como g es cóncava, se tiene

$$(1-\theta)g(x^0) + \theta g(x) \leqq g((1-\theta)x^0 + \theta x),$$

para $0 \leqq \theta \leqq 1$, $x \geqq 0$ y $x^0 \geqq 0$. Entonces, para $0 < \theta \leqq 1$, se cumple

$$g(x) - g(x^0) \leqq \frac{g((1-\theta)x^0 + \theta x) - g(x^0)}{\theta}.$$

Por lo que, al ser diferenciable, en el límite se obtiene

$$g(x) - g(x^0) \leqq {g^0}^\top (x - x^0),$$

es decir,

$$g(x) \leqq g(x^0) + {g^0}^\top (x - x^0).$$

De igual forma se cumplen desigualdades análogas para las funciones f_h, $h = 1, ..., m$; por lo que se obtiene

$$F(x) \leqq F(x^0) + F^0(x - x^0).$$

Por lo tanto, para cualquier $y^0 \geqq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} L(x, y^0) &= g(x) + {y^0}^\top F(x) \\ &\leqq g(x^0) + {y^0}^\top F(x^0) + ({g^0}^\top + {y^0}^\top F^0)(x - x^0) \\ &= L(x^0, y^0) + {L_x^0}^\top (x - x^0). \end{aligned}$$

Es decir, se cumple la condición (3.125) por la concavidad y diferenciabilidad de $g, f_1, ..., f_m$.

Por otra parte, para cualquier $y \geqq 0$,

$$\begin{aligned} L(x^0, y) &= g(x^0) + y^\top F(x^0) \\ &= g(x^0) + {y^0}^\top F(x^0) + F(x^0)^\top (y - y^0) \\ &= L(x^0, y^0) + {L_y^0}^\top (y - y^0). \end{aligned}$$

En otras palabras, se cumple la condición (3.126).

Sea x^0 solución del problema máximo, por el teorema 3.40 satisface, junto con algún y^0, las condiciones (3.123) y (3.124), para $L(x, y) = g(x) + y^\top F(x)$. Las condiciones (3.125) y (3.126) se cumplen por lo expuesto anteriormente, por lo que el lema 5 implica que x^0, y^0 son solución del problema de valor silla.

Inversamente, sean x^0, y^0 solución del problema de valor silla. Por el lema 4 se cumplen las condiciones (3.123) y (3.124). La condición (3.125) se cumple por la concavidad y diferenciabilidad de $f_1, ..., f_m, g$; por lo que el teorema 3.41 implica que x^0 es solución del problema de máximo.

□

El dual es un problema minimax, en el que el optimizador es un valor silla que minimiza uno de los argumentos de la función y maximiza el otro. Sin embargo, puede plantearse como un problema de minimización, al definir la siguiente función.

Función dual:

$$\Psi(y) = \sup_{x \geqq 0} L(x, y).$$

Por lo que el planteamiento es el siguiente.

Problema dual:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \Psi(y) \\ \text{sujeto a} & y \geqq 0. \end{array}$$

El problema de optimización que determina el valor de $\Psi(y)$ se denomina subproblema dual.

La función dual es cóncava, aunque el problema original no sea convexo.

Para poder obtener la función del problema dual, se requiere introducir dos nuevos conceptos.

Definición 3.43. *Sean $C \subseteq \mathbb{R}^N$ y $f : C \to \mathbb{R}$ diferenciable. La conjugada de Legendre de la pareja (C, f) se define como el par (D, g) donde D es la imagen de C bajo el mapeo del gradiente ∇f y g es la función en D dada por la fórmula*

$$g(x^*) = \langle (\nabla f)^{-1}(x^*), x^* \rangle - f((\nabla f)^{-1}(x^*)).$$

El pasar de (C, f) a la conjugada de Legendre (D, g), si está bien definida, se llama transformada de Legendre.

Dos funciones diferenciables f y g son una transformada de Legendre si cada una de sus primeras derivadas son función inversa de la otra: $f = (g')^{-1}$.

Definición 3.44. *La conjugada convexa de una función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función $f^* : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por*

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, x \rangle - f(x) : x \in \mathbb{R}^N\} = -\inf\{f(x) - \langle x^*, x \rangle : x \in \mathbb{R}^N\},$$

donde

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{N} u_k \cdot v_k, \quad \textit{para } u, v \in \mathbb{R}^N.$$

ANEXOS

Anexo 1. Precios de la acción de CEMEX

Fecha	Precio
04/01/16	8.43195
05/01/16	8.31176
06/01/16	8.29327
07/01/16	7.63683
08/01/16	7.1838
11/01/16	7.23928
12/01/16	7.3872
13/01/16	7.13757
14/01/16	7.35947
15/01/16	7.32249
18/01/16	7.25777
19/01/16	6.95266
20/01/16	6.81398
21/01/16	7.2855
22/01/16	7.44268
25/01/16	6.90643
26/01/16	7.05436
27/01/16	7.02663
28/01/16	7.21154
29/01/16	7.58136
02/02/16	7.42419
03/02/16	7.76627
04/02/16	8.70932
05/02/16	8.55214
08/02/16	7.9142
09/02/16	7.68306
10/02/16	7.67382
11/02/16	7.55362
12/02/16	7.83099
15/02/16	8.08062
16/02/16	8.12685
17/02/16	8.848
18/02/16	8.51516
19/02/16	8.56139
22/02/16	9.06065
23/02/16	8.9497
24/02/16	8.98669
25/02/16	9.07914
26/02/16	9.16235
29/02/16	9.24556
01/03/16	9.63388
02/03/16	9.62463
03/03/16	9.6801
04/03/16	9.73558
07/03/16	10.1609
08/03/16	9.80954
09/03/16	9.95747
10/03/16	10.0314
11/03/16	9.95747
14/03/16	10.0869
15/03/16	9.86501
16/03/16	10.0962
17/03/16	10.4105
18/03/16	11.0577
22/03/16	11.5015
23/03/16	11.1132
28/03/16	11.2981
29/03/16	11.2888
30/03/16	11.5107
31/03/16	11.6032
01/04/16	11.6032
04/04/16	11.5107
05/04/16	11.5107
06/04/16	11.5292
07/04/16	11.409
08/04/16	11.4275
11/04/16	11.52
12/04/16	11.6402
13/04/16	11.7788
14/04/16	11.6402
15/04/16	11.8713
18/04/16	11.9083
19/04/16	12.0192
20/04/16	12.084
21/04/16	12.0655
22/04/16	12.2134
25/04/16	11.9083
26/04/16	11.9083
27/04/16	12.01
28/04/16	12.1209
29/04/16	12.2788
02/05/16	12.3077
03/05/16	12.0192
04/05/16	11.8654
05/05/16	11.6923
06/05/16	11.7212
09/05/16	11.7308
10/05/16	12.0096
11/05/16	11.8558
12/05/16	11.8173
13/05/16	11.5288
16/05/16	11.5865
17/05/16	11.6731
18/05/16	11.5673
19/05/16	11.3269

Fecha	Precio
20/05/16	11.3846
23/05/16	11.4615
24/05/16	11.5288
25/05/16	11.625
26/05/16	11.6538
27/05/16	11.5192
30/05/16	11.5
31/05/16	11.2788
01/06/16	11.2308
02/06/16	11.125
03/06/16	11.4135
06/06/16	11.3654
07/06/16	11.5962
08/06/16	11.9423
09/06/16	11.5769
10/06/16	11.2596
13/06/16	11.125
14/06/16	10.7981
15/06/16	11.1538
16/06/16	11.2692
17/06/16	11.5
20/06/16	11.7308
21/06/16	11.5865
22/06/16	11.6635
23/06/16	11.8942
24/06/16	10.8077
27/06/16	10.2019
28/06/16	10.2788
29/06/16	10.5
30/06/16	10.8654
01/07/16	10.875
04/07/16	10.75
05/07/16	10.5096
06/07/16	10.5962
07/07/16	10.9423
08/07/16	11.0962
11/07/16	11.5865
12/07/16	11.9231
13/07/16	11.7981
14/07/16	11.9135
15/07/16	12
18/07/16	12.4904
19/07/16	12.0385
20/07/16	12.3558
21/07/16	12.1346
22/07/16	12.2596
25/07/16	12.2981
26/07/16	12.5288
27/07/16	12.8365
28/07/16	13.4904
29/07/16	13.7404
01/08/16	13.7212
02/08/16	13.4135
03/08/16	13.6442
04/08/16	13.7404
05/08/16	14.1538
08/08/16	14.0192
09/08/16	14.4231
10/08/16	14.9038
11/08/16	15.1635
12/08/16	15.3077
15/08/16	15.4327
16/08/16	15.25
17/08/16	15.2115
18/08/16	15.1154
19/08/16	15.1635
22/08/16	15.1635
23/08/16	14.9712
24/08/16	14.7788
25/08/16	14.2692
26/08/16	14.9327
29/08/16	15.0481
30/08/16	14.9904
31/08/16	14.9712
01/09/16	14.875
02/09/16	15.0481
05/09/16	15.1538
06/09/16	14.9904
07/09/16	14.8077
08/09/16	14.8365
09/09/16	14.2308
12/09/16	14.5385
13/09/16	14.0865
14/09/16	13.9423
15/09/16	14.0288
19/09/16	13.9135
20/09/16	14.0481
21/09/16	14.1635
22/09/16	14.7115
23/09/16	14.7308
26/09/16	14.4904
27/09/16	14.7981
28/09/16	15.0865
29/09/16	15.3462
30/09/16	14.7692

Fecha	Precio
03/10/16	14.7692
04/10/16	14.7115
05/10/16	14.9423
06/10/16	15.1154
07/10/16	15.0096
10/10/16	15.4038
11/10/16	15.3365
12/10/16	15.2115
13/10/16	15.4615
14/10/16	15.3365
17/10/16	15.4519
18/10/16	15.6731
19/10/16	15.8173
20/10/16	16.0481
21/10/16	16.2789
24/10/16	16.2885
25/10/16	16.2211
26/10/16	16.230801
27/10/16	16.2115
28/10/16	15.7981
31/10/16	15.7308
01/11/16	15.4808
03/11/16	15.5865
04/11/16	15.2212
07/11/16	16.019199
08/11/16	16.0961
09/11/16	15.7308
10/11/16	14.8846
11/11/16	14.8173
14/11/16	14.8173
15/11/16	14.8942
16/11/16	14.8942
17/11/16	15.6154
18/11/16	15.2885
22/11/16	15.4808
23/11/16	15.6346
24/11/16	15.5962
25/11/16	15.9038
28/11/16	15.6058
29/11/16	15.5577
30/11/16	15.3942
01/12/16	15.3942
02/12/16	15.5385
05/12/16	15.8558
06/12/16	16.0481
07/12/16	16.605801
08/12/16	17.375
09/12/16	17.230801
13/12/16	17.0096
14/12/16	16.3846
15/12/16	15.9904
16/12/16	15.6731
19/12/16	15.5673
20/12/16	15.8558
21/12/16	15.8654
22/12/16	15.4808
23/12/16	15.4327
26/12/16	15.2885
27/12/16	16.019199
28/12/16	15.9423
29/12/16	15.7885
30/12/16	15.9038
02/01/17	15.9038
03/01/17	15.9038
04/01/17	16.3461
05/01/17	16.3654
06/01/17	16.3654
09/01/17	16.192301
10/01/17	16.2596
11/01/17	16.3654
12/01/17	16.7115
13/01/17	16.432699
16/01/17	16.144199
17/01/17	17.057699
18/01/17	17.442301
19/01/17	17.4135
20/01/17	18.192301
23/01/17	18.0481
24/01/17	18.7885
25/01/17	19.1154
26/01/17	18.5769
27/01/17	18.6154
30/01/17	18.4615
31/01/17	18.519199
01/02/17	18.1635
02/02/17	18.192301
03/02/17	18.0481
07/02/17	17.3654
08/02/17	17.0961
09/02/17	17.432699
10/02/17	17.567301
13/02/17	17.6539
14/02/17	17.5865
15/02/17	17.3846
16/02/17	17

Fecha	Precio
17/02/17	16.9904
20/02/17	17.019199
21/02/17	17.307699
22/02/17	16.8269
23/02/17	16.375
24/02/17	16.2789
27/02/17	16.807699
28/02/17	16.355801
01/03/17	17.3654
02/03/17	16.6346
03/03/17	16.5865
06/03/17	17.0096
07/03/17	16.6635
08/03/17	16.4615
09/03/17	16.5
10/03/17	16.2789
13/03/17	16.4135
14/03/17	16.182699
15/03/17	16.4615
16/03/17	16.8269
17/03/17	16.7404
21/03/17	16.2596
22/03/17	16.25
23/03/17	16.1635
24/03/17	16.0961
27/03/17	16.1539
28/03/17	16.0769
29/03/17	16.0865
30/03/17	15.9231
31/03/17	16.2981
03/04/17	16.2885
04/04/17	16.9039
05/04/17	16.807699
06/04/17	16.75
07/04/17	16.7981
10/04/17	16.7789
11/04/17	16.6635
12/04/17	16.2211
17/04/17	16.057699
18/04/17	15.9038
19/04/17	15.7692
20/04/17	16.0385
21/04/17	16.019199
24/04/17	16.2019
25/04/17	16.6731
26/04/17	16.7885
27/04/17	16.932699
28/04/17	16.6539
02/05/17	16.7404
03/05/17	16.559999
04/05/17	16.389999
05/05/17	16.719999
08/05/17	16.639999
09/05/17	16.790001
10/05/17	16.74
11/05/17	16.41
12/05/17	16.309999
15/05/17	16.379999
16/05/17	16.18
17/05/17	15.82
18/05/17	15.58
19/05/17	15.96
22/05/17	15.8
23/05/17	15.94
24/05/17	15.68
25/05/17	15.52
26/05/17	15.55
29/05/17	15.52
30/05/17	15.71
31/05/17	15.42
01/06/17	15.71
02/06/17	15.94
05/06/17	15.89
06/06/17	16.120001
07/06/17	16.139999
08/06/17	16.389999
09/06/17	16.799999
12/06/17	16.84
13/06/17	16.73
14/06/17	16.73
15/06/17	16.530001
16/06/17	16.6
19/06/17	16.67
20/06/17	16.540001
21/06/17	16.68
22/06/17	16.620001
23/06/17	16.530001
26/06/17	16.440001
27/06/17	16.5
28/06/17	16.809999
29/06/17	16.780001
30/06/17	17.049999
03/07/17	17.51
04/07/17	17.57
05/07/17	17.889999

Fecha	Precio
06/07/17	17.700001
07/07/17	17.799999
10/07/17	18.040001
11/07/17	18.16
12/07/17	18.26
13/07/17	17.98
14/07/17	18
17/07/17	17.57
18/07/17	17.17
19/07/17	17.200001
20/07/17	17.459999
21/07/17	17.91
24/07/17	17.9
25/07/17	17.93
26/07/17	17.299999
27/07/17	17.02
28/07/17	17.15
31/07/17	17.200001
01/08/17	17.610001
02/08/17	17.52
03/08/17	17.299999
04/08/17	17.5
07/08/17	17.43
08/08/17	17.25
09/08/17	17.17
10/08/17	16.690001
11/08/17	16.5
14/08/17	16.610001
15/08/17	16.549999
16/08/17	16.52
17/08/17	16.42
18/08/17	16.370001
21/08/17	16.24
22/08/17	16.200001
23/08/17	16.15
24/08/17	16.110001
25/08/17	16.16
28/08/17	16.280001
29/08/17	16.4
30/08/17	16.889999
31/08/17	16.709999
01/09/17	16.84
04/09/17	16.66
05/09/17	16.42
06/09/17	16.34
07/09/17	16.16
08/09/17	16.209999
11/09/17	16.120001
12/09/17	16.209999
13/09/17	15.98
14/09/17	16.15
15/09/17	16
18/09/17	16.139999
19/09/17	16.24
20/09/17	16.65
21/09/17	16.719999
22/09/17	16.58
25/09/17	16.5
26/09/17	16.469999
27/09/17	16.42
28/09/17	16.360001
29/09/17	16.549999
02/10/17	16.57
03/10/17	16.559999
04/10/17	16.540001
05/10/17	16.49
06/10/17	16.620001
09/10/17	16.18
10/10/17	15.91
11/10/17	15.4
12/10/17	15.09
13/10/17	15.29
16/10/17	14.9
17/10/17	15.34
18/10/17	15.21
19/10/17	15.3
20/10/17	15.18
23/10/17	15.46
24/10/17	15.89
25/10/17	15.52
26/10/17	15.75
27/10/17	15.75
30/10/17	15.51
31/10/17	15.58
01/11/17	15.3
03/11/17	15.17
06/11/17	15.37
07/11/17	15.52
08/11/17	15.68
09/11/17	15.76
10/11/17	15.54
13/11/17	15.19
14/11/17	15.08
15/11/17	14.91
16/11/17	15.02

Fecha	Precio
17/11/17	14.91
21/11/17	14.77
22/11/17	14.64
23/11/17	14.85
24/11/17	14.65
27/11/17	14.44
28/11/17	14.6
29/11/17	14.51
30/11/17	14.26
01/12/17	14.06
04/12/17	13.87
05/12/17	13.77
06/12/17	13.6
07/12/17	13.89
08/12/17	14.19
11/12/17	14.29
13/12/17	14.47
14/12/17	14.36
15/12/17	14.19
18/12/17	14.32
19/12/17	14.26
20/12/17	14.49
21/12/17	14.68
22/12/17	14.71
26/12/17	14.78
27/12/17	14.78
28/12/17	14.75
29/12/17	14.7
02/01/18	15.07
03/01/18	15.25
04/01/18	15.39
05/01/18	15.18
08/01/18	15.15
09/01/18	14.95
10/01/18	15.01
11/01/18	15.33
12/01/18	15.31
15/01/18	15.37
16/01/18	15.36
17/01/18	15.29
18/01/18	15.25
19/01/18	15.27
22/01/18	15.4
23/01/18	15.62
24/01/18	15.58
25/01/18	15.43
26/01/18	15.7
29/01/18	15.51
30/01/18	15.77
31/01/18	15.48
01/02/18	15.34
02/02/18	15.21
06/02/18	14.92
07/02/18	14.7
08/02/18	14.03
09/02/18	13.96
12/02/18	13.79
13/02/18	13.78
14/02/18	14.14
15/02/18	13.94
16/02/18	13.91
19/02/18	13.93
20/02/18	13.52
21/02/18	13.28
22/02/18	13.5
23/02/18	13.23
26/02/18	13.05
27/02/18	12.69
28/02/18	12.45
01/03/18	13.1
02/03/18	13.1
05/03/18	13.01
06/03/18	13.15
07/03/18	13
08/03/18	13.55
09/03/18	13.72
12/03/18	13.55
13/03/18	13.68
14/03/18	13.44
15/03/18	13.38
16/03/18	13.07
20/03/18	12.62
21/03/18	12.65
22/03/18	12.43
23/03/18	12.99
26/03/18	12.92
27/03/18	12.65
28/03/18	12.03
02/04/18	11.99
03/04/18	12.12
04/04/18	12.4
05/04/18	12.63
06/04/18	12.66
09/04/18	13.04
10/04/18	12.98

Fecha	Precio
11/04/18	13.05
12/04/18	13.06
13/04/18	12.89
16/04/18	12.6
17/04/18	12.92
18/04/18	13.05
19/04/18	12.85
20/04/18	12.69
23/04/18	12.86
24/04/18	12.5
25/04/18	12.47
26/04/18	12.16
27/04/18	11.67
30/04/18	11.7
02/05/18	11.44
03/05/18	11.44
04/05/18	11.54
07/05/18	11.35
08/05/18	11.67
09/05/18	11.67
10/05/18	11.68
11/05/18	11.72
14/05/18	11.6
15/05/18	11.57
16/05/18	11.85
17/05/18	11.56
18/05/18	11.67
21/05/18	11.89
22/05/18	11.91
23/05/18	11.91
24/05/18	11.77
25/05/18	11.75
28/05/18	11.67
29/05/18	11.75
30/05/18	11.74
31/05/18	11.86
01/06/18	11.84
04/06/18	12.01
05/06/18	12.14
06/06/18	12.25
07/06/18	12.2
08/06/18	12.24
11/06/18	12.7
12/06/18	12.67
13/06/18	12.63
14/06/18	12.89
15/06/18	12.87
18/06/18	12.65
19/06/18	12.71
20/06/18	12.88
21/06/18	12.55
22/06/18	12.75
25/06/18	12.6
26/06/18	13.14
27/06/18	12.94
28/06/18	13.01
29/06/18	13.06
02/07/18	12.69
03/07/18	12.96
04/07/18	13.06
05/07/18	13.45
06/07/18	13.34
09/07/18	13.45
10/07/18	13.31
11/07/18	13.27
12/07/18	13.05
13/07/18	12.86
16/07/18	12.63
17/07/18	12.58
18/07/18	12.82
19/07/18	12.78
20/07/18	12.73
23/07/18	12.72
24/07/18	13.17
25/07/18	13.23
26/07/18	13.82
27/07/18	13.93
30/07/18	14.01
31/07/18	13.89
01/08/18	13.9
02/08/18	13.78
03/08/18	13.88
06/08/18	13.93
07/08/18	13.77
08/08/18	13.79
09/08/18	13.28
10/08/18	13.28
13/08/18	13.18
14/08/18	13.42
15/08/18	13.12
16/08/18	12.59
17/08/18	12.75
20/08/18	12.77
21/08/18	13.19
22/08/18	13.39

Bibliografía

[Bj 09] T. Björk, (2009) *Arbitrage theory in continuous time*, Oxford University Press.

[B 81] N. Bourbaki, (1981) *Espaces Vectoriels Topologiques*, Masson Editeur.

[BrSc 99] F. Brannath y W. Schachermayer, (1999) *A bipolar theorem for Subsets of* $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Séminaire de Probabilités. 33, 349-354.

[Bre 83] H. Brézis, (1983) *Analyse fonctionnelle*, Masson Editeur.

[CaHer 05] N. Castañeda y D. Hernández, (2005). *Optimal consumption-investment problems in incomplete markets with stochastic coefficients.* Society for Industrial and Applied Mathematics. 44, 1322-1344.

[DeSc 94] F. Delbaen y W. Schachermayer, (1994) *A general version of the fundamental theorem of asset pricing.* Mathematische Annalen. 300, 463-520.

[DeSc 98] F. Delbaen y W. Schachermayer, (1998) *The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes.* Mathematische Annalen. 312, 215-250.

[HePea 91] H. He, N. D. Pearson; (1991). *Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints: the infinite-dimensional case.* Math. Finance. 1, 1-10.

[KLSX 91] I. Karatzas, J. P. Lehoczky, S. E. Shreve, G. L. Xu; (1991). *Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market.* SIAM Journal of Control and Optimization. 29, 702-730.

[KuTu 51] H. W. Kuhn y A. W. Tucker, (1951) *Non linear programming.* Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. 481-492.

[KaQu 95] N. El Karoui y M.-C. Quenez, (1995) *Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market.* SIAM Journal on Control and Optimization. 33, 29-66.

[Pl 86] S. R. Pliska, (1986). *A stochastic calculus model of continuous trading: optimal portfolio.* Math. Oper. Res. 11, 371-382.

[Pl 97] S. R. Pliska, (1997) *Introduction to mathematical finance*, Blackwell Publishers.

[Ro 70] R. T. Rockafellar, (1970) *Convex Analysis*, Princeton University Press.

[Sc 01] W. Schachermayer, (2001). *Optimal Investment in Incomplete Markets when Wealth may become negative.* Annals of Applied probability. 11, 694-734.

[Sc 03] W. Schachermayer, (2003). *Utility Maximisation in Incomplete Markets.* Lecture Notes in Mathematics. 1856, 255-289.

[Sch 66] H. H. Schaefer, (1966) *Topological Vector Spaces*, Graduate Texts in Mathematics.

[W 91] D. Williams, (1991) *Probability with martingales*, Cambridge University Press.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00218
Matrícula: 2183802559

Optimización de portafolios en mercados completos e incompletos

Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 17:00 horas del día 4 del mes de junio del año 2021 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA
DR. ERICK TREVIÑO AGUILAR
DR. CARLOS IBARRA VALDEZ

Bajo la Presidencia de la primera y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: GONZALO COLIN CERON

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, la presidenta del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
DIRECCIÓN DE SISTEMAS ESCOLARES

GONZALO COLIN CERON
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTA

DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA

VOCAL

DR. ERICK TREVIÑO AGUILAR

SECRETARIO

DR. CARLOS IBARRA VALDEZ