

Medición del riesgo en crédito: Implementación y cálculo del VaR y el CVaR en tres modelos de incumplimiento.

Tesis que presenta:

Marco Ricardo Téllez Cabrera

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales

DIRECTORA DE TESIS: PATRICIA SAAVEDRA BARRERA

México, D.F. junio de 2010.



Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Iztapalapa

Contenido

Introducción	IX
1. Riesgo y Riesgo en Crédito	1
1.1. Riesgo	1
1.1.1. Definiciones	3
1.1.2. Tipos de riesgo financiero	3
1.1.3. Medidas de riesgo coherente	4
1.2. Riesgo en crédito	6
1.2.1. Pérdida Esperada(EL)	7
1.2.2. Valor en Riesgo (VaR)	8
1.2.3. Pérdida No Esperada(NEL)	10
1.2.4. VaR Condicional (CVaR) o Deficiencia Media	11
1.3. Metodologías para la medición y administración del riesgo en crédito	12
2. Modelo estructural de Merton	15
2.1. Valuación de opciones y fórmula de Black & Scholes	15
2.1.1. ¿Qué es una opción?	15
2.1.2. ¿Qué es un bono?	17
2.1.3. Modelo matemático y valuación de una opción europea	18
2.2. Modelo de Merton	24
2.2.1. Modelo teórico	24

2.2.2. Estimación de F y σ_V	28
2.2.3. Medidas de riesgo del modelo	30
2.2.4. Sensibilidad de la probabilidad de incumplimiento (PI) y del rendimiento por riesgo de incumplimiento r_{RI}	34
2.2.5. Generalización para una cartera	36
3. Modelo con Matrices de Transición	39
3.1. Cadenas de Markov	39
3.1.1. Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov	41
3.1.2. Matrices de transición para períodos menores a un año	42
3.2. CreditMetrics	43
3.2.1. Caso de un sólo crédito	46
3.2.2. Caso de dos créditos	53
3.2.3. Caso general con más de un crédito	58
3.2.4. Método Monte Carlo	58
4. Modelo CyRCE y medición de la concentración de una cartera	65
4.1. Antecedentes y aspectos generales	66
4.1.1. Índice de Herfindahl-Hirschman	67
4.2. Modelo CyRCE Generalizado	73
4.2.1. CyRCE Generalizado	73
4.2.2. CyRCE Generalizado: segmentación de la cartera	80
4.2.3. CyRCE Generalizado incluyendo tasas de recuperación	89
5. Implementación de los modelos para créditos en México	93
5.1. Modelo estructural de Merton	93
5.1.1. Caso de cuatro empresas mexicanas individualmente	94
5.1.2. Comparación de resultados estimados con datos reales	99
5.1.3. Conformación de la cartera	101
5.2. Modelo con Matrices de Transición	103
5.3. Modelo CyRCE	104
5.3.1. Modelo CyRCE para las carteras de empresas mexicanas	105

5.3.2. Comparación entre el modelo de Merton utilizando la metodología Credit Metrics y el modelo CyRCE para las carteras de empresas mexicanas	106
5.3.3. Modelo CyRCE para la cartera de 20 bonos	107
5.3.4. Comparación entre el modelo CyRCE y el modelo CreditMetrics para la cartera de 20 bonos	108
6. Conclusiones	109
Apendice A	113
Apendice B	119
Referencias	123

Introducción

El papel del crédito en una sociedad como la nuestra permite que quien no posea recursos o bienes en el momento actual, pueda obtenerlos de alguien que los posee pero que no los necesita por el momento. Por supuesto que éste último, llamado prestamista, al final de cierto período deberá recuperar sus recursos (el valor de éstos) más un premio que llamamos interés. El crédito entonces transfiere recursos en la sociedad, y en ese sentido, al menos teóricamente, debería contribuir a un mayor bienestar de la sociedad.

El monto final que recibirá de vuelta el prestamista estará formado por el valor de los recursos prestados más el interés. Este monto, aunque conocido en el momento en que se realiza el préstamo, no está del todo garantizado al final del período pues existe incertidumbre sobre su pago. Es posible que el deudor no pueda pagar la totalidad del adeudo o incluso en el caso más extremo que incumpla completamente el pago y podemos hablar por lo tanto de un riesgo en crédito para el prestamista. Cuando en una sociedad se generaliza el incumplimiento parcial o total de los deudores se crea un problema de liquidez, lo que puede llegar a detener el sistema económico originando recesiones y crisis. Ejemplos de crisis originadas o acentuadas por esta razón tenemos muchos. En México, la crisis económica de 1994 detonada en gran medida por acontecimientos políticos y la especulación financiera, vivió su momento más álgido cuando los bancos y otras instituciones financieras fueron incapaces de cobrar sus préstamos, teniendo una cartera vencida en niveles muy

elevados. Se generó un problema de liquidez pues si las personas con depósitos de ahorro en los bancos hubiesen decidido retirar su dinero en efectivo, el sistema bancario hubiese sido incapaz de cumplirles a todos. El Estado mexicano tuvo que intervenir para generar confianza rescatando a la banca de la quiebra con el muy conocido FOBAPROA¹.

Un ejemplo más reciente lo tenemos con la crisis financiera mundial de 2008-2009, originada en los Estados Unidos en el sector inmobiliario, específicamente a causa de las hipotecas subprime² que fueron otorgadas a la población de ingresos bajos para garantizar el pago del préstamo para la adquisición de vivienda. Los deudores fueron incapaces de pagar las hipotecas subprime cuando la FED elevó el tipo de interés, lo que hizo a su vez que se desplomara el mercado inmobiliario. Debido a que las hipotecas subprime se estaban negociando en el mercado secundario, la crisis se contagió a otros sectores de la economía... y a otros países. En este caso, nuevamente el Estado tuvo que intervenir inyectando recursos al sistema financiero³ y por el contagio, también tuvo que inyectar recursos a empresas productivas como las que fabrican automotores.

La falta de liquidez originada por la incapacidad de las instituciones financieras de cobrar los préstamos otorgados puede ser una de las causas de una crisis económica o bien, puede empeorar una crisis que ya ha estallado. Por esta razón, es necesario poner atención en la conformación de las carteras de crédito y en la determinación

¹ Fondo Bancario de Protección al Ahorro, que luego fue sustituido en 1998 por el IPAB, Instituto para la Protección al Ahorro Bancario

² Un crédito subprime es una modalidad crediticia del mercado financiero de Estados Unidos que se caracteriza por tener un nivel de riesgo de impago y un rendimiento mayor a la media del resto de créditos. Los créditos subprime se otorgan a las personas que resultan con una baja evaluación en cuanto a su capacidad de pago. Las hipotecas subprime se pueden vender en el mercado secundario a una tasa de descuento, de forma que bajo condiciones normales, se garantiza la liquidez.

³ De hecho, aunque la Oficina de Presupuesto del Congreso estadounidense y la de Administración y Presupuesto de la Casa Blanca estimaron que el costo del paquete de rescate bordearía los US\$250 mil millones, el expresidente de la Reserva Federal FED Alan Greenspan, afirmaba en una convención bancaria en México, que el rescate sería mayor al estimarlo en más de US\$500 mil millones. <http://www.eluniversal.com.mx/notas/585270.html>. Nota periodística de El Universal titulada: *EU deberá asumir más pérdidas para superar crisis: Greenspan*, del 20 de marzo de 2009. Consultada el 10 de febrero de 2010.

de las posibles pérdidas en que se puede incurrir pensando que de esta manera se pueda establecer un monto de reserva o capital económico que permita hacer frente a episodios de pánico en crisis.

Instituciones financieras como por ejemplo los bancos, tienen interés en medir el riesgo en que incurren cuando hacen préstamos a personas físicas o a empresas; otras instituciones, como las AFORES -Administradoras de Fondos para el Retiro- se interesan en medir el riesgo en crédito de grandes carteras formadas por instrumentos de renta fija y renta variable. Es deseable por tanto, tener una medida del riesgo en el que se incurre cuando se realiza un préstamo.

Surgen así algunas preguntas, ¿Qué es el riesgo? ¿Cómo medirlo? ¿Por qué decimos que un instrumento financiero es más (o menos) riesgoso que otro? ¿Qué características debería cumplir una buena medida de riesgo?

En la literatura especializada (Crouhy et al., 2001; Servigny et al., 2004), se mencionan diferentes medidas de riesgo en crédito, que van de las más simples a algunas muy sofisticadas pero más complejas de calcular. Dada una cartera de créditos, una medida de riesgo de crédito muy simple es la desviación estándar de los rendimientos de la cartera (o si es el caso, de las pérdidas); otra medida, muy usada en la actualidad, es el Valor en Riesgo (VaR)⁴, sin embargo, como se mostrará en el presente trabajo, sin complicar mucho el cálculo podríamos tener una medida de riesgo más adecuada como el Valor en Riesgo Condicional (CVaR).

Para obtener las medidas de riesgo se requiere de tener antes un modelo de la evolución del valor del préstamo desde el momento en que se celebra el contrato hasta el momento en que se liquida, esto se logra con los modelos de riesgo en crédito. Desde la década de 1980 (Crouhy, 2001), los bancos y otras instituciones financieras se han dado a la tarea de desarrollar métodos para administrar el riesgo en crédito de forma que puedan calcular el monto de sus reservas en base al capital económico.

Los modelos de riesgo en crédito existentes suelen clasificarse de acuerdo a su arquitectura en modelos analíticos y modelos basados en simulación. Los modelos analíticos proporcionan una solución cerrada y exacta de la distribución de los

⁴ Un libro que nos muestra su importancia y nos ejemplifica su uso es (Jorion, 2004)

rendimientos (o en su caso de las pérdidas) de la cartera, haciendo supuestos simplificadores que muchas veces pueden llegar a no ser del todo realistas. Del otro lado, tenemos los modelos basados en simulación que permiten incorporar más realismo al cálculo pero con el costo de ser muy demandantes computacionalmente, este tipo de modelos no proporcionan una respuesta cerrada pero permiten obtener intervalos de confianza.

Desde el punto de vista académico los modelos de riesgo en crédito se clasifican principalmente en modelos estructurales, modelos de forma reducida (también conocidos como modelos a base de intensidad) y modelos actuariales. Los modelos estructurales describen el valor dinámico de los activos de la firma como un proceso estocástico formado en todo momento por la suma del valor de su deuda y de sus acciones (Servigny et al., 2004); en base a esta estructura se determina conjuntamente el tiempo y la probabilidad de incumplimiento. Por su parte, los modelos de forma reducida consideran que el tiempo en el que la empresa incumple toma a los prestamistas por sorpresa; el incumplimiento se toma como un tiempo de paro con un proceso de azar (Bielecki et al., 2007,2008). Por último, los modelos actuariales utilizan herramienta estadística y datos históricos obtenidos de experiencias de incumplimiento pasadas, construyendo la distribución de probabilidades de pérdidas de la cartera a partir de otras distribuciones de probabilidades supuestas (Crouhy et al., 2001).

El presente trabajo presenta tres modelos utilizados en la modelación del riesgo en crédito por parte de los bancos e instituciones financieras en la actualidad que pueden servir de base para entender modelos más sofisticados que aún están en desarrollo teórico. Además, para cada uno de los modelos presentados se realiza el cálculo del CVaR, pues como se argumenta a lo largo del trabajo, posee ventajas sobre otras medidas de riesgo. La intención es mostrar que su implementación no es difícil (al menos en los modelos presentados) y puede si no sustituir, sí completar el análisis del riesgo de crédito de una cartera.

En el capítulo I de la presente tesis se da respuesta a las preguntas formuladas anteriormente; se muestra la clasificación de los diferentes riesgos financieros, haciendo énfasis en el riesgo en crédito; se señalan las características que debería cumplir una medida de riesgo y se opta por hacer el análisis con las medidas de riesgo coherentes. Se da especial énfasis en una medida de riesgo coherente: el Valor en Riesgo Condicional (CVaR).

En el capítulo II comenzamos con el modelo clásico y base de los modelos estructurales: el modelo de Merton (1974) que utiliza la metodología dada por el modelo de Black & Scholes para valorar deuda corporativa y por consiguiente presenta soluciones cerradas. El modelo de Merton hace uso de supuestos simplificadores sobre la dinámica que sigue el valor de la firma y la estructura de capital de forma que se puede usar la teoría de valuación de opciones para obtener la probabilidad de incumplimiento de una empresa que ha emitido deuda. De igual forma se obtienen medidas de riesgo y en especial, se obtiene el Valor en Riesgo Condicional para este modelo.

En el capítulo III se aborda un modelo que hace uso de matrices de transición, basado principalmente en el modelo CreditMetrics. En este modelo cada uno de los créditos que forman una cartera, tiene una calificación dada en función de su calidad, que puede cambiar en el siguiente período y que sigue un proceso markoviano estacionario. Cuando la cartera está formada por un número grande de créditos, el análisis se complica, pero haciendo uso de resultados teóricos del modelo de Merton y de la simulación con el método Monte Carlo se puede obtener la distribución de probabilidad de los rendimientos de la cartera y de esta forma las medidas de riesgo, principalmente el VaR y el CVaR.

En el capítulo IV se presenta el modelo CyRCE (Capitalización y Riesgo Crédito), desarrollado por el Banco de México, que además de permitir obtener el VaR permite realizar un análisis sobre el riesgo de concentración y la suficiencia de capital de una cartera de créditos. El modelo proporciona una forma funcional de la

distribución de pérdidas suponiendo que ésta puede caracterizarse por su media y su varianza; es muy sencillo de implementar en relación con otros modelos de riesgo y por eso podría ser usado sin problemas en países donde los sistemas de información no se encuentran muy desarrollados (Márquez,2006). Para el análisis de la cartera, el modelo CyRCE obtiene resultados teóricos interesantes tales como el índice de concentración de Herfindahl-Hirschman y las cotas para los créditos que permiten controlar el riesgo de concentración; además permite la segmentación en grupos. También se incorpora en el capítulo la forma de calcular el CVaR en el modelo.

Por último, en el capítulo V, se implementan los modelos anteriores con datos de cuatro empresas mexicanas ligadas al ramo de la construcción (CEMEX, HOMEX,GEO y PINFRA) y con datos simulados. Se forman carteras hipotéticas de bonos corporativos a partir de información proveniente de los reportes financieros de las empresas para determinar la probabilidad de incumplimiento y las medidas de riesgo. Se hacen comparaciones en los casos en que se puedan realizar y se calcula el CVaR por ser una medida de riesgo coherente.

Riesgo y Riesgo en Crédito

1.1. Riesgo

En la vida diaria, en las actividades que realizamos y en las decisiones que tomamos están presentes la incertidumbre y el riesgo. De manera general, podemos decir que la incertidumbre está caracterizada por la duda, por la falta de conocimiento de lo que pasará o no pasará en el futuro. El riesgo por su parte implica incertidumbre, al hablar de riesgo en general y de manera coloquial, nos referimos a una condición o combinación de circunstancias que generan la posibilidad de pérdida.

Con lo dicho hasta ahora podríamos pensar que el riesgo es un tipo de incertidumbre pero susceptible de tener realizaciones negativas y que por lo tanto la incertidumbre es una categoría más general que puede implicar riesgo y no riesgo. Sin embargo, para propósitos de medir el riesgo y en un contexto matemático, estas definiciones resultan ambiguas e insuficientes pues nos pueden llevar a concluir que podemos medir el riesgo en estos términos¹. En el presente trabajo y por fines prácticos se tendrá una noción de riesgo e incertidumbre más apegada a la visión de Knight (1921, pág. 233)²:

¹ Es decir, uno puede aventurarse a concluir que [siempre] es posible medir el tipo de incertidumbre susceptible de tener realizaciones negativas. Esto desde luego, como se explica más adelante no siempre es posible debido a que existe incertidumbre (ya sea con realizaciones favorables o negativas) que no es posible medir.

² Cita traducida por el autor de esta tesis.

“La diferencia práctica entre las dos categorías, riesgo e incertidumbre es que en la primera, la distribución de las realizaciones en un grupo de casos es conocida (ya sea por cálculo a priori o a partir de estadísticas de experiencias pasadas), mientras que en el caso de la incertidumbre esto no es cierto, la razón es que en general es imposible formar un grupo de casos debido a que la situación a la que uno se enfrenta es en alto grado única”.

Más aún, de acuerdo a Knigth, el *riesgo* se refiere a situaciones donde el tomador de una decisión puede asignar probabilidades matemáticas a la aleatoriedad a la que se enfrenta (probabilidades objetivas). Por su parte, la *incertidumbre* está ligada a situaciones en que la aleatoriedad presente no puede expresarse en términos de probabilidades matemáticas específicas (sólo en términos de probabilidades subjetivas). No obstante lo anterior, cabe aclarar que en realidad, estas definiciones entre riesgo e incertidumbre son más que nada prácticas pues sólo en muy pocos casos es posible obtener las probabilidades con certeza. Al respecto, la Stanford Encyclopedia of Philosophy nos dice:

“Estrictamente hablando, los únicos casos de riesgo (probabilidades conocidas) parecen ser casos de libro de texto ideales con objetos tales como dados y monedas no cargados y donde se conocen las probabilidades con certeza. En situaciones de la vida real, aún si se actúa bajo determinadas probabilidades estimadas, no hay certeza de que las estimaciones sean correctas, por lo que hay incertidumbre. Así, casi todas las decisiones son hechas bajo incertidumbre ”³.

La distinción que se hace entre riesgo e incertidumbre en base a si las probabilidades son conocidas (objetivas) o no, es motivo de discusión desde el punto de vista filosófico. De acuerdo a Kwiatkowska y Szatzschneider (2008) pocos autores evalúan la definición científica de incertidumbre en la literatura multidisciplinaria como *estrechamente* probabilista e intentan mediante una refinación conceptual “*hacer este concepto complejo más completo*”. Estos autores consideran a la incertidumbre como “*un estado dinámico en el cual se tiene la percepción de ser incapaz de asignar probabilidades a las realizaciones*” y también como “*una capacidad de tener muchas hipótesis rivales, las cuales se refieren todas al mismo evento*”.

No obstante la riqueza de la discusión en el concepto de riesgo e incertidumbre, como ya se mencionó anteriormente, para efectos de la medición del riesgo en el

³ Stanford Encyclopedia of Philosophy. *Risk*. First published Tue Mar 13, 2007. <http://plato.stanford.edu/entries/risk/>. Cita traducida por el autor.

presente trabajo, se considerará que al tomar una decisión bajo riesgo, se realiza la decisión con el *supuesto* de que las probabilidades son conocidas o pueden estimarse (se conoce la distribución de probabilidades de las diferentes realizaciones).

1.1.1. Definiciones

- *Riesgo*. De acuerdo al diccionario de la Real Academia Española, el riesgo *es la contingencia o proximidad de un daño*⁴. Sin embargo, de acuerdo a la discusión que se ha realizado sobre riesgo e incertidumbre, definiremos al riesgo como una condición en la cual existe la posibilidad de una desviación adversa respecto a un resultado que se espera o desea visto como el tipo de incertidumbre que se puede medir y del cual es posible obtener las probabilidades objetivas de las diferentes realizaciones⁵.
- *Riesgo financiero*. Es el tipo de riesgo al que se enfrentan las empresas e instituciones financieras debido a que los flujos financieros puedan no ser los esperados y no les permitan cubrir sus obligaciones. Este tipo de riesgo generalmente es derivado del cambio de valor de los activos o pasivos.

1.1.2. Tipos de riesgo financiero

Una institución se enfrenta a diferentes riesgos financieros dependiendo del área de interés. Los riesgos financieros más comunes son (Crouhy M. et *al.*, 2001):

- *Riesgo de mercado*. Es el riesgo originado por las variaciones de los precios de los activos, de los tipos de cambio y de las tasas de interés en los mercados financieros y que pueden reducir el valor de los activos de la institución.
- *Riesgo en crédito*. En términos más generales, es el riesgo de que un cambio en la calidad de crédito de la contraparte afecte el valor de los activos y posiciones de

⁴ Real Academia Española, Diccionario de la Lengua Española. Vigésima Segunda Edición. <http://www.rae.es/rae.html>

⁵ No obstante que en esta definición se entiende al riesgo como la posibilidad de una desviación adversa respecto a un resultado esperado, en algunas medidas de riesgo que se presentarán más adelante, la desviación respecto al resultado esperado puede incluir resultados favorables, tal es el caso de la desviación estándar.

la institución. El incumplimiento⁶ o incapacidad de la contraparte de cubrir sus obligaciones actuales es el caso extremo, ya que el paso siguiente es la quiebra de la contraparte y posiblemente la no recuperación del crédito otorgado.

- *Riesgo de liquidez.* Se refiere al riesgo en que incurre una institución al no ser capaz de conseguir los fondos necesarios para hacer frente a sus obligaciones en el corto plazo. Es el riesgo derivado de no tener el efectivo u otros bienes puestos como colateral en un préstamo. También se incluye la incapacidad de la institución para realizar retiros de capital.

En un sentido más amplio, también se considera como riesgo de liquidez a la incapacidad que pueda tener una institución de vender algún activo en el mercado financiero debido a la falta de interés de la contraparte.

- *Riesgo operativo.* Se refiere a las pérdidas potenciales que puede tener la institución como resultado de sistemas inadecuados, fallas en la administración, fallas de control, fraudes y errores de tipo humano. Quedan incluidos en este rubro los riesgos tecnológicos y los riesgos de sistemas computacionales.
- *Riesgo legal y regulatorio.* Es el riesgo derivado de la falta de conocimiento del marco legal en una transacción y de los cambios en las leyes cuando ya se ha realizado una transacción.

Nos centraremos en el estudio y medición del riesgo en crédito, particularmente en el caso de incumplimiento en el pago de la deuda.

1.1.3. Medidas de riesgo coherente

Existen situaciones a las cuales asociamos un riesgo mayor en comparación con otras situaciones. Nos enfrentamos entonces al problema de encontrar una forma de medir el riesgo o de encontrar una forma de cuantificarlo. La medición del riesgo no es un tema nuevo y ya se han propuesto varias formas de hacerlo. Atendiendo a la definición de riesgo como la desviación de un resultado esperado, podemos dar como ejemplos de medidas de riesgo a la varianza, a la desviación estándar, a la desviación media absoluta, etc. Dado un conjunto de observaciones

⁶ Usaremos éste término como traducción de la palabra anglosajona *default*

(por ejemplo de rendimientos de algún activo) la varianza representa la media aritmética del cuadrado de las desviaciones respecto a la media, mientras que la desviación estándar es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Por su parte, la desviación media absoluta es el promedio aritmético del valor absoluto de las desviaciones respecto a la media. Las tres medidas nos indican cuánto se desvían las observaciones de su media (en nuestro ejemplo, nos muestran la dispersión respecto al rendimiento medio)... Surgen entonces dos preguntas: ¿cuál medida de riesgo es mejor? ¿cómo sería una medida de riesgo apropiada? Investigaciones recientes han encontrado propiedades deseables que debería cumplir una medida de riesgo.

Definición 1.1.1 (Medida de riesgo). Sea Ω el espacio de todos los posibles estados de la naturaleza finito y sea \mathcal{Y} el espacio de riesgos isomórfica a \mathbb{R}^N . Considérese una posición riesgosa X como un vector en \mathbb{R}^N . Una medida de riesgo ρ es un mapeo de $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Consideremos una posición riesgosa con valor final X y un capital α invertido en un activo libre de riesgo en el período inicial a la tasa de interés libre de riesgo r . Al final del período, tendremos $\alpha(1+r)$. Una medida de riesgo ρ es *coherente* de acuerdo a Artzner et al. (1999) si satisface cuatro propiedades:

1. *Subaditividad.* Para toda posición riesgosa X y Y : $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
Si una medida de riesgo cumple con esta propiedad, se garantiza que el riesgo no aumenta cuando se combinan dos o más activos en una cartera ya que la suma de dos o más riesgos debería de ser menor o igual que los riesgos individuales. De esta propiedad se deriva la importancia de la diversificación en la conformación de carteras de inversión.
2. *Monotonicidad.* Para toda posición riesgosa X y Y , tal que $X \leq Y$: $\rho(X) \geq \rho(Y)$:
Si para todos los estados de la naturaleza, el riesgo de X conlleva a mayores pérdidas que Y (es decir, si todos los componentes del vector X en \mathbb{R}^N son siempre menores o iguales a los del vector Y), la medida de riesgo $\rho(X)$ debe ser mayor o igual a $\rho(Y)$.

3. *Homogeneidad positiva.* Para toda $\lambda \geq 0$ y para toda variable acotada X :
 $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.

En este caso, cuando una riqueza bajo riesgo representada por un activo es multiplicada por un factor positivo, el riesgo y la incertidumbre crecen en la misma proporción. La falta de liquidez de los mercados financieros, resta realismo a esta propiedad porque en este caso no se tendría una relación lineal.

4. *Invarianza ante traslaciones.* Para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ y para toda posición riesgosa X :
 $\rho(X + \alpha(1 + r)) = \rho(X) - \alpha$.

Una medida de riesgo invariante ante traslaciones implica que si tenemos un activo con riesgo y formamos una cartera agregando un activo libre de riesgo, el riesgo de la cartera disminuye en la cantidad del activo libre de riesgo⁷.

Si reemplazamos los axiomas de subaditividad y homogeneidad positiva por un axioma de convexidad, tenemos las *medidas de riesgo convexas*, que son una generalización de las medidas de riesgo coherentes.

De nuestros ejemplos de medidas de riesgo (varianza, desviación estándar y desviación media absoluta) ninguna resulta ser una medida coherente. La varianza sólo cumple subaditividad, mientras que la desviación estándar y la desviación media absoluta cumplen con ser subaditivas y tener homogeneidad positiva pero no con la monotonicidad ni con ser invariantes ante traslaciones⁸.

1.2. Riesgo en crédito

Es el riesgo de pérdida financiera en el que se incurre en el evento de incumplimiento de la contraparte. Para medir el riesgo en crédito de una cartera existen

⁷ En particular, si $\alpha = \rho(X)$,

$$\rho(X + \rho(X)(1 + r)) = 0,$$

lo que significa que es posible eliminar el riesgo de una cartera.

⁸ Aunque sí son invariantes ante traslaciones en el sentido de Gaivoronsky-Pflug (Ortobello, S. et al., 2005) ya que para toda $\alpha \in \mathbb{R}$: $\rho(X + \alpha) = \rho(X)$. La interpretación es que el riesgo de una cartera no puede reducirse o incrementarse incorporando un activo sin riesgo.

diferentes enfoques y en la mayoría de ellos es necesario obtener la distribución de pérdidas de la cartera.

Denotemos por II al valor de una cartera de créditos, las medidas de riesgo más comunes que pueden emplearse para medir el riesgo en crédito de ésta son (Servigny et al., 2004)⁹:

1. Pérdida esperada (EL).
2. Valor en riesgo (VaR).
3. Pérdida no esperada (NEL).
4. VaR Condicional ($CVaR$) o Deficiencia Media.

1.2.1. Pérdida Esperada(EL)

Es el nivel de pérdida promedio al que se expone la institución financiera. La pérdida esperada para el i -ésimo activo se define como:

$$EL_i = Ex_i \times PI_i \times TPDI_i,$$

donde:

$EL_i =$ Pérdida Esperada para el i -ésimo activo.

$Ex_i =$ Exposición del i -ésimo activo.

$PI_i =$ Probabilidad de Incumplimiento en el i -ésimo activo.

$TPDI_i =$ Tasa de Pérdida Debido a Incumplimiento del i -ésimo activo.

La Exposición se refiere al monto invertido en el activo i que puede ser objeto de pérdida en caso de no pago o incumplimiento de la contraparte; la Tasa de Pérdida Debido a Incumplimiento es la parte que sobre el monto de exposición se pierde en caso de incumplimiento, de esta forma tenemos que su complemento $1 - TPDI_i$, es la tasa de recuperación del i -ésimo activo en caso de incumplimiento

⁹ Existen sin embargo muchas otras que son más sofisticadas y que cumplen más propiedades que las de una medida coherente, se puede consultar a Ortobelly, S. et al. (2005) para tener un panorama más amplio.

de la contraparte.

En el caso de una cartera formada por N activos, la pérdida esperada es la suma de las pérdidas esperadas de cada uno de los activos que la constituyen (propiedad de subaditividad):

$$\begin{aligned} EL_{\Pi} &\equiv E(L_{\Pi}) \\ &= \sum_{i=1}^N EL_i \end{aligned}$$

donde L_{Π} es una variable aleatoria que denota las pérdidas de la cartera.

1.2.2. Valor en Riesgo (VaR)

Es el nivel de pérdidas en la cartera que será excedido sólo el $(1 - \alpha)$ % de las veces en promedio en un horizonte de tiempo (por ejemplo un año) para un nivel de confianza α (por ejemplo para un 95 %). El VaR está dado en unidades monetarias. Formalmente, si se conoce la distribución de pérdidas de la cartera, el VaR se define como¹⁰:

$$VaR_{\alpha} = \min\{j \in \mathbb{R} | F_{L_{\Pi}}(j) \geq \alpha\}. \quad (1.1)$$

donde $F_{L_{\Pi}}(\cdot)$ es la función de distribución de probabilidad acumulada de las pérdidas de la cartera, también llamada simplemente función de distribución.

En términos probabilísticos, el VaR es un cuantil de la distribución de pérdidas y puede ser obtenido con la llamada función cuantil según se trate de que se tenga una distribución de probabilidad continua o discreta, el lector interesado puede consultar el apéndice A para ver las definiciones formales.

En el caso de que se tenga la distribución del valor de una cartera, la distribución de pérdidas se obtiene de restar respecto a un valor de referencia Π^{011} , cada valor de la distribución de la cartera, representado por la variable aleatoria Π . La

¹⁰ Crouhy (2001, pág. 189) distingue entre VaR absoluto y VaR relativo. La definición que se presenta corresponde al VaR absoluto y es la que se empleará en este trabajo.

¹¹ Este valor de referencia puede ser la media del valor de la cartera o un valor forward de la cartera que se obtendría si se invirtiera en activos libres de riesgo

distribución de pérdidas se compone de todos los valores positivos de la diferencia anterior y por lo tanto, los valores negativos serían las ganancias.¹²

Partiendo de la distribución del valor de la cartera, lo podemos calcular de la siguiente forma:

$$VaR_\alpha = \Pi^0 - \Pi_{1-\alpha}, \quad \Pi^0 \geq \Pi_{1-\alpha}, \quad (1.2)$$

donde Π^0 es un valor de referencia y

$$\Pi_{1-\alpha} = \max\{j \in \mathbb{R} | F_\Pi(j) \leq (1 - \alpha)\}, \quad (1.3)$$

con $F_\Pi(\cdot)$ la función de distribución de los valores de la cartera, es el valor de Π a partir del cual se acumula a lo sumo $(1 - \alpha)$ de la probabilidad¹³. Nótese que en la expresión 1.2 se pide que $\Pi^0 \geq \Pi_{1-\alpha}$, es decir, que al nivel de $\Pi_{1-\alpha}$ haya pérdidas en la cartera y no ganancias.

Una de las desventajas del uso del VaR es que no es una medida *coherente*, en particular, no es subaditiva. De la definición del axioma de subaditividad, la cantidad

$$G(X, Y; \rho) = \rho(X) + \rho(Y) - \rho(X + Y)$$

llamada ganancia de capital es no negativa, sin embargo, cuando ρ es el VaR de los activos, esta ganancia puede llegar a ser negativa, es decir, el VaR de la cartera puede exceder la suma de los VaRs de los activos que lo constituyen¹⁴. Así, el VaR puede no captar el efecto en la disminución del riesgo en la diversificación de carteras.

Otra desventaja del VaR es que tiende a ser muy sensible a cambios en el umbral, es decir, para niveles de confianza muy altos (por ejemplo arriba del 99%) el VaR sufre de grandes cambios en su magnitud.

¹² Para una exposición más detallada puede consultarse Holton (2003, págs. 22-24).

¹³ Esta expresión es equivalente al cuantil $\Pi_{1-\alpha}$ de la distribución de probabilidades del valor de cartera cuando esta es una función continua. Sin embargo, se introduce esta expresión para el caso en el que la distribución del valor de la cartera corresponda a valores discretos para que sea equivalente al VaR que se obtendría si se tuviera la distribución de pérdidas y se utilizara la definición del VaR dada en 1.1.

¹⁴ Sólo en el caso de que las distribuciones de los rendimientos sean normales el VaR es una medida coherente, lo que en la práctica resulta muy cuestionable.

1.2.3. Pérdida No Esperada(NEL)

Considerando que se conoce la distribución de pérdidas de la cartera, la pérdida no esperada se puede entender de dos maneras de acuerdo a la literatura especializada:

1. Como la dispersión de las pérdidas alrededor de la pérdida promedio o en términos más comunes, la desviación estándar de las pérdidas de la cartera que denotaremos por σ_L (Servigny et al., 2004):

$$\sigma_L = \sqrt{E\{[L_{\Pi} - E(L_{\Pi})]^2\}}$$

2. O como la pérdida por encima de la esperada en la que puede incurrir el acreedor por incumplimiento de sus deudores, medida por $VaR_{\alpha} - EL$. En éstos términos, la pérdida no esperada puede ser vista como un múltiplo $k > 0$ de la desviación estándar de la distribución de pérdidas: $k\sigma_L$, con $k = \frac{VaR_{\alpha} - EL}{\sigma_L}$.

Para evitar ambigüedad y considerando que la segunda acepción también corresponde a la definición de Capital Económico según Servigny et al. (2004), en el presente trabajo se hará distinción entre Pérdida No Esperada y Capital Económico. Así, cuando se hable de Pérdida No Esperada se estará hablando de la desviación estándar (acepción 1).

Capital Económico (CE)

El capital económico¹⁵ es uno de los principales indicadores en la administración del riesgo en crédito. Generalmente se calcula en el horizonte de un año. La práctica común de estimar el capital económico es la siguiente:

$$CE_{\alpha} = VaR_{\alpha} - EL,$$

donde EL es la pérdida esperada y $VaR(\alpha)$ es el valor en riesgo al nivel de confianza α . El capital económico es usado principalmente por los bancos y se puede interpretar como la cantidad de capital que se debe tener como reserva para no

¹⁵ O Pérdida no esperada según se ha discutido.

caer en insolvencia dadas las posibles pérdidas al nivel de confianza α . Debido a que en el cálculo del capital económico interviene el VaR , éste le hereda sus desventajas como medida de riesgo, principalmente el no ser una medida coherente y ser muy sensible al nivel de confianza α elegido cuando éste es muy alto, es decir:

$$\frac{\partial CE_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{\partial VaR_\alpha}{\partial \alpha}.$$

1.2.4. VaR Condicional (CVaR) o Deficiencia Media

Es una medida de riesgo también conocida por su notación anglosajona como *Expected Shortfall* (ES)¹⁶, que indica el valor esperado de la pérdida, condicionada a que ésta es mayor que el VaR. En términos más formales:

$$CVaR_\alpha = E[L_\Pi | L_\Pi > VaR_\alpha].$$

En la práctica el CVaR puede ser entendido como el promedio de los $(1 - \alpha)\%$ peores casos y puede ser calculado a través del promedio de los valores que exceden el VaR con un nivel de confianza de α .

En analogía a la ecuación (1.2), el $CVaR$ se puede calcular a partir de la distribución del valor de la cartera de la siguiente manera:

$$CVaR_\alpha = \Pi^0 - E[\Pi | \Pi \leq \Pi_{1-\alpha}], \quad \Pi^0 \geq \Pi_{1-\alpha}, \quad (1.4)$$

con $\Pi_{1-\alpha}$ definido de acuerdo a 1.3. Es importante mencionar que en el caso de que Π tome valores discretos se considerará la igualdad en la esperanza de 1.4 sólo cuando en la expresión 1.3 se cumpla la desigualdad, es decir, cuando $\Pi_{1-\alpha} = \max\{j \in \mathbb{R} | F_\Pi(j) < (1 - \alpha)\}$.

En el apéndice A se explica cómo calcular el CVaR para una distribución de pérdidas continua, en particular, se ejemplifica con las distribuciones Normal y Gamma.

¹⁶ Aunque algunos autores utilizan el término *Expected Shortfall* en otro sentido, nosotros no haremos distinción entre éste y el *CVar* (Acerbi, C. et al., 2002 en el corolario 4.3 muestran que son lo mismo).

En la figura 1.1 se representan el VaR y el CVaR en una distribución de pérdidas con un nivel de confianza de $\alpha=95\%$.

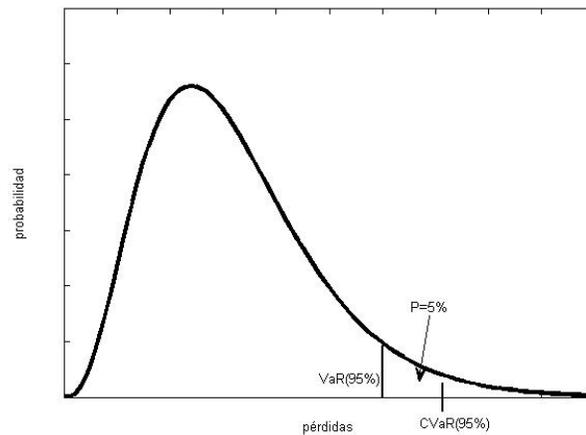


Fig. 1.1. VaR y CVaR al 95 % para una distribución de pérdidas

Puesto que el CVaR es una medida de riesgo *coherente* como lo muestran Acerbi, C. et al. (2002), su uso ha llegado a ser muy popular y se utiliza en conjunto con el VaR cuando la distribución de pérdidas es asimétrica y tiene colas pesadas.

1.3. Metodologías para la medición y administración del riesgo en crédito

Las instituciones financieras brindan diferentes tipos de crédito de acuerdo al destino que tengan los recursos. Si bien en el presente trabajo se tratará el crédito corporativo, conviene mencionar otros tipos de crédito.

Tipos de crédito

- *Crédito al consumo.* Es el crédito concedido por las instituciones financieras (como los bancos) a las personas físicas para fines no empresariales. Se utiliza para la adquisición de bienes de consumo y la garantía es personal. En la actualidad, muchas empresas venden sus productos sobre la base del crédito y como garantía queda el objeto adquirido con el crédito.
- *Crédito corporativo.* En este tipo de crédito se encuentran los créditos que obtienen las empresas o corporaciones y que está relacionado directamente con el proceso productivo pues se puede utilizar para cubrir las necesidades de capital de trabajo en general, para inversiones en activos fijos y para mejorar su estructura financiera. Aquí conviene hacer distinción respecto al origen de los recursos del crédito pues podría tratarse de¹⁷:
 - Un financiamiento obtenido mediante un crédito bancario.
 - Un financiamiento a través de la emisión de papel comercial y/o mediante la colocación de bonos en el mercado financiero.

En el presente trabajo se pondrá interés en el crédito corporativo; en especial en la medición del riesgo de carteras de bonos corporativos.

- *Crédito hipotecario.* Es un crédito a largo plazo que generalmente se utiliza para la adquisición de un bien raíz sobre el cual se establece un contrato hipotecario a favor del prestatario en el que se establece que en caso de impago tiene derecho a quedarse con los bienes. Éste tipo de créditos se puede otorgar tanto a personas físicas como a organizaciones ya que permiten financiar vivienda e inversiones en infraestructura.

Para la medición del riesgo en crédito de una cartera existen diferentes modelos; algunos obtienen la distribución de pérdidas, mientras que otros se limitan a proporcionar alguna medida de riesgo como las que se mencionaron anteriormente.

¹⁷ Se podría incluir también al crédito comercial, que es aquel que se da entre empresas, industrias y microempresas y consiste básicamente en el otorgamiento de bienes y/o servicios con la promesa de pago futuro. Sin embargo, se considerará al crédito corporativo en los dos sentidos que se mencionan.

En el caso de la emisión de bonos que son instrumentos de renta fija ¹⁸ existen formas de poderse cubrir del riesgo por parte del tenedor a través de instrumentos derivados.

En la administración del riesgo, los derivados¹⁹ brindan protección contra el riesgo a los usuarios porque permiten asumir los riesgos que se pueden administrar y transferir los que no se desean asumir.

Los instrumentos derivados sobre crédito son un tipo especial de derivados que permiten aislar el componente de riesgo en el crédito en un activo y cubrirse. La valuación de éstos depende de eventos crediticios como el incumplimiento por parte del deudor, la disminución en la calificación de la deuda o las variaciones en el spread (o diferencial de tasas). Aunque en el presente trabajo no trataremos a los instrumentos derivados sobre crédito, conviene mencionar que los más usuales son los swaps sobre incumplimientos de crédito, las notas ligadas al crédito y las opciones sobre el spread del crédito.

En el capítulo 2 se presenta el modelo de Merton que utiliza la metodología de un tipo muy especial de derivados: las opciones.

¹⁸ Un valor de renta fija (conocido también como título de deuda) es un bono gubernamental, corporativo o municipal que genera un flujo de pagos predeterminado. Debido a que los pagos son flujos, el valor de los bonos fluctúa con los cambios en la tasa de interés, creando con ellos una pérdida potencial.

¹⁹ Un derivado es un contrato privado cuyo valor depende en su mayor parte de algún activo subyacente, tasa de referencia o índice, como puede ser una acción, un bono, una divisa o un producto. Ejemplos de derivados son los forwards, los futuros, los swaps y las opciones.

Modelo estructural de Merton

Los modelos estructurales de riesgo en crédito describen el proceso de incumplimiento (default) como el resultado del deterioro en el valor de la firma, por lo que tienen aplicación típicamente corporativa. Utilizan la información brindada por las variables estructurales de la firma tales como el valor de los activos, el valor de la deuda y la razón de apalancamiento. La deuda de la firma es vista como un reclamo contingente sobre sus activos.

Limitaremos nuestro estudio al modelo de Merton (Merton, 1974), considerado el primer modelo estructural. Este modelo utiliza la teoría de valuación de opciones dada por el modelo de Black & Scholes, por lo que se presentarán los elementos necesarios para entender el modelo de Merton.

2.1. Valuación de opciones y fórmula de Black & Scholes

2.1.1. ¿Qué es una opción?

Una opción es un tipo de derivado financiero. Es un contrato que otorga el derecho a comprar (una opción call) o a vender (una opción put) una cantidad determinada de un activo llamado subyacente a un precio específico K , denominado precio de ejercicio en o antes de una fecha de vencimiento designada T llamada fecha de maduración.

Quien compra la opción adquiere el derecho pero no la obligación de ejercerla en

la fecha de maduración, pero quien la suscribe se obliga a cumplir el contrato, independientemente de lo que convenga a sus intereses. Dada esta asimetría y para que el contrato sea justo para ambas partes, quien compra la acción le paga a quien la suscribe una prima (el precio de la opción). Una opción puede negociarse en el mercado secundario por lo que es importante determinar su valor V_t para cada tiempo $t \in [0, T]$; si la opción está dentro de un mercado organizado, la prima de la opción está dada por el mercado. En particular, la prima que se paga al adquirir la opción es igual al valor de la opción al tiempo $t = 0$.

Supongamos que un individuo adquiere una opción call. Si al tiempo T el precio spot S_T del subyacente es menor que K , el tenedor de la opción no la ejercerá. En cambio, si S_T es mayor a K , ejercerá la opción, pues podrá comprar el subyacente al precio K y venderlo en el mercado al precio S_T para así, tener una ganancia de $S_T - K$. El valor V_T de la opción en este caso particular para el call C_T está dado por:

$$C_T = \text{Máx}(S_T - K, 0) = (S_T - K)_+. \quad (2.1)$$

Por su parte, si el individuo adquiere una opción put, ésta será ejercida al vencimiento sólo si el precio spot S_T es menor que el precio de ejercicio K , lo que le generará una ganancia $K - S_T$. Por lo tanto, el valor del put P_T , está dado por:

$$P_T = \text{Máx}(K - S_T, 0) = (K - S_T)_+. \quad (2.2)$$

La ganancia que obtiene quien adquiere la opción se llama función de pago (pay-off) y depende del valor del subyacente.

Existen diferentes tipos de opciones, en forma muy genérica se pueden dividir en dos grupos: opciones vainilla (o básicas) y opciones exóticas (que incorporan distintas variantes y cuya valuación resulta más complicada). Dentro de las opciones vainilla, atendiendo a la forma en que se pueden ejercer, podemos clasificarlas en opciones europeas y opciones americanas. Las primeras sólo pueden ser ejercidas en el tiempo de maduración T , mientras que las segundas se pueden ejercer en cualquier tiempo $t \in [0, T]$. Las opciones exóticas tienen variantes respecto de las vainilla en cuanto

a la función de pago, en la forma en que se pueden ejercer o en la forma en que se calcula el subyacente.

Nos centraremos en las opciones vainilla europeas, que tienen la función de pago según se trate de un call o de un put dada por (2.1) ó (2.2) respectivamente y que, denotaremos en general por $h = \psi(S_T)$.

El problema a resolver es encontrar el precio justo de la opción al tiempo $t = 0$. El modelo de Black & Scholes permite encontrar ese precio justo y satisface lo siguiente:

- Si el individuo no compra la opción e invierte la cantidad equivalente a su precio justo en una cartera con estrategia autofinanciable formada por un activo riesgoso y por uno libre de riesgo en el tiempo $t = 0$, al tiempo T , tendrá $(S_T - K)_+$ ó $(K - S_T)_+$, según se trate de un call o un put respectivamente. Es decir, al final tendrá el mismo resultado que si hubiese comprado la opción.
- Si la opción fuera ofrecida a algún otro precio diferente de ese precio justo, entonces habría oportunidad de arbitraje ¹.

Se dice que una opción es simulable si su valor al tiempo de maduración es igual al de una cartera autofinanciable ².

2.1.2. ¿Qué es un bono?

Un bono es una promesa de pago futura documentada en un papel que determina el monto o valor nominal F , la fecha de maduración T , la moneda y la secuencia de pagos a realizarse para liquidarlo.

A través de la emisión de bonos el gobierno y las empresas obtienen financiamiento para sus proyectos de inversión, dando a cambio intereses al tenedor del bono. Para los inversionistas, los bonos constituyen una manera de conservar su capital e incrementarlo pues éstos tienen un flujo predecible de dinero y su valor al tiempo

¹ El concepto de arbitraje financiero se refiere al hecho de que se puedan obtener ganancias que no estén acompañadas con el riesgo de pérdidas

² En una cartera autofinanciable no se mete ni saca dinero después del tiempo inicial hasta el tiempo T . Los cambios en el valor de la cartera dependen únicamente de los cambios en la composición de la misma, es decir, de los cambios en el precio del activo riesgoso y del activo libre de riesgo.

de madurez es conocido.

Existen diferentes tipos de bonos dependiendo del emisor, de la tasa de interés, de la estructura de pagos y del mercado donde fueron colocados. Por ejemplo, atendiendo a la tasa de interés se tienen bonos con tasas fijas y bonos con tasas variables indexadas a tasas líderes en el mercado internacional y atendiendo a la estructura de los pagos, se tienen bonos con descuento puro o *bonos cupón cero* y bonos compuestos o *bonos con cupones*. La diferencia entre los bonos cupón cero y los bonos con cupones radica en que los primeros no tienen pagos periódicos por lo que prometen un sólo pago de efectivo en la fecha de maduración, mientras que los bonos con cupones otorgan pagos periódicos de intereses denominados pagos de cupón (de ahí el nombre) a los tenedores del título más el pago del valor nominal F en la fecha de maduración.

Los bonos cupón cero se compran a descuento y brindan un rendimiento (yield en inglés) que es la tasa de descuento. Puesto que una vez comprado un bono se puede vender en el mercado secundario, es importante conocer el valor de mercado del bono en todo momento t . En el caso de que el descuento se realice en forma continua, el valor de un bono cupón cero al tiempo t se obtiene de acuerdo a

$$D_t = e^{-r(T-t)} F,$$

con r la tasa de descuento instantánea ofrecida por bonos comparables en el mercado.

2.1.3. Modelo matemático y valuación de una opción europea

En el modelo de mercado que trabajaremos, las transacciones financieras se realizan continuamente en el intervalo de tiempo³ $[0, T]$ y se considera que el mercado financiero es perfecto, lo que significa que las siguientes condiciones se cumplen:

- No hay costos de transacción, impuestos o problemas con indivisibilidades de los activos financieros.

³ En el mundo real se requiere que el mercado financiero esté abierto para realizar transacciones la mayor parte del tiempo

- Existe un número suficientemente grande de inversionistas con niveles de riqueza comparables, de forma que cada uno puede comprar y vender tantos activos financieros como lo desee al precio de mercado.
- Existe un mercado de cambios para prestar y pedir prestado a la misma tasa de interés.
- Existen ventas en corto, que significa que se puede pedir prestado para comprar acciones (las cantidades prestadas se denotan con signo negativo).

Marco teórico

Se tiene un movimiento browniano estándar W_t ⁴ definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, donde Ω es el espacio de todos los posibles resultados, \mathcal{A} es la σ -álgebra de subconjuntos (eventos) de Ω cuyas probabilidades están definidas y \mathbb{P} es una medida de probabilidad tal que $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$.

Además, $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ es la filtración generada por el movimiento browniano W_t y representa la información de la que se dispone en el instante t .

En el modelo de mercado se tienen dos activos financieros: uno libre de riesgo (cuyo precio al instante t es S_t^0) y otro con riesgo (cuyo precio al instante t es S_t). La tasa del activo libre de riesgo es constante e igual a $r > 0$, la evolución del precio del activo libre de riesgo sigue la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dS_t^0}{dt} = rS_t^0, \quad S_0^0 = 1,$$

lo que significa que para $t \geq 0$ el valor de un peso es de $S_t^0 = e^{rt}$.

Por otro lado, el precio del activo riesgoso S_t en el intervalo $[0, T]$ sigue la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = S_0^*, \quad (2.3)$$

⁴ El movimiento Browniano estándar $(W_t, t \in [0, \infty))$ es un proceso estocástico visto como el límite de una caminata aleatoria cuando $\Delta t \rightarrow 0$, por lo que sus trayectorias son continuas (sin saltos). Satisface que $W_0 = 0$ y que los incrementos $\Delta W = W_t - W_s$ son independientes y estacionarios y se distribuyen como una normal $N(0, t - s)$ para $s \leq t$.

donde μ es la tendencia y σ la volatilidad del subyacente. La solución a la ecuación es

$$S_t = S_0^* e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t},$$

que es un movimiento browniano geométrico.

En nuestro modelo, se pueden formar carteras de inversión constituidas (en el instante t) por una cantidad ϕ_t^0 del activo libre de riesgo y una cantidad ϕ_t del activo riesgoso. A la pareja $(\{\phi_t^0, \phi_t\}, t \in [0, T])$ se le conoce como estrategia de inversión y se supone que son \mathfrak{F}_t -medibles. Denotaremos al valor de una cartera en el instante t por

$$\Pi_t = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t,$$

con ϕ_t^0, ϕ_t variables aleatorias que toman valores en los reales.

Definición 2.1.1 (Cartera autofinanciable). *Sea Π_t una cartera de inversión. Π_t es una cartera autofinanciable si*

$$d\Pi_t = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t.$$

Que la cartera sea autofinanciable significa que los cambios en el valor de la cartera dependen únicamente de los cambios en el valor del activo libre de riesgo y en el valor del activo riesgoso.

Para resultados posteriores, denotaremos por $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ a los precios descontados del activo riesgoso y por $\tilde{\Pi}_t = e^{-rt} \Pi_t = \phi_t^0 + \phi_t \tilde{S}_t$ al valor descontado de la cartera de inversión.

A continuación, se proporcionan algunas definiciones y resultados importantes para desarrollar nuestro modelo de mercado de manera formal; en particular, se presenta la definición de probabilidad neutra al riesgo, concepto fundamental en el modelo de Black & Scholes pues nos permitirá replicar opciones europeas mediante carteras de inversión.

Definición 2.1.2 (Probabilidad neutra al riesgo). *Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Una medida de probabilidad \mathbb{P}^* se dice que es neutra al riesgo si,*

- \mathbb{P} y \mathbb{P}^* son probabilidades equivalentes, es decir, cada una de ellas es absolutamente continua respecto a la otra.
- Bajo \mathbb{P}^* los precios descontados $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ son martingala, es decir:

$$\mathbb{E}^*(\tilde{S}_{t+s} \mid \mathfrak{F}_t) = \tilde{S}_t, \quad s > 0.$$

Puesto que el precio descontado del activo riesgoso, $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, sigue la ecuación diferencial estocástica

$$d\tilde{S}_t = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dW_t,$$

se tiene que utilizando la ecuación 2.3:

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dW_t).$$

A partir de ésta última ecuación y de acuerdo al Teorema de Girsanov (Ver Apéndice B), en nuestro modelo de mercado, eligiendo $\theta_t = \frac{\mu-r}{\sigma}$, tenemos que $B_t = W_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ es un browniano estándar bajo \mathbb{P}^* . Por lo tanto, el precio descontado del activo riesgoso es una martingala y el precio del activo riesgoso está dado por

$$S_t = S_0^* e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}.$$

Definición 2.1.3 (Arbitraje). *Un arbitraje es un proceso que representa el valor de una cartera que satisface que en $\Pi_0 = 0$ y que además satisface que para algún tiempo $T > 0$*

$$\mathbb{P}\{\Pi_T \geq 0\} = 1, \quad \mathbb{P}\{\Pi_T > 0\} > 0.$$

Cuando existe arbitraje es posible que un agente que no invierte un sólo peso tenga la seguridad de que no perderá dinero y además tenga probabilidad positiva de tener ganancias al tiempo T .

En nuestro modelo de mercado, trabajaremos bajo la probabilidad neutra al riesgo \mathbb{P}^* y por el *Primer Teorema Fundamental de la Valuación de Activos* (Ver Apéndice B), nos aseguramos que existe ausencia de oportunidad de arbitraje.

Definición 2.1.4 (Estrategia de inversión admisible). *Una estrategia de inversión $(\{\phi_t^0, \phi_t\}, t \in [0, T])$ es admisible si es autofinanciable y si el valor descontado de la cartera $\tilde{\Pi}_t$ es positivo para toda t y de cuadrado integrable bajo \mathbb{P}^{*5} .*

Definición 2.1.5 (Opción replicable). *Se dice que una opción es replicable si se puede construir una cartera autofinanciable y admisible cuyo valor en cualquier tiempo $t \in [0, T]$ coincida con el de la opción.*

Si la opción europea vainilla es replicable, tendríamos por ejemplo que es posible encontrar una cartera autofinanciable y admisible tal que $C_t = \Pi_t$. Además, puesto que el modelo de mercado que se desarrolla es completo, todo activo financiero puede ser replicable por una cartera de inversión y por el Segundo Teorema Fundamental de la Valuación de Activos (Ver Apéndice B), la medida de probabilidad neutra al riesgo \mathbb{P}^* del modelo es única.

Ahora vamos a replicar las opciones europeas vainilla.

Definición 2.1.6 (Opción Europea Vainilla). *Una opción europea vainilla es una variable aleatoria positiva h , \mathfrak{F}_T -medible, que adopta la forma $h = \psi(S_T)$:*

$$\begin{aligned} h &= (S_T - K)_+ && \text{para un call y} \\ h &= (K - S_T)_+ && \text{para un put.} \end{aligned}$$

Además, puesto que $\mathbb{E}^*(S_T^2) < \infty$, h es de cuadrado integrable bajo \mathbb{P}^* .

El siguiente teorema permite tener carteras replicables de las opciones europeas.

⁵ Recordemos que en general, si X es de cuadrado integrable bajo la probabilidad \mathbb{P}^* , entonces $\mathbb{E}^* \int_0^T X^2 dt < \infty$, que significa que su segundo momento es finito

Teorema 2.1.1 . *En el modelo de Black & Scholes, toda opción definida por una variable aleatoria h , positiva, \mathfrak{F}_T -medible y cuadrado integrable bajo la probabilidad \mathbb{P}^* es replicable y el valor al instante t de toda cartera simulada está dado por⁶*

$$\Pi_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}h|\mathfrak{F}_t).$$

Se remite al lector interesado en la demostración a Lamberton (2008).

Corolario 2.1.1 *Si en particular h es la función de pago de un Call, al tiempo $t < T$, el valor del Call está dado por*

$$C(t, S_t) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad (2.4)$$

con

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \\ d_1 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Demostración. Como $h = (S_T - K)_+$,

$$\begin{aligned} \Pi_t &= \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+|\mathfrak{F}_t), \\ \Pi_t &= \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K)_+|\mathfrak{F}_t), \\ \Pi_t &= \mathbb{E}^*(S_t e^{\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - Ke^{-r(T-t)})_+|\mathfrak{F}_t). \end{aligned}$$

Haciendo

$$\Pi_t = C(t, S_t)$$

⁶ Nótese que el factor de descuento puede salir del operador de esperanza porque la tasa del activo libre de riesgo es constante. Así se tendría:

$$\Pi_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*(h|\mathfrak{F}_t).$$

y considerando que la variable aleatoria S_t es \mathfrak{F}_t -medible y bajo \mathbb{P}^* , $(W_T - W_t)$ es independiente de \mathfrak{F}_t ,

$$C(t, S_t) = \mathbb{E}^*((S_t e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K e^{-r(T-t)})_+),$$

y como además sabemos que $(W_T - W_t) \sim N(0, T - t)$,

$$C(t, S_t) = \int_{-\infty}^{\infty} ((S_t e^{\sigma z \sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K e^{-r(T-t)})_+) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz,$$

donde $z \sim N(0, 1)$. Realizando el álgebra se obtiene el resultado. ■

Para el caso del Put, se realiza el mismo procedimiento con

$$P_t = P(t, S_t) = \mathbb{E}^*(K e^{-r(T-t)} - (S_t e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)})_+),$$

o se puede emplear la paridad Put-Call dada por:

$$P_t - C_t = K e^{-r(T-t)} - S_t,$$

con C_t el valor del call al tiempo t . Así, para un Put resulta:

$$P_t = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1). \quad (2.5)$$

2.2. Modelo de Merton

2.2.1. Modelo teórico

En este modelo, se asume una estructura de capital simple. Se considera una firma que posee activos riesgosos con valor V que es financiada a través de la emisión de acciones con valor S y deuda con valor de mercado D . La deuda de la compañía se representa con un bono cupón cero con madurez o fecha de vencimiento T y valor nominal $F > 0$.

Al tiempo $t \leq T$, el valor de la firma es igual a la suma de sus obligaciones

$$V_t = S_t + D_t$$

y sigue un movimiento Browniano geométrico. Se asume que,

$$dV_t = V_t(rdt + \sigma_V dB_t), \quad V_0 > 0, \quad (2.6)$$

con $(B_t, t \in [0, \infty))$ un movimiento Browniano estándar bajo la medida de probabilidad neutra al riesgo \mathbb{P}^* ⁷. La volatilidad $\sigma_V > 0$ se asume constante.

En el modelo de Merton, los acreedores no pueden forzar a la firma a declararse en quiebra antes del tiempo de madurez T . La compañía incumple si, al tiempo T el valor de la firma es menor que su deuda. En caso de incumplimiento los acreedores (representados por el tenedor del bono) toman el control de la compañía. En otras palabras, el pago al tenedor del bono al tiempo de madurez es el $\min(V_T, F)$, que es el valor de mercado de la deuda de la firma al tiempo T .

Teorema 2.2.1 *En el modelo de Merton, bajo el modelo de Black & Scholes, los valores del bono riesgoso D y de la acción S al tiempo $t = 0$, son respectivamente:*

$$D_0 = Fe^{-rT}\Phi(-d_2) - V_0\Phi(-d_1), \quad (2.7)$$

$$S_0 = V_0\Phi(d_1) - Fe^{-rT}\Phi(d_2), \quad (2.8)$$

con

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ d_1 &= \frac{\ln(V_0/F) + (r + \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}} \\ d_2 &= \frac{\ln(V_0/F) + (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}} \end{aligned}$$

Demostración. Por el Teorema 2.1.1, el valor al tiempo $t < T$ del bono riesgoso que puede ser visto como el valor de mercado de la deuda de la firma está dado por:

⁷ Puesto que se trabajará con la medida de probabilidad neutra al riesgo, se utiliza r , en lugar de μ en la ecuación que describe el valor de la firma. Si se trabaja con la probabilidad equivalente \mathbb{P} , la constante μ es la tasa de rendimiento instantánea del valor de los activos de la empresa.

$$D_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)} \min(V_T, F) | \mathfrak{F}_t).$$

Aquí, $(\mathfrak{F}_t, t \in [0, T])$ es la filtración natural del movimiento Browniano y la constante r es la tasa de interés instantánea libre de riesgo. Además, puesto que,

$$\min(V_T, F) = F - (F - V_T)_+,$$

tenemos

$$\begin{aligned} D_t &= \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)} (F - (F - V_T)_+) | \mathfrak{F}_t), \\ D_t &= F e^{-r(T-t)} - \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)} (F - V_T)_+ | \mathfrak{F}_t). \end{aligned}$$

de forma que el cálculo de D_t es equivalente al precio de una opción put sobre el valor de la firma con precio de ejercicio F .

El valor de mercado de la firma al tiempo T se representa por el valor de una acción S_T y es igual a la diferencia entre el valor de la firma y el valor de la deuda,

$$S_T = V_T - D_T = V_T - \min(V_T, F) = (V_T - F)_+,$$

y al tiempo $t \leq T$,

$$S_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)} (V_T - F)_+ | \mathfrak{F}_t). \quad (2.9)$$

de forma que los tenedores de acciones de la firma pueden ser vistos como tenedores de una opción call sobre el valor de la firma de la compañía.

El resultado se obtiene por el Corolario 2.1.1 al tiempo $t = 0$. ■

Puesto que el valor de la firma sigue el comportamiento descrito en (2.6), al tiempo T ⁸ se tiene

$$V_T = V_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T + \sigma_V B_T},$$

es decir, el valor de la firma al tiempo T se distribuye lognormal. Tomando logaritmos en la expresión anterior:

⁸ Cabe mencionar que al utilizar la fórmula de Black & Scholes, T está medido en años, de forma que si se tuviera un tiempo de maduración de 6 meses, se debería utilizar $T = \frac{1}{2}$

$$\ln V_T = \ln V_0 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T + \sigma_V B_T,$$

por lo que, $\ln V_T \sim N(\ln V_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T, \sigma_V^2 T)$.

Proposición 2.2.1 *En el modelo de Merton, la probabilidad de incumplimiento de la empresa al tiempo T es $\Phi(-d_2)$.*

Demostración. Si al tiempo T resulta que $V_T < F$, la empresa incumple en pagar el bono, la probabilidad de incumplimiento es

$$P(V_T < F) = P(\ln V_T < \ln F) \tag{2.10}$$

$$= \Phi\left(\frac{\ln(F/V_0) - (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V \sqrt{T}}\right) \tag{2.11}$$

$$= \Phi(-d_2). \quad \blacksquare \tag{2.12}$$

Lo que hemos hecho no es otra cosa que aplicar una transformación al valor de los activos de la firma V_T para trabajar en su lugar con los rendimientos estandarizados de los activos; en particular, $-d_2$ representa el rendimiento estandarizado de los activos con un nivel inicial V_0 y un valor a la fecha de maduración de $V_T = F$ ⁹. En la literatura, éste valor recibe el nombre de distancia para el incumplimiento (en inglés, *distance to default*).

Ahora pasemos al rendimiento que obtiene el inversionista por adquirir el bono riesgoso de la firma. Como el rendimiento anual del bono corporativo está dado por

$$r_D = \frac{1}{T} \frac{F - D_0}{D_0} \approx -\frac{1}{T} \ln \frac{D_0}{F},$$

⁹ En general, el rendimiento del valor de los activos de la firma al tiempo T en relación a $t = 0$ que denotamos como $r_V = \ln(V_T/V_0)$, equivale en términos estandarizados a

$$z = \frac{\ln(V_T/V_0) - (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V \sqrt{T}}.$$

el diferencial entre el rendimiento del bono riesgoso corporativo y la tasa libre de riesgo (en inglés, *default spread*) que denominaremos como rendimiento por riesgo de incumplimiento (r_{RI}) es

$$r_{RI} = r_D - r, \quad (2.13)$$

que compensa a los tenedores del bono corporativo por el riesgo que enfrentan.

2.2.2. Estimación de F y σ_V

En la práctica, se tiene información de la firma en el tiempo $t = 0$ ya que conocemos el valor de los activos V_0 y el valor de las acciones S_0 y por simple diferencia el valor de la deuda D_0 . Además, se tiene una estimación de la volatilidad de las acciones σ_S y se conoce la tasa libre de riesgo. Para obtener la probabilidad de incumplimiento y las medidas de riesgo necesitamos conocer el valor de la deuda al tiempo T o lo que es lo mismo, el valor nominal F del bono que la firma debe liquidar y también la volatilidad del valor de los activos de la firma σ_V de forma que podamos usar (2.7) y (2.8). El problema al que nos enfrentamos es que éstos datos no son observables directamente.

Como en sus comienzos el modelo de Merton no fue concebido para determinar probabilidades de incumplimiento sino que las mismas derivan implícitamente de un modelo cuyo objetivo era valorar deuda corporativa y la estructura de riesgo de la tasa de interés, el inconveniente de obtener F y σ_V sería salvado años después mediante el siguiente razonamiento: Si la compañía cotiza públicamente, el valor de la acción S es observable, en cuyo caso puede demostrarse que existe una relación directa entre la volatilidad de las acciones σ_S y la de los activos σ_V ; en otras palabras, la volatilidad de las acciones se explica en parte por la volatilidad de los activos de la firma. La siguiente proposición aclara este punto.

Proposición 2.2.2 *Si el valor de las acciones de la firma sigue un movimiento browniano geométrico y el valor de los activos de la firma se describe por la ecuación (2.6), la volatilidad de los activos de la firma y la volatilidad de las acciones de la firma cumplen la siguiente relación:*

$$\sigma_S = \eta\sigma_V, \quad (2.14)$$

$$\text{con } \eta = \frac{V_t}{S_t} \frac{\partial S_t}{\partial V_t}.$$

Demostración. Sea el valor de las acciones de la firma descrito por el movimiento browniano geométrico

$$dS_t = r_S S_t dt + \sigma_S S_t dB_t, \quad S_0 > 0; \quad (2.15)$$

por otro lado, por (2.9) sabemos que S_t es igual al valor de una opción call sobre el valor de la firma de la compañía con precio de ejercicio igual al valor nominal F del bono. Haciendo $S_t = f(t, V_t)$ y aplicando la fórmula de Itô tenemos:

$$df(t, V_t) = f_1(t, V_t)dt + f_2(t, V_t)dV_t + \frac{1}{2}f_{22}(t, V_t)dV_t dV_t,$$

donde f_i representa la derivada parcial de f respecto al argumento en la posición i . Sustituyendo (2.6) y considerando que $dV_t dV_t = \sigma_V^2 V_t^2 dt$,

$$df(t, V_t) = f_1(t, V_t)dt + f_2(t, V_t)(rV_t dt + \sigma_V V_t dB_t) + \frac{1}{2}f_{22}(t, V_t)\sigma_V^2 V_t^2 dt,$$

o lo que es lo mismo,

$$dS_t = [f_1(t, V_t)dt + rV_t f_2(t, V_t) + \frac{1}{2}\sigma_V^2 V_t^2 f_{22}(t, V_t)]dt + [\sigma_V V_t f_2(t, V_t)]dB_t.$$

Al comparar la expresión anterior con (2.15), resulta claro que el primer sumando de la derecha en ambas ecuaciones debe coincidir y por lo tanto el segundo término también:

$$\begin{aligned} \sigma_S S_t &= \sigma_V V_t f_2(t, V_t), \\ \sigma_S S_t &= \sigma_V V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t}. \end{aligned}$$

Despejando para σ_S tenemos

$$\sigma_S = \eta\sigma_V. \quad \blacksquare$$

En la ecuación (2.14), $\eta = \frac{V_t}{S_t} \frac{\partial S_t}{\partial V_t}$ representa la elasticidad instantánea del valor de la acción respecto al valor de los activos ($\eta \geq 1$) y el factor $\frac{\partial S}{\partial V} = \Phi(d_1)$ puede interpretarse como la delta de la opción de compra.

De esta manera para $t = 0$ se tiene

$$\sigma_S S_0 = \sigma_V V_0 \Phi(d_1),$$

y para encontrar σ_V y F es necesario resolver el sistema de ecuaciones no lineal formado por la ecuación anterior y la ecuación (2.8):

$$G_1(F, \sigma_V) = S_0 - V_0 \Phi(d_1(F, \sigma_V)) + F e^{-rT} \Phi(d_2(F, \sigma_V)) = 0 \quad (2.16)$$

$$G_2(F, \sigma_V) = \sigma_S S_0 - \sigma_V V_0 \Phi(d_1(F, \sigma_V)) = 0. \quad (2.17)$$

Este sistema puede resolverse localmente en términos de F y σ_V si la matriz jacobiana existe y si su determinante es diferente de cero. En el Apéndice B se muestra cómo resolver numéricamente este sistema utilizando el método de Newton-Raphson.

2.2.3. Medidas de riesgo del modelo

Además de la probabilidad de incumplimiento y del diferencial entre los rendimientos del bono riesgoso y de la tasa libre de riesgo, podemos calcular otros indicadores y medidas de riesgo suponiendo que trabajamos en un mercado neutral al riesgo.

- 1) **Razón de apalancamiento (RA)**. Nos muestra el grado de endeudamiento de la firma. Se define como el cociente entre el valor descontado de la deuda que la empresa debe pagar al tiempo T (el valor nominal F del bono descontado) y el valor de los activos en el tiempo $t = 0$:

$$RA = \frac{F e^{-rT}}{V_0} \quad (2.18)$$

- 2) **Valor de Recuperación Esperado Descontado (VRED)**. Representa el pago esperado que sobre el préstamo otorgado recibirá el tenedor del bono dado

que $V_T \leq F$, es decir, en el caso de que la firma no pueda pagar la totalidad del préstamo:

$$VRED = \frac{\Phi(-d_1)}{\Phi(-d_2)} V_0 \quad (2.19)$$

- 3) **Deficiencia Media Descontada (DMD)**. Indica el valor esperado descontado de la pérdida, dado que $V_T \leq F$, es decir en el caso de quiebra de la firma¹⁰. Se calcula como:

$$DMD = Fe^{-rT} - \frac{\Phi(-d_1)}{\Phi(-d_2)} V_0 \quad (2.20)$$

- 4) **Costo del Incumplimiento (CI)**. Representa el valor de un Put sobre el valor de la firma con precio de ejercicio igual al valor nominal del bono. Si el tenedor del bono quisiera asegurarse ante un posible incumplimiento, debería de pagar esta prima equivalente al costo de la opción Put. Se calcula de acuerdo a:

$$P_0 = [Fe^{-rT} - \frac{\Phi(-d_1)}{\Phi(-d_2)} V_0] \Phi(-d_2) \quad (2.21)$$

¹⁰ Aquí notamos que la definición dada se corresponde con la definición del VaR Condicional dada en el capítulo 1 sólo que en valor presente. En este caso, podemos interpretar la deficiencia media como el promedio de las (peores) pérdidas dado que $V_T \leq F$ a un nivel de confianza $\alpha = \Phi(-d_2)$. Así, la Deficiencia Media Descontada es una medida de riesgo *coherente*

Ejemplo 2.2.1:

Para efectos de ilustrar el funcionamiento del modelo y las medidas de riesgo que se desprenden, consideremos el caso hipotético de una empresa con la siguiente información:

- Valor de activos, $V_0=1,000$
- Valor de sus acciones, $S_0=400$
- Volatilidad histórica del rendimiento del precio de su acción $\sigma_S=0.78$
- Tasa de interés libre de riesgo en el mercado, $r=0.0551$
- Maduración del bono riesgoso emitido, $T=1$.

Resulta claro que el valor de la deuda de la firma en el instante $t = 0$ es de $D_0 = 600$. Para utilizar el modelo de Merton y obtener la probabilidad de incumplimiento junto con las medidas de riesgo necesitamos estimar la volatilidad del valor de la firma y el valor de la deuda en el tiempo T , o lo que es lo mismo, el valor nominal del bono F .

Resolvemos el sistema de ecuaciones no lineal dado por (2.16) y (2.17) mediante el método de Newton-Raphson iniciando con $F = 600$ y $\sigma_V = 0.5$. Las raíces encontradas son $F = 640.32$ y $\sigma_V = 0.33$. En términos financieros hemos encontrado el valor de la deuda al tiempo T y la volatilidad implícita del valor de las acciones de la firma. Para brindar una idea más clara, en la figura (2.1), se presenta la simulación de tres posibles trayectorias del valor de los activos de la firma junto con el valor de su deuda al tiempo $T = 1$.

Evaluando en la ecuación (2.11), se tiene que la probabilidad de incumplimiento que es igual a $\Phi(-d_2)$ es 0.0862, o lo que es lo mismo en términos porcentuales, existe un 8.62% de que la empresa incumpla en el pago de su deuda. Por otro lado, el rendimiento por riesgo de incumplimiento r_{RI} es 0.0122, que es el premio por invertir en el bono riesgoso, o en otras palabras, de hacerle el préstamo a la empresa. En la figura 2.2 se muestra la distribución del valor de la firma en el tiempo $T = 1$.

Las medidas de riesgo sobre el préstamo a la empresa se presentan en la tabla 2.1, donde se desprende que al momento de adquirir el bono riesgoso ($t = 0$), pero

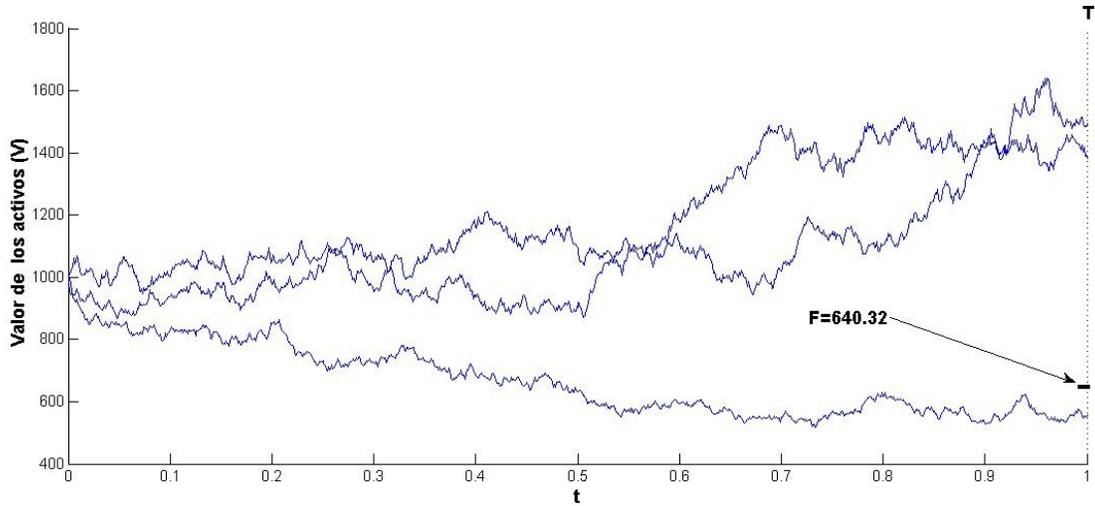


Fig. 2.1. Tres posibles trayectorias del valor de los activos de la firma.

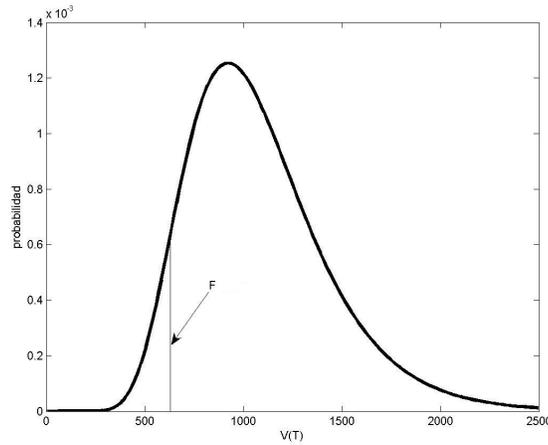


Fig. 2.2. Distribución del valor de la firma V_T para $T=1$

considerando el valor de la deuda al tiempo $T = 1$, habrá que poner atención en el hecho de que por cada peso en el valor de los activos en un año, la empresa debe a valor presente \$0.607. Por otro lado, en caso de que la empresa caiga en incumplimiento, el valor que sobre el préstamo de \$600 se espera recuperar a valor presente es de \$526.51 o lo que es lo mismo, un 87.75%. Además, en caso de incumplimiento, el valor esperado de las pérdidas a valor presente es \$80.42 o un

Tabla 2.1. Medidas de riesgo del préstamo

RA	$VRED$	DMD	CI
0.607	526.51	80.42	6.93

13.4% sobre el monto prestado. Por último, si se quisiese cubrir sobre el riesgo que implica comprar el bono, se deberían pagar una prima de \$6.93 en una opción Put sobre el valor de la firma \$1,000 con precio de ejercicio $F = 640.32$.

2.2.4. Sensibilidad de la probabilidad de incumplimiento (PI) y del rendimiento por riesgo de incumplimiento r_{RI}

Del Teorema (2.2.1) tenemos que

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/F) + (r + \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}},$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(V_0/(Fe^{-rT})) + \frac{1}{2}\sigma_V^2T}{\sigma_V\sqrt{T}}, \\ &= \frac{\ln(1/RA) + \frac{1}{2}\sigma_V^2T}{\sigma_V\sqrt{T}}, \\ &= d_1(RA, \sigma_V, T), \end{aligned}$$

es decir, d_1 es función de la Razón de Apalancamiento, de la volatilidad del rendimiento del valor de los activos de la firma y del tiempo de maduración. Del mismo modo, $d_2 = d_2(RA, \sigma_V, T)$, la distancia al incumplimiento también lo es y por consecuencia la probabilidad de incumplimiento $PI = PI(RA, \sigma_V, T)$.

Por otro lado, recordemos que el rendimiento por riesgo de incumplimiento r_{RI} dado por (2.13) es equivalente a

$$\begin{aligned}
 r_{RI} &= -\frac{1}{T} \ln \frac{D_0}{F} - r, \\
 &= -\frac{1}{T} \ln \left(\frac{F e^{-rT} - P_0}{F} \right) - r, \\
 &= -\frac{1}{T} \ln \left(\frac{F e^{-rT} - F e^{-rT} \Phi(-d_2) + \Phi(-d_1) V_0}{F} \right) - r, \\
 &= -\frac{1}{T} \ln \left(\Phi(d_2) + \frac{\Phi(-d_1) V_0}{F e^{-rT}} \right) \\
 &= -\frac{1}{T} \ln \left(\Phi(d_2) + \frac{\Phi(-d_1)}{RA} \right).
 \end{aligned}$$

Por lo que $r_{RI} = r_{RI}(RA, \sigma_V, T)$.

Haciendo $T = 1$, es decir, considerando un año, podemos obtener la probabilidad de incumplimiento y el rendimiento por riesgo de incumplimiento como funciones exclusivamente de la Razón de Apalancamiento y de la volatilidad del valor de la firma. Así, en el modelo de Merton, si por ejemplo, tenemos una empresa con una razón de apalancamiento de 0.7 y una volatilidad del valor de los activos de 0.5, tendríamos una probabilidad de incumplimiento a un año del 32.16% y un rendimiento por riesgo de incumplimiento del 8.56%. En las tablas 2.2 y 2.3 se muestran diferentes probabilidades de incumplimiento y rendimientos por riesgo de incumplimiento como función de RA y σ_V .

Tabla 2.2. Probabilidad de incumplimiento PI (en %) para diferentes combinaciones de la Razón de Apalancamiento (RA) y volatilidades del valor de la firma σ_V

		σ_V										
		0.05	0.10	0.20	0.30	0.50	0.80	1.00	1.20	1.40	1.80	2.00
RA	0.4	0.00	0.00	0.00	0.18	5.68	22.80	33.86	43.50	51.81	65.21	70.60
	0.5	0.00	0.00	0.04	1.54	12.79	32.05	42.34	50.89	58.12	69.67	74.33
	0.6	0.00	0.00	0.71	6.02	22.02	40.57	49.57	56.92	63.12	73.11	77.17
	0.7	0.00	0.02	4.62	14.94	32.16	48.17	55.70	61.90	67.19	75.86	79.44
	0.8	0.00	1.46	15.49	27.63	42.22	54.82	60.91	66.06	70.56	78.11	81.28
	0.9	1.87	15.78	33.48	42.03	51.57	60.58	65.34	69.57	73.39	80.00	82.83
	1.0	51.00	51.99	53.98	55.96	59.87	65.54	69.15	72.57	75.80	81.59	84.13

Tabla 2.3. Rendimiento por riesgo de incumplimiento r_{RI} (en %) para diferentes combinaciones de la Razón de Apalancamiento (RA) y volatilidades del valor de la firma σ_V

		σ_V										
		0.05	0.10	0.20	0.30	0.50	0.80	1.00	1.20	1.40	1.80	2.00
RA	0.4	0.00	0.00	0.00	0.01	1.02	7.82	15.40	24.74	35.48	60.43	74.45
	0.5	0.00	0.00	0.00	0.15	2.65	12.23	21.15	31.47	42.94	68.90	83.27
	0.6	0.00	0.00	0.04	0.70	5.19	17.03	26.87	37.83	49.78	76.37	90.96
	0.7	0.00	0.00	0.36	2.06	8.56	22.03	32.47	43.85	56.09	83.06	97.79
	0.8	0.00	0.05	1.49	4.52	12.59	27.11	37.92	49.54	61.95	89.15	103.96
	0.9	0.03	0.79	4.07	8.11	17.12	32.19	43.19	54.93	67.43	94.75	109.59
	1.0	2.01	4.07	8.30	12.70	21.99	37.23	48.28	60.06	72.58	99.93	114.79

Recordemos que en el ejemplo 2.2.1, la razón de apalancamiento era de 0.607 y la volatilidad de la firma de 0.33. Si buscamos la probabilidad de incumplimiento y el rendimiento por riesgo de incumplimiento las tablas, obtenemos aproximadamente, los valores obtenidos: $PI=8.62\%$ y $r_{RI}=1.22\%$.

2.2.5. Generalización para una cartera

Hasta el momento, se ha considerado el caso de que se tenga la deuda de una sola empresa, sin embargo, podría darse el caso que se tuviera una cartera formada por la deuda de n empresas. Denotando por Π al valor de la cartera y por B_0^i al valor del bono de deuda de la empresa i al tiempo $t = 0$, el valor de la cartera al tiempo $t = 0$ es:

$$\Pi_0 = B_0^1 + \dots + B_0^n.$$

Sea I^i la variable aleatoria asociada al bono B_0^i para $i = 1, 2, \dots, n$, que indica si al tiempo T la empresa i incumple¹¹, es decir,

$$I^i = \begin{cases} 1 & \text{si la empresa } i \text{ incumple} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¹¹ Por simplicidad para la exposición se asume que se tendría un bono por empresa, sin embargo se podría dar el caso de que se tuvieran en la cartera varios bonos emitidos por la misma empresa.

El caso más sencillo pero irreal, sería la conformación de una cartera cuyas variables aleatorias asociadas I^i 's fueran independientes. En este caso, la probabilidad de incumplimiento conjunta de las empresas (si todas incumplieran) estaría dada por

$$P(I^1 = 1, I^2 = 1, \dots, I^n = 1) = P(I^1 = 1)P(I^2 = 1) \cdots P(I^n = 1).$$

En la realidad sin embargo, ocurre que las probabilidades de incumplimiento entre diferentes empresas se encuentran correlacionadas. En el capítulo siguiente se mostrará una metodología mediante simulación Monte Carlo que permite trabajar con correlaciones y encontrar la distribución de pérdidas junto con el VaR y el $CVaR$ para una cartera formada por n bonos y que utiliza los resultados individuales obtenidos en esta sección. En el capítulo 5 se implementará el modelo completo.

Modelo con Matrices de Transición

Sea $T \subset \mathbb{R}$. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, donde Ω es el espacio de todos los posibles resultados, \mathcal{A} es la σ -álgebra de subconjuntos (eventos) de Ω cuyas probabilidades están definidas y \mathbb{P} es una medida de probabilidad tal que $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$. Un proceso estocástico con conjunto de índices T , es una colección de variables aleatorias $X = (X_t, t \in T)$ con valores en un espacio de estados E . Con frecuencia T se toma como el conjunto de enteros no negativos y X_t representa una característica de interés medible en el tiempo. El interés de los procesos estocásticos es describir el comportamiento de un sistema en operación durante algunos períodos.

3.1. Cadenas de Markov

En adelante consideraremos procesos estocásticos de tiempo discreto $T = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, con espacio de estados E finito.

Definición 3.1.1 (Propiedad Markoviana). *Se dice que un proceso estocástico $(X_t, t \in T)$ con E finito y $T = \mathbb{N}$ tiene la propiedad markoviana si y sólo si*

$$P\{X_{t+1} = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\},$$

para $t \in T$ y toda sucesión $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1} \in E$.

Intuitivamente, la propiedad markoviana establece que la probabilidad condicional de cualquier evento futuro dados los eventos pasados y el estado actual, es independiente de los eventos pasados y sólo depende del estado actual del proceso.

Definición 3.1.2 (Cadena de Markov). *Un proceso estocástico $(X_t, t \in T)$ es una cadena de Markov si tiene la propiedad markoviana.*

Llamaremos probabilidad de transición P_{ij} (de un paso) de una cadena de Markov a la probabilidad condicionada $P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$ que representa la probabilidad de pasar del estado i al estado j .

Dado que las probabilidades son no negativas y puesto que el proceso debe hacer una transición hacia algún estado, se tiene que

$$P_{ij} \geq 0, \quad i, j \geq 0; \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

Definición 3.1.3 (Cadena de Markov estacionaria). *Si en una cadena de markov se tiene para cada i y j*

$$P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} = P\{X_1 = j | X_0 = i\}, \quad \text{para toda } t = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

entonces se dice que la cadena de Markov es estacionaria.

En una cadena de Markov estacionaria, las probabilidades de transición no cambian con el tiempo¹.

Una notación conveniente para representar las probabilidades de transición para los diferentes estados es la forma matricial. Sea \mathbf{P} la matriz de probabilidades de transición de un paso P_{ij} , entonces

¹ También se le conoce como cadena de Markov homogénea en el tiempo

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

3.1.1. Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Una vez que hemos definido la probabilidad de transición de un sólo paso P_{ij} , definiremos la probabilidad de transición de n pasos P_{ij}^n como la probabilidad de que el proceso que se encuentra en el estado i esté en el estado j después de n transiciones adicionales. Es decir,

$$P_{ij}^n = P\{X_{t+n} = j | X_t = i\}, \quad n \geq 0, \quad i, j \geq 0.$$

Desde luego que se tiene que $P_{ij}^1 = P_{ij}$. La pregunta es ¿cómo hacer para calcular estas probabilidades de transición de n pasos?. Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, proveen de un método para calcular éstas probabilidades.

Definición 3.1.4 (Ecuación de Chapman-Kolmogorov). *La ecuación*

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^n P_{kj}^m, \quad \forall n, m \geq 0, \quad \forall i, j, \quad (3.4)$$

es llamada ecuación de Chapman-Kolmogorov y representa la probabilidad de que iniciando en el estado i , el proceso irá hasta el estado j en $n + m$ transiciones pasando por el estado k en la n -ésima transición.

Si $\mathbf{P}^{(n)}$ es la matriz de probabilidades de transición de n pasos P_{ij}^n , entonces, por la ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{P}^{(m)}.$$

En particular,

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^{(1+1)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^2$$

y por inducción

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1+1)} = \mathbf{P}^{n-1} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^n.$$

Es decir, la matriz de transición de n pasos puede obtenerse multiplicando la matriz \mathbf{P} por sí misma n veces.

En el modelo que veremos más adelante, n representa el número de años de forma que por ejemplo \mathbf{P}^3 es la matriz que contiene las probabilidades de transición P_{ij}^3 , $i, j \geq 0$ es decir, la entrada (i, j) de la matriz, contiene la probabilidad de que el proceso que se encuentra en el estado i esté en el estado j después de 3 años.

3.1.2. Matrices de transición para períodos menores a un año

Consideremos $n = 1$ y $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}$ la matriz de probabilidades de transición a un año con m estados posibles, ¿se pueden obtener las probabilidades de transición para digamos un semestre ($n = \frac{1}{2}$), un trimestre ($n = \frac{1}{4}$) o algún otro período menor a un año? La respuesta es sí.

Supongamos que la matriz \mathbf{P} es diagonalizable en los reales, entonces existen la matriz $\mathbf{\Lambda}$ cuyas componentes son los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ y una matriz \mathbf{X} cuyas columnas son los correspondientes vectores propios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ tal que

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1}.$$

En particular, si \mathbf{P} es una matriz de transición definida no negativa (es decir, que sus valores propios son o cero o positivos), se cumple que

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{X}^{-1} \quad \text{para } n \geq 0. \quad (3.5)$$

Así, por ejemplo si se desea obtener la matriz de probabilidades de transición para un trimestre, $n = \frac{1}{4}$ se tendría

$$\mathbf{P}^{\frac{1}{4}} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{4}}\mathbf{X}^{-1}.$$

Entonces sólo necesitamos obtener los valores propios y vectores propios correspondientes de la matriz de transición \mathbf{P} y verificar que ésta sea definida no negativa para calcular las probabilidades de transición para períodos menores a un año.²

3.2. CreditMetrics

CreditMetrics es un modelo de medición de riesgo en crédito basado en el uso de matrices de transición y de elementos obtenidos del mercado que permite obtener la distribución del valor de un activo con riesgo de crédito o de una cartera de créditos en un período de tiempo T .

Los elementos clave del modelo son:

1. Las calificaciones que otorgan las empresas calificadoras de valores, que reflejan la apreciación de éstas sobre la calidad del papel y que permiten obtener las tasas o probabilidades de migración de los papeles con diferentes calificaciones.
2. Los diferenciales de tasas entre instrumentos de deuda con diferente calidad, según quedan reflejados en distintos niveles de calificación.
3. Las tasas de recuperación de los créditos que caen en cartera vencida, que dependen de la prelación del crédito, por ejemplo un crédito con garantías tiene una tasa de recuperación mayor al de un crédito sin garantías .

El primer paso que hay que seguir para utilizar la metodología de CreditMetrics es definir las diferentes categorías de calificaciones del papel de crédito y las probabilidades de migración de una calidad crediticia a otra. Obtener esta información no es tarea fácil. En el caso de los bonos corporativos existen empresas calificadoras que se encargan de realizar esta tarea como por ejemplo Moody's y Standard & Poor's; para el caso particular de una empresa financiera como por ejemplo un banco, se tendría que definir una clasificación interna de categorías de calificaciones y estimar las probabilidades de transición en base a su información histórica.

² Incluso, por la definición de la ecuación (3.5), si se cumplen las condiciones, se podría obtener la matriz de probabilidades de transición para por ejemplo un año y medio, o dos años y tres meses.

A continuación describiremos con mayor detalle los 3 elementos citados anteriormente y tomaremos la información que se proporciona como ejemplo en el manual de CreditMetrics (J. P. Morgan, 1997) para explicar la metodología cuando se tiene primero una cartera formada por un sólo activo riesgoso, para después generalizarlo al caso en el que la cartera está formada por varios activos riesgosos correlacionados con diferente calificación crediticia.

Matriz de migración

La matriz de migración o transición refleja las probabilidades de que un activo con riesgo de crédito migre de una calificación i a una calificación j en un período de tiempo u horizonte de riesgo, generalmente un año. El modelo asume que las probabilidades de transición siguen una cadena de Markov estacionaria, por lo que si se desea tener las probabilidades y por lo tanto, los resultados del modelo para períodos menores o mayores a un año tendríamos que descomponer la matriz de probabilidades de acuerdo a (3.5) e interpolar los demás componentes del modelo.

Las categorías de calificaciones dadas por Standard & Poor's en abril de 1996 y la matriz de transición asociada que aparece en el manual de CreditMetrics (J. P. Morgan, 1997) y que tiene la forma dada por (3.3) se muestra en la tabla (3.1)³.

Si por ejemplo tenemos un papel de deuda con calificación A , la probabilidad de que al finalizar el año tenga calificación AA es de 2.27 %, mientras que la probabilidad de que incumpla es de 0.06 %. Notemos que la última fila correspondiente a la categoría de *Incumplimiento* es un estado absorbente, lo que significa que una vez que se llega a él, nunca se podrá salir; en términos económicos esto es razonable pues una vez que un papel de crédito incumple ya no es posible que recupere alguna calificación.

³ Los números con asterisco son ajustes míos de forma que se cumpla la ecuación (3.1), además a diferencia de la tabla mostrada en el manual de CreditMetrics, se agregó la última fila correspondiente al incumplimiento para así tener una matriz cuadrada de orden 8.

Tabla 3.1. Matriz de probabilidades de transición a un año (%)

Calificación inicial	Calificación al finalizar el año							
	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB</i>	<i>B</i>	<i>CCC</i>	<i>Incumplimiento</i>
<i>AAA</i>	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0.00	0.00	0.00
<i>AA</i>	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0.00
<i>A</i>	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
<i>BBB</i>	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	0.12	0.18
<i>BB</i>	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
<i>B</i>	0.00	0.11	0.24	0.43	6.48	83.47*	4.07	5.20
<i>CCC</i>	0.22	0.00	0.22	1.30	2.38	11.24	64.85*	19.79
<i>Incumplimiento</i>	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00

Tasas de rendimiento

Para realizar la valuación de un bono es necesario traerlo a valor presente descontándolo con una tasa de rendimiento calculada a partir de instrumentos con características similares. Una tasa de rendimiento forward es aquella que se especifica en el tiempo $t = 0$ sobre un crédito con fecha de maduración T en el futuro; las tasas de rendimiento son más altas conforme aumenta el plazo de maduración del instrumento por un lado y conforme disminuye la calificación crediticia por el otro.

Entonces instrumentos con la misma calificación crediticia diferirán en rendimientos de acuerdo al plazo, e instrumentos con el mismo plazo diferirán en rendimientos de acuerdo a su calificación crediticia. A continuación se muestran en la tabla 3.2 las curvas cero forward para diferentes calificaciones y diferentes plazos que aparece como ejemplo en el manual de CreditMetrics.

Tasas de recuperación

Como último elemento clave del modelo CreditMetrics, necesitamos conocer las tasas de recuperación en caso de que el papel de deuda migre al estado de incumplimiento. Las tasas de recuperación dependen del grado de prelación de la deuda. A mayor garantías, mayor tasa de recuperación. En la tabla 3.3 se muestran

Tabla 3.2. Ejemplo de curvas *cero forward* anuales por nivel de calificación (%)

Calificación	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
<i>AAA</i>	3.60	4.17	4.73	5.12
<i>AA</i>	3.65	4.22	4.78	5.17
<i>A</i>	3.72	4.32	4.93	5.32
<i>BBB</i>	4.10	4.67	5.25	5.63
<i>BB</i>	5.55	6.02	6.78	7.27
<i>B</i>	6.05	7.02	8.03	8.52
<i>CCC</i>	15.05	15.02	14.03	13.52

las tasas de recuperación promedio junto con sus respectivas desviaciones estándar correspondientes a papeles de crédito con diferente nivel de prelación.

Tabla 3.3. Tasas de Recuperación por prelación de los créditos (% sobre el valor nominal)

Prelación	Media	Desviación estándar
<i>Senior Garantizada</i>	53.80	26.86
<i>Senior sin Garantía</i>	51.13	25.45
<i>Senior Subordinada</i>	38.52	23.81
<i>Subordinada</i>	32.74	20.18
<i>Junior Subordinada</i>	17.09	10.90

Nuestro objetivo final será el de obtener las medidas de riesgo de una cartera formada por varios activos riesgosos con diferente calificación crediticia, pero antes simplificaremos las cosas para exponer de manera más sencilla la metodología de CreditMetrics para el caso en que tengamos una cartera formada por un sólo activo.

3.2.1. Caso de un sólo crédito

Consideraremos una cartera formada por un sólo activo, el cual es un bono que cotiza en un mercado organizado y que sigue un proceso estacionario de acuerdo a la matriz de transición de la tabla 3.1, con tasas de rendimiento y de recuperación descritas por las tablas 3.2 y 3.3 respectivamente según sea el caso. Es muy importante tener en mente que nuestro activo riesgoso queda completamente delimitado por los 3 elementos mencionados anteriormente.

Respecto a nuestro bono, necesitamos conocer su calificación actual, su fecha de maduración, el nivel de prelación y su valor nominal, además del valor y periodicidad de los cupones en caso de que éstos existan. De esta manera, podremos calcular la distribución de probabilidades de los posibles valores (o perfil de riesgo) que puede tomar el bono en un año, dependiendo de si éste migró o no a alguna otra calificación crediticia y por lo tanto, podremos obtener las medidas de riesgo.

Ejemplo 3.2.1: Consideremos el caso hipotético de que se tenga un bono de deuda *Senior sin garantía* calificado de acuerdo a la tabla 3.1 con A , cuyo valor nominal es de \$100, paga un cupón anual fijo del 5% y vence dentro de 5 años. Vamos a obtener el perfil de riesgo a un año del bono.

Sean:

- c_i = Porcentaje anual respecto al valor nominal del bono con calificación actual i que se paga como cupón.
- δ_t^j = Tasa de descuento que se debe de aplicar al flujo generado por un bono con calificación j en el período t .
- T = Tiempo de maduración del bono.
- F = Valor nominal del bono
- $B_{i,j}$ = Valor del bono actualmente con calificación i pero con calificación j en un año.

Primero hay que obtener todos los posibles valores del bono (que actualmente tiene calificación A) al cabo de un año y que resultan de las posibles migraciones en calidad crediticia mostradas en la figura 3.1.

En general, el perfil de riesgo a un año se obtiene aplicando para cada posible calificación j (que en nuestro caso son 8 posibles estados) la siguiente fórmula:

$$B_{i,j} = c_i F + \sum_{t=1}^{T-2} \frac{c_i F}{(1 + \delta_t^j)^t} + \frac{(1 + c_i) F}{(1 + \delta_{T-1}^j)^{T-1}}$$

Por ejemplo, si nuestro bono de deuda migra en un año al estado AA , partiendo de su calificación actual A , en un año tendría el valor de:

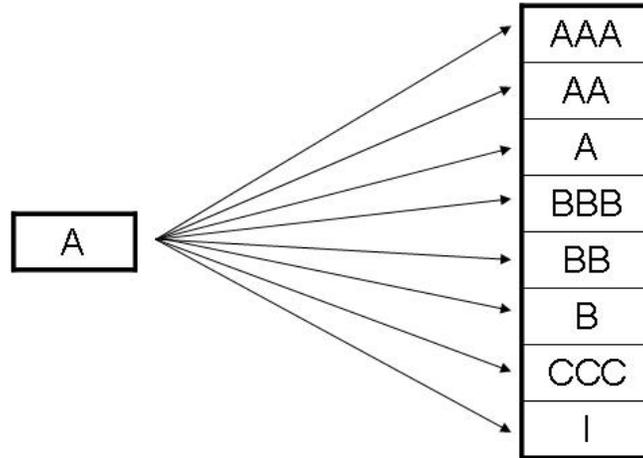


Fig. 3.1. Posibles migraciones de un bono con calificación actual A

$$B_{A,AA} = c_A F + \sum_{t=1}^3 \frac{c_A F}{(1 + \delta_t^{AA})^t} + \frac{(1 + c_A)F}{(1 + \delta_4^{AA})^4},$$

donde se aprecia que para traer los flujos a valor actual (en el próximo año), es necesario descontarlos con la curva cero forward correspondiente a la calificación que tendrá el bono el próximo año. Si detallamos la expresión anterior tenemos,

$$\begin{aligned} B_{A,AA} &= (0.05)100 + \frac{(0.05)100}{(1 + 0.0365)} + \frac{(0.05)100}{(1 + 0.0422)^2} + \frac{(0.05)100}{(1 + 0.0478)^3} + \frac{(1 + .05)100}{(1 + 0.0517)^4} \\ &= 104.6 \end{aligned}$$

Y si hacemos lo mismo para todos los estados posibles, obtendremos el perfil de riesgo a un año para el bono de nuestro ejemplo mostrado en la tabla 3.4. Podemos observar que en el estado de incumplimiento, que ocurre con probabilidad de 0.06 %, el valor del bono será de \$51.13, es decir, de \$52.95 menos del valor que tendría si permaneciera con la misma calificación.

El perfil de riesgos a un año no es sino la distribución de probabilidades del valor B del bono a un año y propiamente dicho y de acuerdo a las definiciones dadas en el apéndice A, obtenemos la función de masa de probabilidad para los 8 posibles valores del bono.

Tabla 3.4. Perfil de riesgos a un año del bono con calificación actual A del ejemplo

Calificación	Prob	$B_{i,j}$	Variación
<i>AAA</i>	0.09	104.78	0.70
<i>AA</i>	2.27	104.6	0.52
<i>A</i>	91.05	104.08	0
<i>BBB</i>	5.52	103	-1.09
<i>BB</i>	0.74	97.59	-6.49
<i>B</i>	0.26	93.76	-10.33
<i>CCC</i>	0.01	79.72	-24.36
<i>Incumplimiento</i>	0.06	51.13	-52.95

A partir de la distribución de masa de probabilidad del valor de B y considerando que se forma una cartera sólo con este bono, podemos obtener las medidas de riesgo consideradas en el capítulo 1.

De acuerdo a 1.3 tenemos que $\Pi_{1-\alpha} = \Pi_{0.05} = 97.59$ y por 1.2:

$$VaR_{0.95} = 104.08 - 97.59 = 6.49.$$

Para el caso del $CVaR$ al 95 % de confianza de acuerdo a 1.4:

$$CVaR_{0.95} = 104.08 - E[\Pi | \Pi \leq 97.59] = 104.08 - 93.89 = 10.19.$$

Resumiendo, con un nivel de confianza del 95 % para el VaR y el $CVaR$ tenemos:

- $\mu_B=103.93$
- $\sigma_B=1.54$
- $VaR_{0.95}=6.49$
- $CVaR_{0.95}=10.19$

Al cabo de un año, la media del valor del bono será de \$103.93, lo que implica que se tendría una pérdida esperada de \$0.1565; la desviación estándar será de \$1.54, lo que implica que se tendría una pérdida no esperada de \$1.6984. Por otro lado, el valor del bono en el peor escenario al 95 % de confianza será de \$97.59, o una pérdida de \$6.49, mientras que el promedio del valor del bono en los peores escenarios al 95 % de confianza será de \$93.89 o una pérdida equivalente a \$10.19.

El caso de un sólo crédito y el modelo de Merton

Siguiendo con este mismo método, podríamos obtener la distribución y las medidas de riesgo para el caso de una cartera con más de dos créditos correlacionados, sin embargo, la complejidad en cuanto al cómputo aumenta de forma exponencial. Es por ello, que CreditMetrics hace uso de la metodología del modelo de Merton.

Proposición 3.2.1 *Bajo el modelo de Merton, si una firma emite bonos de deuda que son evaluados por alguna empresa calificadora, la calificación de su deuda está relacionada de forma directa con el valor de los activos de la firma (y del rendimiento estandarizado de éstos) y es posible reproducir exactamente las probabilidades de las migraciones de las calificaciones de la deuda mostradas en las matrices de transición.*

Demostración. Recordemos que en el modelo de Merton se asume una estructura de capital muy simple: los activos de la firma al tiempo t se financian a través de la emisión de una acción con valor S_t y de un bono cupón cero con duración T , valor nominal F y valor al tiempo t de D_t , por lo que el balance general de la empresa al tiempo t cumple con $V_t = S_t + D_t(F)$. Además, el valor de los activos de la firma V_t en el intervalo $[0, T]$ evoluciona de acuerdo a la ecuación diferencial estocástica⁴

$$dV_t = V_t(\mu_V dt + \sigma_V dW_t), \quad V_0 > 0. \quad (3.6)$$

donde μ_V y σ_V son respectivamente la media y la varianza de la tasa de los rendimientos del valor de los activos y W_t es un browniano estándar bajo la medida de probabilidad actual.

La solución a la ecuación anterior es un movimiento Browniano geométrico,

$$V_t = V_0 e^{(\mu_V - \frac{\sigma_V^2}{2})t + \sigma_V \sqrt{t}Z},$$

donde hemos usado el hecho de que $W_0 = 0$ y que al tiempo t , $W_t \sim N(0, t)$ ⁵

El valor de los activos al tiempo t V_t se distribuye lognormal, lo que significa que

⁴ Nótese que a diferencia de la ecuación (2.6), ahora utilizamos μ , en lugar de r pues estamos trabajando bajo la probabilidad actual en lugar de la probabilidad neutra al riesgo

⁵ $N(0, t)$ es equivalente a $\sqrt{t}Z$ con $Z \sim N(0, 1)$ una normal estándar.

$$\ln V_t \sim N(\ln V_0 + (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)t, \sigma_V^2 t),$$

y por lo tanto podemos obtener la probabilidad de que al tiempo t el valor de los activos de la firma sea menor a un cierto valor V^* , es decir:

$$\begin{aligned} P(V_t < V^*) &= P(\ln V_t \leq \ln V^*) \\ &= P\left(Z \leq \frac{\ln \frac{V^*}{V_0} - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)t}{\sigma_V \sqrt{t}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln \frac{V^*}{V_0} - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)t}{\sigma_V}\right) \\ &= \Phi(Z^*), \end{aligned}$$

donde

$$Z^* = r^* = \frac{\ln \frac{V^*}{V_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma_V^2)t}{\sigma_V \sqrt{t}} \quad (3.7)$$

representa el valor estandarizado de los rendimientos del valor de los activos⁶ cuando éstos pasan de V_0 a V^* al tiempo t . Los rendimientos estandarizados de los activos de la empresa se distribuyen como una normal estándar con media cero y varianza 1.

Para una matriz de transición dada, es posible obtener el rendimiento estandarizado de los activos de la firma utilizando la distribución normal inversa. ■

CreditMetrics generaliza el modelo de Merton para incluir cambios en la calidad (calificación) de la deuda, dividiendo la distribución de los rendimientos estandarizados de los activos en bandas, de forma que se reproduzcan exactamente las frecuencias de las migraciones en calificaciones de la deuda mostradas en las matrices de transición.

Para el caso de una cartera formada por un sólo bono de deuda, no parece muy útil introducir el modelo de Merton, sin embargo, para el caso de una cartera formada

⁶ Si iniciamos con un valor V_0 , al tiempo t , el rendimiento aproximado del valor de los activos es $\ln \frac{V_t}{V_0}$ o equivalentemente $-\ln \frac{V_0}{V_t}$.

por más de dos créditos correlacionados, es de gran utilidad.

Para el caso de nuestro ejemplo, obtengamos los valores de Z_i correspondientes a los rendimientos estandarizados del valor de los activos asociados a la matriz de transición proporcionada en la tabla 3.1. El bono de deuda tiene calificación actual A , la probabilidad de que en un año migre al estado de incumplimiento es del 0.06 %, que equivale a un valor de Z menor o igual a -3.24 ; esto significa que si el valor estandarizado de los rendimientos es mayor a -3.24 , pero menor a -3.19 , el bono tendrá calificación CCC , por lo que el límite inferior para conservar la calificación CCC del bono es $Z=-3.24$; esto ocurre con probabilidad 0.01 %. Por otro lado observando la tabla 3.1 tenemos que la probabilidad de que el bono migre a la calificación B es del 0.26 % que equivale a un valor Z acumulado de los rendimientos estandarizados de los activos de entre -3.20 y -2.71 ; el primero es el límite inferior por debajo del cual el bono cambia de calificación de B a CCC y -2.71 es el límite superior por encima del cual el bono cambia de B a BB . Obteniendo los límites inferiores para cada calificación, construimos la tabla 3.5:

Tabla 3.5. Perfil de riesgos a un año del bono con calificación actual A del ejemplo y límites inferiores Z_j

Calificación	Prob	$B_{i,j}$	Z_j
AAA	0.09	104.78	3.1214
AA	2.27	104.6	1.9845
A	91.05	104.08	-1.5070
BBB	5.52	103	-2.3009
BB	0.74	97.59	-2.7164
B	0.26	93.76	-3.1947
CCC	0.01	79.72	-3.2389
Incumplimiento	0.06	51.13	$-\infty$

Podemos apreciar por ejemplo que la probabilidad de transición equivalente a que el bono de deuda conserve la misma calificación $P_{A,A} = P(Z_A < Z < Z_{AA}) = P(-1.5070 < Z < 1.9845) = \Phi(1.9845) - \Phi(-1.5070) = 0.9105$. En la figura 3.2 se aprecia la partición que se realiza de la normal estándar para mostrar las probabilidades de transición del bono de nuestro ejemplo.

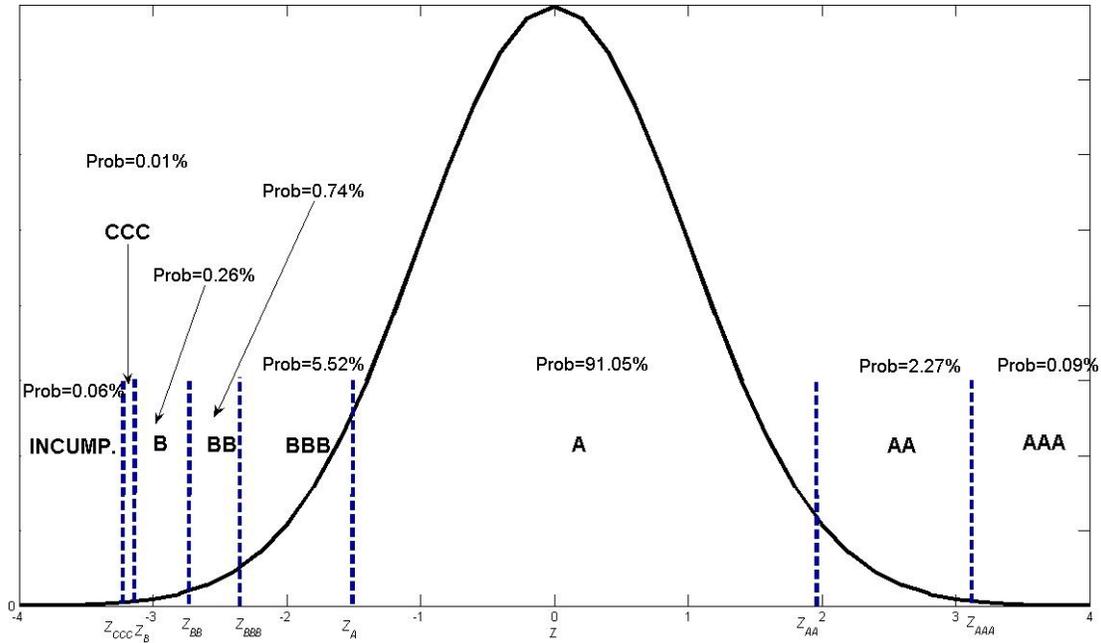


Fig. 3.2. Partición de la normal estándar de manera que se repliquen las probabilidades de transición del bono con calificación actual *A*

3.2.2. Caso de dos créditos

Ahora consideraremos una cartera formada por dos bonos de deuda. Aquí se pueden dar dos casos: bonos con probabilidades de migración correlacionadas y bonos con probabilidades de migración no correlacionadas. Trataremos el primer caso pues es más general⁷, pero para ello requeriremos de teoría y algunos supuestos adicionales.

Proposición 3.2.2 . *En el modelo de matrices de transición de CreditMetrics, bajo el modelo de Merton, las correlaciones entre los rendimientos del valor de los activos de las firmas pueden ser usadas en lugar de las correlaciones entre las probabilidades de migración de los correspondientes bonos de deuda.*

⁷ En realidad el caso de bonos con probabilidades no correlacionadas no ocurre en la práctica. Si se desea calcular la probabilidad conjunta de dos bonos sin recurrir a la teoría que se expone en el presente trabajo, únicamente debe realizar el producto de las probabilidades de migración individuales.

Demostración. Por la proposición (3.2.1), las probabilidades de migración de calificación de los diferentes bonos de deuda dependen del valor de los activos de la firma que los emita y por lo tanto se deduce que las correlaciones son las mismas.

■

Lo anterior significa que deberíamos conocer para el caso de dos firmas, la correlación existente entre el rendimiento del valor de sus activos, lo cual en la práctica no es observable. En su lugar podemos utilizar las correlaciones existentes entre los rendimientos del valor de sus acciones, lo que restringe el modelo a empresas que coticen en bolsa⁸.

El modelo generalizado para una cartera formada por más de dos bonos de deuda correlacionados, en analogía al caso de un sólo bono de deuda, asume que la distribución conjunta de los rendimientos del valor de los activos de las firmas es normal multivariada con vector de rendimientos medios μ y matriz de varianza-covarianza Σ , es decir: $\mathbf{r} \sim \mathbf{N}(\mu, \Sigma)$. La función de densidad conjunta de la normal multivariada está dada por⁹

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{r}-\mu)' \Sigma^{-1}(\mathbf{r}-\mu)}. \quad (3.8)$$

Para el caso de dos bonos, la distribución conjunta de los rendimientos del valor de los activos de la firma es

$$f(r_1, r_2) = \frac{1}{(2\pi)\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-q^2}, \quad (3.9)$$

con $q = \frac{1}{1-\rho^2} \left[\left(\frac{r_1-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{r_1-\mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{r_2-\mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{r_2-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right]$ y ρ el coeficiente de correlación. Notemos sin embargo, que como los rendimientos del valor de los activos ya están

⁸ Esto significa que la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos del valor de las acciones de la firma, puede usarse en lugar de la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos del valor de los activos de la firma, $\Sigma_{\mathbf{V}} \approx \Sigma_{\mathbf{S}}$

⁹ Donde usamos la notación x' para referirnos a la transpuesta del vector x .

estandarizados, el vector de medias $\mu = \mathbf{0}$ y la matriz de varianzas covarianzas Σ es la matriz de coeficientes de correlación que denotaremos como Σ_c .

Ejemplo 3.2.2: Consideremos el caso hipotético de que se tenga una cartera formada por dos bonos de deuda emitidos por dos diferentes empresas:

- $B^{(1)}$ es un bono de deuda emitido por la empresa 1, *Senior sin garantía*, calificado de acuerdo a la tabla 3.1 con *A*, con valor nominal de \$100, que paga un cupón anual fijo del 5% y vence dentro de 5 años.
- $B^{(2)}$ es un bono de deuda emitido por la empresa 2, *Senior subordinado* calificado de acuerdo a la tabla 3.1 con *BB*, con valor nominal de \$100, que paga un cupón anual fijo del 8% y vence dentro de 4 años.
- Σ_c es la matriz de coeficientes de correlación del rendimiento de las acciones de las dos empresas y supongamos que:

$$\Sigma_c = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

Denotando por Π al valor de la cartera, éste se va a formar por la suma de los valores de los bonos de deuda; al cabo de un año el bono de deuda $B^{(1)}$ puede pasar de la calificación i a la calificación j , y el bono $B^{(2)}$ de la calificación k a la calificación l , por lo que en un año el valor de la cartera en términos generales es:

$$\Pi_{j,l} = B_{i,j}^{(1)} + B_{k,l}^{(2)} \quad \text{con } i, j, k, l=1,2\dots 8$$

En nuestro ejemplo el valor de la cartera en un año en caso de que los dos bonos no cambien de calificación es

$$\Pi^0 = B_{A,A}^{(1)} + B_{BB,BB}^{(2)} = 104.08 + 111.40 = 215.48,$$

que constituye el valor de referencia respecto al cual habrá que comparar todos los posibles valores que puede adoptar la cartera como consecuencia del cambio de calificación de los bonos.

Nuestro objetivo es obtener la distribución de probabilidades del valor de la cartera

al cabo de un año, para compararlo con el valor Π^0 y determinar así las posibles pérdidas y las medidas de riesgo. Para ello, primero debemos obtener los perfiles de riesgo de cada uno de los bonos para entonces obtener la probabilidad de cada posible valor de la cartera, resultado de las posibles combinaciones de escenarios para los bonos de deuda.

La cartera formada por los dos bonos de deuda puede tomar 64 posibles valores, ya que por ejemplo el bono $B^{(1)}$ con calificación actual A puede adoptar 8 posibles estados o calificaciones como lo muestra la figura 3.1 y para cada uno de estos estados se pueden dar 8 estados para el bono $B^{(2)}$.

La probabilidad de cada uno de los 64 posibles valores de la cartera equivale a la probabilidad conjunta de que el bono $B^{(1)}$ pase de la calificación i a la j y el bono $B^{(2)}$ pase de la calificación k a la l . Por la proposición (3.2.1) para calcular las probabilidades conjuntas, sólo necesitamos obtener los valores Z (o en otras palabras, los rendimientos estandarizados del valor de los activos de las empresas emisoras) correspondientes a cada uno de nuestros bonos a partir de la matriz de transición 3.1 y evaluar la siguiente integral doble con la función dada por (3.9),

$$prob(B_{i,j}^{(1)}, B_{k,l}^{(2)}) = \int_{z_1^i}^{z_1^j} \int_{z_2^k}^{z_2^l} f(z_1, z_2) dz_1 dz_2. \quad (3.10)$$

Para el caso de nuestros dos bonos, las probabilidades conjuntas de las 64 posibles combinaciones se muestran en la tabla 3.6.

Así, podemos obtener finalmente la distribución de probabilidades del valor de la cartera mostrada en la figura 3.3 y las medidas de riesgo mencionadas en el capítulo 1.

Con un nivel de confianza del 95 % para el VaR y el $CVaR$ tenemos¹⁰:

¹⁰ Recordemos que en el capítulo 1 se mencionó que el VaR y el $CVaR$ calculados a partir de la distribución del valor de la cartera se obtenían de acuerdo a las ecuaciones (1.1) y (1.2). A partir de nuestros datos el cálculo fue el siguiente:

$$\begin{aligned} VaR_{0.95} &= \Pi^0 - \Pi_{0.05}, \\ &= 215.4845 - 211.1876, \\ &= 4.2969, \end{aligned}$$

Tabla 3.6. Probabilidades conjuntas de los bonos $B^{(1)}$ con calificación actual A y $B^{(2)}$ con calificación actual BB a un año (%)

Calificación del bono $B^{(1)}$	Calificación del bono $B^{(2)}$								Total
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	I	
AAA	0.00	0.00	0.01	0.03	0.16	0.85	0.00	0.00	1.06
AA	0.00	0.01	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06
A	0.01	0.00	0.01	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04
BBB	0.12	0.84	0.00	0.00	0.06	0.18	0.14	0.53	1.87
BB	0.00	0.00	0.00	0.00	0.88	7.68	0.06	0.00	8.63
B	0.01	0.00	4.19	0.00	0.00	73.80	1.73	0.06	79.79
CCC	0.16	0.01	7.13	0.00	0.00	0.40	0.02	0.60	8.33
I	0.12	0.05	0.03	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.22
Total	0.44	0.92	11.41	0.06	1.11	82.91	1.96	1.20	100.0

- $\mu_{\Pi}=214.47$
- $\sigma_{\Pi}=8.05$
- $EL_{\Pi} = 8.82$
- $VaR_{0.95}=4.30$
- $CVaR_{0.95}=28.20$

Al cabo de un año, la media del valor de la cartera será de \$214.47, lo que implica que se tendría una pérdida esperada calculada como $|\mu_{\Pi} - \Pi_0|$ de \$1.02; la desviación estándar será de \$8.05. Por otro lado, la pérdida esperada de la cartera EL_{Π} ¹¹ será igual a \$8.82. Por último, el peor valor que tendrá la cartera al 95% de confianza será de \$187.29, o una pérdida de \$4.30, mientras que el promedio del

para el VaR y

$$\begin{aligned}
 CVaR_{0.95} &= \Pi^0 - E[\Pi | \Pi \leq \Pi_{0.05}], \\
 &= 215.4845 - 187.2880, \\
 &= 28.1965,
 \end{aligned}$$

para el CVaR.

¹¹ Aquí introducimos esta forma alternativa de calcular la pérdida esperada como $EL_{\Pi} = [|\Pi - \Pi^0| | \Pi < \Pi^0]$, que calcula la media de las pérdidas de la cartera (se tiene pérdida cuando el valor de la cartera Π resulta inferior al valor forward de la cartera Π^0).

valor de la cartera en los peores escenarios al 95 % de confianza será de \$203.83 o una pérdida equivalente a \$28.20.

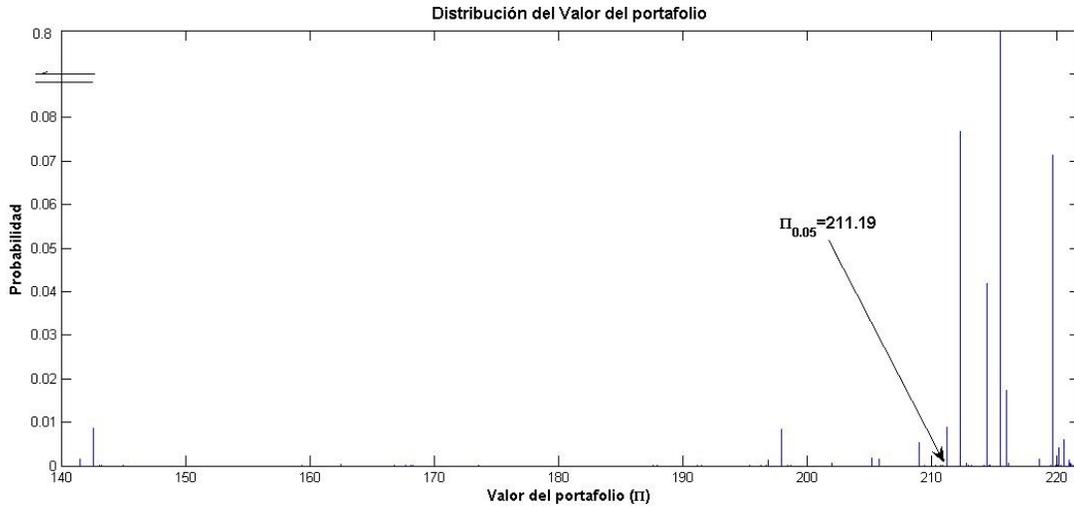


Fig. 3.3. Distribución del valor de la cartera formada por los bonos $B^{(1)}$ y $B^{(2)}$

3.2.3. Caso general con más de un crédito

Sea C el número de categorías de calificación adoptado en la matriz de transición y sea n el número de créditos que conforman la cartera, el número de probabilidades conjuntas a evaluar es C^n . Hay una explosión combinatoria en los cálculos pues si por ejemplo con nuestra matriz de transición de 8 esquemas, se necesita valorar una cartera formada por 1,000 créditos, se tendrían $8^{1,000}$ probabilidades de migración conjuntas. ¿Qué hacer entonces?

3.2.4. Método Monte Carlo

Simulación Monte Carlo

Cuando la complejidad de un sistema impide llegar a una solución explícita, la técnica cuantitativa más socorrida es la de simulación. La simulación se refiere al

tratamiento de un problema real mediante la reproducción, en un ambiente controlado por el analista, del sistema que los origina. Los problemas de simulación aplicados a problemas de carácter financiero se representan en general con fórmulas matemáticas de valuación y distribuciones de probabilidad que se reflejan en una serie de fórmulas, tabulaciones y un análisis gráfico que ayude a interpretar los resultados. La simulación Monte Carlo está diseñada específicamente para reproducir el comportamiento de sistemas en los que el comportamiento aleatorio es su principal característica y es ineludible. La eficiencia de la técnica depende, de manera importante, de contar con buenos mecanismos que permitan generar muestras representativas de las distribuciones de probabilidad que se usan como elementos para representar el comportamiento del sistema bajo estudio. También se requiere de un buen criterio ingenieril para relacionar los elementos entre sí y organizar la secuencia de cálculo, de manera que se minimice el esfuerzo y se haga un uso eficiente de los recursos de cómputo (Márquez, 2006).

Para resolver el problema de explosión combinatoria para el caso general mediante simulación Monte Carlo, considérese una cartera formada por n créditos o bonos de deuda, que han sido emitidos por m firmas, con $n \geq m$ y cuyo valor se obtiene bajo el modelo de matrices de transición de CreditMetrics.

Se implementa el Método Monte Carlo para inferir la distribución de los valores de la cartera en el horizonte de un año con los siguientes pasos (Crouhy et al., 2001):

1. A partir de la matriz de transición con la que se trabajará, se obtienen los umbrales de z , para delimitar cada categoría de la matriz de transición en función de los rendimientos estandarizados del valor de los activos de las firmas (es decir las z 's). De esta manera se obtiene una matriz de z 's.
2. Se estima la matriz de correlaciones del valor de los rendimientos de los activos de las m firmas que han emitido los n bonos de deuda que forman la cartera¹².

¹² Nótese que una sólo firma puede emitir más de un bono; sin embargo, para efectos del cálculo de la matriz de correlaciones se considera que cada firma emite un sólo bono pues de no hacer esto y en caso de que una firma emitiese más de un bono, se tendría una matriz de correlaciones con columnas repetidas.

3. Se generan escenarios de posibles rendimientos estandarizados del valor de los activos de las m firmas con la distribución normal multivariada, tomando en cuenta la matriz de correlaciones¹³.
4. Para cada escenario y para cada firma deudora, los rendimientos estandarizados del valor de los activos se mapean en la correspondiente categoría de calificación de acuerdo a los umbrales z obtenidos en el primer paso.
5. Dadas las tasas de rendimiento o curvas cero forward y las tasas de recuperación, se obtiene el valor de la cartera de n bonos en cada escenario.
6. Se repite el procedimiento para generar un número grande M de escenarios (por ejemplo $M=100,000$) y se estima la función de distribución empírica de los valores de la cartera¹⁴; se puede realizar una gráfica que ayude a interpretar los resultados. Se sintetiza la información obtenida mediante estimaciones de medidas de riesgo adecuadas como el VaR y CVaR siguiendo las definiciones dadas por 1.2 y 1.4 respectivamente.

En el manual de CreditMetrics (J. P. Morgan, 1997; pág. 113-120) se describen los pasos para implementar la simulación Monte Carlo y se va ilustrando el procedimiento con una cartera hipotética de 10 bonos, sin embargo, siguiendo el algoritmo descrito con los seis pasos anteriores, simplificamos el procedimiento.

A continuación, se mostrará mediante un ejemplo, la puesta en marcha de los seis pasos anteriores.

Ejemplo 3.2.3: Retomando los datos del ejemplo 3.2.2 de dos bonos, calcularemos la distribución de probabilidades del valor de la cartera por el método Monte Carlo.

¹³ Para la generación de estos valores correspondientes a una normal multivariada correlacionada, en el manual de CreditMetrics (J. P. Morgan, 1997) se menciona que existen varios métodos para hacerlo, como por ejemplo mediante factorización de Cholesky o mediante descomposición en valores singulares. Sin embargo, hoy en día existen programas de cómputo que permiten obtener los valores de manera más rápida.

¹⁴ Puesto que los valores que puede tomar la cartera de acuerdo al modelo CreditMetrics son una variable discreta en sentido estricto, se opta por estimar la distribución de masa de probabilidad y la función de distribución empírica. Alternativamente se podría optar por obtener funciones de distribución continuas mediante alguna técnica de suavizamiento.

Del paso 1, para el caso de la matriz de transición de nuestro ejemplo presentada en la tabla 3.1, los umbrales z 's inferiores para cada categoría se muestran en la tabla 3.7. Luego, con la matriz de correlaciones se generan posibles escenarios de

Tabla 3.7. Límites inferiores z 's (rendimientos estandarizados) para cada categoría, obtenidos a partir de la Matriz de probabilidades de transición a un año

Calificación actual	Calificación al finalizar el año						
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
AAA	-1.33	-2.38	-2.91	-3.04	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
AA	2.46	-1.36	-2.38	-2.85	-2.95	-3.54	$-\infty$
A	3.12	1.98	-1.51	-2.30	-2.72	-3.19	-3.24
BBB	3.54	2.70	1.53	-1.49	-2.18	-2.75	-2.91
BB	3.43	2.93	2.39	1.37	-1.23	-2.04	-2.30
B	8.21	3.06	2.70	2.42	1.46	-1.32	-1.63
CCC	2.85	2.85	2.62	2.11	1.74	1.02	-0.85

los rendimientos estandarizados de acuerdo al paso 3. En nuestro ejemplo de dos bonos, un posible escenario de los rendimientos estandarizados en un año es¹⁵

$$\begin{bmatrix} Z_A \\ Z_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5883 \\ 1.9668 \end{bmatrix},$$

es decir, el rendimiento estandarizado en un año del bono con calificación actual A es de -0.5883 . Ubicando este rendimiento en la tabla 3.7 de acuerdo al paso 4, observamos que se encuentra dentro del intervalo $[-1.51, 1.98)$ correspondiente a los límites inferiores Z_A y Z_{AA} , lo cual significa que el bono permanecerá con calificación A . El bono con calificación actual BB por su parte migrará a la calificación BBB . En este posible escenario el valor de la cartera de acuerdo al paso 5 es igual a

$$\begin{aligned} \Pi_{A,BBB} &= B_{A,A}^{(1)} + B_{BB,BBB}^{(2)} \\ &= 104.08 + 115.62 = 219.70. \end{aligned}$$

¹⁵ El vector de rendimientos estandarizados mostrado se obtuvo realizando la factorización de Cholesky de la matriz de correlaciones

Generando unos 100,000 escenarios, lo que hacemos es obtener una muestra grande con reemplazo con la cual podemos obtener una estimación de la función de distribución empírica de los valores de la cartera y realizar una gráfica que ayude a interpretar los resultados. En la gráfica 3.4 se presenta la función de masa de probabilidad de los valores de la cartera de nuestro ejemplo.

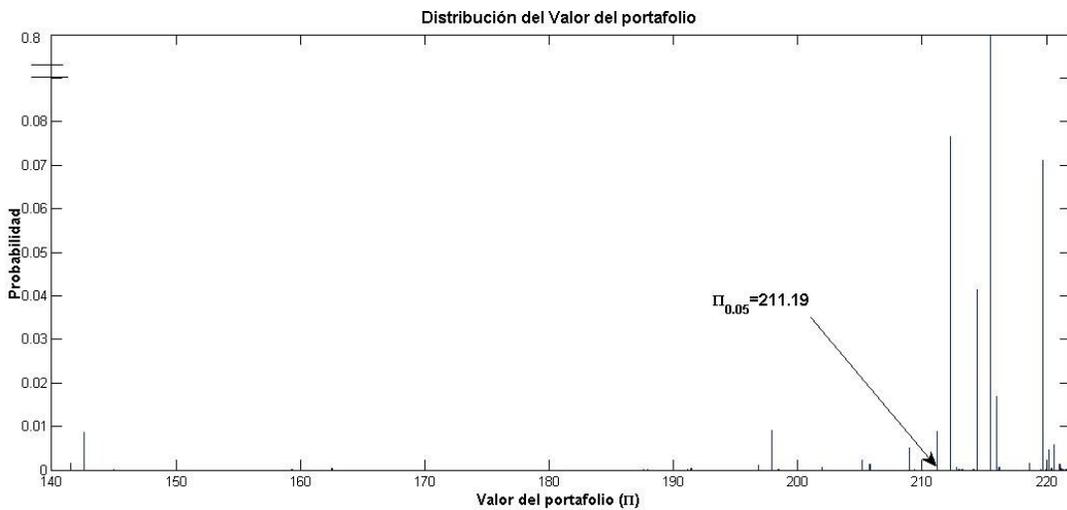


Fig. 3.4. Distribución del valor de la cartera formada por los bonos $B^{(1)}$ y $B^{(2)}$ con el Método Monte Carlo con 100,000 simulaciones

Intervalos de confianza

Debido a que los resultados obtenidos por Monte Carlo son estimaciones de los verdaderos parámetros, conviene incluir un intervalo de confianza. Para lograrlo, primero generamos diferentes muestras con las cuales obtenemos una estimación de las distribuciones muestrales de los parámetros, a partir de las cuales podemos generar un intervalo de confianza al $(1 - \alpha) \%$. Se utilizan dos metodologías para la obtención del intervalo de confianza:

1. Considerando que se tiene una muestra grande de realizaciones del parámetro de interés, se alude al Teorema Central del Límite y se utiliza la distribución normal. Para ello, dadas las n realizaciones, se obtienen la media y la desviación estándar muestrales y se construye el intervalo de confianza.
2. Se obtiene una distribución empírica muestral de los parámetros de interés y a partir de esta se obtiene el cuantil inferior $\alpha/2$ y el superior $1 - \alpha/2$. El intervalo de confianza queda comprendido entre los dos cuantiles.

Como se puede observar en la tabla 3.8, para el caso de nuestro ejemplo de dos bonos, al comparar los valores de los parámetros obtenidos por el método analítico (que se obtuvieron haciendo todas las 64 posibles combinaciones), con los obtenidos por estimación Monte Carlo, se tienen resultados bastante buenos con intervalos de confianza de las medidas de riesgo de interés al 95 % de confianza. Recordemos que el valor de referencia o valor forward de la cartera Π^0 en caso de que los bonos no cambien de calificación es de \$215.48. Hay que hacer notar que al menos en la simulación presentada, el VaR estimado, comparándolo con el verdadero valor que se obtuvo en el caso analítico es idéntico. Cabría entonces hacer un ejercicio en el que se realizaran varias simulaciones para determinar si los estadísticos de interés de las medidas de riesgo son insesgados.

Tabla 3.8. Intervalos de confianza al 95 % para las medidas de riesgo

Valor de referencia $\Pi^0 = \$215.4845$					
Parámetro de interés	Método	Método Monte Carlo (M=100,000)			
	analítico	Estimación	IC normal	IC distr. empírica	
μ_{Π}	214.4533	214.4759	[213.9648,214.9870]	[213.9577,214.7961]	
EL_{Π}	8.8156	8.8222	[6.0058,11.6386]	[6.5776,10.9757]	
$VaR_{0.95}$	4.2969	4.2969	4.2969	4.2969	
$CVaR_{0.95}$	28.1964	28.3159	[25.4712,31.1605]	[25.9557,30.6035]	

A partir de la definición de sesgo estadístico de un estimador T del parámetro θ como $sesgo(T) = E(T) - \theta$, se obtiene una estimación del sesgo de los estimadores del VaR y del $CVaR$ en un ejercicio de simulación con M=100,000:

- $\widehat{sesgo}(VaR)=0.0001, [-0.0001,0.0003]$,
- $\widehat{sesgo}(CVaR)=-0.0276, [-0.1544,0.0992]$.

Como se aprecia, la estimación mediante el intervalo de confianza de ambos parámetros incluye al cero, por lo que no existe evidencia estadística suficiente al 95 % de confianza para rechazar la hipótesis de que estos estimadores son insesgados en el modelo de CreditMetrics.

Comparando con más ejercicios de simulación, se pueden sacar algunas conclusiones:

- En general, los intervalos de confianza utilizando la distribución normal tienden a ser más grandes que el intervalo de confianza obtenido utilizando la distribución muestral empírica. Esto se debe a que en el cálculo del intervalo de confianza utilizando la distribución muestral empírica los valores muy extremos no se toman en cuenta pues sólo se incluyen los valores comprendidos entre el cuantil inferior $\alpha/2$ y el superior $1 - \alpha/2$. En cambio, al calcular los intervalos de confianza con la distribución normal, los valores extremos entran en el cálculo de la desviación estándar y por lo tanto en la anchura del mismo. En varios ejercicios de simulación hechos y conociendo el verdadero valor del parámetro, se encontró que el intervalo de confianza construido a partir de la distribución empírica contuvo la misma cantidad de veces al verdadero parámetro, en comparación con el intervalo de confianza usando la distribución normal.
- No existe evidencia estadística suficiente al 95 % de confianza para rechazar la hipótesis de que los estimadores del VaR y del $CVaR$ de acuerdo a la metodología expuesta son insesgados en el modelo de CreditMetrics.

Modelo CyRCE y medición de la concentración de una cartera

Los modelos de medición de riesgo en crédito revisados en las secciones anteriores permiten determinar medidas de riesgo para carteras de créditos con cierta facilidad. Sin embargo, dos de las desventajas que se pueden encontrar al quererlos aplicar son: 1) que la complejidad y el cálculo computacional aumentan a medida que el número de elementos de la cartera crece y 2) que la información necesaria para echar andar los modelos restringe su uso a países con economías desarrolladas¹ y que no siempre se encuentra disponible en países con economías emergentes como México.

Además, los modelos antes estudiados no consideran el riesgo en el que se incurre cuando se tiene una cartera con alta concentración, es decir, cuando en la estructura de una cartera existen pocos deudores con una proporción importante del valor de la cartera. El modelo que se expone en esta sección se encarga también de este problema e incluso permite realizar el análisis de concentración por segmentos de interés de la cartera.

¹ Por ejemplo cuando se utilizan matrices de transición o información más específica sobre instrumentos en la bolsa de valores.

4.1. Antecedentes y aspectos generales

CyRCE (Capitalización y Riesgo Crédito) es un modelo de impago desarrollado en el Banco de México que a partir de una cartera de créditos, proporciona una forma funcional de la distribución de pérdidas, suponiendo que ésta puede caracterizarse por su media y su varianza, brindando además una cuantificación precisa de la manera en que la concentración contribuye al riesgo de la cartera.

Características del modelo general de CyRCE:

- Las probabilidades de incumplimiento y las covarianzas son exógenas.
- La distribución de pérdidas se puede obtener a partir de la media y la desviación estándar.
- Establece límites para el otorgamiento de créditos y deriva montos de suficiencia de capital para hacer frente a los riesgos.
- Deriva el índice de Herfindahl-Hirschman (HH) como medida de concentración y cuantifica la manera en la que la concentración contribuye al riesgo de crédito de la cartera.
- Mide el impacto que tiene la correlación en la concentración sobre diferentes segmentos de la cartera, proporcionando una poderosa herramienta de análisis sobre la estructura de la cartera en cuanto a la concentración de riesgo.
- Es aplicable a países con economías emergentes y no requiere información muy sofisticada.

Los intermediarios financieros imponen límites máximos o topes para el monto de crédito que se puede otorgar a lo largo de diferentes segmentos de la cartera; este límite se especifica como una proporción del capital, aunque es mejor especificarlo como una proporción del valor total de la cartera.

Sean:

- I el valor total de la cartera formada por N créditos,
- K el capital de la institución financiera,
- δ el límite del crédito que se puede otorgar como una proporción del capital,
- θ el límite del crédito que se puede otorgar como una proporción del valor de la cartera,

- f_k el monto del k -ésimo crédito de la cartera.

Es fácil verificar que existe una relación lineal entre δ y θ , pues para el k -ésimo crédito se verifica que:

$$f_k \leq \delta K = \delta \frac{K}{\Pi} \Pi = \delta \psi \Pi = \theta \Pi; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

con $\psi = \frac{K}{\Pi}$ la razón de capitalización y $\theta = \delta \psi$, lo que implica que $\delta K = \theta \Pi$, que quiere decir que la práctica de fijar límites a los créditos en términos de proporciones del capital con el propósito de controlar la concentración sólo tiene sentido si la proporción δ guarda la relación anterior con la razón de capitalización ψ . El modelo que se desarrolla considera que el límite sobre el tamaño de los créditos se fija en función del valor de la cartera y no del capital de la institución financiera.

4.1.1. Índice de Herfindahl-Hirschman

Sea la cartera de N créditos representada por el vector $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ cuya k -ésima entrada denotada por $f_k \geq 0$ representa el monto del k -ésimo crédito. Como se mostrará más adelante, el índice HH (Herfindahl-Hirschman) surge de manera natural en el modelo CyRCE, por lo que resulta conveniente definirlo y estudiar algunas de sus propiedades aplicado a una cartera de créditos.

Definición 4.1.1 (Índice de Herfindahl-Hirschman). *Considérese una cartera \mathbf{f} formada por N créditos, la medida de concentración del índice de Herfindahl-Hirschman aplicada a la cartera es²:*

$$H(\mathbf{f}) = \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{f}}{(\mathbf{1}^T \mathbf{f})^2},$$

con $\mathbf{1}$ un vector de unos de orden N .

² Sin usar la notación matricial, el IHH se calcula según:

$$H(\mathbf{f}) = \frac{\sum_{k=1}^N f_k^2}{(\sum_{k=1}^N f_k)^2}$$

El IHH es una medida de concentración, que cuantifica de manera precisa la contribución de la concentración al riesgo de crédito total de una cartera. Toma valores en el intervalo $[\frac{1}{N}, 1]$ pero con la normalización siguiente:

$$h(\mathbf{f}) = \frac{N - \frac{1}{H(\mathbf{f})}}{N - 1},$$

toma valores en el intervalo $[0, 1]$. Mientras más cercano a uno, mayor concentración de la cartera y mayor riesgo en crédito.

La máxima concentración en la cartera medida por el índice HH ocurre cuando está formada de un sólo crédito, mientras que la mínima concentración ocurre cuando el valor de la cartera está repartido por igual entre los N créditos. Obviamente, si el valor de la cartera se reparte por igual entre los créditos, la medida de concentración disminuirá mientras mayor sea el número de créditos que forman la cartera.

Ejemplo 4.1.1:

Consideremos la cartera formada por 9 bonos de crédito que se presenta en la tabla (4.1) y que servirá para ejemplificar el desarrollo del Modelo CyRCE. Si le

Tabla 4.1. Cartera formada por 9 créditos

Número de crédito	Monto (\$)
1	400
2	500
3	120
4	250
5	850
6	950
7	350
8	490
9	650
Total	4,560

aplicamos el índice de HH a la cartera tenemos $H(\mathbf{f}) = 0.1393$ y $h(\mathbf{f}) = 0.2278$.

Para fines de la exposición del modelo CyRCE, emplearemos el valor del índice HH sin normalizar ya que resulta más intuitivo.

Para darle una interpretación en términos financieros tomemos el inverso del índice del ejemplo 4.1.1 que en este caso es 7.18 y que interpretamos como *el mínimo número de créditos del mismo tamaño que proporcionan un valor del índice de 0.1393*³.

Propiedades del índice de Herfindahl-Hirschman

A continuación, se presentarán algunas propiedades del índice HH en forma de proposiciones y teoremas, cuyas demostraciones pueden consultarse en Márquez (2002a, 2006). Para efectos de simplificar las demostraciones y sin pérdida de generalidad, considérese que el vector \mathbf{f} está normalizado por el valor total de la cartera Π ⁴. Considérese también a menos que se especifique lo contrario que los montos están ordenados de forma decreciente, es decir: $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_N$.

Proposición 4.1.1 *Supóngase que se tiene la cartera \mathbf{f} con $f_k \geq f_{k+1} \geq 0$ y $k = 1, 2, \dots, N - 1$ entonces:*

i) Si se transfiere un monto $\varepsilon > 0$ de la entrada $f_j > 0$ a la entrada f_i con $i < j$ y $f_j - \varepsilon > 0$ tal que se tiene el vector \mathbf{f}' con distribución

$$\mathbf{f}' = \begin{cases} f_k & \text{para } k = 1, 2, \dots, N \text{ y } k \neq i, j, \\ f_i + \varepsilon & \text{para } k = i, \\ f_j - \varepsilon & \text{para } k = j, \end{cases}$$

entonces $H(\mathbf{f}') > H(\mathbf{f})$.

³ Esta es una propiedad del índice HH conocida como el equivalente numérico de Adelman.

⁴ Es decir, se presenta cada monto como una proporción del valor de la cartera, por lo que en estos términos, el valor normalizado de la cartera es $\Pi = \sum_{k=1}^N f_k = 1$

ii) Si se transfiere un monto $\varepsilon > 0$ de la entrada f_i a la entrada f_j con $i < j$ y $f_i - f_j > \varepsilon$ tal que se tiene el vector \mathbf{f}'' con distribución

$$\mathbf{f}'' = \begin{cases} f_k & \text{para } k = 1, 2, \dots, N \text{ y } k \neq i, j, \\ f_i - \varepsilon & \text{para } k = i, \\ f_j + \varepsilon & \text{para } k = j, \end{cases}$$

entonces $H(\mathbf{f}) > H(\mathbf{f}'')$.

La importancia de la proposición anterior radica en el hecho de que nos indica cómo afecta la transferencia de montos entre los créditos a la medida de concentración definida por el índice de Herfindahl-Hirschman: el incrementar el monto de un crédito a costa de disminuir el de un crédito menor aumentará la concentración; incrementar el monto de un crédito menor disminuyendo el monto de uno mayor siempre y cuando la diferencia entre los dos montos sea mayor a la transferencia, disminuirá la concentración.

Supongamos que en la cartera de 9 créditos del ejemplo 4.1.1 sin normalizar, hacemos una transferencia de \$100 desde el crédito de \$120 al crédito de \$490. En este caso, el nuevo valor del índice de HH es de 0.1438. Por otro lado, si partiendo de la cartera original, hacemos una transferencia de \$90 en el sentido contrario, el valor del índice queda en 0.1369.

Ahora nos gustaría saber que pasa con la medida de concentración del índice HH si todo el crédito está concentrado en el mínimo número de deudores y se respeta la restricción del límite individual $f_k \leq \theta$. Recordemos que si $H(\mathbf{f}) = \theta$, entonces el equivalente numérico $\frac{1}{\theta}$ nos proporciona el mínimo número de créditos del mismo tamaño que proporcionan un valor θ del índice.

Proposición 4.1.2 Sea $\theta \in (0, 1)$ y $n = \lfloor \frac{1}{\theta} \rfloor$ el número entero inmediato inferior de $\frac{1}{\theta}$. Sea $\varepsilon \in [0, 1)$ tal que $\theta = \frac{1-\varepsilon}{n}$. Entonces, para la distribución

$$\mathbf{f} = \begin{cases} \theta & \text{para } k = 1, 2, \dots, n, \\ \varepsilon & \text{para } k = n + 1, \\ 0 & \text{para } k = n + 2, \dots, N., \end{cases} \quad (4.1)$$

se tiene que $H(\mathbf{f}) \leq \theta$ para $\theta \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.

Teorema 4.1.1 . *Considérese la distribución de la cartera \mathbf{f} dada por 4.1 con $\varepsilon \in [0, \theta)$ y $\sum_{k=1}^N f_k = 1$. Entonces, \mathbf{f} maximiza $H(\mathbf{f}) \forall \mathbf{f}$ tal que $f_k \leq \theta \forall k$ y $H(\mathbf{f}) \leq \theta$.*

Para ejemplificar la proposición anterior, supongamos que se desea tener un límite de crédito individual como proporción del valor de la cartera de $\theta = 0.1393$ y que este mismo valor es el máximo tolerado como medida de concentración (índice de HH) para una cartera con valor de \$4,560 como el del ejemplo 4.1.1. La cartera con la distribución dada por 4.1 estaría formado en este caso por 8 créditos: 7 de los cuales tendrían valor de \$635.31 cada uno y el octavo por el restante \$112.85. La cartera cumple con la restricción individual y por la proposición 4.1.2 el índice debe ser menor de $\theta = 0.1393$, lo que en efecto se cumple pues el valor de índice HH es de 0.1365. Además, por el teorema 4.1.1, se asegura que la distribución 4.1 es la que maximiza el índice HH dadas las restricciones individuales por crédito y sobre el valor del índice HH (que no sea mayor a 0.1393).

El teorema anterior garantiza el uso de límites como proporción del valor de la cartera como una medida efectiva para controlar la concentración del mismo, pues nos asegura que si se respetan los límites, no se excederá del valor de tolerancia predeterminado medido por el índice HH.

Sin embargo, restringir todos los créditos al cumplimiento del límite θ resulta en costos de oportunidad para el prestamista pues puede suceder que existan créditos que sobrepasan el límite y que sin embargo tomados en conjunto en la cartera, cumplan con $H(\mathbf{f}) \leq \theta$. El siguiente teorema muestra que sí se puede dar el caso mencionado y además proporciona una cota superior que cumplen los créditos individualmente una vez que rebasan el límite.

Teorema 4.1.2 . Si $H(\mathbf{f}) \leq \theta$, entonces:

$$f_k \leq \frac{1}{N}(1 + \sqrt{(N\theta - 1)(N - 1)})\Pi < \sqrt{\theta}\Pi \quad \text{para } k=1,2,3,\dots,N. \quad (4.2)$$

Corolario 4.1.1 Bajo la restricción $H(\mathbf{f}) \leq \theta$:

i) El crédito más grande que se puede tener en la cartera es $a^* = \alpha^*\Pi$, con

$$\alpha^* = \frac{1}{N}(1 + \sqrt{(N\theta - 1)(N - 1)}) \quad (4.3)$$

ii) α^* satisface $\theta < \alpha^* < \sqrt{\theta}$

iii) $f_k < \sqrt{\theta}\Pi \quad \forall k$

iv) Si se otorga el crédito más grande a^* , los demás créditos de la cartera son del mismo tamaño y están dados por:

$$b = \frac{\Pi - a^*}{N - 1} \quad (4.4)$$

Nótese que $\alpha^* \rightarrow \sqrt{\theta}$ y que $b \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$. Lo que significa que a medida que aumenta el número de créditos que forman la cartera bajo la regla de $H(\mathbf{f}) \leq \theta$, la proporción del valor que le corresponde al crédito más grande que se puede tener en la cartera depende sólo de θ , mientras que los restantes créditos tienden a ser cada vez más pequeños. Lo anterior evidencia que sólo se puede tener créditos grandes en la cartera a expensas de reducir otros si se quiere respetar el límite de concentración.

Así, si se elige un nivel máximo de tolerancia para la concentración de $\theta = 0.1393$, la proporción que del valor de la cartera tendría el crédito más grande sería menor pero cercano a $\sqrt{\theta} = 0.3733$ para una cartera muy grande. Para el caso de la cartera de 9 créditos del ejemplo 4.1.1 con valor de $\Pi = \$4,560$, esta cota queda dada por $\sqrt{\theta}\Pi = \$1,702.06$. El crédito más grande que sería admisible es sin embargo de $\alpha^*\Pi = \$1,228.76$, que representa una proporción de $\alpha^* = 0.2695$. Por otro lado, el resto de los 8 créditos deberían ser de $b = \$416.40$. Al calcular el índice de la cartera con la distribución anterior se tiene que $H(\mathbf{f}) = 0.1393$.

Los teoremas y proposiciones anteriores permiten realizar el análisis de la conformación de la cartera en casos extremos bajo la premisa de no rebasar un nivel máximo de tolerancia de la concentración de la cartera medido por el índice HH. Basados en la exposición anterior se puede concluir que para controlar el nivel de riesgo debido a la concentración de la cartera, lo ideal sería tener una combinación de un límite individual para los créditos junto con un nivel máximo de tolerancia medido por el índice HH para la cartera en conjunto, teniendo cierta flexibilidad respecto de que ciertos créditos pudieran rebasar el límite individual siempre y cuando se respete el nivel máximo de tolerancia de concentración. Habiendo realizado la exposición sobre las propiedades principales del índice HH, a continuación se hará el desarrollo del modelo CyRCE generalizado.

4.2. Modelo CyRCE Generalizado

A continuación se hará la exposición del modelo CyRCE general, el cual admite probabilidades de impago distintas para cada cada crédito y correlaciones de impago diferentes para cada crédito; además permite la segmentación de la cartera en grupos que presentan características comunes. CyRCE permite trabajar con información limitada al poderse considerar a cada segmento como un sólo crédito ya que los créditos que conforman el segmento se comportan como si fuese uno sólo; esto se traduce en la optimización de recursos computacionales.

4.2.1. CyRCE Generalizado

Supóngase que del vector de créditos \mathbf{f} se conocen el vector de probabilidades de incumplimiento de los créditos \mathbf{p} y la matriz de varianza-covarianza entre incumplimientos \mathbf{M} y que éstos son exógenos al modelo. Además, el valor de la cartera es igual a la suma de los créditos, es decir, $\Pi = \sum_{k=1}^N f_k$ o equivalentemente en forma matricial $\Pi = \mathbf{1}^T \mathbf{f}$.

Recordemos que en el modelo CyRCE la distribución de pérdidas de la cartera puede ser caracterizada por dos parámetros: la media y la varianza por lo que el

VaR (Valor en riesgo) puede establecerse como la suma de la pérdida esperada más un cierto múltiplo de la desviación estándar de las pérdidas (pérdida inesperada). El VaR para la cartera \mathbf{f} de créditos se calcula según:

$$VaR_\alpha = \mathbf{p}^T \mathbf{f} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{M} \mathbf{f}} \quad (4.5)$$

La suficiencia de capital implica que $K \geq VaR_\alpha$, o lo que es equivalente, dividiendo ambos miembros de la desigualdad entre Π y multiplicando y dividiendo $\mathbf{f}^T \mathbf{M} \mathbf{f}$ por $\mathbf{f}^T \mathbf{f}$:

$$\psi \geq VaR_\alpha / \Pi = \bar{p} + z_\alpha \sqrt{\frac{\mathbf{f}^T \mathbf{M} \mathbf{f}}{\mathbf{f}^T \mathbf{f}} H(\mathbf{f})} = \bar{p} + z_\alpha \sigma \sqrt{H(\mathbf{f})} \quad (4.6)$$

donde

$$\sigma^2 = \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{M} \mathbf{f}}{\mathbf{f}^T \mathbf{f}} = R(\mathbf{f}, \mathbf{M}),$$

conocido como el cociente de Rayleigh, es una medida de la varianza de las pérdidas y

$$\bar{p} = \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{f}}{\Pi},$$

representa la pérdida esperada relativa al valor de la cartera.

De la expresión 4.6, podemos observar que la varianza de las pérdidas relativa al valor de la cartera se forma por el cociente de Rayleigh y el índice de HH y es igual a $\sigma^2 H(\mathbf{f})$.

Resolviendo la desigualdad 4.6 para $H(\mathbf{f})$ y por el teorema 4.1.1, que dice que si cada crédito individual $f_k \leq \theta$, entonces $H(\mathbf{f}) \leq \theta$, se obtiene la cota para límites individuales según:

$$H(\mathbf{f}) \leq \theta \leq \left(\frac{\psi - \bar{p}}{z_\alpha \sigma} \right)^2 = \Theta(\bar{p}, \psi, \alpha), \quad (4.7)$$

que se deberá cumplir para cada crédito individual para eliminar el riesgo de concentración.

Cálculo del CVaR

En el modelo CyRCE se asume que la distribución de pérdidas de la cartera queda especificada completamente por su media y su varianza. Así, supóngase que la variable aleatoria L describe las pérdidas de la cartera y que su media y varianza se representan por μ_L y σ_L^2 , entonces, de 4.5, tenemos que:

$$\mu_L = \mathbf{p}^T \mathbf{f} \quad \text{y} \quad \sigma_L^2 = \mathbf{f}^T \mathbf{M} \mathbf{f}, \quad (4.8)$$

donde se asume que la distribución de pérdidas es normal. Para encontrar el $CVaR_\alpha$ al nivel de confianza α se tiene de acuerdo a la proposición A.2.1 del apéndice A:

$$CVaR_\alpha = \mu_L + \sigma_L \frac{\phi(z^*)}{\Phi(-z^*)}, \quad \text{con } z^* = \frac{Var_\alpha - \mu_L}{\sigma_L} \quad (4.9)$$

y $\phi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ las funciones de densidad y acumulativa de la normal estándar respectivamente.

Modelo CyRCE Gamma

El modelo CyRCE original expuesto considera que la distribución de pérdidas se aproxima con una distribución normal. Sin embargo, como ya se ha mencionado, el modelo sólo requiere que la distribución de pérdidas se pueda caracterizar por su media y su varianza, por lo que se podrían emplear por ejemplo, la distribución lognormal o la distribución Gamma. Esta última resulta conveniente ya que permite captar la asimetría y las colas relativamente más pesadas que presentan las distribuciones de pérdidas crediticias.

Si como en el caso anterior L representa las pérdidas de la cartera y se distribuye Gamma con parámetros α y β , entonces su función de densidad está dada por

$$f(L; \alpha, \beta) = \frac{L^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{L}{\beta}}, \quad (4.10)$$

con media y varianza dadas por $\mu_L = \alpha\beta$ y $\sigma_L^2 = \alpha\beta^2$, lo que implica de acuerdo a 4.8 que

$$\alpha = \frac{(\mathbf{p}^T \mathbf{f})^2}{\mathbf{f}^T \mathbf{M} \mathbf{f}} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{M} \mathbf{f}}{\mathbf{p}^T \mathbf{f}}, \quad (4.11)$$

que permiten calibrar el modelo.

Así, el VaR_{α^*} al nivel de confianza α^{*5} es el cuantil de la distribución de pérdidas que acumula el $(1 - \alpha^*)\%$ en la cola superior y el $CVaR_{\alpha^*}$ de acuerdo a la proposición A.2.2 del apéndice A, viene dado por:

$$CVaR_{\alpha^*} = \alpha\beta \left[\frac{1 - F_L(\alpha + 1, \beta; VaR_{\alpha^*})}{1 - F_L(\alpha, \beta; VaR_{\alpha^*})} \right], \quad (4.12)$$

con $F_L(\cdot)$ la función de probabilidad acumulativa Gamma de las pérdidas.

Análisis de los factores principales del modelo

Las principales implicaciones de las relaciones entre la concentración de la cartera y la cota máxima, la probabilidad de incumplimiento y la suficiencia de capital que permiten verificar la consistencia del modelo se presentan en el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1 .

1. Si $H(\mathbf{f}) > \Theta(p, \psi, \alpha)$, el capital del banco o institución financiera está en riesgo para el nivel de confianza elegido.
2. Si $p > \psi$, el capital del banco es insuficiente para enfrentar el riesgo asumido para cualquier nivel de confianza y valor de la medida de concentración $H(\mathbf{f})$
3. Hay una relación directa entre la concentración admisible Θ y la razón de capitalización ψ y una relación inversa entre la concentración admisible y la probabilidad de incumplimiento p .
4. Si $\Theta(p, \psi, \alpha) > 1$, cualquier nivel de concentración es aceptable.

La demostración del teorema se presenta en Márquez (2006).

⁵ Se utiliza α^* para denotar al nivel de confianza con el propósito de no confundirse con el parámetro α de la distribución Gamma.

El índice de concentración de Herfindahl-Hirschman ajustado por correlación

En el modelo CyRCE, el índice HH permite tener una medida de concentración de la cartera, que sin embargo y debido a su construcción, sería idéntico para una cartera con créditos no correlacionados y para una altamente correlacionada. Por lo anterior, se construye un índice HH ajustado por la correlación entre los créditos que se denota por H' .

Para la obtención de este índice se supone que se tiene una cartera formada por créditos que tienen la misma probabilidad de incumplimiento p con varianza $p(1-p)$ y la misma correlación ρ entre pares con $-1 \leq \rho \leq 1$. La covarianza de incumplimientos entre cualquier par de créditos (i, j) es por tanto:

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} = \sqrt{p_i(1-p_i)} \sqrt{p_j(1-p_j)} \rho_{ij} = p(1-p)\rho \quad \forall ij. \quad (4.13)$$

A partir de esta cartera la expresión equivalente a 4.5 después de algo de álgebra es:

$$VaR_\alpha = \Pi[p + z_\alpha \sqrt{p(1-p)} \sqrt{\rho + (1-\rho)H(\mathbf{f})}], \quad (4.14)$$

que está definida en los reales siempre y cuando $\rho + (1-\rho)H(\mathbf{f}) \geq 0$ ó equivalentemente siempre y cuando se cumpla la desigualdad $\rho \geq H/(H-1)$. Resulta evidente que ésta última condición no será satisfecha por cualquier cartera pues para una cartera formada por N bonos, el valor mínimo que puede adoptar $H(\mathbf{f})$ es $1/N$, y en este caso $\rho \geq 1/(1-N)$ para que no se indetermina la raíz⁶.

Notemos que en la expresión 4.14 la varianza de pérdidas se compone de la varianza Bernoulli $p(1-p)$ y de un componente que refleja el efecto de la concentración y que denotaremos por H' :

$$H' = \rho + (1-\rho)H(\mathbf{f}). \quad (4.15)$$

Para un valor dado de $H(\mathbf{f})$, si los créditos se encuentran correlacionados negativamente, es decir, si $\rho < 0$, H' puede ser negativo o menor a $H(\mathbf{f})$. Si $\rho = 0$, entonces

⁶ El caso extremo se tiene cuando $\rho = -1$, pues en este caso se debería de tener un índice HH=0.5 que sólo se podría obtener con ciertas distribuciones de la cartera conformada por N bonos.

$H' = H(\mathbf{f})$ y si $\rho = 1$, entonces $H' = 1$. Por lo tanto, para tener una interpretación financiera de H' en el modelo CyRCE, es necesario que $0 \leq \rho \leq 1$.

En general, se puede decir que una cartera de créditos correlacionados positivamente entre sí y concentrados según $H(\mathbf{f})$, se comporta exactamente de la misma forma que uno de créditos independientes pero con índice de concentración H' , en lugar de $H(\mathbf{f})$. Así, H' puede considerarse como un índice de concentración ajustado por correlación⁷.

Para calcular H' se requiere de hacer equivalentes las expresiones 4.6 y 4.14 lo que implica que

$$p = \bar{p} = \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{f}}{\Pi} \quad \text{y,}$$

$$\rho = \frac{[R(\mathbf{f}, \mathbf{M}) - p(1 - p)]H(\mathbf{f})}{p(1 - p)[1 - H(\mathbf{f})]}, \quad (4.16)$$

la expresión anterior proporciona una única medida de correlación para la cartera y entre créditos equivalente a las correlaciones existentes entre los diferentes incumplimientos de la cartera.

Nótese que para que ρ sea no negativo, se debe cumplir que $R(\mathbf{f}, \mathbf{M}) \geq p(1 - p)$, pues en caso contrario, al calcular el índice ajustado por correlación H' , se pierde el sentido que se le da en el modelo CyRCE ya que como se mencionó, tiende a decrecer en lugar de aumentar al compararlo con el valor de $H(\mathbf{f})$.

Ejemplo 4.2.1:

Retomando la cartera del ejemplo 4.1.1, completaremos la información necesaria para aplicar el modelo CyRCE y además supondremos que está segmentado en tres partes, aunque en esta primera etapa consideraremos la cartera sin segmentar. Así, la tabla 4.3 completa a la tabla 4.1 referente a los créditos con la matriz de varianza-covarianza \mathbf{M} mostrada también a continuación:

⁷ Claro que según el análisis presentado, es un índice que presenta la limitación de que sólo se puede calcular para una cartera con correlación equivalente no negativa.

Tabla 4.2. Cartera formada por 9 créditos

Número de grupo	Calificación	Monto (f_k) (\$)	Prob. de incum.
1	A	400	0.015
	B	500	0.050
	C	120	0.100
2	D	250	0.200
	C	850	0.100
	B	950	0.050
3	C	350	0.100
	A	490	0.015
	B	650	0.050

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
 0.0148 & 0.0154 & 0.0197 & 0.0073 & 0.0051 & 0.0032 & 0.0029 & 0.0015 & 0.0026 \\
 0.0154 & 0.0475 & 0.0418 & 0.0174 & 0.0098 & 0.0067 & 0.0078 & 0.0011 & 0.0024 \\
 0.0197 & 0.0418 & 0.0900 & 0.0120 & 0.0108 & 0.0092 & 0.0108 & 0.0029 & 0.0065 \\
 \hline
 0.0073 & 0.0174 & 0.0120 & 0.1600 & 0.0900 & 0.0567 & 0.0720 & 0.0039 & 0.0087 \\
 0.0051 & 0.0098 & 0.0108 & 0.0900 & 0.0900 & 0.0353 & 0.0450 & 0.0036 & 0.0078 \\
 0.0032 & 0.0067 & 0.0092 & 0.0567 & 0.0353 & 0.0475 & 0.0340 & 0.0040 & 0.0019 \\
 0.0029 & 0.0078 & 0.0180 & 0.0720 & 0.0450 & 0.0340 & 0.0900 & 0.0044 & 0.0046 \\
 \hline
 0.0015 & 0.0011 & 0.0029 & 0.0039 & 0.0036 & 0.0040 & 0.0044 & 0.0148 & 0.0132 \\
 0.0026 & 0.0024 & 0.0065 & 0.0087 & 0.0078 & 0.0019 & 0.0046 & 0.0132 & 0.0475
 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Se asume por último, que se cuenta con un capital de $K = \$2,000$.

Con la información proporcionada se obtiene lo siguiente:

- El VaR al $\alpha = 0.95$, calculado de acuerdo a 4.5 es:

$$VaR_{0.95} = 300.35 + 1.645(663.84) = 1,392.27.$$

- $CVaR_{0.95} = 1,669.67$
- $\bar{p} = \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{f}}{\Pi} = 0.0658$ y $\sigma^2 = R(\mathbf{f}, \mathbf{M}) = 0.1521$.
- $\psi = 2,000/4,560 = 0.4386$, por lo que se cumple la relación de suficiencia de capital dada por 4.6

$$\psi = 0.4386 > VaR_{0.95}/\Pi = 0.3053.$$

- $\Theta(\bar{p}, \psi, \alpha) = \left(\frac{0.4386 - 0.0659}{(1.645)(0.39)} \right)^2 = 0.3376$, por lo que el límite individual de cada crédito como proporción de la cartera no debe ser mayor a esta cantidad; además se cumple 4.7:

$$H(\mathbf{f}) = 0.1393 \leq \theta \leq \Theta(\bar{p}, \psi, \alpha) = 0.3376,$$

es decir, la medida HH de concentración de la cartera es menor estricto a la cota individual de cada crédito.

Lo anterior significa que para no tener riesgo por concentración, se debe cumplir que cada crédito individual $f_k \leq 1,539.28$, que sí se cumple en nuestra cartera.

- $\rho = 0.2383$ y $H' = 0.3445$, que significa que nuestra cartera tiene una correlación equivalente a la de una cartera cuyos créditos tienen la misma correlación igual a 0.2383, que podríamos considerar no tan alta y al mismo tiempo tiene una medida de concentración ajustada por la correlación de 0.3445, que es mayor a la que tendría si no tuviera correlación, que es igual a $H(\mathbf{f}) = 0.1393$.

Por último, si utilizamos una distribución Gamma para las pérdidas de nuestra cartera, tendríamos los siguientes resultados:

- $VaR_{0.95} = 1,538.17$,
- $CVaR_{0.95} = 2,618.96$,
- $\psi = 0.4386 \geq VaR_{0.95}/\Pi = 0.3373$,

donde observamos que se sigue cumpliendo la relación de suficiencia de capital. Sin embargo, si se realiza el cálculo del VaR y del $CVaR$ al $\alpha = 0.99$, la razón para la suficiencia de capital ya no se cumple⁸.

Del análisis de resultados y por el teorema 4.2.1, se puede concluir que la cartera de nuestro ejemplo no presenta riesgo de concentración.

4.2.2. CyRCE Generalizado: segmentación de la cartera

El modelo CyRCE permite segmentar la cartera en grupos de créditos que presentan características comunes, y donde los elementos que determinan las pérdidas

⁸ Mientras que con la distribución normal se sigue cumpliendo.

potenciales que pueden ocasionar las pérdidas del grupo son iguales para todos sus miembros. Así, si se tuviera una cartera con créditos otorgados a empresas de diferentes sectores, convendría particionar la cartera en esos sectores, pudiéndose tener el segmento de la construcción, el comercial, el de servicios, el hipotecario, etc.

En el modelo CyRCE no existe restricción alguna para que cada crédito tenga una probabilidad de incumplimiento diferente y las covarianzas (y por tanto las correlaciones) puedan ser diferentes entre cualquier pareja de créditos de la cartera; esto sin embargo, requeriría de información muy detallada que no siempre se puede tener en países con desarrollo medio. Lo anterior no representa problema para el modelo en cuestión pues de hecho se puede implementar con información limitada, lo que además, reduce todavía más los cálculos computacionales.

Considérese una partición en h segmentos de la cartera. El modelo CyRCE con información limitada hace los siguientes supuestos:

- i) La probabilidad de incumplimiento es la misma para los créditos que pertenecen al i -ésimo segmento, pero diferente a la de los créditos del j -ésimo segmento .
- ii) La covarianza (y por lo tanto la correlación) de incumplimientos entre cada par de créditos del i -ésimo segmento es la misma
- iii) La covarianza (y por lo tanto la correlación) de incumplimientos entre pares de un crédito que pertenece al i -ésimo segmento con un crédito del j -ésimo segmento es la misma.

Como el modelo con información limitada está contenido en el modelo general, se expondrá el caso más general de la cartera segmentada en el que no existe restricción alguna para que cada crédito tenga una probabilidad de incumplimiento diferente y las covarianzas (y por tanto las correlaciones) puedan ser diferentes entre cualquier pareja de créditos de la cartera.

Análisis de concentración por segmentos individuales

Se tiene una cartera segmentada en h grupos, lo que significa que el vector \mathbf{f} , tiene la partición $\mathbf{f}^T = (\mathbf{f}_1^T, \dots, \mathbf{f}_h^T)$, donde \mathbf{f}_i es un vector que contiene los saldos de los créditos que pertenecen al i -ésimo segmento. En concordancia con la partición de la cartera, el vector de probabilidades de incumplimiento \mathbf{p} se particiona en $(\mathbf{p}_1^T, \dots, \mathbf{p}_h^T)$ y la matriz de covarianzas se particiona de la siguiente manera:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{C}_{12} & \cdots & \mathbf{C}_{1h} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{M}_2 & \cdots & \mathbf{C}_{2h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{h1} & \mathbf{C}_{h2} & \cdots & \mathbf{M}_h \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

donde cada submatriz \mathbf{M}_i corresponde a la matriz de varianza-covarianza de la probabilidad de impago del grupo i y tiene dimensión $n_i \times n_i$, donde n_i es el número de créditos en el segmento i y las matrices \mathbf{C}_{ij} contienen la covarianzas de las probabilidades de impago entre los créditos del grupo i y los del grupo j .

El valor de la cartera asociado al segmento i está dado por

$$\Pi_i = \sum_{k \in \mathbf{f}_i} f_k, \quad \text{con } \Pi = \sum_{i=1}^h \Pi_i.$$

La proporción del capital asignado al segmento i se denota por γ_i . Cumple con $\gamma_i \in [0, 1] \forall i$, $\sum_{i=1}^h \gamma_i = 1$ y se calcula de acuerdo a:

$$\gamma_i = \frac{\Pi_i}{\Pi}.$$

Así, el monto de capital asignado al segmento i cumple con:

$$K_i = \gamma_i K.$$

Para el análisis de concentración en segmentos individuales se particiona la matriz \mathbf{M} en \mathbf{S}_i , en donde cada una de éstas matrices considera las correlaciones entre

incumplimientos de los créditos del segmento i con los demás segmentos pero elimina las correlaciones entre los demás grupos que no inciden directamente sobre el grupo en cuestión. La representación de las matrices S_i para los h segmentos es la siguiente:

Para S_1 se tiene que,

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\mathbf{M}_1 & \mathbf{C}_{12} & \cdots & \mathbf{C}_{1h} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{h1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

mientras que para alguna S_i se tiene,

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{C}_{1i} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{i1} & \cdots & 2\mathbf{M}_i & \cdots & \mathbf{C}_{ih} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{C}_{hi} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

y por último, la matriz S_h es de la forma,

$$\mathbf{S}_h = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{1h} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{h-1h} \\ \mathbf{C}_{h1} & \cdots & \mathbf{C}_{hh-1} & 2\mathbf{M}_h \end{bmatrix}$$

Las matrices anteriores cumplen con la propiedad de que,

$$\sum_{i=1}^h S_i = \mathbf{M}.$$

Ahora se requiere tener una expresión para calcular el VaR^i de cada segmento i , que en este caso es

$$VaR_\alpha^i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{f}_i + z_\alpha \sqrt{\mathbf{f}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{f}_i}, \quad \text{para } i = 1, \dots, h,$$

el problema con la expresión anterior es que no cumple con la propiedad de subaditividad, es decir, la suma de los VaR^i no es igual al VaR de la cartera no segmentada. Este inconveniente, se soluciona obteniendo el valor de la siguiente constante:

$$\phi = \frac{\sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{M} \mathbf{f}}}{\sum_{i=1}^h \sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{S}_i \mathbf{f}}},$$

con lo que el VaR^i de cada segmento es:

$$VaR_\alpha^i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{f}_i + z_\alpha \phi \sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{S}_i \mathbf{f}}, \quad \text{para } i = 1, \dots, h \quad (4.19)$$

y se cumple que,

$$\sum_{i=1}^h VaR_\alpha^i = VaR_\alpha = \mathbf{p}^T \mathbf{f} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{M} \mathbf{f}}. \quad (4.20)$$

Otra forma de escribir la expresión 4.19 que permite visualizar el impacto de la dependencia del grupo i con los demás grupos es:

$$VaR_\alpha^i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{f}_i + z_\alpha \phi \sqrt{\mathbf{f}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{f}_i + \sum_{\{j|j \neq i\}} \mathbf{f}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{f}_j}, \quad \text{para } i = 1, \dots, h. \quad (4.21)$$

La suficiencia de capital para cada segmento implica que $K_i \geq VaR_\alpha^i$, o lo que es equivalente, dividiendo ambos miembros de la desigualdad entre $\Pi_i = \mathbf{1}^T \mathbf{f}_i$:

$$\psi_i \leq VaR_\alpha^i / \Pi_i = \bar{p}_i + z_\alpha \phi \sqrt{R_i(\mathbf{f}_i, \mathbf{M}_i) H(\mathbf{f}_i) + \frac{1}{\Pi_i^2} \sum_{\{j|j \neq i\}} \mathbf{f}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{f}_j}, \quad (4.22)$$

para $i = 1, \dots, h$, donde:

$$\sigma_i^2 = \frac{\mathbf{f}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{f}_i}{\mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i} = R_i(\mathbf{f}_i, \mathbf{M}_i),$$

y

$$\bar{p}_i = \frac{\mathbf{p}_i^T \mathbf{f}_i}{\Pi_i}.$$

De tal manera, para obtener la cota máxima de concentración que puede soportar el segmento i hay que resolver la desigualdad 4.22 para $H(\mathbf{f}_i)$ y haciendo referencia al teorema 4.1.1 se obtienen también los límites individuales para los créditos del segmento i :

$$H(\mathbf{f}_i) \leq \theta_i \leq \left(\frac{\psi_i - \bar{p}_i}{z_\alpha \phi \sigma_i} \right)^2 - \frac{1}{(\sigma_i \Pi_i)^2} \sum_{\{j|j \neq i\}} \mathbf{f}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{f}_j = \Theta_i(\bar{p}_i, \psi_i, \alpha, \phi). \quad (4.23)$$

Nótese que la cota de concentración y por lo tanto los límites individuales para los créditos del segmento i dependen de dos factores a saber:

1. La razón de suficiencia de capital del segmento i dado por:

$$\left(\frac{\psi_i - \bar{p}_i}{z_\alpha \phi \sigma_i} \right)^2.$$

2. La corrección por la correlación con las probabilidades de impago de los créditos de otros segmentos

$$\frac{1}{(\sigma \Pi_i)^2} \sum_{\{j|j \neq i\}} \mathbf{f}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{f}_j.$$

El punto 2) anterior concuerda con la intuición, dado que una correlación alta de impago con los créditos de otros segmentos, indica que se puede tolerar menos concentración en el grupo i .

Si la expresión 4.22 se cumple para todos los segmentos de la cartera, entonces la suficiencia de capital para toda la cartera medida por la razón de capitalización ψ se puede obtener a partir de la suficiencia de capital de cada segmento, es decir:

$$\psi = \sum_{i=1}^h \gamma_i \psi_i. \quad (4.24)$$

De hecho, la razón de capitalización de cada segmento es igual a la razón de capitalización de toda la cartera, ya que,

$$\psi_i = \frac{K_i}{\Pi_i} = \frac{\gamma_i K}{\Pi_i} = \frac{\Pi_i K}{\Pi \Pi_i} = \frac{K}{\Pi} = \psi. \quad (4.25)$$

Por último, sólo queda mencionar que el índice HH ajustado por concentración del segmento i se obtiene con el mismo razonamiento que para el caso de la cartera completa, por lo que la expresión equivalente a 4.15 para el segmento i es:

$$H'_i = \rho_i + (1 - \rho_i)H(\mathbf{f}_i), \quad (4.26)$$

con

$$p_i = \bar{p}_i = \frac{\mathbf{p}_i^T \mathbf{f}_i}{\Pi_i} \quad \text{y,} \quad (4.27)$$

$$\rho_i = \frac{[R_i(\mathbf{f}_i, \mathbf{M}_i) - p_i(1 - p_i)]H(\mathbf{f}_i)}{p_i(1 - p_i)[1 - H(\mathbf{f}_i)]}.$$

Ejemplo 4.2.1:

Con la información proporcionada en el ejemplo 4.2.1, ahora se realizará el análisis de la cartera en sus tres grupos.

Nótese que la matriz de covarianzas de incumplimientos dada por 4.17 ya se encuentra particionada según 4.18 y en este ejemplo en particular adopta la forma abreviada siguiente:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{M}_3 \end{bmatrix}$$

y cada matriz S_i es por lo tanto igual a:

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\mathbf{M}_1 & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{21} & 2\mathbf{M}_2 & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{S}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} & 2\mathbf{M}_3 \end{bmatrix}.$$

Para realizar el análisis de suficiencia de capital por segmento seguimos considerando que se tiene un capital total $K = 2,000$.

Así, según la metodología desarrollada para segmentos individuales de la cartera,

el valor del segmento 1 se obtiene de sumar el valor de los saldos de los tres créditos que lo forman, obteniendo que $\Pi_1 = \$1,020$. La proporción γ_1 que del capital le corresponde a este segmento es igual a $\Pi_1/\Pi = 0.2237$, lo que implica que $K_1 = 447.37$ y por lo tanto, $\psi_1 = K_1/\Pi_1 = 0.4386$. De hecho, por 4.25, $\psi = \psi_i = 0.4386$ para $i = 1, 2, 3$. A continuación se resumen las características principales de los tres segmentos de la cartera, necesarios para implementar CyRCE:

Recordemos que para obtener el VaR de cada segmento que cumpla con la adi-

Tabla 4.3. Resumen de los segmentos de la cartera

Grupo	Π_i	$H(\mathbf{f}_i)$	γ_i	K_i
1	1,020	0.4079	0.2237	447.37
2	2,400	0.3142	0.5263	1,052.63
3	1,140	0.5098	0.2500	500.00

tividad para el VaR de la cartera, es necesario obtener el valor de la constante ϕ que en este caso es:

$$\phi = \frac{\sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{M} \mathbf{f}}}{\sum_{i=1}^h \sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{S}_i \mathbf{f}}} = \frac{663.84}{1,026.41} = 0.6468,$$

con lo que podemos calcular el VaR al nivel $\alpha = 0.95$ de los tres segmentos de acuerdo a 4.19:

$$VaR_{0.95}^1 = 43 + (1.645)(0.6468)\sqrt{49,506.41} = 279.70$$

$$VaR_{0.95}^2 = 217.50 + (1.645)(0.6468)\sqrt{343,874.17} = 841.34$$

$$VaR_{0.95}^3 = 39.85 + (1.645)(0.6468)\sqrt{47,306.83} = 271.23$$

Una vez obtenidos los VaR por segmentos, se puede verificar la suficiencia de capital para cada segmento:

$$\psi = 0.4386 > VaR_{0.95}^1/\Pi_1 = 0.2742,$$

$$\psi = 0.4386 > VaR_{0.95}^2/\Pi_2 = 0.3506,$$

$$\psi = 0.4386 > VaR_{0.95}^3/\Pi_3 = 0.1130$$

y se pueden establecer las cotas para las proporciones de los límites de cada segmento que debe cubrir cada crédito comprendido en el segmento i de acuerdo a 4.23

$$\begin{aligned}\theta_1 &< \left(\frac{0.4386 - 0.0422}{(1.645)(0.6468)(0.2596)} \right)^2 - \frac{1}{((0.2596)(1,020))^2} (20,913.49) = 1.7629, \\ \theta_2 &< \left(\frac{0.4386 - 0.0906}{(1.645)(0.6468)(0.4159)} \right)^2 - \frac{1}{((0.4159)(2,400))^2} (30,783.68) = 0.5876, \\ \theta_3 &< \left(\frac{0.4386 - 0.0350}{(1.645)(0.6468)(0.2199)} \right)^2 - \frac{1}{((0.2199)(1,140))^2} (15,252.98) = 2.7333,\end{aligned}$$

donde además de puede verificar que las medidas de concentración por segmento HH son también menores a las cotas, por lo que se puede decir que no existe riesgo de concentración en el análisis por segmento.

Las cotas de los límites de crédito son:

$$\begin{aligned}f_k^1 &< (1.7629)(1,020) = 1,798.13, \\ f_k^2 &< (0.5876)(2,400) = 1,410.29, \\ f_k^3 &< (2.7333)(1,140) = 3,115.93,\end{aligned}$$

límites que sin duda se cumplen en la cartera en cuestión.

Por último, las correlaciones equivalentes y los índices de concentración ajustados por correlación para cada segmento son:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 0.4606, & \text{y} & & H'_1 &= 0.6808, \\ \rho_2 &= 0.5036, & \text{y} & & H'_1 &= 0.6596, \\ \rho_3 &= 0.4515, & \text{y} & & H'_1 &= 0.7311,\end{aligned}$$

En la tabla 4.4, se muestra el resumen de los cálculos para los tres segmentos: De los resultados mostrados se puede concluir que la cartera analizada en sus tres segmentos no presenta riesgo por concentración medido por el índice HH, incluso si se considera el ajuste por correlación. Así, por ejemplo, el segmento 2 que es el que presenta mayor correlación equivalente presenta el índice HH ajustado más

Tabla 4.4. Resumen de resultados para los segmentos de la cartera

Grupo	Π_i	$H(\mathbf{f}_i)$	$Var_{0.95}^i$	$R_i(\mathbf{f}_i, \mathbf{M}_i)$	f_k^i	ρ_i	H'_i	Desv. est.
1	1,020	0.4079	279.70	0.0674	1,798.13	0.4606	0.6806	0.1658
2	2,400	0.3142	841.34	0.1730	1,410.29	0.5036	0.6596	0.2331
3	1,140	0.5098	271.23	0.0484	3,115.93	0.4515	0.7311	0.1100

pequeño de los tres.

Tampoco se observa un problema con la suficiencia de capital en ninguno de los tres segmentos y como consecuencia, las cotas de los límites para cada segmento son bastante altas en comparación con la magnitud de los créditos de la cartera. En conclusión, de acuerdo al modelo CyRCE, la cartera de nuestro ejemplo, ya sea tomada en conjunto o dividiéndola en tres segmentos, presenta suficiencia de capital y carece de riesgo de concentración.

4.2.3. CyRCE Generalizado incluyendo tasas de recuperación

En la exposición de las secciones anteriores, el vector \mathbf{f} está formado por los saldos de los créditos pendientes por cobrar y se ha supuesto que en caso de incumplimiento se pierde la totalidad del crédito. En la realidad sin embargo, es posible recuperar una proporción r_k de cada crédito, por lo que dado incumplimiento *no todo está perdido*.

Supongamos que se conoce la proporción $\lambda_k = 1 - r_k$ que sobre el crédito f_k se espera perder dado incumplimiento. Entonces,

$$\mathbf{f}^P = \mathbf{\Lambda} \mathbf{f},$$

donde $\mathbf{f}^P \in \mathbb{R}^N$ es el vector de pérdidas de la cartera y $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz diagonal de orden N que contiene a λ_k en la posición λ_{kk} para $k = 1, 2, \dots, N$.

El valor de las pérdidas de la cartera dado incumplimiento Π^P es igual a $\sum_{k=1}^N \lambda_k f_k$ o equivalentemente en forma vectorial:

$$\Pi^P = \mathbf{f}^{P^T} \mathbf{1},$$

con $\mathbf{1}$ un vector orden N de unos.

El trabajar con pérdidas de la cartera en lugar de montos de saldos, no cambia en esencia los cálculos en el modelo, aunque sí se deben realizar algunos ajustes al momento de obtener los límites individuales y se debe poner atención a la interpretación de los resultados en general.

La razón de capitalización del banco respecto al valor de las pérdidas de la cartera se denotará ahora como $\psi^p = \frac{K}{\Pi^p}$ y estará en términos del capital económico respecto a las pérdidas de la cartera.

El índice de HH será calculado tomando en cuenta el vector de pérdidas de la cartera y será interpretado en términos de concentración de pérdidas. Así,

$$H(\mathbf{f}^p) = \frac{\mathbf{f}^p T \mathbf{f}^p}{(\Pi^p)^2}.$$

El cálculo del VaR de acuerdo a 4.5 se obtiene ahora como:

$$VaR_\alpha = \mathbf{f}^p T \mathbf{f}^p + z_\alpha \sqrt{\mathbf{f}^p T \mathbf{M} \mathbf{f}^p} \quad (4.28)$$

y la expresión equivalente a 4.7 es:

$$H(\mathbf{f}^p) \leq \theta \leq \left(\frac{\psi - \bar{p}}{z_\alpha \sigma} \right)^2 = \Theta(\bar{p}, \psi^p, \alpha), \quad (4.29)$$

con \bar{p} y σ calculadas tomando en cuenta al vector \mathbf{f}^p . Obviamente el VaR considerando tasas de recuperación será menor al caso en el que no se consideran y por lo tanto las necesidades de capital del banco o institución financiera deberán ser menores⁹.

Para el caso del modelo CyRCE Generalizado con análisis de segmentos, la incorporación de tasas de recuperación se hace de manera análoga.

Ejemplo 4.2.2:

Consideremos que los créditos de la cartera del ejemplo 4.2.1 tienen las siguientes tasas de recuperación de acuerdo a su calificación: A , 52%; B , 45%; C , 30% y

⁹ De hecho a este capital se le llama capital económico

D , 21%. Tomando esto en consideración, el valor de las pérdidas de la cartera es de $\Pi^p = 2,703.7$ y el valor del índice HH de concentración de pérdidas es de $H(\mathbf{f}^p) = 0.1407$, que no es muy diferente al de saldos de la cartera.

El VaR al $\alpha = 0.95$ es ahora de

$$VaR_{0.95} = 0.0725 + (1.645)\sqrt{182,422.88} = 898.59 \quad (4.30)$$

y el $CVaR_{0.95} = 1,077.06$. Para el análisis de suficiencia de capital se debe tener un valor de capital económico menor a $K = 2,000$ ya que éste valor resulta muy elevado ahora que se considera que se recupera una parte de los créditos. Obviamente, para el nivel de capital que se tiene, la cartera no presenta problemas de suficiencia de capital.

Implementación de los modelos para créditos en México

En los capítulos anteriores, hemos revisado algunos de los modelos de medición de riesgo más usados en la actualidad. En el presente capítulo aplicaremos algunos de ellos para créditos en México, de acuerdo al contexto de cada modelo y realizaremos simulaciones para compararlos.

5.1. Modelo estructural de Merton

Para realizar la aplicación al modelo estructural de Merton, no necesitamos muchos insumos (de ahí que su uso y aplicación se haya difundido mucho). Por los supuestos del modelo y por la forma en que fue utilizado en el ejemplo del capítulo 2, para aplicarlo a una firma, lo único que necesitamos conocer es el valor de sus activos y el de sus acciones para el tiempo inicial ($t = 0$); también necesitamos tener una estimación de la volatilidad del valor de sus acciones (por ejemplo la volatilidad histórica) y de las correlaciones entre las acciones en el caso de que no sean independientes; la tasa de interés libre de riesgo del mercado y el horizonte de tiempo para el que haremos los cálculos. Comenzaremos primero por aplicar el modelo a cada firma individualmente y sin considerar la correlación entre ellas, para después formar una cartera con las cuatro empresas considerando la correlación.

5.1.1. Caso de cuatro empresas mexicanas individualmente

Un sector industrial que es claro reflejo del nivel de actividad de una economía es el sector de la construcción. Se dice que cuando la industria de la construcción está en expansión (o recesión), también lo está la economía de un país, por lo que conocer la situación financiera y los riesgos financieros de las principales empresas del sector de la construcción en México resulta bastante interesante.

Aplicaremos el modelo de Merton a cuatro empresas mexicanas relacionadas con el sector de la construcción: Cemex, Homex, Geo y PInfra. La información necesaria para la aplicación del modelo se obtiene para marzo de 2008 y se toma un horizonte de tiempo de un año, por lo que calculamos la medidas de riesgo para finales de marzo de 2009. Para cada empresa se calculó el rendimiento diario del valor de sus acciones con la fórmula

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

y la media y desviación estándar como

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2},$$

Por último, para las covarianzas entre los rendimientos de las acciones de la empresa i con la empresa j se utilizó la fórmula:

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t^i - \bar{r}_i)(r_t^j - \bar{r}_j)},$$

mientras que las correlaciones se obtuvieron mediante

$$\rho_{ij} = \frac{S_{ij}}{S_i S_j}, \quad (5.1)$$

donde S_i es la desviación estándar de la i -ésima empresa.

A continuación, se describe brevemente el objeto del giro de las empresas estudiadas.

Cemex

Cementos Mexicanos (Cemex), es una compañía mexicana productora de cemento y concreto cuyas obligaciones en los últimos años se han incrementado considerablemente a consecuencia de su expansión en Europa ¹.

Homex

Desarrolladora Homex S.A. de C.V. (Homex) es una empresa dedicada al desarrollo y comercialización de locales comerciales así como al diseño y edificación de viviendas.

Geo

Grupo Geo es una empresa dedicada a la construcción y comercialización de vivienda familiar principalmente.

PIinfra

Promotora y Operadora de infraestructura S.A. de C.V. (nace a partir de Tribasa) se dedica a la operación, financiamiento, construcción y promoción de la infraestructura en México.

En la tabla 5.1 se presenta la información financiera básica de las cuatro empresas para implementar el modelo de Merton: el valor de los activos en libros V_0 , el valor de las acciones S_0 y el valor de sus pasivos D_0 para marzo de 2008. Se presenta también la estimación histórica anualizada de la media y desviación estándar de los rendimientos diarios de las acciones (μ y σ_S)² y el rendimiento del activo libre de riesgo³. Puesto que $T=1$, calcularemos las medidas de riesgo en el horizonte de tiempo de un año.

¹ En particular tras la compra de la británica RMC.

² La muestra utilizada para los cálculos se obtuvo del 3 de enero del 2005 al 31 de marzo de 2008. El tamaño de muestra para cada empresa difiere dependiendo de la disponibilidad de información; para Cemex $n=817$ para Homex $n=811$, para Geo $n=817$ y para PInfra $n=573$.

³ Cetes a 28 días según la subasta del último martes de marzo.

Tabla 5.1. Información de cuatro empresas mexicanas para marzo de 2008 (en miles de pesos)

Variable	CEMEX	HOMEX	GEO	PINFRA
V_0	542,314,373	24,289,644	19,619,394	14,873,087
S_0	204,152,879	9,786,503	8,684,908	1,889,714
D_0	338,161,494	14,503,141	10,934,486	12,983,373
μ	0.0985	0.2736	0.1272	1.0465
σ_S	0.3139	0.3562	0.3621	0.5922
r	0.0751	0.0751	0.0751	0.0751
T	1	1	1	1

En la tabla 5.2 se presentan las correlaciones del rendimiento de las acciones de las cuatro empresas en el período considerado; cabe mencionar, que a partir de esta tabla se puede obtener la matriz de varianzas-covarianzas de los incumplimientos⁴ necesaria en el modelo CyRCE despejando de 5.1 para tener $S_{ij} = \rho_{ij}S_iS_j$. El problema consiste en obtener el valor cada S_i , que de acuerdo a la metodología empleada en la ejemplificación del modelo CyRCE (Márquez, 2002b) puede ser obtenida a partir de las probabilidades de los incumplimientos de acuerdo a $S_i^2 = p_i(1 - p_i)$, la varianza Bernoulli.

Resolviendo el sistema no lineal descrito en el apéndice B por el método de Newton-

Tabla 5.2. Correlaciones de los rendimientos de los activos para las 4 empresas

Variable	CEMEX	HOMEX	GEO	PINFRA
CEMEX	1	0.4747	0.4925	0.2260
HOMEX	0.4747	1	0.4268	0.1309
GEO	0.4925	0.4268	1	0.2163
PINFRA	0.2260	0.1309	0.2163	1

Raphson, obtenemos el valor nominal del bono (o en términos más intuitivos, el valor de los pasivos) que las empresas deberán pagar en un año, así como el valor de la volatilidad implícita σ_V de los rendimientos del valor de los activos de las firmas. La tabla 5.3 muestra los resultados para la cuatro empresas.

⁴ Aquí se supone que las correlaciones de los incumplimientos son iguales a las correlaciones de los rendimientos de las acciones de la firma, en el contexto del modelo de Merton.

Tabla 5.3. Resultados del sistema no lineal (*Por Newton-Raphson*) para el valor de la deuda a un año (en miles de pesos) y para la volatilidad implícita del rendimiento del valor de los activos

Variable	CEMEX	HOMEX	GEO	PINFRA
F	364,535,838.42	15,634,384.02	11,787,382.63	14,059,162.59
σ_V	0.1193	0.1434	0.1618	0.0987

Medidas de riesgo

De acuerdo a la teoría desarrollada en el capítulo 2, se presentan en la tabla 5.4 las medidas de riesgo del modelo; se presentan en primer lugar la probabilidad de incumplimiento PI y la tasa del rendimiento por el riesgo de incumplimiento r_{RI} , pues son dos de los indicadores más importantes a considerar. Se muestran además la Razón de Apalancamiento RA , el Valor Esperado del valor de los activos EV , el Valor de Recuperación Esperado Descontado $VRED$, la Deficiencia Media Descontada DMD y el Costo del Incumplimiento CI . Para marzo de 2008,

Tabla 5.4. Medidas de riesgo en el modelo de Merton aplicado a cuatro empresas mexicanas (en miles de pesos)

Variable	CEMEX	HOMEX	GEO	PINFRA
$PI = \Phi(-d_2)$	0.00004832	0.00021193	0.00020676	0.10008353
r_{RI}	0.00000129	0.00000735	0.00000804	0.00450479
RA	0.6236	0.5971	0.5573	0.8769
EV	580,463,837.44	25,916,257.71	20,874,390.26	15,955,087.94
$VRED$	329,103,336.21	14,000,544.04	10,509,210.73	12,456,288.99
DMD	9,058,595.53	502,703.50	425,363.21	585,703.26
CI	437.75	106.54	87.95	58,619.25

Cemex tenía activos con un valor de 542,314.374 millones de pesos, pasivos por 338,161.494 y una volatilidad histórica estimada de 31.39% sobre los rendimientos de sus acciones. Al realizar los cálculos pertinentes, obtuvimos que el valor de sus pasivos a un año sería de 364,535.838 millones de pesos, el valor esperado del valor de los activos se encontraría en 580,463.837, con una volatilidad estimada de 11.93% sobre el rendimiento del valor de sus activos. La probabilidad de que Cemex

incumpliera al año según el modelo de Merton sería de 0.0048 % y el rendimiento por el riesgo de adquirir bonos emitidos por Cemex sería de 0.0001 %. En caso de incumplimiento de Cemex, se esperaría recuperar 329,103.336 millones de pesos a valor de marzo de 2008 sobre la deuda o lo que es lo mismo, perder 9,058.595 millones de pesos. Por último, si los tenedores de los bonos de deuda de Cemex, quisieran cubrirse por el riesgo de incumplimiento, deberían pagar una prima de \$437,750 suscribiendo una opción Put con el valor nominal del bono como precio de ejercicio. En la figura 5.1 se muestra la distribución del valor de los activos de Cemex y se delimita el área que representa la probabilidad de incumplimiento.

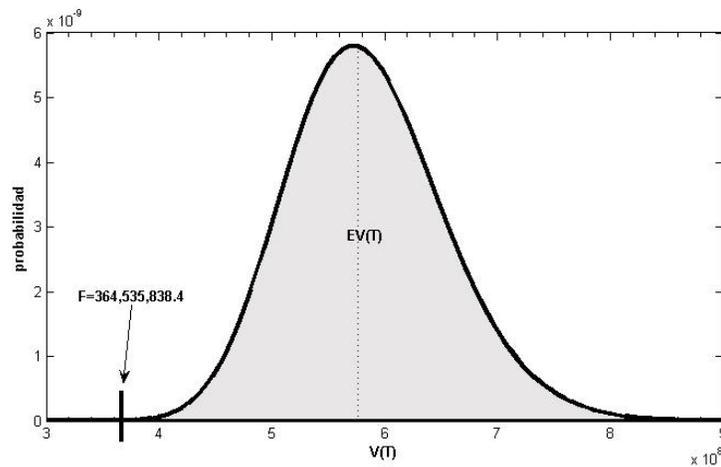


Fig. 5.1. Distribución del valor de los activos de Cemex V_T para $T=1$

La interpretación para las tres empresas restantes se realiza de la misma manera. Cabe resaltar que las probabilidades de incumplimiento son pequeñas, excepto para el caso de PInfra, pues tiene una probabilidad de incumplimiento de 10.01 %; sin embargo, de acuerdo al modelo, el rendimiento por tomar el riesgo y comprar deuda de PInfra sólo es del 0.45 % y el costo por cubrirse de las pérdidas es de 58.619 millones de pesos... algo elevado en comparación con las demás empresas. En las figuras 5.2-5.4 se presentan las distribuciones del valor de los activos.

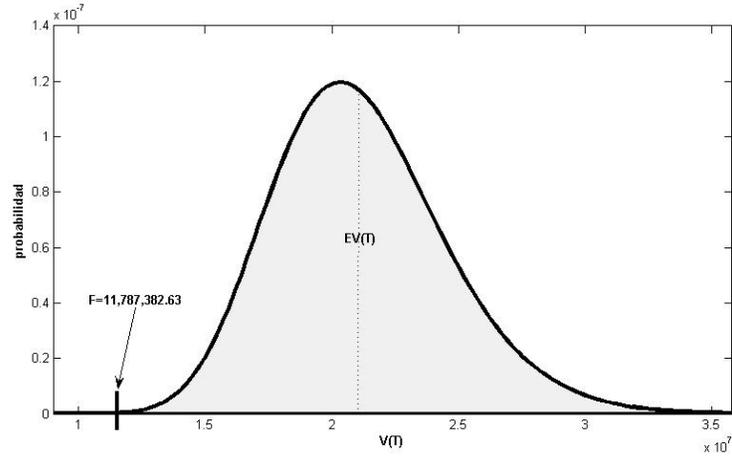


Fig. 5.2. Distribución del valor de los activos de Geo V_T para $T=1$

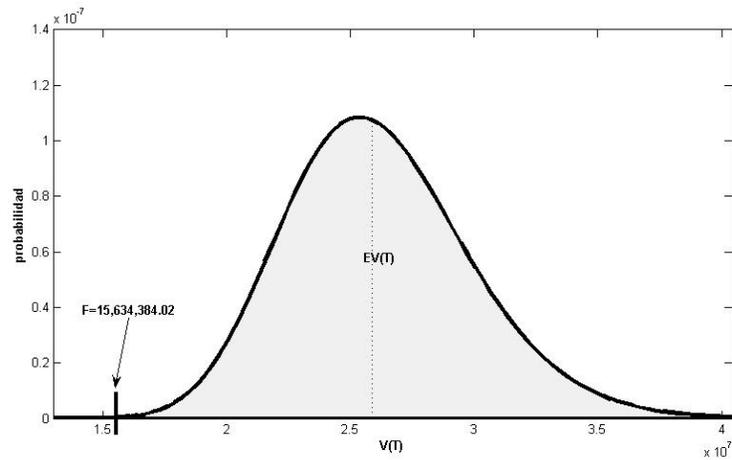


Fig. 5.3. Distribución del valor de los activos de Homex V_T para $T=1$

5.1.2. Comparación de resultados estimados con datos reales

Los resultados obtenidos concernientes al valor de los activos al tiempo $T = 1$ y al valor del bono F , así como de las demás medidas de riesgo, se obtuvieron con base en información financiera al tercer trimestre del 2008. Para efectos de comparación y de contrastación con los resultados del modelo, en la tabla 5.5 se presenta la información financiera relevante reportada (observada) por las empre-

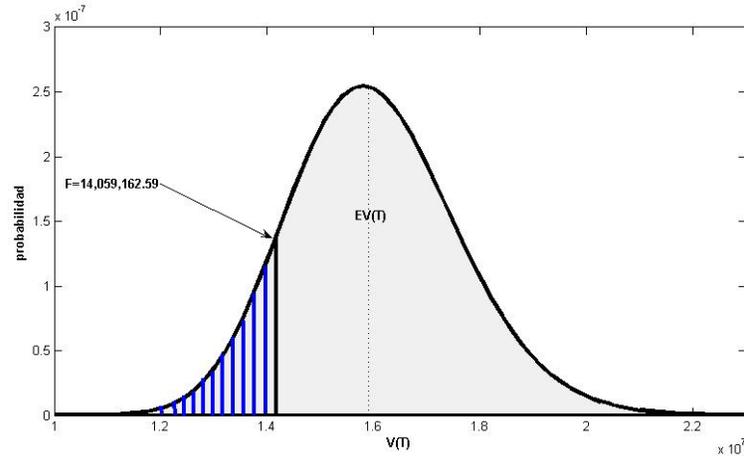


Fig. 5.4. Distribución del valor los activos de PInfra V_T para $T=1$

sas para el primer trimestre de 2009⁵.

Tabla 5.5. Información financiera de las cuatro empresas para el primer trimestre de 2009 presentada en sus Estados de Situación Financiera (en miles de pesos)

Variable	CEMEX	HOMEX	GEO	PINFRA
V^o	625,339,668	30,903,355	25,877,111	15,729,341
F^o	389,372,723	19,086,011	15,260,865	13,403,426

FUENTE: Páginas electrónicas de las compañías.

Así, al primer trimestre de 2009, correspondiente al mes de marzo, el valor observado de los activos de Cemex es de \$625,339,668, mientras que el valor esperado estimado del modelo es de \$580,463,837 (Ver tabla 5.4); notamos que existe una subestimación del valor de los activos. Para el caso de la deuda⁶, el valor observado de los pasivos es de \$389,372,723, mientras que el valor de F arrojado por el modelo

⁵ La información correspondiente al valor de los activos y al de la deuda para 2008 y 2009 se obtuvo de los estados de situación financiera trimestrales, ésta información se encuentra disponible en línea en las páginas electrónicas de las compañías.

⁶ Considerada de acuerdo al modelo como el total de los pasivos

es de \$364,535,838 (Ver tabla 5.3), aquí se aprecia una subestimación de casi 25 millones de pesos en términos absolutos.

Realizando la comparación para las empresas restantes notamos que excepto para PInfra, las estimaciones del modelo de Merton tienden a subestimar el nivel de deuda y como consecuencia, la probabilidad de incumplimiento⁷.

5.1.3. Conformación de la cartera

En la sección 2.2.5, se planteó el problema de la conformación de una cartera formada por bonos de deuda cuyas medidas de riesgo han sido calculadas bajo el esquema del modelo de Merton. Se consideró el caso más sencillo en el que los bonos son independientes entre ellos. En esta sección, se considerará la correlación y se obtendrán las medidas de riesgo de interés en este trabajo para la cartera. Se está en posibilidad de analizar la cartera correlacionada pues la metodología que se utilizará es análoga a la que se empleó en la sección 3.2.3, sólo que más simplificada pues para cada bono de deuda sólo se considerarán dos posibles estados para el tiempo de maduración T : la empresa incumple o la empresa no incumple. En caso de incumplimiento, el tenedor del bono recibirá al tiempo T el Valor de Recuperación Esperado o lo que es lo mismo $VREDe^{rT}$, en caso de que la empresa no incumpla, recibirá F . Con los recursos computacionales actuales, si la cartera no es muy grande y puesto que sólo se tienen dos estados posibles para cada bono⁸ se podrían obtener las probabilidades conjuntas con la normal multivariada (buscando mayor exactitud), sin embargo, si la cartera es demasiada grande convendría usar Monte Carlo para obtener la distribución aproximada del valor de la cartera y las medidas de riesgo.

A continuación, se formarán dos carteras hipotéticas: $\Pi_{\text{CON cemex}}$ que se compone de los bonos de deuda de las cuatro empresas mencionadas anteriormente y

⁷ Aunque también se subestima el nivel de los activos. De cualquier forma, no hay que olvidar que el período sobre el que se aplica el modelo correspondió justamente a la crisis mundial, un evento en cierta forma atípico que el modelo de Merton no incorpora.

⁸ Lo que significa que para una cartera formada por n bonos se tendrían 2^n combinaciones.

$\Pi_{\text{sin cemex}}$, que se compone de los bonos de deuda de las mismas empresas pero excluyendo a cemex⁹. Para el caso de las cuatro empresas, el valor de sus deudas, al tiempo $t = 0$, es de 376,582,494 miles de pesos, si consideramos sólo las tres empresas se tiene 38,421,000 miles de pesos; aplicando la metodología mencionada a ambas carteras y considerando la información dada en las tablas 5.1-5.4, al tiempo $T = 1$ se obtienen los resultados mostrados en la tabla 5.6:

Tabla 5.6. Resultados obtenidos para las carteras $\Pi_{\text{con cemex}}$ y $\Pi_{\text{sin cemex}}$ para el horizonte de tiempo $T = 1$ (En miles de pesos)

Portafolio	Π_0	$E\Pi$	Π^0	$EL\Pi$	$VaR_{0.99}$	$CVaR_{0.99}$
$\Pi_{\text{con cemex}}$	376,582,494	405,977,084	406,016,768	39,684	1,000,448	3,870,221
$\Pi_{\text{sin cemex}}$	38,421,000	41,417,529	41,480,929	63,401	1,000,448	1,127,263

Π_0 : Valor de la cartera al tiempo $t = 0$,

$E\Pi$: Valor Esperado de la cartera,

Π^0 : Valor forward de la cartera (ninguna de las empresas incumple),

$EL\Pi$: Pérdida esperada de la cartera,

$VaR_{0.99}$ y $CVaR_{0.99}$: Valor en Riesgo y Valor en Riesgo Condicional de la cartera al 99%.

De los resultados anteriores podemos concluir que se espera tener un rendimiento de 7.82% por invertir en la cartera con las cuatro empresas y de 7.96% por invertir en la cartera con las tres empresas. Esto significa un rendimiento de la cartera asociado al riesgo de incumplimiento (*default spread*) de 0.31% y 0.45% respectivamente.

Comparación con los valores observados

De la tabla 5.5, sabemos que el valor observado de la cartera formada por las cuatro empresas para el primer trimestre de 2009 es de \$437,123,025, mientras que para

⁹ Puesto que Cemex presenta niveles de deuda muy por encima de las otras tres empresas consideradas y puesto que sus operaciones se encuentran muy diversificadas a nivel global, se hace el ejercicio de formar una cartera considerando sólo a Homex, Geo y Pinfra pues presentan características más homogéneas. Además, esto permitirá comparar el resultado de las medidas de riesgo para ambas carteras.

la cartera de las tres empresas es de \$47,750,302, lo que significa un rendimiento por invertir de 16.08 % y 24.28 % y un rendimiento por riesgo de incumplimiento de 8.57 % y 16.77 % respectivamente. Contrastando éstos resultados con los reportados en la sección anterior podemos observar que el modelo de Merton subestima los valores de F y como consecuencia, también subestima los rendimientos¹⁰.

5.2. Modelo con Matrices de Transición

En esta sección se implementará el modelo de matrices de transición para una cartera mayor a la del capítulo 3. Consideraremos la cartera formada por 20 bonos que se muestra en el manual de CreditMetrics y del cual se presenta la información relevante como monto del crédito, calificación del mismo, y la matriz de correlaciones¹¹. En la tabla 5.7 se muestra la composición de la cartera, que tiene un valor total al tiempo $t = 0$ de \$55,600 y que se descompone en 4 segmentos.

Para la implementación del modelo, se utilizó la información sobre probabilidades de transición, curvas cero forward y tasas de recuperación que se presenta en el mismo manual de CreditMetrics y que se presenta en las tablas 3.1-3.3 en el capítulo 3 del presente trabajo. En las tablas 5.8 y 5.9 se muestran los resultados obtenidos mediante Monte Carlo para 100,000 simulaciones con intervalos de confianza para las estimaciones al 95 % considerando un horizonte de tiempo de un año ($T = 1$). Tomando las estimaciones puntuales reportadas en las tablas 5.8 y 5.9, podemos resumir lo siguiente:

- Pérdida esperada de la cartera: $\Pi^0 - \mu_{\Pi} = 501.44$.
- $VaR_{0.95} = 2,520.19$ y $CVaR_{0.95} = 3,928.51$.

¹⁰ Y podemos ir más lejos para concluir que también subestima las probabilidades de incumplimiento y el VaR y $CVaR$.

¹¹ Cabe mencionar que en el manual no se proporciona el grado de prelación de los bonos ni el cupón que pagan, por lo que a cada bono se le asignó un grado de prelación de acuerdo a la tabla presentada en mismo manual y un cupón del 5 %.

Tabla 5.7. Cartera formada por 20 créditos

Número de créd.	Calificación	Monto (en miles)	Grado de prelación	Tiempo de maduración	Cupón (%)
1	AAA	7,000	Sen. sin gar.	3	5
2	AA	1,000	Jr. subord.	4	5
3	A	1,000	Jr. subord.	3	5
4	BBB	1,000	Subordinada	4	5
5	BB	1,000	Sen. sin gar.	3	5
6	B	1,000	Sen. sin gar.	4	5
7	CCC	1,000	Subordinada	2	5
8	A	10,000	Subordinada	5	5
9	BB	5,000	Jr. subord.	2	5
10	A	3,000	Sen. garant.	2	5
11	A	1,000	Subordinada	4	5
12	A	2,000	Sen. sin gar.	5	5
13	B	600	Sen. garant.	3	5
14	B	1,000	Sen. garant.	2	5
15	B	3,000	Subordinada	2	5
16	B	2,000	Sen. subord.	4	5
17	BBB	1,000	Sen. sin gar.	5	5
18	BBB	8,000	Sen. sin gar.	5	5
19	BBB	1,000	Subordinada	3	5
20	AA	5,000	Sen. subord.	5	5
Total		55,600			

- $VaR_{0.99} = 4,985.43$ y $CVaR_{0.99} = 6,259.69$ ¹².

5.3. Modelo CyRCE

En esta sección, la metodología del modelo CyRCE desarrollada en el capítulo 4, será utilizada para el caso de las cuatro empresas mexicanas (Cemex, Homex, Geo y PInfra) y para la cartera de 20 bonos del ejemplo de CreditMetrics, en ambos casos en el horizonte de tiempo de un año, con el objetivo de comparar los

¹² En realidad los valores reportados del VaR y $CVaR$ al 99% corresponden a una simulación diferente de los reportados al 95% según las tablas 5.8 y 5.9, pero puesto que es hecha bajo las mismas condiciones, con $M = 100,000$, las estimaciones puntuales arrojan valores muy parecidos.

Tabla 5.8. Intervalos de confianza al 95 % para las medidas de riesgo
Valor de referencia $\Pi^0 = \$57,819.19$

Parámetro de interés	Método Monte Carlo (M=100,000)		
	Estimación	IC normal	IC distr. empírica
μ_{Π}	57,317.75	[57,252.05; 57,383.44]	[57,259.48; 57,371.04]
EL_{Π}	903.07	[805.56; 1,000.57]	[821.42; 983.48]
$VaR_{0.95}$	2,520.19	[2,425.4; 2,615.91]	[2,163.60; 2,876.79]
$CVaR_{0.95}$	3,928.51	[3,371.89; 4,485.14]	[3,487.31; 4,409.24]

Tabla 5.9. Intervalos de confianza al 99 % para las medidas de riesgo
Valor de referencia $\Pi^0 = \$57,819.19$

Parámetro de interés	Método Monte Carlo (M=100,000)		
	Estimación	IC normal	IC distr. empírica
μ_{Π}	57,317.23	[57,253.74; 57,380.73]	[57,262.93; 57,366.23]
EL_{Π}	901.14	[805.78; 996.49]	[822.48; 983.39]
$VaR_{0.99}$	4,985.43	[4,130.50; 5,840.36]	[4,331.04; 5,705.44]
$CVaR_{0.99}$	6,259.69	[5,023.02; 7,546.65]	[5,303.89; 7,425.99]

resultados.

Se utiliza el modelo CyRCE incluyendo tasas de recuperación, lo que significa que los cálculos se realizan sobre las pérdidas de la cartera¹³.

5.3.1. Modelo CyRCE para las carteras de empresas mexicanas

Al aplicar el modelo CyRCE a la cartera formada por los bonos de las cuatro empresas y a la cartera formada por los bonos de las tres empresas de la sección 5.1.3, se considera el valor nominal de los bonos al cabo de un año que arroja el modelo de Merton y sobre éstos se calculan las pérdidas posibles de acuerdo al Valor de Recuperación Esperado ($VREDe^{rT}$). Además, las probabilidades de incumplimiento también son las que se obtienen del modelo de Merton y la matriz de varianza-covarianza se obtiene a partir de la matriz de correlaciones del rendimien-

¹³ Es decir, al valor nominal de cada bono o en su caso, al valor forward en un año, se le resta el valor esperado de recuperación dado incumplimiento.

to de los activos de las empresas de la tabla 5.2 utilizando la misma metodología que se presenta en el modelo CyRCE (Marquez, 2002b) para calcular la desviación estándar de incumplimiento (Varianza Bernoulli): Dada la probabilidad de incumplimiento p_i , $\sigma_i^2 = p_i(1 - p_i)$.

Se obtienen los siguientes resultados:

- Se tienen pérdidas esperadas de \$63,872.58 para la cartera $\Pi_{\text{con cemex}}$ y de \$63,400.73 para la cartera $\Pi_{\text{sin cemex}}$.
- El índice de concentración de pérdidas para la cartera $\Pi_{\text{con cemex}}$ es $H(\mathbf{p}) = 0.7411$, mientras que para la cartera $\Pi_{\text{sin cemex}}$ es de $H(\mathbf{p}) = 0.339$. Lo anterior sucede porque el monto de posibles pérdidas por Cemex es relativamente muy grande en la cartera.

Respecto al índice de concentración ajustado por correlación H' , no se pudo obtener para el caso de la cartera $\Pi_{\text{con cemex}}$ pues su estructura arroja una medida de correlación equivalente $\rho < 0$ para toda la cartera. Para el caso de la cartera $\Pi_{\text{sin cemex}}$ la correlación equivalente es de $\rho = 0.0499$ y el índice de concentración ajustado de $H' = 0.3728$.

- Para la cartera $\Pi_{\text{con cemex}}$ se tienen los siguientes valores del VaR y $CVaR$ al 99%, con la distribución normal: \$575,445.30 y \$649,963.30 respectivamente y con la distribución Gamma: \$1,102,901.60 y \$1,667,651.23 respectivamente. Para la cartera $\Pi_{\text{sin cemex}}$ se tienen los siguientes valores del VaR y $CVaR$ al 99%, con la distribución normal: \$510,801.02 y \$575,971.37 respectivamente y con la distribución Gamma: \$965,677.88 y \$1,413,037.66 respectivamente.

5.3.2. Comparación entre el modelo de Merton utilizando la metodología Credit Metrics y el modelo CyRCE para las carteras de empresas mexicanas

Los resultados obtenidos para nuestras dos carteras de empresas mexicanas con el modelo de Merton y con el modelo CyRCE permiten hacer algunas comparaciones. Podemos notar que los resultados de interés referentes a las medidas de riesgo difieren incluso tomando la distribución Gamma para el modelo CyRCE.

En la tabla 5.10 se muestran las estimaciones del VaR y del $CVaR$ al 99% para las dos carteras y para los dos modelos. La estimación del VaR y la del $CVaR$, difiere menos cuando se utiliza la distribución Gamma en el modelo CyRCE y es aún mejor en la segunda cartera que no incorpora la deuda de cemex.

Tabla 5.10. Comparativo del $VaR_{0.99}$ para las dos carteras y para los dos modelos

Modelo	$\Pi_{\text{con cemex}}$		$\Pi_{\text{sin cemex}}$	
	$VaR_{0.99}$	$CVaR_{0.99}$	$VaR_{0.99}$	$CVaR_{0.99}$
<i>Merton – CreditMetrics</i>	1,000,448.44	3,870,220.64	1,000,448.44	1,127,263.07
<i>CyRCE – Normal</i>	575,445.30	649,963.30	510,801.02	575,971.37
<i>CyRCE – Gamma</i>	1,102,901.60	1,667,651.23	965,677.88	1,413,037.66

Nótese que no se proporcionó un monto de capital económico, por lo que no se obtuvieron algunas medidas del modelo CyRCE como los límites máximos para los montos de cada crédito. Por otra parte, en este caso, no fue posible obtener una medida de correlación equivalente ρ para la cartera $\Pi_{\text{con cemex}}$ pues éste dio negativo, lo que tampoco permitió calcular el índice de concentración ajustado por correlación.¹⁴

5.3.3. Modelo CyRCE para la cartera de 20 bonos

Al aplicar el modelo CyRCE a la cartera formada por 20 bonos del manual de CreditMetrics se obtienen los siguientes resultados:

- Pérdida esperada de la cartera de \$255.06.
- Índice de concentración de pérdidas $H(\mathbf{p}) = 0.1050$.
- VaR y $CVaR$ al 99%, con la distribución normal: \$2,006.1 y \$2,261.21 respectivamente y con la distribución Gamma: \$3,777.2 y \$5,265.62 respectivamente.

¹⁴ Aquí podemos encontrar una debilidad del modelo CyRCE en cuanto a las medidas que desarrolla para el análisis pues no siempre pueden ser obtenidas.

Para el caso de esta cartera, como en el caso de la cartera formada por las cuatro empresas mexicanas, el índice de concentración ajustado H' resulta menor que el índice HH debido a que ρ es negativo.

5.3.4. Comparación entre el modelo CyRCE y el modelo CreditMetrics para la cartera de 20 bonos

Comparando los resultados de CyRCE con los resultados proporcionados en las tablas 5.8 y 5.9, podemos notar que el valor de las medidas de riesgo que proporciona CyRCE están por debajo de las que proporciona CreditMetrics ya que, por ejemplo, el $CVaR$ al 99 % con el modelo CyRCE Gamma es de \$5,265.62, muy por debajo de la estimación puntual de CreditMetrics de \$6,259.69 e incluso fuera del intervalo proporcionado al 95 % de confianza¹⁵. En la 5.11, se presenta el comparativo del VaR y del $CVaR$ de los dos modelos al 99 % de confianza.

Tabla 5.11. Comparativo del $VaR_{0.99}$ para los dos modelos

Modelo	$VaR_{0.99}$	$CVaR_{0.99}$
<i>CreditMetrics</i>	4,985.43	6,259.69
<i>CyRCE – Normal</i>	2,006.1	2,261.21
<i>CyRCE – Gamma</i>	3,777.2	5,265.62

¹⁵ Esta diferencia puede ser explicada en parte como consecuencia de la construcción de los modelos pues recordemos que en CreditMetrics un bono puede migrar de una calificación a otra y por lo tanto de un valor a otro, por lo que en el cálculo del VaR y $CVaR$ entran todos los posibles valores de la cartera por encima del valor actual. Por otro lado, en el modelo CyRCE, debido a su construcción sólo se consideran las pérdidas.

Conclusiones

El Valor en Riesgo Condicional (*CVaR*) como medida de riesgo, presenta dos ventajas sobre otras medidas de riesgo muy utilizadas en la actualidad. La primera se resume en sus propiedades matemáticas y la segunda ventaja radica en que permite captar la posibilidad de tener grandes pérdidas que no siempre se captan con el *VaR*; por supuesto que esto depende de la distribución de pérdidas que se tenga, pero en el caso de que se obtenga una distribución mediante simulación por ejemplo, el *CVaR* permite tener una mejor idea de las pérdidas en la cola de la distribución resultante¹.

El modelo de Merton en general es sencillo, fácil de implementar y requiere de poca información; para el caso de bonos individuales sin embargo, parece de acuerdo a la evidencia, que tiende a subestimar la probabilidad de incumplimiento y por lo tanto las medidas de riesgo. Esto se debe principalmente a los supuestos extremadamente simplificadores del modelo que no logran captar algunos fenómenos que se suscitan en un entorno de crisis económica y financiera². El generalizar el modelo de Merton para una cartera con la metodología usada en CreditMetrics presenta ventajas en el cálculo de las medidas de riesgo del modelo, sin embargo, al utilizar la información obtenida por el modelo de Merton individualmente para

¹ Para tratar el problema de la posibilidad de grandes pérdidas se tiene el desarrollo de las distribuciones de Valor Extremo

² El uso de un proceso estocástico con saltos podría ayudar a captar éstos fenómenos por ejemplo.

cada bono se subestima de igual forma el valor de la cartera y sus medidas de riesgo.

El modelo de matrices de transición de CreditMetrics presenta ventajas sobre el modelo de Merton pues es más completo y aparentemente proporciona mejores resultados. Sin embargo, una de sus desventajas es que requiere de mayor información que no siempre es fácil de obtener pues requiere que exista una clasificación para los diferentes bonos, una matriz de probabilidades de transición que considere las clasificaciones, curvas cero forward para cada clasificación y tasas de recuperación de los créditos según diferentes niveles de prelación. Generar la información necesaria para implementar este modelo requiere de un complejo proceso estadístico que en México se realiza para bonos de deuda que cotizan en bolsa y en los bancos solamente para ciertos créditos.

El uso de simulación Monte Carlo representa una ventaja de este modelo pues permite tener un cálculo relativamente rápido para carteras conformadas por un gran número de bonos. No obstante que el modelo puede ser implementado utilizando una distribución diferente a la normal para caracterizar los rendimientos del valor de los activos (Márquez, 2006), en este trabajo se obtuvieron muy buenas estimaciones del VaR y del $CVaR$ utilizando la normal multivariada de acuerdo a la metodología expuesta.

Por último, respecto al modelo CyRCE se observó que tiende a subestimar las medidas de riesgo de interés aún más que el modelo de Merton con la metodología CreditMetrics (que ya de por sí, puede subestimar a los valores que se observan en la realidad). En particular, CyRCE tiende a subestimar los valores del VaR y del $CVaR$. Esto parece ser consecuencia de cómo se calcula la matriz de varianzas-covarianzas en su forma más sencilla³ pues para los casos implementados proporciona valores muy pequeños de varianzas y covarianzas. Otra consecuencia de la forma de obtener la matriz de varianzas-covarianzas y de la conformación de montos de crédito de la cartera es que no siempre permite calcular las medidas de

³ En (Márquez, 2006) se proporcionan otras formas de calcular la probabilidad y la varianza de incumplimientos que requieren sin embargo de mayor información.

concentración del modelo; en particular la cartera debe tener una estructura tal que el coeficiente de correlación equivalente ρ sea no negativo para que se pueda calcular el índice de concentración ajustado por correlación H' . De cualquier forma, como un artículo reciente sobre las instituciones financieras en Ecuador concluye, el modelo CyRCE puede ser utilizado simultáneamente con otros modelos de riesgo de crédito a la hora de tomar decisiones; su contribución radicaría en el análisis de la concentración de la cartera (Maldonado, 2008).

En la medición de riesgo en créditos se siguen generando nuevas medidas y nuevos modelos. Hoy en día son los modelos de intensidad los más avanzados desde el punto de vista teórico, pueden consultarse por ejemplo Elizalde A. (2005) y Bieleki T. et al. (2007, 2008) para tener un panorama más amplio sobre éstos y otros modelos. Sin embargo, existe el problema de que están aún lejos de poderse implementar para una cartera con un gran número de instrumentos correlacionados entre sí.

En el presente trabajo se mencionaron algunas de las medidas de riesgo más usadas en la actualidad, así como dos modelos de riesgo en crédito que pueden catalogarse como modelos estructurales y el modelo CyRCE del Banco de México⁴; se hizo especial hincapié en el cálculo del $CVaR$ para efectos de comparación y para mostrar que al menos en los modelos de riesgo en crédito más usados, su cálculo no implica mucho mayor dificultad. Una de las limitaciones que se presenta en este trabajo, se tiene en el supuesto de rendimientos normales en el valor de los activos de los dos modelos estructurales, que sin duda influyen en el cálculo de la distribución de pérdidas. Para tratar este problema se pueden ver otros enfoques como la teoría de Valor Extremo (por ejemplo en Embrechts, 2001) o el enfoque de cópulas.

⁴ Aunque CyRCE no es un modelo estructural, en el contexto de este trabajo y debido a la información que se utilizó para su implementación es compatible con los modelos estructurales.

Apéndice A

A.1. Funciones de distribución de probabilidad

Definición A.1.1. (*Función de masa de probabilidad*). Sea X una variable aleatoria discreta. Se llamará a $p(x) = P(X = x)$ función de masa de probabilidad de la variable aleatoria X si satisface las siguientes propiedades:

1. $p(x) \geq 0$, para todos los valores x de X ,
2. $\sum_x p(x) = 1$.

Definición A.1.2. (*Función de densidad de probabilidad*). Sea X una variable aleatoria continua. Si existe una función $f(x)$ tal que

1. $f(x) \geq 0$, $-\infty < x < \infty$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, y
3. $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$,

para cualesquiera a y b , entonces $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua X .

Definición A.1.3. (*Función de distribución de probabilidad acumulada*). Sea X una variable aleatoria. La función de distribución de probabilidad acumulada o simplemente función de distribución está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i),$$

si X es una variable aleatoria discreta y por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt,$$

si x es una variable aleatoria continua. $F(x)$ proporciona la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a algún x específico.

Definición A.1.4. (Función de distribución empírica). Sea $\underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una sucesión de n realizaciones independientes de la variable aleatoria continua X , la función de distribución empírica asociada a \underline{x} es la función $\hat{F} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida como:

$$\hat{F}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(t - x_i),$$

siendo $I(z) = 1$ si $z \geq 0$, e $I(z) = 0$ si $z < 0$.

Definición A.1.5. (Función cuantil). Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F(x)$. La función cuantil de la distribución de probabilidad de X es la función inversa de la función de distribución F^{-1} tal que para $0 < p < 1$:

$$F(x) = P(X \leq x) = p,$$

para el caso en que $F(x)$ sea una función continua y estrictamente monótonica y,

$$F^{-1}(p) = \min\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq p\},$$

en el caso que se trate de una función de probabilidad discreta.

Definición A.1.6. (Estimador empírico del cuantil p). Sea \hat{F} una distribución empírica definida a partir de una muestra observada y sea $p \in (0, 1)$, el estimador empírico del cuantil p de F se define como:

$$x_p = \min\{x \in \mathbb{R} | \hat{F}(x) \geq p\}.$$

A.2. Distribuciones truncadas

Definimos a una distribución truncada como la parte de una distribución no truncada que queda por encima o por debajo de un cierto valor c especificado.

Teorema A.2.1. (*Densidad de una variable aleatoria truncada*). Sean $f(x)$ y $F(x)$ la función de densidad y la función de probabilidad acumulada respectivamente de una variable aleatoria continua X y sea c una constante, entonces

$$\begin{cases} f(x|x < c) = \frac{f(x)}{F(c)} & (\text{si el truncamiento es por arriba}), \\ f(x|x > c) = \frac{f(x)}{1 - F(c)} & (\text{si el truncamiento es por abajo}). \end{cases}$$

La demostración es consecuencia de la definición de probabilidad condicional.

El resultado anterior nos dice que truncar equivale, simplemente, a introducir un factor de escala en la función de densidad, de manera que ésta integre uno cuando en el intervalo de integración se incluyen sólo los valores menores (mayores) que c .

A.3. Valor Esperado de algunas distribuciones truncadas

El cálculo del valor esperado de una distribución truncada por abajo⁵ se obtiene a partir de:

$$E[x|x > c] = \int_{x|x>c} xf(x|x > c) = \frac{1}{1 - F(c)} \int_{x|x>c} xf(x). \quad (\text{A.1})$$

Así, el cálculo del *CVaR*, dada una distribución de pérdidas, es equivalente a calcular el valor esperado de una distribución truncada por abajo.

⁵ El caso de que el truncamiento sea por abajo es análogo

A.3.1 Distribución normal truncada

Proposición A.3.1. (*Valor Esperado de una distribución normal truncada*). Sea X una variable aleatoria con distribución normal con media μ y varianza σ^2 y sea $f(x; \mu, \sigma)$ la función de densidad de probabilidad, entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} E[x|x < c] = \mu - \sigma \frac{\phi(z^*)}{\Phi(z^*)} \quad (\text{si el truncamiento es por arriba}), \\ E[x|x > c] = \mu + \sigma \frac{\phi(z^*)}{\Phi(-z^*)} \quad (\text{si el truncamiento es por abajo}) \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

donde $\phi(\cdot)$ y $\Phi(\cdot)$ son las funciones de densidad de probabilidad y acumulada respectivamente de la normal estándar y $z^* = \frac{c - \mu}{\sigma}$.

Demostración. Trataremos el caso de que el truncamiento sea por arriba:

Por (A.1),

$$\begin{aligned} E[x|x < c] &= \frac{1}{\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)} \int_{-\infty}^c x f(x; \mu, \sigma), \\ &= \frac{1}{\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)} \int_{-\infty}^c \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx, \end{aligned}$$

restando y sumando μ a x para hacer el cambio de variable se tiene,

$$\begin{aligned} E[x|x < c] &= \frac{1}{\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)} \int_{-\infty}^c \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} (x - \mu + \mu) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx, \\ &= \frac{1}{\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)} \left[\int_{-\infty}^c \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} (x - \mu) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx + \int_{-\infty}^c \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \mu e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \right], \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ y resolviendo la primera integral se tiene:

$$E[x|x < c] = \frac{1}{\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)} \left[\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \right)_{-\infty}^{\frac{c-\mu}{\sigma}} + \mu \int_{-\infty}^{\frac{c-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right];$$

por último, evaluando los límites en el primer término y haciendo $z^* = \frac{c - \mu}{\sigma}$:

$$E[x|x < c] = \frac{1}{\Phi(z^*)} [-\sigma\phi(z^*) + \mu\Phi(z^*)],$$

con lo que se obtiene el resultado después de simplificar términos. ■
El caso en el que el truncamiento sea por abajo es análogo.

A.3.2 Distribución Gamma truncada

Una variable aleatoria continua X tiene una distribución Gamma si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad \text{para } 0 < x < \infty, \quad (\text{A.4})$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du.$$

La expresión anterior es conocida como la función Gamma.

Para efectos de obtener la distribución de probabilidad Gamma truncada, se definen la función Gamma superior y la función Gamma inferior de acuerdo a:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha, x) &= \int_x^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du, \\ \gamma(\alpha, x) &= \int_0^x u^{\alpha-1} e^{-u} du, \end{aligned}$$

respectivamente. Nótese que $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha, x) + \gamma(\alpha, x)$.

Proposición A.3.2. (*Valor Esperado de una distribución Gamma truncada*). Sea X una variable aleatoria con distribución Gamma con función de densidad de probabilidad dada por (A.4) y con función de probabilidad acumulada

$$F(x; \alpha, \beta) = \int_0^x f(u; \alpha, \beta) du = \frac{\gamma(\alpha, x/\beta)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (\text{A.5})$$

entonces:

$$E[x|x > c] = \alpha\beta \left[\frac{1 - F(c; \alpha + 1, \beta)}{1 - F(c; \alpha, \beta)} \right]. \quad (\text{A.6})$$

Demostración. Por (A.1),

$$\begin{aligned}
E[x|x > c] &= \frac{1}{1 - F(c; \alpha, \beta)} \int_c^\infty x f(x; \alpha, \beta), \\
&= \frac{1}{1 - F(c; \alpha, \beta)} \int_c^\infty x \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}}, \\
&= \frac{1}{1 - F(c; \alpha, \beta)} \int_c^\infty \frac{x^{(\alpha+1)-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}},
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = x/\beta$:

$$\begin{aligned}
E[x|x > c] &= \frac{\beta}{[1 - F(c; \alpha, \beta)]} \int_{c/\beta}^\infty u^{(\alpha+1)-1} e^{-u} du, \\
&= \frac{\beta}{1 - F(c; \alpha, \beta)} \frac{\gamma(\alpha + 1, c/\beta)}{\Gamma(\alpha)}, \\
&= \frac{\alpha\beta}{1 - F(c; \alpha, \beta)} \left[1 - \frac{\gamma(\alpha + 1, c/\beta)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right],
\end{aligned}$$

puesto que $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)$ y por (A.5), se obtiene el resultado. ■

Apéndice B

B.1 Teoremas y resultados importantes para el desarrollo del modelo de Merton

Teorema B.1 (*Primer Teorema Fundamental de la Valuación de Activos*). Si un modelo de mercado tiene una medida de probabilidad neutra al riesgo, entonces no admite arbitraje.

Demostración. Si un modelo de mercado tiene una probabilidad neutra al riesgo \mathbb{P}^* , entonces todo valor descontado de una cartera es una martingala bajo \mathbb{P}^* . En particular todo valor de una cartera satisface $\mathbb{E}^*[e^{-rT} \Pi_T] = \Pi_0$. Sea Π_t el valor de una cartera con $\Pi_0 = 0$. Entonces

$$\mathbb{E}^*[e^{-rT} \Pi_T] = 0. \tag{B.1}$$

Suponga que Π_T satisface $\mathbb{P}\{\Pi_T < 0\} = 0$. Puesto que \mathbb{P}^* es equivalente a \mathbb{P} , se tiene además que $\mathbb{P}^*\{\Pi_T < 0\} = 0$. Esta última expresión junto con (B.1) implica que $\mathbb{P}^*\{\Pi_T > 0\} = 0$, puesto que de otra forma tendríamos $\mathbb{P}^*\{e^{-rT} \Pi_T > 0\} > 0$ que implicaría $\mathbb{E}^*[e^{-rT} \Pi_T] > 0$. Como \mathbb{P} y \mathbb{P}^* son equivalentes, se tiene que $\mathbb{P}\{\Pi_T > 0\} = 0$. Así, Π_t no es un arbitraje. De hecho, para todo Π_t que satisfaga $\Pi_0 = 0$ no hay arbitraje. ■

Teorema B.2 (*Segundo Teorema Fundamental de la Valuación de Activos*). Considérese un modelo de mercado que tiene una medida de probabili-

dad neutra al riesgo. El modelo es completo si y sólo si la medida de probabilidad neutra al riesgo es única.

Teorema B.3 (Teorema de Girsanov). Sea $(W_t, t \in [0, T])$, un movimiento Browniano estándar en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, y sea $(\mathfrak{F}_t, t \in [0, T])$ una filtración para este movimiento Browniano. Sea $(\theta_t, t \in [0, T])$ un proceso adaptable, es decir, θ_t es \mathfrak{F}_t -medible. Defina

$$Z_t = e^{-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds},$$

$$B_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds,$$

y asuma que,

$$\mathbb{E} \int_0^T \theta_s^2 Z_s^2 ds < \infty.$$

Sea $Z_T = Z$. Entonces $\mathbb{E}(Z) = 1$ y bajo la probabilidad \mathbb{P}^* , dada por

$$\mathbb{P}^* = \int_C Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad \text{para todo } C \in \mathcal{A}$$

el proceso $(B_t, t \in [0, T])$ es un movimiento Browniano estándar.

El lector interesado en las demostraciones de los dos teoremas anteriores puede consultar Shreve (2004).

B.2 Solución al sistema de ecuaciones no lineal del modelo de Merton

Originalmente tenemos el sistema de ecuaciones no lineal al tiempo $t = 0$ dado por

$$\begin{aligned} S_0 &= V_0 \Phi(d_1(F, \sigma_V)) - F e^{-rT} \Phi(d_2(F, \sigma_V)), \\ \sigma_S &= \sigma_V \frac{V_0}{S_0} \Phi(d_1(F, \sigma_V)), \end{aligned}$$

y queremos encontrar los valores de F y σ_V que lo satisfacen. Para ello construimos el sistema de ecuaciones auxiliar

$$G_1(F, \sigma_V) = S_0 - V_0\Phi(d_1(F, \sigma_V)) + Fe^{-rT}\Phi(d_2(F, \sigma_V)) = 0 \quad (B.2)$$

$$G_2(F, \sigma_V) = \sigma_S S_0 - \sigma_V V_0\Phi(d_1(F, \sigma_V)) = 0 \quad (B.3)$$

que denotaremos vectorialmente como $\bar{G}(\bar{x}) = \bar{0}$ con $\bar{x} = (F, \sigma_V)$. Por el Teorema de la Función Implícita, el sistema admite solución única para F y σ_V como función de S_0 y σ_S (y de los demás parámetros) en una vecindad del punto $\bar{x}^* = (F^*, \sigma_V^*)$ si la matriz Jacobiana de $\bar{G}(\bar{x})$ evaluada en \bar{x}^*

$$J(\bar{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1(\bar{x}^*)}{\partial F} & \frac{\partial G_1(\bar{x}^*)}{\partial \sigma_V} \\ \frac{\partial G_2(\bar{x}^*)}{\partial F} & \frac{\partial G_2(\bar{x}^*)}{\partial \sigma_V} \end{pmatrix}$$

existe y $|J(\bar{x}^*)| \neq 0$. De esta forma podremos tener

$$\begin{aligned} F &= H_1(S_0, \sigma_S; V_0, r, T), \\ \sigma_V &= H_2(S_0, \sigma_S; V_0, r, T) \end{aligned}$$

para $\bar{x} = (F, \sigma_V)$ cerca de $\bar{x}^* = (F^*, \sigma_V^*)$.

La solución del sistema dado por las ecuaciones (B.2) y (B.3) se realiza por el método iterativo de Newton-Raphson⁶ que permite obtener una aproximación al vector solución $\bar{x} = (F, \sigma_V)$ tan buena como se quiera. Dadas dos constantes $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, el proceso iterativo es el siguiente:

Iniciar con $\bar{x}_0 = (F^0, \sigma_V^0)$ y mientras $\frac{\|\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i\|}{\|\bar{x}_{i+1}\|} < \varepsilon$ y $\|\bar{G}(\bar{x}_{i+1})\| < \delta$ hacer

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i - J^{-1}(\bar{x}_i)\bar{G}(\bar{x}_i).$$

Elijiendo a $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ lo suficientemente pequeñas, nos aseguramos de que la aproximación sea buena.

Para el sistema de ecuaciones dado por (B.1) y (B.2), la matriz Jacobiana es

⁶ El cual se obtiene de una expansión de la serie de Taylor multidimensional de orden 1

$$J(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -V_0 \frac{d\Phi}{dd_1} \frac{\partial d_1}{\partial F} + e^{-rT} \left[F \frac{d\Phi}{dd_2} \frac{\partial d_2}{\partial F} + \Phi(d_2) \right] & -V_0 \frac{d\Phi}{dd_1} \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_V} + F e^{-rT} \frac{d\Phi}{dd_2} \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_V} \\ -\sigma_V V_0 \frac{d\Phi}{dd_1} \frac{\partial d_1}{\partial F} & -V_0 \left[\sigma_V \frac{d\Phi}{dd_1} \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_V} + \Phi(d_1) \right] \end{pmatrix}$$

que en forma simplificada (después de algo álgebra) queda de la siguiente forma:

$$J(\bar{x}) = \begin{pmatrix} e^{-rT} \Phi(d_2) & -\frac{V_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} \sqrt{T} \\ \frac{V_0}{F\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} & V_0 \left[\frac{d_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} - \Phi(d_1) \right] \end{pmatrix}.$$

Referencias

1. ACERBI, C., TASCHE, D. (2002). *On the Coherence of Expected Shortfall*. Journal of Banking & Finance 26, 1487-1503.
2. ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M., HEATH, D. (1999). *Coherent Measures of Risk*. Mathematical Finance 9 (3), 203-228.
3. BIELECKI, T., JEANBLANC, M., RUTKOWSKY M. (2007): *Stochastic Models in Mathematical Finance*. CIMPA-UNESCO-MOROCCO School. Marrakech, Morocco, April 9-20, 2007.
4. BIELECKI, T., JEANBLANC, M., RUTKOWSKY M. (2008): *Curso de Riesgo en Crédito (Notas)*. X Simposio de Probabilidad y Procesos Estocásticos, 1ra Reunión Franco Mexicana de Probabilidad. Guanajuato, 3 al 7 de noviembre de 2008.
5. CROUHY, M., GALAI, D., MARK, R. (2001): *Risk Management*. McGraw-Hill.
6. ELIZALDE, ABEL (2005): *Credit Risk Models*. www.abelizalde.com.
7. EMBRECHTS, P. (2001). *Extremes in Economics and the Economics of Extremes*. www.math.ethz.ch/embrechts.
8. JORION, P., (2004): *Valor en Riesgo*. Limusa.
9. J.P. MORGAN (1997): *CreditMetrics technical document*.
10. HOLTON, G. (2003): *Value-at-Risk*. Academic Press.
11. KNIGHT, F. (1921): *Risk, Uncertainty and Profit*. Reprints of Economics Classics, 1964.
12. KWIATKOWSKA, T., SZATZSCHNEIDER, W. (2008): *Uncertainty: On the difference between imaginary tale and real significance*. Revista de filosofía de las ciencias de la vida 16 (30), 49-61.
13. LAMBERTON, D., LAPEYRE, B. (2008): *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall, 2a edición.
14. LINDGREN, B. (1993): *Statistical theory*. Chapman & Hall.
15. MALDONADO, D. (2008). *New Management Tool for Credit Risk Analysis: An application for financial institution in Ecuador*. Central Bank of Ecuador, December.
16. MÁRQUEZ, J. (2002a). *Suficiencia de capital y riesgo de crédito en carteras de préstamos bancarios*. Documento de Investigación Banco de México, abril.

17. MÁRQUEZ, J. (2002b). *El impacto de la correlación entre impagos en la concentración de riesgo en portafolios de préstamos bancarios*. Documento de Investigación Banco de México, junio.
18. MÁRQUEZ, J. (2006). *Una nueva visión del riesgo de crédito*. Limusa.
19. MERTON, R. (1974). *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*. The Journal of Finance 29 (2), 449-470.
20. MOOD, A., GRAYBILL F., BOES, D. (1974): *Introduction to the theory of statistics*. McGraw-Hill.
21. ORTOBELLY, S., RACHEV, S., STOYANOV, S., FABOZZI, F., BIGLOVA, A. (2005): *The Proper Use Of Risk Measures In Portfolio Theory* . International Journal of Theoretical and Applied Finance 08 (07), 1107-1133.
22. SERVIGNY, A., RENAULT, O. (2004): *Measuring and managing credit risk*. McGraw-Hill.
23. SHREVE, S. (2004): *Stochastic calculus for finance II. Continuous-Time Models*. Springer.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00055

Matricula: 206381074

MEDICION DEL RIESGO EN CREDITO: IMPLEMENTACION Y CALCULO DEL VAR Y EL CVAR EN TRES MODELOS DE INCUMPLIMIENTO

En México, D.F., se presentaron a las 11:00 horas del día 19 del mes de julio del año 2010 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ESTEBAN ANTONIO MARTINA BOGGETTO
DR. CARLOS CUEVAS COVARRUBIAS
DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: MARCO RICARDO TELLEZ CABRERA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



MARCO RICARDO TELLEZ CABRERA
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE ANTONIO DE LOS REYES
HEREDIA

PRESIDENTE

DR. ESTEBAN ANTONIO MARTINA
BOGGETTO

VOCAL

DR. CARLOS CUEVAS COVARRUBIAS

SECRETARIA

DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA