Topologías de Bohr en grupos abelianos y encajes cerrados en productos de grupos metrizables

Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa

Manuel Antonio López Ramírez

spider@esfm.ipn.mx

terry_mcginnis_11@yahoo.com.mx

—Por lo general, los animales son tristes—continuó—. Y cuando un hombre está muy triste, no porque tenga dolor de muelas o haya perdido dinero, sino porque alguna vez por un momento se da cuenta de cómo es todo, cómo es la vida entera y está justamente triste, entonces se parece un poco a un animal; entonces tiene un aspecto de tristeza, pero es más justo y más hermoso que nunca. Así es, y ese aspecto tenías, *lobo estepario*, cuando te vi por primera vez.

El Lobo Estepario[1]
(sólo para locos)
Herman Hesse.

[1](leerlo cuesta la razón.)

—But I have only one dream now...

...to become a razor's edge of purest steel!

"...to become a razor's edge of purest steel!"

—Hmph! so naive...

...steel of high purity is surprisingly fragile,

Alita. Now, these blades we equipped you with, they're

"*Damascus blades*", created by the finest blade maker.

There's a beatiful pattern to the surface...

...caused by the mixing of various metals of differing hardness.

—To think...these blades were made using scrap metal...

...the strongest steel in all the universe...and it can only be made here, in the *Scrapyard*. The impurities give life to the steel, resulting in *flexibility* and *tenacity*: the strengths of the *Damascus Steel*.

Battle Angel Alita.
Volume III. Killing Angel.
Yukito Kishiro.[2]

[2]First published as *Gunm* by Shueisha, Inc. Japan. June 1995.

Bueno, *Clarice*, ¿han dejado de balar los corderos? Usted me debe cierta información, recuérdelo, y eso es lo que yo desearía tener.

Un anuncio en la edición nacional del *Times* y en el *Herald Tribune* el día primero de cada mes estaría muy bien. Mejor si lo pone en el *China Mail.*

No me sorprendería si la respuesta es si y no. Los corderos guardarán silencio por ahora. Pero, *Clarice*, usted se juzga con toda la misericordia de las escalas del calabozo de *Threave.* Tiene que volver a ganárselo, una y otra vez, ese bienaventurado silencio. Porque, lo que la impulsa son las situaciones difíciles, enfrentarse a los aprietos, y estos no terminan . . . ¡nunca!

No tengo planes para verla, *Clarice*, ya que el mundo es más interesante mientras esté usted en él. Cerciórese de usar la misma amabilidad en su trato conmigo.

El doctor *Anibal Lecter* se llevó la pluma a los labios, contempló un instante el cielo nocturno y sonrió.

Tengo ventanas.

Ahora *Orión* está sobre el horizonte, y cerca de él, Júpiter, más brillante de lo que estará durante este lapso, hasta el año 2000. (No tengo intención de decirle la hora ni a que altura está). Pero espero que usted también pueda verlo. Algunas de nuestras estrellas son las mismas.

Clarice.

Anibal Lecter.[3]

---

[3]El silencio de los corderos.

Thomas Harris.

Siempre ten presente que la piel se arruga,
el pelo se vuelve blanco,
los días se convierten en años... pero lo importante no cambia;
tu fuerza y tu convicción no tienen edad. Tu espíritu es el plumero de cualquier telaraña.
Detrás de cada línea de llegada, hay una de partida.
Detrás de cada logro, hay otro desafío.
Mientras estés viva, siéntete viva.
Si extrañas lo que hacías, vuelve a hacerlo.
No vivas de fotos amarillas...
Sigue aunque todos esperen que abandones.
No dejes que se oxide el acero que hay en ti.
Haz que, en vez de lástima, te tengan respeto.
Cuando por los años no puedas correr, trota.
Cuando no puedas trotar, camina.
Cuando no puedas caminar, usa el bastón.

¡Pero nunca te detengas!

Madre Teresa de Calcuta

Duele amar a alguien y no ser correspondido, pero lo más doloroso es amar a alguien, y nunca encontrar el valor para decirle a esa persona lo que sientes. Tal vez Dios quiere que conozcamos a unas cuantas personas equivocadas antes de conocer a la persona correcta, para que al fin, cuando la conozcamos, sepamos ser agradecidos por ese maravilloso regalo.

Una de las cosas mas tristes de la vida es cuando conoces a alguien que significa todo y sólo por darte cuenta que al fin no es para ti y lo tienes que dejar ir. Cuando la puerta de la felicidad se cierra, otra puerta que no vemos se ha abierto frente a nosotros.

Es cierto que no sabemos lo que tenemos hasta que lo perdemos, pero también es cierto que, no sabemos lo que hemos estado perdiendo hasta que lo encontramos. Darle a alguien todo tu amor nunca es seguro de que amarán de regreso, pero no esperes que te amen de regreso, solo espera que el amor crezca en el corazón de la otra persona, pero si no crece, sé feliz porque creció en el tuyo.

Hay cosas que te encantaría oír, y que nunca escucharás de la persona que te gustaría que te las dijera, pero no seas tan sordo para no oír las de aquel que las dice desde su corazón.

Nunca digas adiós si todavía quieres tratar, nunca te des por vencido si sientes que puedes seguir luchando. Nunca le digas a una persona que ya no la amas si no puedes dejarla ir. El amor llega a aquel que espera, aunque lo hayan decepcionado, a aquel que aun cree, aunque antes haya sido traicionado, aquel que todavía necesite amar, aunque haya sido lastimado y aquel que tiene el coraje y la fe para construir la confianza de nuevo. El principio del amor es dejar que aquellos que conocemos sean ellos mismos y no tratarlos de voltear con nuestra propia imagen, porque entonces sólo amaremos el reflejo de nosotros mismos en ellos.

No vayas por el exterior, este te puede engañar. No te vayas por las riquezas porque aun eso se pierde, ve por alguien que te haga sonreir, porque toma tan sólo una sonrisa para hacer que un dia oscuro brille. Espero encuentres a aquella persona que te haga sonreir...

Hay momentos en los que extrañas a una persona tanto en sueños, que quieres sacarlo de tus sueños y abrazar con todas tus fuerzas. Espero que sueñes con ese alguien especial y que ese alguien especial sueñe lo que quieres soñar. Ve por donde quieres ir. Se lo que quieres ser, porque tienes tan sólo una vida y una oportunidad para hacer todo lo que quieras hacer.

Espero que tengas suficiente felicidad para hacerte dulce, suficientes pruebas para hacerte fuerte, suficiente dolor para mantenerte humano, suficiente esperanza para ser feliz, las personas más felices no siempre tienen lo mejor de todo. La felicidad espera aquellos que lloran, aquellos que han sido lastimados, aquellos que buscan, aquellos que tratan, porque sólo ellos pueden apreciar la importancia de las personas que han tocado sus vidas. No puedes ir feliz por la vida hasta que dejes ir tus fracasos pasados y los dolores de tu corazón.

Madre Teresa de Calcuta

Índice general

Introducción ix

Capítulo 1. Requisitos 1

1. Grupos topológicos. Una breve introducción 1
2. Homomorfismos e isomorfismos 4
3. Subgrupos topológicos y grupos cociente 5
4. Productos directos 6
5. Encajes de grupos topológicos en productos Cartesianos 8
6. Algo sobre funciones cardinales 12
7. Introducción a las topologías de Bohr 18

Capítulo 2. Topologías de Bohr 29

Capítulo 3. Encajes 39

Apéndice A. Compleción de Raĭkov 45

Apéndice. Bibliografía 51

Apéndice. Índice alfabético 53

Introducción

El concepto de grupo topológico se remonta a la primera mitad del siglo veinte y tiene su origen en los trabajos de variedades diferenciales. Los grupos que en ese entonces aparecieron fueron los grupos de homeomorfismos analíticos de variedades. Después de cierto periodo de experimentación con el concepto de grupo topológico quedo claro que la noción básica era la continuidad de las operaciones de grupo. A principios de los años 30 del siglo pasado el concepto de grupo topológico había sido ampliamente aceptado. Ahora se puede encontrar éste concepto en diversas partes de la Matemática, desde el Análisis Funcional hasta las Ciencias de la Computación.

En el Capítulo 1 se presentan las definiciones y propiedades básicas en la teoría de grupos para el posterior estudio de los siguientes capítulos. En las primeras cuatro secciones enunciamos y definimos propiedades y conceptos tales como la descripción de una base para una topología de grupo razonablemente rica, los conceptos de homomorfismos e isomorfismos topológicos, el concepto de subgrupo topológico y el de producto directo de grupos topológicos. En la Sección 5 damos una introducción breve de encajes en productos directos de grupos topológicos, de los cuales hablaremos más tarde. La sección 6 trata de algunas funciones cardinales, siendo la más reelevante para este trabajo el *número de Nagami*, pues gracias a ésta podremos demostrar algunos resultados no triviales como por ejemplo que la clase de los grupos topológicos σ-compactos forma una subclase de la clase de los espacios de Efimov. La sección 7 contiene herramientas algebraicas necesarias para el estudio de varios resultados relacionados con las topologías de Bohr.

En algunas áreas de la Matemática la noción de compacidad es una herramienta fundamental, y la situación se hace más comoda cuando ésta se puede usar en su versión secuencial. Sin embargo, esto no siempre es así, aunque se sabe desde los comienzos de la Topología General que los espacios metrizables poseen esta propiedad. Para un grupo topológico abeliano G existe una topología que puede ser considerada como análoga a la topología débil en el contexto de espacios vectoriales topológicos; dicha topología está generada por la familia de todos los homomorfismos continuos de G al grupo del círculo, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, que llamaremos topología de Bohr, pues coincide con la llamada compactación de Bohr del grupo G. La existencia de la compactación de Bohr nos permite definir y estudiar la topología de Bohr en cualquier grupo topológico (es decir, no necesariamente abeliano). En el Capítulo 2 estudiamos las topologías de Bohr sobre grupos abelianos discretos. En particular se demuestra el Teorema de J. Trigos, el cual dice que un grupo topológico abeliano discretos G dotado de la topología de Bohr, es decir, la generada por la familia de todos los homomorfismos de G en el grupo del círculo $\mathbb{T}$, es normal si y sólo si G es numerable. Como el estudio de espacios vectoriales a través de sus topologías débiles es muy importante, es de esperarse que la investigación de preguntas similares en la clase, más amplia, de los grupos topológicos abelianos dotados de la topología de Bohr sea también interesante.

El concepto de *compleción* juega un papel importante en Matemáticas. En Topología General dos construcciones relativamente cercanas de este tipo son especialmente importantes: la completez en el sentido de Dieudonné y la completez en el sentido de Hewitt-Nachbin. Un espacio topológico X se dice completo en el sentido de Diuedonné si X es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto de espacios métricos completos. Un espacio topológico de Tychonoff X se dice completo en el sentido de Hewitt-Nachbin o que es realcompacto si y sólo si X es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto de rectas reales. Un grupo topológico G se dice ω-balanceado o con número de invarianza numerable, si para toda vecindad abierta U de la identidad de G existe una familia γ de vecindades abiertas de la identidad de G tal que para cada $x \in G$, existe $V \in \gamma$ que cumple $xVx^{-1} \subseteq U$. El Teorema de Katz demuestra que un grupo topológico es ω-balanceado si y sólo si éste es topológicamente isomorfo a un subgrupo de un producto de grupos primero numerables. El primer resultado original de esta tesis consiste en dar condiciones necesarias y suficientes para que este encaje sea cerrado. Por otro lado, un grupo topológico G se dice $\aleph_0$-acotado si para cada vecindad abierta U de la identidad del grupo G existe $F \subset G$, subconjunto numerable de G tal que $F \cdot U = G$. Este concepto fue introducido por I. Guran [**9**] quien llamó ω-acotados a esta clase de grupos. La noción de grupo topológico $\aleph_0$-acotado surgió al tratar de encontrar una caracterización interna de los subgrupos de los grupos topológicos de Lindelöf. Sin embargo ,el problema original sigue abierto. El segundo resultado original que en esta tesis se presenta también condiciones necesarias y suficientes para que este encaje sea cerrado. En el Capítulo 3 es en donde presentamos estos resultados, los cuales como se puede observar, se pueden considerar como los análogos para grupos topológicos de los conceptos de completez descritos anteriormente.

También se incluye un apéndice en el cual por considerarla no trivial, se da una breve descripción de la compleción de Raĭkov, la cual como se verá, está presente en gran parte de este trabajo.

Los resultados originales fueron expuestos por mí en el congreso *VI Iberoamerican Conference on Topology and its Applications*, llevado a cabo en Puebla, México, en julio de 2005, y en el *XXXVIII Congreso*

Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana llevado a cabo en la Ciudad de México en octubre de 2005, y en el *Seminario de Posgrado* del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, a cargo en ese entonces de la Dra. Shirley T. Bromberg. El material expuesto en esta tesis referente a las topológias de Bohr es la conclusión de una serie de pláticas mías expuestas en el *Seminario de Topología* de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, a cargo del Dr. Mikhail G. Tkachenko. Este material fue presentado en las instalaciones de la misma universidad.

Quiero agradecer la dirección que durante el desarrollo de ésta tesis recibí del Doctor Mikhail G. Tkachenko (UAMI), así como los valiosos comentarios que de este trabajo hicierón el Doctor Alejandro Illanes Mejía (UNAM) y el Doctor Vladimir V. Tkachuk (UAMI). También quiero agradecer todo el apoyo que me otorgó la entonces Coordinadora del Posgrado en Matemáticas de la Universidad Autonóma Metropolitana Unidad Iztapalapa, la Doctora Shirley T. Bromberg S., y la ayuda del actual Coordinador, el Doctor Andrei Novikov; al Jefe del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autonóma Metropolitana, el Doctor Carlos J. E. Signoret Poillon; y a la M. en C. Silvia C. Gavito T. Sin su ayuda éste trabajo no hubiera sido posible.

Manuel Antonio López Ramírez

Otoño de 2006

México Distrito Federal

CAPíTULO 1

Requisitos

La frase mas excitante que se puede oir en ciencia, la que anuncia nuevos descubrimientos, no es *¡Eureka, lo encontré!* sino *es extraño.*

Isaac Asimov.

En primer lugar acabemos con *Sócrates*, porque ya estoy harto de ese invento de que *no saber nada* es un signo de *sabiduría.*

Isaac Asimov.

1. Grupos topológicos. Una breve introducción

En la literatura podemos encontrar artículos y libros referentes a las propiedades básicas de los grupos topológicos. Tres buenas referencias son [**11**], [**19**] y [**12**].

Denotaremos a los conjuntos de los números reales, naturales, enteros y al grupo del círculo con los símbolos $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{T}$, respectivamente. Dado un grupo G, denotaremos por id_G a la función identidad del grupo en sí mismo. Dados un grupo G y un subgrupo H de G, usaremos la notación $H \leq G$ para expresar esta idea. Un grupo algebraico G se dice *abeliano* si la operación $\cdot$ del grupo es conmutativa, es decir, si $a \cdot b = b \cdot a$ para cualesquiera $a, b \in G$.

Un grupo algebraico G dotado con una topología τ es un *grupo topológico*, si la función multiplicación $m(x, y) = x \cdot y$ y la función que asocia a cada elemento a su inverso, $In(x) = x^{-1}$, son continuas como funciones de $G \times G$ en G y de G en G, respectivamente. Lo anterior es equivalente a decir que la función $\varphi : G^2 \to G$ definida por $\varphi(x, y) = x \cdot y^{-1}$ es continua.

La función inversa In en un grupo topológico G definida anteriormente es un homeomorfismo de G. En efecto, la continuidad de In se sigue de la definición de grupo topológico, y el resto es inmediato de la igualdad $In \circ In = id_G$.

Para un subconjunto $V \subseteq G$, es común escribir V^{-1} en lugar de $In(V)$. Llamamos a un subconjunto V de G *simétrico* si satisface $V^{-1} = V$. Notemos que el conjunto $U \cap U^{-1}$ es abierto y simétrico para cada conjunto abierto U de G. Concluimos que los conjuntos abiertos y simétricos que contienen a la identidad forman una base en la identidad de G.

Si $A, B \subseteq G$, definimos el *producto* de A por B en G como sigue:

$$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A,\, b \in B\}.$$

En el caso $A = B$ escribiremos A^2 en lugar de $A \cdot A$.

Dado un grupo topológico G, para todo elemento $g \in G$ definimos la *traslación izquierda*, $t_g : G \to G$, por $t_g(x) = g \cdot x$, donde $x \in G$. La función t_g es continua (por la continuidad de la multiplicación de G). Notemos que la traslación $t_{g^{-1}}$ correspondiente a g^{-1} es la inversa de t_g, esto es, $t_g \circ t_{g^{-1}} = id_G = t_{g^{-1}} \circ t_g$. Como t_g es una biyección de G, concluimos que la traslación t_g es un homeomorfismo de G sobre sí mismo. Siguiendo la misma idea, podemos definir la *traslación derecha* para un grupo G como la función $r_g(x) = x \cdot g$. Claramente las traslaciones derechas tienen las propiedades citadas para las traslaciones izquierdas.

Si $U \subseteq G$ y $x \in G$, el conjunto $t_x(U)$ es usualmente denotado por xU. Notemos que si U es abierto en G, entonces xU es también abierto para cada $x \in G$. Definimos los conjuntos Ux de manera similar mediante traslaciones derechas.

PROPOSICIÓN 1.1. *Todo grupo topológico es un espacio homogéneo, es decir, para cualesquiera $x, y \in G$, existe un homeomorfismo $f : G \to G$ tal que $f(x) = y$.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, consideremos la traslación t_g de G correspondiente al elemento $g = yx^{-1}$. Se verifica fácilmente que $t_g(x) = y$. $\square$

Es claro que todo grupo abstracto dotado con la topología discreta se convierte en un grupo topológico. Lo mismo es cierto para la topología antidiscreta sobre un grupo abstracto. Sin embargo, para desarrollar una teoría razonablemente interesante, debemos establecer ciertas restricciones de separación en la topología de grupo de los grupos topológicos.

PROPOSICIÓN 1.2. *Supóngase que la identidad e de un grupo topológico G es cerrada como conjunto (como subgrupo) en G. Entonces G es un espacio topológico regular.*

DEMOSTRACIÓN. Como cada traslación de G es un homeomorfismo, concluimos que G es un espacio T_1. Por ser G un espacio homogéneo sólo necesitamos verificar la regularidad en la identidad e de G. Sea U una vecindad abierta de e. Por la continuidad de la multiplicación, existe una vecindad abierta V de e en G tal que $V^2 \subseteq U$. Entonces $W = V \cap V^{-1}$ es una vecindad abierta simétrica de la identidad, y aseguramos que $\overline{W} \subseteq U$. En efecto, sea $x \in \overline{W}$ un punto arbitrario. El conjunto xW es una vecindad abierta de x en G, por tanto $xW \cap W \neq \emptyset$. Luego, podemos escoger $a, b \in W$ tales que $xa = b$, lo cual implica que $x = ba^{-1} \in WW^{-1} = W^2 \subseteq V^2 \subseteq U$. Con esto hemos probado que G es regular. $\square$

Para describir la topología de un grupo topológico, basta dar una base local $\mathcal{N}$ para la identidad e_G del grupo, pues en este caso $\{Ux : x \in G, U \in \mathcal{N}\}$ y $\{xU : x \in G, U \in \mathcal{N}\}$ son bases para la topología de G.

Dado un grupo topológico T_1 G, es fácil probar que existe una base local $\mathcal{V}$ para la identidad e_G de G, que satisface las siguientes condiciones:

1. $\bigcap \mathcal{V} = \{e_G\}$;
2. Si U, V son elementos arbitrarios de $\mathcal{V}$, entonces existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $W \subseteq U \cap V$;
3. Para cada $U \in \mathcal{V}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $VV^{-1} \subseteq U$;
4. Para cada $U \in \mathcal{V}$, y para cada $x \in U$, existe $V \in \mathcal{V}$ que cumple $xV \subseteq U$;
5. Para cada $U \in \mathcal{V}$ y $a \in G$, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $aWa^{-1} \subseteq U$.

Recíprocamente, si tenemos un grupo G y una familia $\mathcal{V}$ no vacía de subconjuntos de G que contienen a e_G y que satisfacen las condiciones mencionadas anteriormente, entonces $\mathcal{V}$ es una base local para e_G en G de una topología τ de grupo.

2. Homomorfismos e isomorfismos

En esta sección definiremos los conceptos de homomorfismos para grupos topológicos.

Dados dos grupos algebraicos H y G y una función $f : G \to H$, decimos que f es un *homomorfismo de* G *en* H si $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ para todos $x, y \in G$, donde los productos son las operaciones respectivas de G y H. De la misma, forma decimos que un homomorfismo $f : G \to H$ de un grupo topológico G a un grupo topológico H, es *abierto* si lo es como función de G en H.

Dado un homomorfismo φ de dos grupos topológicos, es suficiente probar la continuidad del mismo en la identidad del grupo para probar la continuidad del homomorfismo:

LEMA 1.3. *Sea* $\varphi : G \to H$ *un homomorfismo de grupos topológicos. El homomorfismo* φ *es continuo (abierto) si lo es en la identidad* e_G *de* G.

3. Subgrupos topológicos y grupos cociente

Al igual que en espacios topológicos, en los grupos topológicos tenemos las operaciones de toma de subgrupos y grupos cocientes (ambos topológicos), lo cual proporciona una manera de construir nuevos grupos topológicos a partir de otros ya dados.

Por un subgrupo H de un grupo topológico G entenderemos un subgrupo abstracto H de G dotado de la topología heredada de G. Notemos también que la cerradura de todo subgrupo H de un grupo topológico G, denotada por $\overline{H}$, es también un subgrupo de G.

Diremos que un subgrupo H de un grupo algebraico abstracto G es *invariante* si se verifica que $xHx^{-1} = H$ para toda $x \in G$. Entonces, si H es un subgrupo invariante de un grupo topológico G, $\overline{H}$ también lo es. Lo anterior se sigue del hecho de que para cada $g \in G$ el isomorfismo $i_g : G \to G$ definido por $i_g(x) = gxg^{-1}$, $x \in G$, es un homeomorfismo de G sobre G.

El operador cerradura tiene un comportamiento muy estable al actuar sobre subgrupos topológicos como lo muestra la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.4. *Sean* G *un grupo topológico y* H, N *subgrupos de* G. *Entonces*

1. $\overline{H}$ *es un subgrupo cerrado de* G*;*
2. *si* N *es un subgrupo invariante de* G*, entonces* $\overline{N}$ *también lo es;*
3. H *es abierto si y sólo si su interior no es vacío;*
4. *si* H *es abierto, entonces* $\overline{H} = H$.

El inciso 4 de la Proposición anterior es equivalente a decir que todo subgrupo abierto de un grupo topológico es cerrado.

Sea H un subgrupo cerrado invariante de un grupo topológico G. Definimos el *grupo cociente* G/H como el conjunto de las clases laterales xH dotado con la multiplicación $xHyH = (xy)H$, donde $x, y \in G$, la cual es fácil ver que está bien definida. Denotemos por π al homomorfismo natural de G sobre G/H dado por $\pi(x) = xH$ para cada $x \in G$, e introducimos una topología para G/H declarando π función cociente. En otras palabras, un subconjunto $V \subseteq G/H$ es abierto en G/H si y sólo si $\pi^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en G. Por definición π es una función continua, y también es abierta. En efecto, si U es abierto en G, entonces $\pi^{-1}\pi(U) = UH$ es un conjunto abierto en G, es decir, $V = \pi(U)$ es abierto en G/H. Es fácil verificar que el grupo G/H con la topología definida anteriormente en un grupo topológico. Notemos que $\overline{\{e\}} = \pi(e)$ es un conjunto (subgrupo) cerrado de G/H. Por lo tanto, el grupo G/H es de Hausdorff por la Proposición 1.2. De aquí en adelante denotaremos a G/H como el *grupo cociente* de G y a la función $\pi : G \to G/H$ como el *homomorfismo cociente*.

4. Productos directos

Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos topológicos. Damos una estructura de grupo al conjunto $G = \prod_{i\in I} G_i$ definiendo $(x_i)_{i\in I}(y_i)_{i\in I} = (x_i y_i)_{i\in I}$. Si e_i es la identidad de G_i, entonces $e = (e_i)_{i\in I}$ es el elemento identidad de G, y tenemos que $(x_i)_{i\in I}^{-1} = (x_i^{-1})_{i\in I}$. La topología producto es compatible con esta estructura de grupo porque la función $h : G \times G \to G$ dada por $h((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) = (x_i y_i^{-1})_{i\in I}$ es la composición de las funciones $((x_i, y_i))_{i\in I} \mapsto (x_i y_i^{-1})_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I}(G_i \times G_i)$ en G y la proyección $((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto ((x_i, y_i)_{i\in I})$ de $G\times G$ en $\prod_{i\in I}(G_i \times G_i)$, y estas dos funciones son continuas.

El producto directo de los grupos topológicos

$$\{G_i : i \in I\}$$

se obtiene al dar al producto

$$G = \prod_{i \in I} G_i$$

la topología producto.

La proyección natural $\pi_j : G \to G_j$ con $j \in I$ definida por $\pi_j(x) = x_j$ para todo $x = (x_i)_{i \in I} \in G$ es un homomorfismo continuo. Este último hecho se deduce directamente de la definición de la topología producto. Más aún, la función $\varphi_j : G_j \to G$ definida por $\varphi_j(x) = (y_i)_{i \in I}$, donde $y_i = e_i$ para $i \neq j$ y $y_j = x$, es un isomorfismo topológico entre G_j y $N_j = \varphi_j(G)$, es decir, φ_j es una inmersión de G_j en G.

Dados un grupo topológico G y subgrupos cerrados e invariantes $N_1, \ldots, N_n$ de G diremos que G se descompone topológicamente en el producto directo de los subgrupos $N_1, \ldots, N_n$ si G se descompone (en el sentido algebraico) en el producto directo de estos subgrupos y, además, para cualquier colección $U_1, \ldots, U_n$ de vecindades de la identidad, e, relativas a $N_1, \ldots, N_n$, existe una vecindad de e relativa a todo el grupo G tal que $U \subseteq U_1 \cdot \ldots \cdot U_n$.

Proposición 1.5. *Supongamos que el grupo topológico G se descompone topológicamente en el producto directo de los subgrupos $N_1, \ldots,$ N_n, y sea H el producto directo de estos subgrupos. A cada elemento $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H$ le asociamos el elemento $\psi(x) = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) \in G$. Entonces φ es un isomorfismo topológico entre G y H. Además, $\psi \circ \varphi = id_{N_j}$, donde las φ_j se definieron en 4.*

Demostración. Como ya se conocen las partes algebraicas de esta proposición y es evidente que $\psi \circ \varphi = id_{N_j}$, terminaremos si probamos que ψ es una función continua y abierta. Sea U una vecindad arbitraria de la identidad en G y V otra tal que $V^n \subseteq U$. Definimos $V_i = V \cap N_i$ para toda $i \leq n$, y entonces $V' = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in V_i, 1 \leq i \leq n\}$ es una vecindad de la identidad en H. Es fácil ver que $\psi(V') \subseteq U$. Esto demuestra que ψ es continua. Por otro lado, si W es una vecindad de la identidad en H, entonces contiene un subconjunto de la forma $V_1 \times \cdots \times V_n$, donde cada V_i es una vecindad de la identidad en G tal que $U \subseteq V_1 \cdot \ldots \cdot V_n = \psi(V)$, de donde se deduce que ψ es abierta. $\square$

5. Encajes de grupos topológicos en productos Cartesianos

Una clase importante de grupos topológicos es la clase de grupos topológicos $\aleph_0$-acotados (véase [**20**]), la cual forma una variedad estable bajo operaciones tales como la toma de subgrupos, el producto Cartesiano y la imagen bajo homomorfismos continuos suprayectivos. Un grupo topológico G se dice $\aleph_0$-*acotado* si para toda vecindad U de la identidad en G, existe un conjunto numerable, $F \subseteq G$, tal que $F \cdot U = G$. Asimismo, dado un grupo topólogico G, decimos que su *número de invarianza de* G es numerable si para toda vecindad abierta U de la identidad $e \in G$, existe una familia numerable γ de vecindades abiertas de e tal que para cada $x \in G$, existe $V \in \gamma$ que satisface $xVx^{-1} \subset U$; decimos que la familia γ está *subordinada* a U. Los grupos topológicos tales que $inv(G) \leq \omega$ son llamados ω-*balanceados*. En la siguiente proposición mostramos que todo grupo topológico $\aleph_0$-acotado es ω-balanceado.

PROPOSICIÓN 1.6. *Si G es un grupo topológico $\aleph_0$-acotado, entonces el número de invarianza de G es numerable, es decir, G es un grupo topológico ω-balanceado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U una vecindad abierta del elemento neutro e en G. Luego existe una vecindad abierta simétrica V de e tal que $V^3 \subset U$. Como G es $\aleph_0$-acotado, podemos encontrar un subconjunto numerable A de G tal que $VA = G$. Entonces para cada $a \in A$, existe una vecindad abierta W_a del elemento neutro e tal que $aW_a a^{-1} \subset V$. Afirmamos que $\gamma = \{W_a : a \in A\}$ es la familia que estamos buscando. En efecto, γ es una familia numerable de vecindades de e. Ahora, dado cualquier $x \in G$, tenemos que $x \in V_a$ para alguna $a \in A$, y por lo tanto $xW_a x^{-1} \subset V_a W_a a^{-1} V^{-1} \subset VVV^{-1} \subset V^3 \subset U$, lo cual muestra que γ está subordinada a U. □

La topología de un grupo G se puede definir mediante una familia de pseudonormas continuas sobre G. Este hecho se aplica para probar que un grupo topológico G es un espacio completamente regular, y que todo grupo primero numerable es metrizable. Nos referimos a este hecho como el teorema de Birkhoff-Kakutani (véase [**11**]). Además, este resultado se aplica también en la demostración del teorema de Guran y en el teorema de Katz. Los teoremas de Guran y de Katz proporcionan una caracterización de los grupos topológicos $\aleph_0$-acotados y con número de invarianza numerable respectivamente y están basados en los dos lemas siguientes, que a su vez dependen del hecho mencionado al principio de este párrafo (véase [**11**, 5.12]).

Los siguientes lemas son debido a Guran y Katz respectivamente y una vez probados sus teoremas surgen como un corolario (véase [**9**] y [**13**]).

LEMA 1.7. *Sea G un grupo topológico $\aleph_0$-acotado. Entonces para toda vecindad U de la identidad en G existe un homomorfismo continuo $h : G \to H$ sobre un grupo topológico segundo numerable H tal que $h^{-1}(V) \subseteq U$ para alguna vecindad V de la identidad en H.*

LEMA 1.8. *Dado un grupo topológico G con invarianza numerable y U una vecindad de $x \in G$, existe un homomorfismo continuo h de G sobre un grupo primero numerable H tal que $h^{-1}(V) \subseteq U$ para alguna vecindad abierta V de $h(x)$ en H.*

Es fácil ver que los grupos topológicos que tienen un subgrupo denso $\aleph_0$-acotado son también $\aleph_0$-acotados. La siguiente proposición será utilizada en capítulos posteriores.

Proposición 1.9. *Sea G un grupo topológico. Si H es un subgrupo denso de G tal que H es primero numerable, entonces G también es primero numerable.*

Los grupos *completos en el sentido de Raĭkov* son los grupos topológicos en los cuales todo filtro de Cauchy es convergente (véase A). Dado cualquier grupo topológico G, este se puede sumergir como subgrupo denso en otro grupo topológico ϱG completo en el sentido de Raĭkov. A ϱG se le llama *la compleción de Raĭkov de G* (véase A). Si un grupo topológico G es completo en el sentido de Raĭkov, entonces $\varrho G = G$ (véase A). Además, la compleción de Raĭkov de un grupo topológico G es única en el sentido de que dados dos grupos topológicos H_1, H_2 completos en el sentido de Raĭkov, en los cuales G aparece como subgrupo denso, entonces existe un isomorfismo topológico φ de H_1 sobre H_2 tal que $\varphi(g) = g$ para todo $g \in G$ (véase A).

Es fácil ver que los subgrupos cerrados de grupos topológicos completos en el sentido de Raĭkov son completos en el sentido de Raĭkov (véase A.8). Además, los grupos topológicos Raĭkov completos son cerrados cuando se encajan en cualquier grupo topológico (véase A.9). La compleción de Raĭkov de un grupo $\aleph_0$-acotado es también un grupo $\aleph_0$-acotado.

El teorema de Guran establece en [**9**] que un grupo topológico G es $\aleph_0$-acotado si y sólo si éste es topológicamente isomorfo a un subgrupo de un producto de grupos topológicos segundo numerables. El teorema de Katz (en [**13**]) dice que un grupo topológico G es topológicamente isomorfo a un subgrupo topológico de un producto de grupos metrizables si y sólo si $inv(G) \leq \omega$.

Un espacio X se llama *completo en el sentido de Dieudonné* si X es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto de espacios métricos completos (véase [**6**, 3.11]). Decimos que un espacio X es *completo en el sentido de Hewitt-Nachbin* o *realcompacto* si X es un espacio de Tychonoff y no existe un espacio de Tychonoff $\widetilde{X}$ que satisfaga las dos siguientes condiciones

1. Existe un encaje homeomórfico $r : X \to \widetilde{X}$ tal que $\tilde{r}(X) \neq \overline{r(X)} = \widetilde{X}$.
2. Para toda función real continua $f : X \to \mathbb{R}$ existe una función continua $\tilde{f} : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}r = f$.

El siguiente resultado es una caracterización de los espacios realcompactos, y su demostración puede verificarse en [**6**, 3.11.3].

TEOREMA 1.10. *Un espacio topológico es realcompacto si y sólo si éste es homeomorfo a un subespacio cerrado de una potencia $\mathbb{R}^m$ de la recta real.*

En el capítulo correspondiente a los encajes topológicos veremos un par de resultados con cierta analogía a los dos conceptos citados anteriormente.

PROPOSICIÓN 1.11. *Todo grupo topológico $\aleph_0$-acotado y primero numerable tiene una base numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una base numerable para la identidad e de un grupo topológico $\aleph_0$-acotado G. Para cada $n \in \omega$ podemos escoger un conjunto numerable $C_n \subset G$ tal que $C_n \cdot U_n = G$. Entonces la familia $B = \{xU_n : x \in C_n, n \in \omega\}$ es numerable, y afirmamos que B es una base para el grupo G. En efecto, sea O una vecindad abierta de un punto $a \in G$. Podemos encontrar $k, l \in \omega$ tales que $aU_k \subset O$ y $U_l^{-1}U_l \subset U_k$. Existe $x \in C_l$ tal que $a \in xU_l$, siempre que $x \in aU_l^{-1}$. Tenemos que

$$xU_l \subset (aU_l^{-1})U_l = a(U_l^{-1}U_l) \subset aU_k \subset O,$$

esto es, xU_l es una vecindad abierta de a y $xU_l \subset O$. Resta notar que $xU_l \in B$. $\square$

6. Algo sobre funciones cardinales

En esta sección vamos a introducir una función cardinal sobre la clase de los espacios topológicos de Tychonoff llamada *el número de Nagami*. Los espacios con número de Nagami numerable son llamados Σ-*espacios de* Lindelöf, mientras que los grupos topológicos con la misma propiedad son llamados Σ-*grupos de* Lindelöf. Veremos que los espacios σ-compactos forman una subclase propia de los Σ-espacios de Lindelöf; sin embargo, los Σ-espacios de Lindelöf y los espacios σ-compactos comparten muchas propiedades (véase [**14**]).

Supongamos que X es un subconjunto de Y y que γ es una familia de subconjuntos de Y. Diremos que γ *separa a* X *de* $Y \backslash X$ si para toda $x \in X$ y toda $y \in Y \backslash X$, existe $F \in \gamma$ tal que $x \in F$ y $y \notin F$. Una función cardinal es una función f que asigna a todo espacio X un número cardinal $f(X)$ tal que $f(X) = f(Y)$ para cualquier par de espacios homeomorfos. Sea βX la compactación de Stone-Čech (véase [**6**, 3.5.10]) de un espacio de Tychonoff X y sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos cerrados de βX. Definimos *el número de Nagami*, $Nag(X)$, como

$$Nag(X) = \text{mín}\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \subset \mathcal{F},\ \mathcal{P} \text{ separa } X \text{ de } \beta X \backslash X\}.$$

En particular, todo espacio σ-compacto completamente regular X satisface $Nag(X) \leq \omega$. Un espacio de Tychonoff tal que $Nag(X) \leq \omega$ es llamado un Σ-espacio de Lindelöf.

Para todo cardinal infinito λ, introducimos una función cardinal cel_λ análoga a la celularidad. Como es usual, un conjunto G_λ en un espacio topológico es la intersección de una familia de a lo más λ conjuntos abiertos en el espacio en cuestión. Dado un espacio X, definimos $cel_\lambda(X)$ como el mínimo número cardinal $\tau \geq \omega$ tal que toda familia $\mathcal{G}$ consistente de conjuntos G_λ en X, contiene una subfamilia $\mathcal{H}$ que satisface $\overline{\bigcup \mathcal{H}} = \overline{\bigcup \mathcal{G}}$ y $|\mathcal{H}| \leq \tau$. Un espacio con $cel_\lambda(X) \leq \tau$ es llamado *τ-celular* o de celularidad τ, para algun cardinal τ. La *estrechez de un punto* x en un espacio topológico X es el mínimo número cardinal $m \leq \omega$ con la propiedad de que si $x \in \overline{C}$, entonces existe $C_0 \subset C$ tal que $|C| \leq \omega$ y $x \in C_0$; este número cardinal es denotado por $\tau(x, X)$. La *estrechez de un espacio topológico* X, es el supremo de todos los números de la forma $\tau(x, X)$ y es denotado por $\tau(X)$. Notese que todo espacio con celularidad numerable tiene estrechez G_δ numerable pero lo contrario es falso; el plano de Niemytzki es un contraejemplo (véase [**15**]).

Una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es una *red* para X si para todo $x \in X$ y toda vecindad U de x existe un $M \in \mathcal{N}$ tal que $x \in M \subset U$. Claramente, cualquier base para X es una red para X. El *peso de red* de un espacio X se define como el mínimo número cardinal de la forma $|\mathcal{N}|$, donde $\mathcal{N}$ es una red para X; este número cardinal es denotado por $nw(X)$. Dado un número ordinal τ, denotaremos por τ^+ a su ordinal sucesor (véase[**10**, 9.4]) Un subconjunto P de un espacio X se dice un *conjunto cero* si existe una función continua y sobre $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $P = \{x \in X : f(x) = 0\}$. De manera dual, un subconjunto de un espacio X se dice un *conjunto cocero* si su complemento en X es un conjunto cero. Como es usual, $\triangle x = \{(x, x) : x \in X\}$ denota la *diagonal* en X^2.

La demostración del siguiente lema puede ser verificada en [**14**].

Lema 1.12. *Sea $\{x_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ una sucesión de puntos de un espacio de Tychonoff X. Sea $\{U_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ una sucesión de vecindades* *abiertas de la diagonal $\triangle x$ en X^2, y sea $\{\varphi_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ una familia de aplicaciones continuas de X a espacios de Tychonoff con peso de red menor o igual que τ. Si $Nag(X) \leq \tau$, entonces existen $\alpha, \beta \leq \tau^+$, $\alpha < \beta$, y un punto $x \in X$ tales que $(x, x_\alpha) \in U_\beta$ y $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x_\beta)$.*

Recordemos que una *cubierta* de un conjunto X es una familia $\{A_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de X tales que $\bigcup_{s\in S} A_s = X$, y que —si X es un espacio topológico— $\{A_s\}_{s\in S}$ es una cubierta *abierta (cerrada)* de X si todos los conjuntos A_s son abiertos (cerrados). Decimos que una cubierta abierta $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in T}$ es un *refinamiento* de otra cubierta $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ del mismo conjunto X si para todo $t \in T$ existe un $s \in S$ tal que $B_t \subset A_s$; en esta situación decimos que $\mathcal{B}$ refina a $\mathcal{A}$. Un espacio topológico X es llamado un espacio de Lindelöf, o que tiene la propiedad de Lindelöf, si X es regular y toda subcubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable. Claramente, un espacio regular X es un espacio de Lindelöf si y sólo si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento numerable. Se sigue de la definición que todo espacio compacto es un espacio de Lindelöf. La noción de espacio de Lindelöf nos lleva al concepto de *número de* Lindelöf: el mínimo número cardinal m tal que toda cubierta abierta de un espacio X tiene un refinamiento abierto de cardinalidad menor o igual a m es llamado el *número de* Lindelöf del espacio X y es denotado por $l(X)$. Así un espacio regular X tiene la propiedad de Lindelöf si y sólo si $l(X) \leq \omega$. El siguiente lema nos permite reemplazar ciertas familias de conjuntos G_τ en X^2 por una sóla función de X a $\mathbb{R}^\tau$.

Teorema 1.13. *Sea X un espacio con $l(X) \leq \tau$. Si $\triangle x \subset K \subset X^2$ y K es del tipo G_τ en X^2, entonces existe una aplicación continua φ de X a $\mathbb{R}^\tau$ tal que si para todos $x, y \in X$, $\varphi(x) = \varphi(y)$ implica $(x, y) \in K$.*

Demostración. Por las suposiciones del teorema, existe una familia $\{O_\alpha : \alpha < \tau\}$ de conjuntos abiertos en X^2 tal que $K = \bigcap_{\alpha<\tau} O_\alpha$.

Para toda $x \in X$ y $\alpha < \tau$, escogemos un conjunto cocero $U_\alpha(x)$ en X tal que $x \in U_\alpha(x)$ y $U_{\alpha(x)} \times U_\alpha(x) \subset O_\alpha$. Como $l(X) \leq \tau$, podemos encontrar, para cada $\alpha < \tau$, un subconjunto Y_α de X con $|Y_\alpha| \leq \tau$ tal que

$$X = \bigcup\{U_\alpha(x) : x \in Y_\alpha\}.$$

Para cada $\alpha < \tau$ y $x \in Y_\alpha$, escogemos una función continua $f_{\alpha,x} : X \to \mathbb{R}$ tal que $X \backslash U_\alpha(x) f_{\alpha,x}^{-1}(0)$. Notese que la familia $\{f_{\alpha,x} : \alpha < \tau, x \in Y_\alpha\}$ es de cardinalidad menor o igual que τ, por lo que el producto diagonal φ de esta familia asocia X a un subespacio de $\mathbb{R}^\tau$. Afirmamos que la aplicación φ es la requerida. En efecto, supongamos que $\varphi(a) = \varphi(b)$ para algunos $a, b \in X$. Entonces $f_{\alpha,x}(a) = f_{\alpha,x}(b)$ para todos $\alpha < \tau$ y $x \in Y_\alpha$. Sea $\alpha < \tau$ arbitrario. Entonces $a \in U_\alpha(x)$ para algun $x \in Y_\alpha$, luego, la elección de la función $f_{\alpha,x}$ implica que $f_{\alpha,x}(a) \neq 0$. En consecuencia, $f_{\alpha,x}(b) = f_{\alpha,x}(a) \neq 0$ y $b \in U_\alpha(x)$. Esto implica que $(a, b) \in U_\alpha(x) \times U_\alpha(x) \subset O_\alpha$. Como lo último es válido para cada $\alpha < \tau$, concluimos que $(a, b) \in \bigcap_{\alpha<\tau} O_\alpha = K$. □

El siguiente teorema tiene muchas aplicaciones.

TEOREMA 1.14. *Todo grupo topológico H con $Nag(X) \leq \tau$ tiene celularidad τ o, equivalentemente, $cel_\lambda(H) \leq \tau$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario. Entonces existe una familia $\{F_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ de conjuntos G_δ en H no vacios tales que $F_\alpha \subset O_\alpha$ y $F_\alpha \cap O_\beta = \emptyset$ siempre que $\alpha < \beta < \tau^+$. Para toda $\alpha < \tau$, escojase un punto $x_\alpha \in F_\alpha$. Sea $f : H^3 \to H$ la aplicación definida por $f(x, y, z) = xy^{-1}z$. Entonces f es continua, por lo que $U_\alpha = \{(x, z) \in H^2 : f(x, z, x_\alpha)\}$ es una vecindad abierta de la diagonal en H^2 para cada $\alpha < \tau^+$. El conjunto $K_\alpha = \{(x, z) \in H^2 : f(x_\alpha, x, z) \in F_\alpha\}$ contiene a la diagonal de H^2 y es del tipo G_τ en H^2. Por el teorema 1.13 existe una función continua $\varphi_\alpha : H \to \mathbb{R}^\tau$ tal que

$$\{(x, y) \in H^2 : \varphi(x) = \varphi(y)\} \subset K_\alpha.$$

Ahora podemos aplicar el lema 1.12 a las sucesiones $\{x_\alpha : \alpha < \tau^+\}$, $\{U_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ y $\{\varphi_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ para encontrar α, β con $\alpha < \beta < \tau^+$ y un punto $x \in H$ tales que $\varphi_\alpha(x) = \varphi(x_\beta$ y $(x_\alpha, x) \in U_\beta$. Entonces $(x, x_\beta) \in K_\alpha$ y $(x_\alpha, x) \in U_\beta$, y por esta razón $f(x_\alpha, x, x_\beta) \in F_\alpha \cap O_\beta$. Esta contradición completa la prueba. □

La demostración del siguiente lema puede ser consultada en [**15**].

LEMA 1.15. *Sea H un grupo topológico tal que $Nag(H) \leq \tau$. Entonces*

1. *Para todo subgrupo invariante y cerrado N del tipo G_τ en H, el grupo cociente H/N satisface $nw(H/N) \leq \tau$;*
2. *los conjuntos de la forma $\pi^{-1}(V)$ forman una base de H, donde $\pi : H \to K$ es un homomorfismo abierto sobre un espacio topológico K con $nw(K) \leq \tau$ y V abierto en K;*
3. *para todo conjunto cerrado G_τ P en H, existe un homomorfismo abierto $\pi : H \to K$ sobre un grupo topológico K con $nw(K) \leq \tau$ y un subconjunto cerrado $F \subset K$ tal que $P = \pi^{-1}(F)$.*

Dado un espacio topológico X, diremos que X es un *espacio de Efimov* si, para toda familia γ de conjuntos G_δ en X, la cerradura del conjunto $\bigcup \gamma$ es nuevamente un conjunto G_δ en X. Evidentemente, si todo subconjunto cerrado de X es un conjunto G_δ, es decir, si X es *perfecto*, entonces X es un espacio de Efimov.

TEOREMA 1.16. *Sea γ una familia de conjuntos G_τ en un espacio topológico H tal que $Nag(H) \leq \tau$. Entonces $\overline{\bigcup \gamma}$ es también un conjunto G_τ en H.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que todos los elementos de γ son cerrados en H. Sea $F = \overline{\bigcup \gamma}$. Por el Teorema 1.14 existe una subfamilia μ de γ con $|\mu| \leq \tau$ tal que $\overline{\bigcup \mu} = F$. Aplicamos (3) del Lema 1.15 para encontrar, para cada $P \in \mu$, un homomorfismo continuo $\pi_P : H \to H_P$ de H a un grupo topológico H_P con $nw(H_P) \leq \tau$ tal que $P = \pi_P^{-1}\pi_P(P)$. Sea p el producto diagonal de la familia $\{\pi_p : P \in \mu\}$. El grupo $L = p(H)$ satisface $nw(L) \leq \tau$, por lo que podemos definir como en (2) del Lema 1.15 un homomorfismo continuo y abierto $\pi : H \to K$ sobre un grupo topológico K con $nw(K) \leq \tau$ y un isomorfismo continuo $\varphi : K \to L$ tal que $\varphi \circ \pi = p$. Es claro que $P = \pi^{-1}\pi(P)$ para cada $P \in \mu$. Pongamos $D = \bigcup \mu$. Entonces $D = \pi^{-1}\pi(D)$ y, como el homomorfismo π es abierto, tenemos

$$F = \overline{\bigcup \mu} = \overline{D} = \overline{\pi^{-1}(\pi(D))}\pi^{-1}\overline{(\pi(D))}.$$

Como $nw(K) \leq \tau$ se sigue que todo subconjunto cerrado de K es del tipo G_τ en K. Por tanto, $F = \pi^{-1}(E)$ es del tipo G_δ en H, donde $E = \overline{\pi(D)}$. $\square$

Corolario 1.17. *Todo grupo topológico σ-compacto H es un espacio de Efimov*

Corolario 1.18. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo topológico σ-compacto. Entonces todo subconjunto cerrado regular de H es un conjunto cero en H.*

Demostración. Supongamos que H es un subgrupo topológico de un grupo σ-compacto de G. Claramente, podemos asumir que H es denso en G. Sea U un subconjunto abierto de H. Tenemos que verificar que $F = cl_H U$ es un conjunto cero en H. Tomemos un abierto V en G tal que $U = H \cap V$ y pongamos $K = cl_G V$. Como G es σ-compacto, entonces K es del tipo G_δ en G y por tanto K es un conjunto cero en G. Luego, $F = K \cap H$ es un conjunto cero en G. $\square$

7. Introducción a las topologías de Bohr

A continuación damos algunas definiciones y resultados que utilizaremos más tarde en el capítulo correspondiente a las topologías de Bohr. Para más detalles se puede consultar [**7**] y [**17**]. Denotaremos por $\mathbb{P}$ al conjunto de los número primos.

Dado un grupo abeliano G y un elemento $g \in G$, definimos el *orden $o(g)$ de g en G*, como el mínimo entero positivo tal que $ng = 0_G$, si existe; en otro caso, entonces $o(g) = \infty$.

Denotamos por $t(G)$ al *grupo de torsión de G*, que consiste de todos los elementos de orden finito de G.

Notemos que el grupo cociente $G/t(G)$ es un grupo *libre de torsión*, es decir, todos sus elementos distintos de cero tienen orden infinito. En efecto, si $x + t(G) \neq t(G)$, entonces $x \notin t(G)$ y por tanto para toda $n \in \mathbb{N}$, $nx \notin t(G)$, es decir, $n(x + t(G))$ no es cero en $G/t(G)$.

Un subconjunto no vacío $A \subseteq G$, de un grupo abeliano con elemento neutro 0_G se llama *linealmente independiente* o simplemente *independiente* si, cada vez que $a_1, \ldots, a_n \in A$ son todos distintos, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ y $m_1 a_1 + \cdots + m_n a_n = 0_G$, entonces $m_i a_i = 0_G$ para toda $i \leq n$.

El grupo G es suma directa de grupos cíclicos si y sólo si está generado por un subconjunto independiente. Tal subconjunto se llama una *base* de G. En efecto, si $G = \bigoplus\limits_{i \in I} G_i$ y cada G_i es cíclico, entonces $G_i = \langle x_i \rangle$ para cada $i \in I$. Luego, $A = \{x_i : i \in I\}$ es una base para G. Por definición de suma directa A es independiente, y dado $x \in G$ puede escribirse de la forma $x = g_{i_1} + \cdots + g_{i_m}$, con $g_{i_j} \in G_{i_j}$, $j = 1, \ldots, m$. Haciendo $g_{i_j} = m_j x_{i_j}$ tenemos que $x = m_{i_1} g_{i_1} + \cdots + m_{i_m} g_{i_m} \in \langle A \rangle$.

Recíprocamente, si $A \subseteq G$ es un conjunto independiente y $G = \langle A \rangle$, para cada $a \in A$ definimos $G_a = \langle a \rangle$. Cada G_a es cíclico y $G \cong \bigoplus\limits_{a \in A} G_a$, pues si $x \in G = \langle A \rangle$, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ y $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ tales que $x = m_1 a_1 + \cdots + m_n a_n$. Por lo tanto $x \in \sum\limits_{a \in A} G_a$. Con esto se define el isomorfismo (la independencia se usa para verificar que la suma es efectivamente una suma directa).

Mediante el Lema de Zorn podemos ver que todo conjunto independiente de G está contenido en un conjunto independiente máximo. Podemos escoger conjuntos independientes cuyos elementos son todos de orden de la forma p^n, con p un número primo fijo. Esto nos permite definir las nociones de *rango libre de torsión* y *p-rango* de la siguiente manera:

El *rango libre de torsión de* G, $r_0(G)$, es la cardinalidad de un conjunto independiente máximo cuyos elementos son todos de orden infinito.

El *p-rango de* G, $r_p(G)$ es la cardinalidad de un conjunto independiente máximo cuyos elementos tienen orden de la forma p^n, con p un primo fijo.

Dado un grupo abeliano G y un primo p, denotemos por G_p al conjunto de todos los elementos de G cuyo orden es una potencia de p. Es fácil ver que G_p es un subgrupo de G; éste se llama se llama la *componente primaria de* G o una *componente p-primaria* de G. Si $G = G_p$ para algún primo p, G se llama un *p-grupo de torsión.*

Teorema 1.19. *Todo grupo abeliano de torsión es la suma directa de sus componentes primarias.*

Demostración. Primero tenemos que verificar que $G = \sum_{p\in\mathbb{P}} G_p$. En efecto, sean x un elemento arbitrario distinto del cero de G y n el orden de x. Entonces $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$, donde $p_1, \ldots, p_m$ son primos distintos y $k_1, \ldots, k_m$ son enteros positivos. Para cada $i \leq m$, definimos $N_i = n/p_i^{k_i}$. El máximo comun divisor de los enteros $N_1, \ldots, N_m$ es igual a uno, por lo que podemos encontrar enteros $s_1, \ldots, s_m$ tales que $s_1N_1 + \cdots + s_mN_m = 1$. Poniendo $y_i = s_iN_ix$ para $i = 1, \ldots, m$, tenemos que $p_i^{m_i}y_i = p_i^{m_i}(s_iN_ix) = s_inx = 0_G$, de donde concluimos que $y_i \in G_{p_i}$ para toda $i \leq m$. Además, la elección de los $s_1, \dots s_m$ implica que $x = y_1 + \cdots + y_m$ y por ende, $x \in G_{p_1} + \cdots + G_{p_m}$.

Ahora, afirmamos que $G_p \bigcap (G_{q_1} + \cdots + G_{q_k}) = \{0_G\}$ para cualesquiera primos distintos $p, q_1, \dots q_k$. En efecto, sea $x = y_1 + \cdots + y_k$, donde $x \in G_p$ y $y_i \in G_{q_i}$ para cada $i \leq k$. Entonces el orden de x es una potencia de p, mientras que el orden de $y_1 + \cdots + y_k$ es un producto $q_1^{n_1} \cdots q_k^{n_k}$, para algunos $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$. Esto implica que $x = 0_G$.

Con esto hemos probado que G es isomorfo a la suma directa $\bigoplus\limits_{p \in \mathbb{P}} G_p$.

$\square$

Dado un grupo abeliano G y $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n > 0$, definimos

$$G[n] = \{x \in G : nx = 0_G\}.$$

Claramente $G[n] \leq G$ y el orden de cada elemento no nulo $x \in G[n]$ divide a n.

Lema 1.20. *Sea G un p-grupo de torsión no numerable. Entonces $|G[p]| = |G|$.*

Demostración. Denotemos por φ al homomorfismo de G en G definido por $\varphi(g) = pg$ para cada $g \in G$. Es claro que $ker\, \varphi = G[p]$. Notemos que si $g, h \in G$ y $\varphi(h) = g$, entonces $\varphi^{-1}(g) = h + G[p]$. Por tanto

$$|\varphi^{-1}(g)| = |G[p]| \qquad \text{para cada } g \in G. \tag{1}$$

Consideremos una sucesión creciente $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots$ de subgrupos de G definidos por $H_1 = G[p]$ y $H_{n+1} = \varphi^{-1}(H_n)$ para cada entero $n \geq 1$. Sea $\tau = |H_1|$; supongamos que hemos probado la desigualdad $|H_n| \leq \tau \cdot \omega$ para algún entero $n \geq 1$. Aplicando (1) y la hipótesis de inducción, concluimos que $|H_{n+1}| \leq \tau \cdot \omega$. Notemos que $H_n = G[p^n]$ para cada $n \geq 1$, luego $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$. Como $|G| > \omega$ concluimos que $|G| = \tau = |G[p]|$. $\square$

Corolario 1.21. *Todo p-grupo G de torsión no numerable satisface $r_p(G) = |G|$.*

Demostración. Por el Lema 1.20, las cardinalidades de los grupos G y $G[p]$ coinciden. Si A un subconjunto máximo (respecto a la contención) independiente de G, entonces, es suficiente mostrar que $|A| = |G[p]|$. La elección de A implica que, para toda $x \in G[p] \setminus A$, el conjunto $A \cup \{x\}$ es dependiente, por lo que $nx \in \langle A \rangle$ para algún entero $n \notin p\mathbb{Z}$. Por tanto, existen enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $an + bp = 1$, de donde se sigue que $x = (an + bp)x = anx + bpx = anx \in \langle A \rangle$. Esto prueba que $G[p] \subseteq \langle A \rangle$, por lo que A es no numerable y $|A| = |\langle A \rangle| = |G[p]| = |G|$, como se quería. $\square$

Otra característica útil de un grupo abeliano G es el *rango completo*, al cual llamaremos simplemente *rango de G* y se define como

$$r(G) = r_0(G) + \sum_{p \in \mathbb{P}} r_p(G),$$

donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de todos los enteros primos. Es claro que $r(G) = r_0(G)$ si el grupo G es libre de torsión, y $r(G) = r_p(G)$ si G es un p-grupo de torsión para algún $p \in \mathbb{P}$.

Ahora establecemos varios resultados acerca del rango de los grupos abelianos. El primer hecho auxiliar es casi inmediato.

Lema 1.22. *Sea A_0 un subconjunto máximo independiente de un grupo abeliano G consistente en elementos de orden infinito. Para todo primo p, sea A_p un subconjunto máximo independiente del subgrupo G_p de G. Entonces $A = A_0 \cup \bigcup_{p \in \mathbb{P}} A_p$ es un subconjunto máximo independiente de G.*

Demostración. Una simple consideración de los órdenes de los elementos muestra que el conjunto A es independiente. Verifiquemos que A es un máximo. Tomemos un elemento arbitrario $x \in G \setminus A$.

Caso 1. $x \in t(G)$. Por el Teorema 1.19, existen primos distintos $p_1, \ldots p_n$ tales que $x \in G_{p_1} + \cdots + G_{p_n}$. Entonces $x = y_1 + \cdots + y_n$, donde $y_i \in G_{p_i}$ para cada $i \leq n$. Tómese cualquier $i \leq n$ y sea $p_i^{s_i}$ el orden de y_i. Se cumple que $y_i \in A_{p_i}$ o que el conjunto $\{y_i\} \cup A_{p_i}$ es dependiente. En cualquier caso, existe un entero m_i con $0 < m_i < p_i^{s_i}$ tal que $m_i y_i \in \langle A_{p_i} \rangle$. Pongamos $M = m_i \cdots m_n$. De esta manera $My_i \in \langle A_{p_i} \rangle$ para cada $i \leq n$, de donde se sigue que

$$Mx = My_i + \cdots + My_n \in \langle A_{p_1} \cup \cdots \cup A_{p_n} \rangle \subseteq \langle A \rangle.$$

Además, $M = m_1 \cdots m_n < p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n} = o(x)$, por lo que $Mx \neq 0_G$. Esto implica que el conjunto $A \cup \{x\}$ es dependiente.

Caso 2. $x \notin t(G)$. En este caso el conjunto $A_0 \cup \{x\}$ es dependiente y por ende $A \cup \{x\}$ también lo es.

Esto prueba que el conjunto A es máximo y el Lema. □

Proposición 1.23. *Sea B un subconjunto máximo independiente de un grupo abeliano G. Entonces $|B| = r(G)$.*

Demostración. Sean A_0, A_p, y A conjuntos como en el Lema 1.22. Entonces $|A_0| = r_0(G)$ y $|A_p| = r_p(G)$ para cada $p \in \mathbb{P}$. Como $A_0 \cap A_p = \emptyset$ para $p, q \in \mathbb{P}$ distintos, se sigue de la definición de $r(G)$ que $r(G) = |A|$. Finalmente, cualesquiera dos subconjuntos máximos independientes de G tienen la misma cardinalidad, lo cual implica la igualdad $|B| = |A| = r(G)$. □

Corolario 1.24. *Si H es un subgrupo de un grupo abeliano G, entonces $r(H) \leq r(G)$.*

Demostración. Tomemos un subconjunto A independiente del grupo H. Por el Lema de Zorn, existe un subconjunto máximo independiente B de G que contiene a A. Se sigue luego por la Proposición anterior que $r(H) = |A| \leq |B| = r(G)$, como se quería. □

PROPOSICIÓN 1.25. *Todo grupo G abeliano no numerable contiene un subconjunto independiente A que satisface $|A| = |G|$, y por tanto $r(G) = |G|$.*

DEMOSTRACIÓN. Nuevamente, sean A_0 y A_p con $p \in \mathbb{P}$ como en el Lema 1.22. Entonces $A = A_0 \cup \bigcup_{p\in\mathbb{P}} A_p$ es un subconjunto máximo independiente de G. Supongamos que $|A| < |G|$. Por la elección de A, para todo $x \in G$ elemento no cero, existe un entero n tal que $0_G \neq nx \in \langle A\rangle$. Como $|\langle A\rangle| \leq |A| \cdot \omega < |G|$, podemos encontrar un elemento $g \in \langle A\rangle\backslash\{0_G\}$, un entero $m \neq 0$ y un conjunto $D \subseteq G$ con $|D| > |A| \cdot \omega$ tal que $g = mx$ para cada $x \in D$. Sea $x_0 \in D$ arbitrario. Entonces $m(x - x_0) = 0_G$ para cada $x \in D$, de donde se sigue que $|G[m]| \geq |D|$. Por el Teorema 1.19, el grupo $H = G[m]$ es la suma directa sus componentes p-primarias H_p, donde p recorre sobre los divisores primos de m. Por tanto $|H_p| = |H|$ para algún p. Se sigue del Corolario 1.21 que $r_p(H_p) = |H_p| = |H| \geq |D|$, luego, $|A_p| = r_p(H_p) \geq |D| > |A| \geq |A_p|$. Esta contradicción prueba la igualdad $|A| = |G|$. Finalmente, aplicamos la Proposición 1.23 para concluir que $r(G) = |G|$. □

LEMA 1.26. *Sean H un subgrupo de un grupo abeliano G, f un homomorfismo de H a un grupo abeliano F y sean $x \in G$ e $y \in F$. Defínase un número $m \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ como $m = \min(\{n \in \mathbb{N} : nx \in H\} \cup \{\infty\})$. Entonces f se extiende al homomorfismo $h : H_0 = \langle H \cup \{x\}\rangle \to F$ de tal manera que $h(x) = y$ si y sólo si $m = \infty$ o $m \in \mathbb{N}$ y $my = f(mx)$.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es evidente, por lo que sólo probaremos la suficiencia. Sea $H_0 = \langle H \cup \{x\}\rangle$. Es suficiente considerar los dos casos siguientes:

Caso 1. Si $m = \infty$, entonces kx no está en H para ningun $k \in \mathbb{N}$, luego, todo elemento $z \in H_0$ tiene una única representación de la forma

$z = kx + a$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $a \in H$. Pongamos $h(kx + a) = ky + f(a)$ para toda $k \in \mathbb{Z}$ y $a \in H$. Esto define una función $h : H_0 \to F$. Si $z_1 = kx + a$ y $z_2 = lx + b$ son dos elementos de H_0, se tiene que $h(z_1 + z_2) = (k + l)y + f(a + b) = h(z_1) + h(z_2)$, por lo que h es un homomorfismo.

Caso 2. Supongamos que $m \in \mathbb{N}$. Luego $mx \in H$ por la manera en que m está definido. Pongamos $h(x) = y$ y, más generalmente, $h(kx + a) = ky + f(a)$ para toda $k \in \mathbb{Z}$ y $a \in H$. Veamos que la función $h : H_0 \to F$ está bien definida. En efecto, supongamos que $kx+a = lx+b$ para algunos $k, l \in \mathbb{Z}$ y $a, b \in H$. Entonces $(k - l)x = b - a \in H$, y por tanto m divide a $k - l$ por nuestra elección de m. Se sigue que $k - l = mp$ para alguna $p \in \mathbb{Z}$. Tenemos que

$$(ky + f(a)) - (ly + f(b)) = (k - l)y - f(b - a) = mpy - f(mpx) = 0_F,$$

o en otras palabras, $h(kx + a) = h(ly + b)$. Así, el valor de $h(kx + a)$ no depende de la elección de $k \in \mathbb{Z}$ y $a \in H$.

Se verifica fácilmente que h es un homomorfismo de H_0 a F que extiende a f. □

Un grupo G se dice *divisible* si $G^n = G$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, dados $x \in G$ y $n \in \mathbb{N}$, existe un elemento $y \in G$ tal que $y^n = x$. El grupo $\mathbb{T}$ es, obviamente, un grupo divisible. El grupo aditivo de los números reales es también divisible. Por otro lado, el grupo $\mathbb{Z}(2) = \{0, 1\}$ no es divisible. La siguiente es una propiedad fundamental de los grupos divisibles.

TEOREMA 1.27. *Sea H un subgrupo de un grupo G abeliano. Entonces todo homomorfismo f de H a cualquier grupo abeliano divisible F puede ser extendido a un homomorfismo de G a F.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por $\mathcal{P}$ a la familia de las parejas de la forma (K, g) tales que K es un subgrupo de G que contiene a H

y $g : K \to F$ es un homomorfismo tal que la restricción de g a H coincide con f. Dados dos elementos (K, g) y (K_1, g_1) en $\mathcal{P}$, pongamos $(K, g) \leq (K_1, g_1)$ si $K \subset K_1$ y g_1 extiende a g. Esto nos da un conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}, \leq)$. Supongamos que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ es una cadena en $\mathcal{P}$. Pongamos

$$P^* = \bigcup \{P : (P, g) \in \mathcal{C}\}$$

y definimos una función $g^* : P^* \to F$ mediante la regla $g^*(x) = g(x)$, donde $x \in P$ y $(P, g) \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena en $(\mathcal{P}, \leq)$, se sigue que P^* es un subgrupo de G, $H \subset P^*$ y g^* es un homomorfismo de P^* a F. De la definición de (P^*, g^*) tenemos que $(P, g) \leq (P^*, g^*)$ para cada $(P, g) \in \mathcal{C}$. Hemos probado que toda cadena en $(\mathcal{P}, \leq)$ tiene una cota superior en $(\mathcal{P}, \leq)$.

Por el Lema de Zorn, el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}, \leq)$ tiene un elemento máximo (K, h). Resta verificar que $K = G$. Supongamos que sucede lo contrario, es decir, que $K \neq G$. Sea $a \in G \backslash K$. Como F es divisible, el Lema 1.26 garantiza la existencia de un homomorfismo $h_0 : K_0 \to F$ que extiende a h, donde $K_0 = \langle K \cup \{a\} \rangle$. Es claro que $(K, h) < (K_0, h_0)$ y que $(K_0, h_0) \in \mathcal{P}$. Esto contradice (K, h) es máximo y termina la prueba. □

Recordemos que la *compleción de Raĭkov* ϱG de un grupo topológico G puede ser interpretada como un grupo topológico completo en el sentido de Raĭkov, el cual contiene a G como subgrupo denso (véase [**18**]).

Los homomorfismos continuos definidos sobre grupos topológicos que son subgrupos densos de grupos completos en el sentido de Raĭkov se extienden continuamente a todo el grupo más grande, como lo muestra la siguiente afirmación, de la cual omitimos su demostración [**2**].

TEOREMA 1.28. *Sea G un subgrupo denso de un grupo topológico H y sea $f : G \to K$ un homomorfismo continuo de G a un grupo completo* *en el sentido de Raĭkov K. Entonces f se extiende a un homomorfismo continuo $f^* : H \to K$.*

TEOREMA 1.29. *Sea G un grupo topológico, y sean H_1 y H_2 grupos topológicos completos en el sentido de Raĭkov tales que G es subgrupo denso de ambos. Entonces existe un isomorfismo topológico φ de H_1 sobre H_2 tal que $\varphi(g) = g$, para cada $g \in G$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $i : G \to G$ la función identidad. Por el Teorema 1.28, i se extiende a un homomorfismo continuo $\varphi : H_1 \to H_2$. Similarmente, i^{-1} se extiende a un isomorfismo continuo $\psi : H_2 \to H_1$. Entonces la restricción de $\psi \circ \varphi$ a G coincide con la función identidad $i^{-1} \circ i = i$ de G sobre sí mismo, y lo mismo permanece válido para la restricción de $\varphi \circ \psi$ a G. Por tanto $\varphi \circ \psi$ es la función identidad de H_1 sobre sí mismo y $\varphi \circ \psi$ es la función identidad de H_2. Esto implica que φ es un isomorfismo topológico de H_1 sobre H_2 el cual no mueve los puntos de G. □

Decimos que un homomorfismo continuo de un grupo topológico G al grupo del círculo $\mathbb{T}$ es un *caracter* sobre G. Este concepto es de suma importancia para la teoría de la dualidad de Pontryagin-van Kampen. Algunas ideas en la demostración de la existencia de caracteres continuos no triviales sobre cualquier grupo abeliano compacto G (en una manera más bien vaga) son como siguen. Primero, los caracteres pueden ser representados como *puntos fijos* de algunas transformaciones naturales sobre el conjunto de funciones complejas sobre G. Segundo, los caracteres pueden ser interpretados como *puntos extremos* de ciertos conjuntos compactos conexos de funciones. Por supuesto, como definir tales subconjuntos compactos conexos está lejos de ser obvio. Tampoco es inmediato como garantizar la continuidad de los caracteres que se construyan de esta manera, pues sucede que las funciones que se consideran no son todas continuas; sin embargo, ésta es otra historia y tendrá que ser contada en otra ocasión.

CAPíTULO 2

Topologías de Bohr

¿De qué otra forma se puede amenazar que no sea de muerte? Lo interesante, lo original, sería que alguien lo amenace a uno con la inmortalidad.

Jorge Luis Borges.

Si me ofreciesen la sabiduría con la condición de guardarla para mí sin comunicarla a nadie, no la querría.

Séneca.

La *topología de Bohr* (véase [**3**]) de un grupo abstracto (sin topología) abeliano G es la topología inducida sobre G por la familia G^* de todos los homomorfismos de G al grupo del círculo $\mathbb{T}$, con la topología natural heredada del plano complejo. En otras palabras, la topología de Bohr de G es la topología de grupo más gruesa $\tau_b(G)$ sobre G que hace continuos a los elementos de G^* (véase [**4**]). El teorema principal de este capítulo es debido a J. Trigos (véase [**22**] y [**21**]). Dicho teorema da una caracterización de la normalidad en grupos topológicos abelianos con la topología de Bohr. Dado un grupo topológico G, denotaremos por ϱG su compleción de Raĭkov (véase A).

Denotamos al producto diagonal de la familia G^* mediante a $r_G : G \to \mathbb{T}^{G^*}$. Entonces r_G es un homomorfismo de G al grupo producto $\mathbb{T}^{G^*}$.

La cerradura de $r_G(G)$ en $\mathbb{T}^{G^*}$, denotada por bG, es un grupo topológico compacto de Hausdorff. El grupo bG es llamado la *compactación de Bohr de G*. Al grupo G con la topología de Bohr $\tau_b(G)$

lo denotamos como $G^{\#}$. Los elementos necesarios para demostrar el siguiente Teorema escapan a los presentados en esta tesis, pero el lector interesado puede referirse a [**16**].

Teorema 2.1. *Para todo grupo abeliano compacto G y todo elemento a de G distinto del elemento neutro e, existe un carácter continuo χ sobre G tal que $\chi(a) \neq 1$.*

La siguiente Proposición es consecuencia de la definición de la topología de Bohr.

Proposición 2.2. *El grupo topológico $G^{\#}$ es precompacto y de Hausdorff para todo grupo abeliano discreto G. Además, $r_G : G^{\#} \to bG$ es un encaje topológico, es decir, $G^{\#}$ es topologicamente isomorfo a un subgrupo denso del grupo bG, la compactación de Bohr de G.*

Proposición 2.3. *Si G es un grupo abeliano discreto, entonces todo homomorfismo $f : G^{\#} \to H$ en un grupo precompacto H es continuo.*

Demostración. Sea ϱH la compleción de Raĭkov de H. Como el grupo ϱH es compacto, la Proposición 2.4 implica que $f : G^{\#} \to \varrho H$ es continua. $\square$

En lo subsecuente, si $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos abelianos discretos, usaremos la notación $f^{\#} : G^{\#} \to H^{\#}$ para denotar la misma aplicación como homomorfismo de $G^{\#}$ a $H^{\#}$. Además, por la Proposición 2.3, el homomorfismo $f^{\#}$ es continuo.

Proposición 2.4. *Sea G un grupo topológico abeliano. Entonces todo homomorfismo $f : G \to K$ a un grupo compacto de Hausdorff permanece continuo cuando se le considera como homomorfismo de $G^{\#}$ a K.*

Demostración. La cerradura en K de la imagen $f(G)$ es un grupo abeliano compacto, por lo que podemos suponer sin perdida de generalidad que K es abeliano. Para todo caracter continuo χ sobre K, la composición $\chi \circ f$ es un caracter continuo sobre G, luego, $\chi \circ f$ permanece continuo sobre el grupo $G^{\#}$. Por el Teorema 2.1, la topología del grupo compacto K está generada por la familia de todos los caracteres continuos de K, por lo que el homomorfismo $f : G^{\#} \to K$ también es continuo. $\square$

La siguiente Proposición es inmediata de la definición de la compactación de Bohr y la definición de r_G.

Proposición 2.5. *Sea G un grupo abeliano discreto. Entonces la función $r_G : G^{\#} \to bG$ es un encaje isomórfico topológico, es decir, $G^{\#}$ es topológicamente isomorfo a un subgrupo denso del grupo bG, la compactación de Bohr de G.*

En lo subsecuente identificaremos al grupo $G^{\#}$ con el subgrupo denso $r_G(G^{\#}$ de bG.

Corolario 2.6. *Si G es un grupo abeliano discreto, entonces todo homomorfismo $f : G^{\#} \to H$ a un grupo topológico precompacto H es continuo.*

Demostración. Sea ϱH la compleción de Raĭkov de H. Como el grupo ϱH es compacto, la Proposición 2.4 implica que $f : G^{\#} \to \varrho H$ es continuo. La continuidad de $f : G^{\#} \to H$ es ahora obvia. $\square$

Corolario 2.7. *Para todo homomorfismo $f : G \to H$ de grupos abelianos discretos, el homomorfismo $f^{\#} : G^{\#} \to H^{\#}$ es continuo. Si $f(G) = H$, entonces $f^{\#}$ es abierto.*

Demostración. Como el grupo $H^{\#}$ es precompacto, se sigue del Corolario 2.6 que $f^{\#}$ es continuo. Supongamos ahora que $f(G) = H$.

Sea K el kernel de f y $\pi : G^{\#} \to G^{\#}/K^{\#}$ el homomorfismo cociente. Entonces existe un isomorfismo $i : G^{\#}/K^{\#} \to H^{\#}$ que satisface $f^{\#} = i \circ \pi$. Claramente, i es continuo pues π es abierto. Como el grupo cociente $G^{\#}/K^{\#}$ es precompacto, el homomorfismo inverso $i^{-1} : H^{\#} \to G^{\#}/K^{\#}$ es también continuo por el Corolario 2.6. Por lo tanto i es un isomorfismo topológico y se sigue de la igualdad $f^{\#} = i \circ \pi$ que $f^{\#}$ es abierto. $\square$

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea H un subgrupo de un grupo abeliano discreto G. Entonces $H^{\#}$ es un subgrupo topológico de $G^{\#}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\pi : G \to G/H$ la proyección canónica. El grupo $(G/H)^{\#}$ es de Hausdorff por la Proposición 2.5, mientras que el homomorfismo $\pi^{\#} : G^{\#} \to (G/H)^{\#}$ es continuo por el Corolario 2.7. De aquí que el grupo H sea cerrado en $G^{\#}$ al ser el kernel de $\pi^{\#}$, $\square$

COROLARIO 2.9. *Si H es un subgrupo de un grupo G abeliano discreto, entonces la compactación de Bohr bH de H es topológicamente isomorfa a la cerradura de H en la compactación de Bohr bG del grupo G.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la Proposición 2.5 que $G^{\#}$ es un subgrupo topológico del grupo compacto bG. Por b) de la Proposición 2.8, se sigue que $H^{\#}$ es un subgrupo denso del grupo compacto $K = cl_{bG}H$. Entonces, nuevamente por la Proposición 2.8 $H^{\#}$ es un subgrupo denso del grupo topológico compacto bH. Por lo tanto, los grupo compactos bH y K son topológicamente isomorfos por el Teorema 1.29. $\square$

En la siguiente Proposición enunciamos la propiedad que tiene el functor $^{\#}$ de preservar productos directos finitos.

PROPOSICIÓN 2.10. *Sea $G = H_1 \times \cdots \times H_n$ un grupo producto directo de grupos abelianos discretos. Entonces la función identidad i de $G^{\#}$ sobre $H_1^{\#} \times \cdots \times H_n^{\#}$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Como el grupo $H_1^\# \times \cdots \times H_n^\#$ es precompacto, la función identidad i es continua por el Corolario 2.6. Analogamente, para todo $k \leq n$, sea j_k el encaje canónico de H_k al producto $G = H_1 \times \cdots \times H_n$. Si φ es un caracter sobre $G^\#$, denotemos por φ_k a la composición $\varphi \circ j_k$ para $k = 1, \ldots, n$. Entonces φ_k es un caracter continuo sobre $H_k^\#$, y podemos definir un caracter continuo ψ sobre $H_1^\# \times \cdots \times H_n^\#$ haciendo $\psi(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x_k)$ para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$. Se verifica fácilmente que $\varphi = \psi$, lo cual significa que todo caracter sobre $G^\#$ permanece continuo cuando se considera como caracter sobre $H_1^\# \times \cdots \times H_n^\#$. Esto implica que i es un isomorfismo topológico. $\square$

Proposición 2.11. *Sea $G = G_1 \times G_2$ el producto directo de grupos abelianos discretos. Entonces los grupos bG y $bG_1 \times bG_2$ son topológicamente isomorfos.*

Demostración. Por la Proposición 2.5 y la Proposición 2.10 sabemos que $G^\#$ es topológicamente isomorfo a un subgrupo denso de los grupos compactos bG y $bG_1 \times bG_2$. Como los grupos compactos son completos en el sentido de Raĭkov, el Teorema 1.29 implica que los grupos bG y $bG_1 \times bG_2$ son topológicamente isomorfos. $\square$

Proposición 2.12. *Sea G un grupo abeliano. Entonces todo subconjunto independiente de G es cerrado y discreto en $G^\#$.*

Demostración. Supongamos que el conjunto $A \subset G$ es independiente y tomemos un elemento arbitrario $x \in A$. Por la Proposición 2.8, el subgrupo $H_x = \langle A \backslash \{x\} \rangle$ es cerrado en $G^\#$ y $A \cap (G \backslash H_x) = \{x\}$. Concluimos que el punto x es ahislado en A. Por tanto el conjunto A es discreto como subespacio de $G^\#$. Para demostrar que A es cerrado en $G^\#$, tomemos un punto $y \in \overline{A}$. Entonces $y \in \overline{A} \subset \overline{\langle A \rangle} = \langle A \rangle$, por lo que existe un conjunto finito $B \subset A$ tal que $y \in \langle B \rangle$. De esto se sigue que $U = G \backslash \langle A \backslash B \rangle$ es una vecindad abierta de y en $G^\#$ la cual satisface $U \cap A \subset B$, es decir, $|U \cap A| < \omega$. Por lo tanto, A es cerrado en $G^{\#}$. □

La siguiente es una caracterización de los subconjuntos C^*-encajados de un espacio X mediante el Teorema de extensión de Urysohn. (véase [**6**, 1.5.11]).

Teorema 2.13. *Un subespacio Y de un espacio X está C^*-encajado en X si y sólo si cualesquiera dos conjuntos completamente separados en Y son completamente separados en X.*

Lema 2.14. *Sean G un grupo abeliano discreto y H_1, H_2 subgrupos de G con intersección trivial. Entonces la intersección de la cerraduras de H_1 y H_2 en la compactación de Bohr bG de G es también trivial.*

Demostración. Consideremos al subgrupo $H = H_1 + H_2$ de G. Se sigue del Corolario 2.9 que la compactación de Bohr bH de H es topológicamente isomorfa a la cerradura de H en bG. Como la intersección $H_1 \cap H_2$ es trivial, el grupo H es algebraicamente isomorfo al grupo producto $H_1 \times H_2$. Así bH es topológicamente isomorfo al grupo $bH_1 \times bH_2$ por la Proposicón 2.11. Identifiquemos la cerradura de H en bG con el producto $bH_1 \times bH_2$. Es claro que $bH_1 \cong bH_1 \times \{0_2\}$ y $bH_2 \cong \{0_1\} \times bH_2$, donde 0_1 y 0_2 son los elementos neutros de los grupos bH_1 y bH_2 respectivamente. Luego las cerraduras de los grupos H_1 y H_2 en bH (y en bG) tienen un único elemento en común, el elemento neutro de bH. □

Teorema 2.15. *Sea G un grupo abeliano discreto. Entonces todo subconjunto independiente A de G está C^*-encajado en bG. Por tanto la cerradura de A en bG es naturalmente homeomorfa a la compactacón de Stone-Čech βA de A.*

Demostración. Primero probaremos que A está C^*-encajado en bG. Por el Teorema 2.13, es suficiente verificar que, para todo subconjunto independiente B de A, los conjuntos $cl_{bG}B$ y $cl_{bG}(A\backslash B)$ son disjuntos. Denotemos por H_1 y H_2 a los subgrupos generados por $A\backslash B$ y B, respectivamente. Como A es independiente, los grupos H_1 y H_2 tienen intersección trivial. Por el Lema 2.14, esto implica que la intersección de las cerraduras de H_1 y H_2 en bG son también triviales. De acuerdo a la Proposición 2.12, los conjuntos $A\backslash B$ y B son cerrados en $G^\#$ y, claramente, ninguno de ellos contiene al elemento neutro 0_G del grupo $G^\# \subset bG$. Por tanto sus cerraduras tampoco. Como $cl_{bG}(A\backslash B) \subset cl_{bG}H_1$ y $cl_{bG}B \subset H_2$, concluimos que los conjuntos $cl_{bG}(A\backslash B)$ y $cl_{bG}B$ son disjuntos. Esto prueba la afirmación del teorema.

Como el conjunto A está C^*-encajado en bG, también está C^*-encajado en su cerradura $K = cl_{bG}A$. Al ser el espacio K compacto, existe un homeomorfismo $h : K \to \beta A$ el cual fija los puntos de A (véase [**6**, 2.1.8]). Esto termina la prueba. □

Teorema 2.16. *Si G es un grupo abeliano discreto, entonces $G^\#$ es normal si y sólo si G es numerable.*

Demostración. Si G es numerable, entonces el grupo $G^\#$ es un espacio regular de Lindelöf y por tanto normal, luego es normal como grupo.

Recíprocamente, supongamos que el grupo G no es numerable. Por la Proposición 2.12, G contiene un subconjunto independiente no numerable D. Escojamos dos subconjuntos disjuntos D_1, D_2 de D tales que $|D_1| = |D| = |D_2|$. Por el Teorema 2.15, todo subconjunto independiente de G está C^*-encajado en la compactación de Bohr bG de G. Como el conjunto $D \subseteq G^\#$ es cerrado y discreto por la Proposición 2.12, y todo subconjunto de D es independiente, se sigue que el espacio compacto $K_i = cl_{bG}D_i$ es homeomorfo a la compactación de Stone-Čech βD_i, para cada $i = 1, 2$.

Sea $m : bG \times bG \to bG$ la función suma $m(x, y) = x + y$. Como $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, entonces los subgrupos $H_1 = \langle D_1 \rangle$ y $H_2 = \langle D_2 \rangle$ tienen intersección trivial. Se sigue del Lema 2.14 y el Corolario 2.9 que lo mismo se cumple para los subgrupos $bH_1 \cong cl_{bG}H_1$ y $bH_2 \cong cl_{bG}H_2$ del grupo bG.

Afirmamos que la multiplicación m restringida a $bH_1 \times bH_2$ es un encaje topológico en bG. En efecto, sean $a, b \in bH_1$, $c, d \in bH_2$ tales que $m(a, c) = m(b, d)$, entonces $a + c = b + d$, luego $a - b = d - c$, pero $a - b \in bH_1$ y $d - c \in bH_2$ que tenían intersección trivial. Entonces $a - b = 0 = d - c$, de donde se sigue que $a = b$ y $d = c$, es decir, $m|_{bH_1 \times bH_2}$ es inyectiva y por tanto es un encaje topológico en bG (por compacidad).

Como $K_i \subset bH_i$ para $i = 1, 2$, podemos identificar al producto $K_1 \times K_2$ con su imagen $K_1 + K_2 = cl_{bG}(D_1) + cl_{bG}(D_2) = cl_{bG}(D_1 + D_2)$ por continuidad y compacidad. Además, como los conjuntos discretos D_1 y D_2 tienen la misma cardinalidad, podemos identificar también D_1 con D_2 (ambos denotados por S) y $K_1 \cong \beta D_1$ con $K_2 \cong \beta D_2$ (ambos denotados por K). Esto nos da los encajes naturales

$$S^2 \hookrightarrow^{denso} K^2 \hookrightarrow^{m} bG$$

donde $K^2 \cap G^{\#} = S^2$ es un subconjunto discreto y cerrado de $G^{\#}$ (pues S está identificado con D_i, para $i = 1, 2$, los cuales por ser independientes son cerrados y discretos por la Proposición 2.12)

Sea $\triangle_K = \{(x, x) : x \in K\}$ la diagonal en K^2 y $\triangle_S = S^2 \cap \triangle_K$ la diagonal en S^2. Veamos que existen dos conjuntos cerrados y ajenos no vacíos que no pueden separarse mediante dos conjuntos abiertos no vacíos ajenos entre sí. Sea también $P = S^2 \backslash \triangle_S$. Afirmamos que los subconjuntos cerrados $\triangle_S$ y P de $G^{\#}$ (son cerrados por ser subconjuntos de los conjuntos D_i, $i = 1, 2$, los cuales están relacionados con S, que es cerrado y discreto) no pueden ser separados por vecindades abiertas no vacías disjuntas. En efecto, tómese una vecindad abierta arbitraria U de P en $G^{\#}$. Existe un conjunto abierto V en bG tal que $U = V \cap bG$. Entonces, por el Corolario 1.18, $cl_{bG}V$ es un conjunto cero en bG. Por lo tanto, el complemento $W = K^2 \backslash cl_{bG}V$ es un conjunto cocero en K^2. Así, el espacio W es un espacio de Lindelöf por ser un conjunto cocero en el conjunto F_σ en el espacio compacto K^2. Notemos que $\triangle_S$ es denso en $\triangle_K$ y S^2 es denso en K^2 (pues S es denso en K). Como $S^2 = \triangle_S \cup P$ y $P \subset U \subset V$, tenemos que $K^2 = cl_{bG}(S^2) = cl_{bG}(\triangle_S \cup P) = cl_{bG}(\triangle_S) \cup cl_{bG}(P) = \triangle_K \cup cl_{bG}(P) \subseteq \triangle_K \cup cl_{bG}(V)$, es decir, $K^2 \subset \triangle_K \cup cl_{bG}V$.Por lo tanto $W \subseteq \triangle_K$.

Como ningún punto de $\triangle_K \backslash \triangle_S$ tiene una vecindad en K^2 contenida en $\triangle_K$, concluimos que $W \subset \triangle_S$. Como $\triangle_S$ es discreto y W es de Lindelöf, se sigue que W es numerable.

Finalmente, como $\triangle_S$ es no numerable, el conjunto $cl_{bG}V$ intersecta a $\triangle_S$

$$W = K^2 \backslash cl_{bG}V \subseteq \triangle_S$$

Por la densidad de S^2 en K^2 se tiene que toda vecindad abierta de $\triangle_S$ en $G^{\#}$ intersecta a U y a V pues $\triangle_S \subseteq U \subseteq cl_{bG}V \cap \triangle_S \neq \emptyset$.

Esto prueba nuestra afirmación y muestra que el espacio $G^{\#}$ no es normal. $\square$

CAPíTULO 3

Encajes

Los seres creativos aprenden lo que quieren, aprenden para poder tener las herramientas que su originalidad y genio necesitan. En el salón de clases no sabemos cuanta creatividad se mata por enfatizar el aprendizaje.

Amstrong S. Neil.

En este capítulo presentamos dos de los resultados principales de esta tesis. Dichos resultados están inspirados en los teoremas de Guran y Katz, respectivamente (véase [**9**] y [**13**]). Dado un grupo topológico G, denotaremos por ϱG su compleción de Raĭkov (ver A). Varios de los resultados aquí enunciados pueden revisarse en [**11**].

Dado un espacio topológico X, un subconjunto Y de X se llama *G_δ-abierto* en X si es unión de conjuntos G_δ en X. Además, un subconjunto es *G_δ-cerrado* en X si su complemento es un conjunto G_δ-abierto en X.

TEOREMA 3.1. *Sea G un grupo topológico ω-balanceado. Entonces G es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de un producto de grupos primero numerables si y sólo si G es un conjunto G_δ-cerrado en su compleción de Raĭkov, ϱG.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que G es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de un producto de grupos topológicos primero numerables, es decir, existe una familia de grupos topológicos $\{H_\alpha : \alpha \in A\}$ con H_α primero numerable para toda $\alpha \in A$ tal que G se sumerge como subgrupo cerrado en el producto

$$H = \prod_{\alpha \in A} H_\alpha.$$

Como el producto de grupos topológicos completos en el sentido de Raĭkov es completo en el sentido de Raĭkov (véase A.7), concluimos que

$$\varrho H \cong \prod_{\alpha \in A} \varrho H_\alpha.$$

La cerradura de G en ϱH, $cl_{\varrho H} G$, es un subgrupo cerrado del grupo topólogico ϱH. De aquí que $cl_{\varrho H} G$ sea también Raĭkov completo. El grupo G es denso en los grupos topológicos completos en el sentido de Raĭkov ϱG y $cl_{\varrho H} G$, lo que quiere decir que estos son topológicamente isomorfos, es decir, ϱG es subgrupo topológico de ϱH.

Es fácil ver que $G = \varrho G \cap H$. En efecto, puesto que G es cerrado en H, sigue que

$$G = cl_H G = cl_{\varrho H} G \cap H = \varrho G \cap H, \tag{2}$$

es decir, $G = \varrho G \cap H$. Para todo $x \in \varrho G$, tenemos que $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Si $x \in \varrho G \backslash G$, entonces existe $\alpha_0 \in A$ tal que $x_{\alpha_0} \notin H_{\alpha_0}$, pues de lo contrario $x_\alpha \in H_\alpha$ para todo $\alpha \in A$ y por tanto $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} H_\alpha \cap \varrho G = H \cap \varrho G$, lo cual implica por (2) que $x \in G$, contrario a nuestra elección del punto x. Por hipótesis H_{α_0} es primero numerable, por tanto su compleción de Raĭkov, ϱH_{α_0} también es primero numerable (véase el Lema 1.9). Así que $\{x_{\alpha_0}\}$ es un conjunto G_δ en ϱH_{α_0}. Sea $\pi_{\alpha_0} : \varrho H \to \varrho H_{\alpha_0}$ la proyección canónica de ϱH sobre ϱH_{α_0}. Entonces $\pi_{\alpha_0}^{-1}(x_{\alpha_0})$ es un conjunto G_δ en $\prod_{\alpha \in A} \varrho H_\alpha \cong \varrho H$ el cual claramente contiene a x y es ajeno a G. Por lo tanto $P_x = \pi_{\alpha_0}^{-1}(x_{\alpha_0}) \cap \varrho G \subseteq \varrho G \backslash G$ es un conjunto G_δ en ϱG, lo cual implica que $\varrho G \backslash G$ es unión de conjuntos G_δ, es decir, $\varrho G \backslash G$ es un conjunto G_δ-abierto en ϱG y por tanto G es conjunto G_δ-cerrado en ϱG.

Recíprocamente, supongamos que G es un conjunto G_δ-cerrado en ϱG. Entonces $\varrho G \backslash G$ es un conjunto G_δ-abierto en ϱG, es decir, para cada $x \in \varrho G \backslash G$ existe un conjunto G_δ, P_x, en ϱG que contiene a x y es ajeno a G. Por 1.8, existe una familia $\{U_n : n \in \omega\}$ de conjuntos abiertos en ϱG tal que $P_x = \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$ (y $x \in U_n$ para toda $n \in \omega$). Así, para cada $n \in \omega$, existe un homomorfismo continuo h_n de ϱG en un grupo primero numerable K_n, tal que $h_n^{-1}(V_n) \subseteq U_n$ para alguna vecindad V_n de $h_n(x)$ en K_n (véase 1.8). Con esto, para cada $x \in \varrho G \backslash G$, hemos obtenido una familia de homomorfismos continuos $\{h_n : n \in \omega\}$ que van de ϱG en grupos topológicos primero numerables. Sea

$$h_x = \mathop{\triangle}_{n\in\omega} h_n : \varrho G \to \prod_{n\in\omega} K_n$$

el producto diagonal de esta familia. Entonces h_x es un homomorfismo continuo de ϱG en el grupo topológico primero numerable $K_x = \prod\limits_{n\in\omega} K_n$.

Haciendo lo mismo para cada $x \in \varrho G \backslash G$ obtenemos a su vez una familia de homomorfismos continuos $\mathcal{H} = \{h_x : x \in \varrho G \backslash G\}$ que van de ϱG en los grupos topológicos primero numerables K_x, con $x \in \varrho G \backslash G$.

Sea

$$h = \mathop{\triangle}_{h_x \in \mathcal{H}} h_x : \varrho G \to K$$

el producto diagonal de esta familia, donde $K = \prod\limits_{x\in\varrho G\backslash G} K_x$. Denotemos por i el encaje canónico de ϱG en ϱG, y consideremos el producto diagonal

$$f = i \triangle h : \varrho G \to \varrho G \times K$$

Así, f es un encaje de ϱG en $\Pi = \varrho G \times K$.

Para cada $x \in \varrho G \backslash G$, h_x tiene la propiedad

$$h_x^{-1} h_x(x) \subseteq \varrho G \backslash G.$$

En efecto, por la construcción de h_x, $h_n(x) \in V_n$, luego $x \in h_n^{-1}(V_n) \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$, de donde $h_x^{-1}h_x(x) \subseteq \bigcap_{n\in\omega} h_n^{-1}(V_n) \subseteq \bigcap_{n\in\omega} U_n = P_x \subseteq \varrho G\backslash G$. De aquíse sigue que $h^{-1}(h(x)) \subseteq \varrho G\backslash G$.

Como $G \leq \varrho G$, se tiene que $h_x(G) \leq K_x$. Haciendo $H_x = h_x(G)$, podemos escribir

$$K^* = \prod_{x\in\varrho G\backslash G} H_x \leq \prod_{x\in\varrho G\backslash G} K_x.$$

Al restringir h a G, nos queda

$$h^* = h|_G : G \to K^* = \prod_{x\in\varrho G\backslash G} H_x.$$

Al restringir f a G, obtenemos

$$f^* = f|_G = i|_G \triangle h^* : G \hookrightarrow \Pi^*$$

donde $\Pi^* = G \times K^*$.

Ahora, veamos que $f(G) = f(\varrho G) \cap \Pi^*$. Supongamos que existe $z \in f(\varrho G) \cap \Pi^*$ tal que $z \notin f(G)$. Por definición, existe $y \in \varrho G$ tal que $f(y) = z$, es decir, $z = (y, h(y)) = (y, h_x(y))_{h_x\in\mathcal{H}}$ y $z \notin f(G)$. Luego, existe $x_0 \in \varrho G$ tal que $h_{x_0}(y) \notin h_{x_0}(G)$. Por tanto, $h_{x_0}^{-1}h_{x_0}(y) \subseteq \varrho G\backslash G$, de lo que concluimos que $h_{x_0}(y) \notin H_{x_0}$, es decir, $h(y) \notin \prod_{h_x\in\mathcal{H}} H_x = K^*$, de lo que se sigue que $f(y) \notin f(\varrho G) \cap \Pi^*$. Esto contradice la elección de z. Luego, $f(\varrho G) \cap \Pi^* = f(G)$. Como ϱG es un grupo completo en el sentido de Raĭkov, éste se encaja como cerrado en $\varrho\Pi$ bajo f. De aquí, $f(G) = f(\varrho G) \cap \Pi^*$ es cerrado en Π^*. $\square$

Se puede mostrar que todo grupo topológico $\aleph_0$-acotado es un grupo topológico ω-balanceado. El recíproco en general no es cierto. Basta observar que cualquier grupo topológico discreto es un grupo ω-balanceado, mientras que un grupo discreto es $\aleph_0$-acotado si y sólo si es numerable. Estas observaciones y el teorema anterior nos ayudarán en el siguiente resultado.

TEOREMA 3.2. *Un grupo topológico $\aleph_0$-acotado G es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de un producto de grupos topológicos segundo numerables si y sólo si G es un conjunto G_δ-cerrado en la compleción de Raĭkov de G.*

DEMOSTRACIÓN. Como G es un grupo topológico $\aleph_0$-acotado, se sigue que G es ω-balanceado. Por el Teorema 3.1 G es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado del producto de una cierta familia de grupos topológicos primero numerables, digamos

$$\mathcal{H} = \{H_\alpha : \alpha \in A\}$$

si y sólo si G es un conjunto G_δ-cerrado en ϱG, su compleción de Raĭkov. Supongamos que G es cerrado en el producto

$$H = \prod_{\alpha \in A} H_\alpha$$

de grupos primero numerables, de modo que sólo tenemos que probar la suficiencia.

Para cada $\alpha \in A$ definamos la proyección canónica

$$p_\alpha : H_\alpha \to H_\alpha.$$

Como G es subgrupo de H, se sigue que $p_\alpha(G)$ es un subgrupo de H_α, que es primero numerable. Por tanto $p_\alpha(G)$ es también primero numerable y además es $\aleph_0$-acotado por ser imagen continua del grupo $\aleph_0$-acotado G. De aquí que $p_\alpha(G)$ sea segundo numerable (véase 1.11). Entonces podemos considerar a G como subgrupo del producto de sus proyecciones, es decir

$$G \leq \prod_{\alpha \in A} p_\alpha(G).$$

Como G es cerrado en H $G \bigcap \prod\limits_{\alpha \in A} p_\alpha(G) = G$ es un conjunto cerrado en $\prod\limits_{\alpha \in A} p_\alpha(G)$. Pero esto significa que G es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado del producto de los grupos topológicos segundo numerables $p_\alpha(G)$. $\square$

APÉNDICE A

Compleción de Raĭkov

Todo lo que puedas imaginar es real.

Pablo Picaso.

Try not. Do, or do not. there is no try.

Yoda.

Por considerarla no trivial, esbozaremos brevemente la construcción de la completación de Raĭkov de un grupo topológico arbitrario G. Sólo enunciaremos los hechos más sobresalientes, y en muchos casos omitiremos las demostración de los mismos. El lector interesado podrá encontrar más información al respecto en [**8**].

En esta sección G representará un grupo topológico, y e su elemento neutro. Para cada $x \in G$, sea B_x la familia de todos los conjuntos abiertos en G que contienen a x.

Un *filtro* sobre G es una familia no vacía η de subconjuntos de no vacíos de G que satisfacen las siguientes dos condiciones:

- si U y V son elementos de η, entonces $U \cap V$ también es elemento de η.
- si $U \in \eta$ y $U \subset W \subset G$, entonces $W \in \eta$.

Una familia ξ es un *filtro abierto* sobre G si existe un filtro η sobre G tal que ξ es la intersección de η con la familia de todos los conjuntos abiertos de G. Esta definición es equivalente a decir que ξ es un filtro abierto sobre G si ξ es una familia de subconjuntos abiertos no vacíos de G tal que la intersección de cualquier número finito de elementos de ξ está también en ξ, y para cada $U \in \xi$ y para todo subconjunto abierto W de G tal que $U \subseteq W$, W también pertenece a ξ.

Una familia η de conjuntos no vacíos se dice que es una *base de filtro* si para cualesquiera elementos $U, V \in \eta$, existe $W \in \eta$ tal que $W \subseteq U \cap V$. Una *base de filtro abierta sobre* G es una base de filtro cuyos elementos son todos subconjuntos abiertos de G.

Un punto x es llamado *un límite de un filtro* ξ si toda vecindad de x pertenece a ξ. Decimos entonces que el filtro ξ *converge* a x y escribimos $x \in \lim \xi$.

Para cualquier base de filtro η en un espacio X, la familia $\xi_\eta = \{A \subset X : \text{ existe } B \in \eta \text{ tal que } B \subset A\}$ es un filtro en X.

Un punto x es llamado *lí*mite de una base de filtro η si $x \in \lim \xi_\eta$; decimos entonces que la base de filtro η converge a x y escribimos $x \in \lim \eta$. Claramente, $x \in \lim \eta$ si y sólo si toda vecindad de x contiene un miembro de η.

Para cada familia η de subconjuntos de G, denotamos por $o(\eta)$ a la familia de todos los subconjuntos abiertos de G que contienen al menos un elemento de η. Claramente, si todos los elementos de η son abiertos, entonces $\eta \subseteq o(\eta)$.

Una familia η de subconjuntos de G se llama *familia de Cauchy* si para toda vecindad abierta V de e en G, existen $a, b \in G$ y $A, B \in \eta$ tales que $A \subset aV$ y $B \subset Vb$. Un *filtro abierto* η es una famila de Cauchy si y sólo si para cada vecindad abierta V de e, es posible encontrar $a, b \in G$ tales que los conjuntos aV y Vb pertenezcan a η.

Una familia η de conjuntos se dice *encogedora* si para todo $B \in \eta$ existe $A \in \eta$ y vecindades U y V de e tales que $UAV \subseteq B$. Un *filtro canónico* es un filtro el cual es tanto encogedor como de Cauchy. Ahora procederemos a definir la completación de Raĭkov de un grupo topológico G.

Un grupo topológico G tal que todo filtro de Cauchy sobre G converge es llamado *completo en el sentido de Raĭkov.* Sea G^* la familia de todos los filtros canónicos sobre G. Notemos que B_x es un filtro canónico sobre G, para cada $x \in G$. Pongamos $i(x) = B_x$, para cada $x \in G$. Así, hemos definido una función uno-a-uno de G en G^*. Definimos una multiplicación $\circ$ sobre G^* como sigue: para todos $\eta, \xi \in G^*$, sea $\eta \circ \xi = o([\eta\xi])$. Notemos que la asociatividad de $\circ$ se sigue del hecho de que dados η y ξ bases de filtro abiertas, entonces $\circ([o(\eta)o(\xi)] = o([\eta\xi])$.

Para cada $\eta \in G^*$, definimos el inverso de η como

$$\eta^{-1} = \{U^{-1} : U \in \eta\}.$$

Claramente η^{-1} está en G^*. Se puede verificar fácilmente que $(B_x)^{-1}$ $= B_{x^{-1}}$ para cada $x \in G$ y que $B_x \circ B_y = B_{xy}$ para cualesquiera x e y en G.

Se puede demostrar que $\circ$ es una operación sobre el conjunto G^*, y que el filtro canónico juega el papel de elemento neutro en G^*. También se puede mostrar que la función i es un isomorfismo del grupo G sobre el subgrupo $i(G) = \{B_x : x \in G\}$ de G^*.

Resta definir una topología sobre G^* la cual hará homeomorfos a G e $i(G)$ y también hará la multiplicación $\circ$ continua. Denotamos por τ a la topológia de G. Tomemos cualquier conjunto abierto U en G, y pongamos $U^* = \{\eta \in G^* : U \in \eta\}$. Claramente para cualesquiera conjuntos abiertos U y V en G, se tiene que $U^* \cap i(G) = i(U)$ y $U^* \cap V^* = (U \cap V)^*$. De lo anterior se sigue que la familia $\mathcal{B} = \{U^* : U \in \tau\}$ es una base para una topología τ^* sobre G. Notemos que τ^* genera sobre $i(G)$ la topología consistente precisamente de los conjuntos $i(W)$, donde $W \in \tau$, puesto que la traza de $\mathcal{B}$ sobre $i(G)$ es esta familia de conjuntos. Así, la función i es un homeomorfismo de G sobre el subespacio $i(G)$ de G^*.

Es claro que la operación inversa sobre G^* es continua.

El siguiente teorema es resultado de las afirmaciones anteriores.

TEOREMA A.1. *Para todo grupo topológico G, existe un grupo topológico canónico G^* y un isomorfismo topológico i de G sobre un subgrupo denso $i(G)$ de G^*, donde G^* es un grupo topológico completo en el sentido de Raĭkov.*

Los Teoremas A.1 y 1.29 nos permiten llamar al grupo topológico G^* construido anteriormente *la completación de Raĭkov* del grupo G. En lo subsecuente, el grupo G^* será denotado por ϱG, y G siempre será identificado con el subgrupo denso $i(G)$ de ϱG.

PROPOSICIÓN A.2. *Para cualquier grupo topológico G, se cumple $\varrho\varrho G = \varrho G$. En particular, G es completo en el sentido de Raĭkov si y sólo si $\varrho G = G$.*

COROLARIO A.3. *Sea G un subgrupo denso de un grupo topológico H. Entonces existe un isomorfismo topológico f de H sobre un subgrupo topológico de la completación de Raĭkov ϱG de G tal que $f(g) = g$ para cada $g \in G$.*

El siguiente resultado es un caso especial del Teorema 1.28. Éste establece una propiedad básica de las completaciones de Raĭkov.

COROLARIO A.4. *Todo homomorfismo continuo f de un grupo topológico G en un grupo topológico H puede ser extendido a un homomorfismo continuo f^* de ϱG en ϱH.*

Vamos a mostrar que la clase de grupos topológicos metrizables es cerrada bajo las completaciones de Raĭkov.

PROPOSICIÓN A.5. *Sea H un subgrupo metrizable de un grupo topológico G. Entonces la cerradura de H en G es también un subgrupo metrizable de G.*

Demostración. Denotemos por K la cerradura de H en G. Se sigue de la Proposición 1.4 que K es también primero númerable y, por ende, metrizable. $\square$

Corolario A.6. *Para cualquier grupo topológico metrizable G, su completación de Raĭkov ϱG es metrizable.*

El siguiente teorema es muy similar a la afirmación acerca de los espacios uniformes. Su prueba es cercana a la del teorema de la cerradura de la compacidad en los espacios de Tychonoff.

Teorema A.7. *Todo producto directo $G = \prod_{i \in I} G_i$ de grupos completos en el sentido de Raĭkov es completo en el sentido de Raĭkov.*

Proposición A.8. *Sea G un grupo topológico completo en el sentido de Raĭkov. Para todo subgrupo H cerrado de G se cumple que H es también completo en el sentido de Raĭkov.*

Demostración. Supongamos que tenemos G y H como en las hipótesis y que H no es completo en el sentido de Raĭkov. Esto implica que $\varrho H \neq H$. Sea $x \in \varrho H \backslash H$. Como H es cerrado en G, existe un conjunto abierto $U \subseteq H$ tal que $x \in U$. En particular $G \backslash H$ es abierto y $\varrho H \backslash H \subseteq G \backslash H$ pues ϱH es subgrupo de G.

Tenemos que $(\varrho H \backslash H) \cap G$ es un conjunto abierto en ϱH y además $(\varrho H \backslash H) \cap G = \varrho H \backslash H$. Entonces $\varrho H \backslash H$ es abierto en ϱH, pero H es denso en ϱH, por lo tanto $\varrho H \backslash H$ es denso en ninguna parte. Como $\varrho H \backslash H$ es abierto en ϱH se sigue que $\varrho H \backslash H = \emptyset$. Esto muestra que $\varrho H = H$. $\square$

Proposición A.9. *Sean G y H grupos topológicos y $f : G \to H$ un encaje topológico de G en H. Si G es grupo topológico completo en el sentido de Raĭkov entonces $f(G)$ es un subgrupo cerrado de H.*

Demostración. La cerradura de $f(G)$ en H cumple la igualdad

$$cl_H f(G) = cl_{\varrho H} f(G) \cap H,$$

pero $f(G)$ es denso en $cl_{\varrho H} f(G)$ y $cl_{\varrho H} f(G)$ es completo en el sentido de Raĭkov por ser subgrupo cerrado del grupo completo en el sentido de Raĭkov ϱH. Por lo tanto $cl_{\varrho H} f(G) \cong \varrho f(G)$. Luego

$$cl_{\varrho H} f(G) \cap H \cong \varrho f(G) \cap H = f(G) \cap H = f(G).$$

La última afirmación implica que $f(G) = cl_{\varrho H} f(G)$, es decir, $f(G)$ es cerrado en ϱH. De aquí $f(G)$ es cerrado en H. $\square$

Bibliografía

[1] Arhangel'skii, A. V., *The Hewitt-Nachbin completion in topological algebra. Some effects of homogeneity*, *Appl. Categ. Structures* **10** (2002), no. 3, 267–278.

[2] Arhangel'skii, A. V., *General theory of topological spaces*, *Outlines of the development of mathematics in the USSR*, 171–188, "Naukova Dumka", Kiev, 1983.

[3] Comfort, W. W., Hernández, S. and Trigos-Arrieta, F. J. Relating a locally compact Abelian group to its Bohr compactification, *Advances in Math.* **120** (1996), 322–344.

[4] Comfort, W. W. and Ross, K. A. Topologies induced by groups of character, *Fund. Math.* **55** (1964), 283–291.

[5] Dieudonné, J., *Sur la complétion des groupes topologiques*, Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris) **218** (1944), 774–776.

[6] Engelking, R., *General Topology*, PWN, Polish Scientific Publ., Warszawa, (1977).

[7] Fuchs, L., *Infinite Abelian Groups*. Vol. I. Pure and Applied Mathematics 36. Academic Press 1970.

[8] Graev, M. I., *Free topological groups*, In: Topology and Topological Algebra, Translations Series 1, vol. 8 (1962), pp. 305–364. American Mathematical Society. Russian original in: *Izvestiya Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **12** (1948), 279–323.

[9] Guran, I. I., *On topological groups close to being Lindelöf*, Soviet Mat. Dokl **23** (1981), 173-175.

[10] Hernández, F. H., *Teoría de Conjuntos*, *Aportaciones Matemáticas*. Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[11] Hernández C., Rendón, O. J., Tkachenko, M. G., Villegas, L. M. *Grupos topológicos*, Universidad Autónoma Metopolitana, México D.F., (1997).

[12] Hewitt, E. and Ross, K. *Abstract Harmonic Analysis, Volume I*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1979.

[13] Katz, G. I., *Isomorphic mapping of topological groups to direct product of groups satisfying the first axiom of countability*, *Uspekhy Mat. Nauk* **8** (1953), 107–113 (*in Russian*).

[14] Nagami, K., Σ-spaces, *Fund. Math.* **61** (1969), 169–192.

[15] Nagami, K., Perfect classes of spaces, *Proc. Japan Acad.* **48** (1972), 21–24.

[16] Pontryagin, L. S., The theory of topological commutative groups, *Ann. Math.* **35** (1934), 361–388.

[17] Robinson, D. J. F., *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[18] Roelke W., Dierolf S., *Uniform Structures on Topological Groups and Their Quotiens*, McGraw-Hill, New York, 1981.

[19] Tkachenko, M. G., *Introduction to topological groups*, Topology Appl. **86**, 179-231.

[20] Tkachenko, M. G., *Topological groups: between compactness and $\aleph_0$-boundedness*, In: Recent Progress in General Topology II (M. Hušek and J. van Mill, eds.), Elsevier Science B. V., 2002; pp. 515–543.

[21] Trigos-Arrieta, F. J., *Normality and the weak topology on a locally compact Abelian groups*, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **728** (1994), 290–295.

[22] Trigos-Arrieta, F. J., *Every uncountable Abelian group admits a non-normal group topology*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **122** (1994), 907–909.

Índice alfabético

C^*-encajado, 34
p-grupo de torsión, 19
p-rango, 19

base
  de filtro, 46
  de filtro abierta, 46
  de grupo, 18
  local de un grupo, 4

caracter continuo, 26
clases laterales, 6
compactación
  de Stone-Čech, 34
  de Bohr, 29, 32
completez
  en el sentido de Dieudonné, 11
  en el sentido de Hewitt-Nachbin, 11
  en el sentido de Raĭkov, 10, 25, 46–48
componente
  p-primaria, 19
  primaria, 19
conjunto
  G_δ-abierto, 39
  G_δ-cerrado, 39
  cero, 13, 17
  cocero, 13, 15
  independiente, 18
  linealmente independiente, 18
  simétrico, 2
cubierta
  abierta, 14
  cerrada, 14
  de un espacio, 14

diagonal de un conjunto, 13

espacio
  de Lindelöf, 14
  de Efimov, 16, 17
  homogéneo, 2
  perfecto, 16
  realcompacto, 11
estrechez
  de un espacio, 13
  de un punto, 13

familia
  de Cauchy, 46
  encogedora, 46
  separadora, 12
  subordinada, 8

filtro, 45
  abierto, 45, 46
  canónico, 46, 47
  convergente, 46
  de Cauchy, 10
función
  cardinal, 12

grupo
  $\aleph_0$-acotado, 8
  ω-balanceado, 8, 39, 42
  abeliano, 1, 19
  cociente, 6
  de torsión, 18
  divisible, 24
  libre de torsión, 18
  normal, 35
  topológico, 1

homomorfismo
  abierto, 4
  cociente, 6
  de grupos topológicos, 4
  natural, 6

número
  de Lindelöf, 14
  de invarianza, 8
  de Nagami, 12

orden de un elemento, 18
ordinal sucesor, 13

peso
  de red, 13
plano de Niemitzky, 13
producto
  de conjuntos, 2
  directo, 7
propiedad de Lindelöf, 14
proyección canónica, 7

rango
  completo, 21
  libre de torsión, 19
red, 13
refinamiento, 14

subgrupo
  invariante, 5

teorema
  de Birkhoff-Kakutani, 9
  de extensión de Urysohn, 34
  de Guran, 9, 39
  de Katz, 9, 39
tightness
  de un espacio, 13
  de un punto, 13
topología de Bohr, 29
traslación
  derecha, 2
  izquierda, 2

Universidad Autónoma Metropolitana – Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

"Topologías de Bohr en grupos abelianos y encajes cerrados en productos de grupos metrizables"

Tesis que presenta:

Manuel Antonio López Ramírez

Grado Académico: **Maestría en Ciencias (Matemáticas)**

Director de Tesis: **Dr. Mikhail G. Tkachenko**

En ausencia del asesor

Andrey Novikov, Coordinador del Posgrado

Vo. Bo. Dr. Mikhail G. Tkachenko

México, D. F., 13 de diciembre de 2006.