

Riemann 予想の証明に就いて [V]

On a Proof of the Riemann Hypothesis[V]

中嶋真澄

Masumi NAKAJIMA

Department of Economics

International University of Kagoshima

Kagoshima 891-0197, JAPAN

e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp, nakajimariemann@docomo.ne.jp

概要

Abstract

We also study here another proof of the Riemann Hypothesis without using the integral with respect to t in author's previous work [14] [15]. Moreover in this new paper we add the reason(proof) why we can use both of the Cauchy-Schwarz-Bunyakowski inequality and Hölder's inequality [14] [15] [16] [17].

Key words ; the zeros of the Riemann Zeta-function, the Riemann hypothesis.

Mathematics Subject Classification 2020; 11M06, 11M26.

$\zeta(s)$, ($s = \sigma + it \in \mathbf{C}$) を Riemann の zeta 関数とする。又, $\rho = \beta + i\gamma$ で $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero を表わすことにする。

又, $\Gamma(w)$ は Euler の gamma 関数である。

前論文 [14] での t についての積分をすることなく証明が出来る事が判明した ($t = \gamma_0$ と固定する.) [15]。従って前論文 [14] の補題 Lemma1,3 は不要となり, その代わりに Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式を使い主定理 Main Theorem 1 の証明は簡潔になる事を以下に述べた [15]。

今回は以上に加え主定理 Main Theorem 1 をより正確に述べ補足し, 注 2 として Hölder の不等式でなく Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式を使う理由を説明, 証明した [16]。また, [17] で α に加え α_ν を定義導入し展開し, 上記注 2 としての説明として Hölder の不等式と Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式の使い分けを説明, 証明して注 2 を変更した。今回この論文では $\mu' = 2$ となり, Hölder の不等式も証明に適用出来ることを十分に示す。

記号 $O(\cdot)$ は Bachmann-Landau のラージ・オウ記号と云われ次を意味する：

$$as\ x \rightarrow\ some\ \gamma\ or\ \pm\ \infty,\ or\ for\ \forall x \in\ some\ A,$$

$$f(x) = O(g(x)) \iff constant : \exists C > 0\ with\ |f(x)| \leq Cg(x)$$

定数 C が parameter: α, β, \dots に依存する場合: $C = C_{\alpha, \beta, \dots}$ は

$$f(x) = O_{\alpha, \beta, \dots}(g(x))$$

と書くが α, β, \dots を省略して書く場合もある。

記号 \ll は Vinogradov の意味:

$$f(x) \ll g(x) \iff f(x) = O(g(x)),$$

$$f(x) \ll_{\alpha, \beta, \dots} g(x) \iff f(x) = O_{\alpha, \beta, \dots}(g(x))$$

か、または十分大きいと云う意味 ($a \ll b$ は b が a に比べて十分大きい sufficiently large を意味する) の2通りに使うが混乱 confusion は起きないと思える。

$12 \ll m \in \mathbf{N}$ を一つ固定し、 $C_m = m$ (or $m + \frac{1}{2}$) とする。

また、 $s = \sigma + it$ ($\frac{1}{2} < \sigma < 1$, $C_{m-1} < t < C_m$) も次の条件を満たすものを一つ固定 fixed する。 $\mathbf{N} \ni \nu \gg 1$ は十分大きい自然数とする。

$\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero: $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ を、

$$\beta_0 := \max\{\beta > \frac{1}{2} \mid \rho = \beta + i\gamma, \zeta(\rho) = 0, C_{m-1} < \gamma < C_m\}$$

で定義する。($\rho_0, \beta_0, \gamma_0$ は m に依存するから、 $\rho_{0,m}, \beta_{0,m}, \gamma_{0,m}$ と本来書くべきだが煩わしくなるので、このように書いても誤解は生じないはずである。) 従って、領域 $\{w = u + iv \mid \beta_0 < u, C_{m-1} < v < C_m\}$ は $\zeta(s)$ の非零領域 zero free region となる。

$\rho_+, \rho_-, \beta_+ > \frac{1}{2}, \beta_- > \frac{1}{2}, \gamma_+, \gamma_-, U_m^+, U_m^-, U_m, V_m^+, V_m^- > 0$

を次で定義する。

$$\rho_+ := \beta_+ + i\gamma_+, \zeta(\rho_+) = 0$$

$$\gamma_+ := \min\{\gamma \mid \rho = \beta + i\gamma, \beta > \frac{1}{2}, \zeta(\rho) = 0, \gamma_0 < \gamma\}$$

$$\rho_- := \beta_- + i\gamma_-, \zeta(\rho_-) = 0$$

$$\gamma_- := \max\{\gamma \mid \rho = \beta + i\gamma, \beta > \frac{1}{2}, \zeta(\rho) = 0, \gamma < \gamma_0\}$$

$$U_m^+ := \min\{\gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_0), C_m\}$$

$$U_m^- := \max\{\gamma_0 - \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_-), C_{m-1}\}$$

$$U_m := \frac{1}{2} \min\{|U_m^+ - \gamma_0|, |U_m^- - \gamma_0|, \frac{1}{2}\}$$

$$V_m^+ := \gamma_0 + U_m$$

$$V_m^- := \gamma_0 - U_m$$

ρ_0 の左側： $\Im\rho = \gamma_0, \zeta(\rho) = 0$ なる零点 ρ を右から順番に

$$\rho_1 := \beta_1 + i\gamma_0, \rho_2 := \beta_2 + i\gamma_0, \dots$$

$$\left(\frac{1}{2} < \dots < \beta_2 < \beta_1 < \beta_0, \zeta(\rho_i) = 0, \Im\rho_i = \gamma_0, i = 1, 2, \dots\right)$$

とする (ρ_1, ρ_2, \dots が存在しない場合もある。このときは $\beta_1 = \frac{1}{2}$ とする。)。

注 $\{w = u + iv \mid \frac{1}{2} < u, \gamma_- < v < \gamma_+, v \neq \gamma_0\}$ は非零領域 zero free region である。

$s = \sigma + i\gamma_0, Y > 1, \delta > 1$ とする。 $0 < \sigma - \beta_0 \ll \frac{1}{2}$ が十分小さくなるように σ を選ぶ。

これより,

$$s - \rho_0 = (\sigma - \beta_0) + i(\gamma_0 - \gamma_0) = \sigma - \beta_0,$$

$$0 < \sigma - \beta_0 \ll \frac{1}{2} \text{ が十分小さくなるように } \sigma \text{ を選んだから}$$

$$\frac{|\rho - s|}{|\rho_0 - s|} > 2 \quad (\rho \neq \rho_0) \text{ for } \forall \rho = \beta + i\gamma \quad \dots (**)$$

(ρ は ρ_0 以外の $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero)

である。

このとき, 次の定理が成り立つ :

主定理 1

十分大きい $\delta > 1, Y > 1$ を適切に取り固定する。これに対して

For large fixed $\delta > 1$ and $Y > 1$ which are properly chosen,

$$0 < (\sigma - \beta_0) < \min \left\{ \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{\sqrt{Y} \exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}, \frac{\sigma}{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}, \frac{U_m}{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})} \right\}$$

$\dots (*)$,

となるように σ を選ぶ (これは明らかに可能である。) と,

$$\frac{1}{(\sigma - \beta_0)} \leq \max \left\{ \frac{\sqrt{Y} \exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{\sigma - \frac{1}{2}}, \frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{\sigma}, \frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{U_m} \right\}$$

となる。

従って, この結論は定理の仮定 (*) と矛盾する。

ここで $\sigma \rightarrow \beta_0$ とすれば, 上記左辺は $+\infty$ の発散し右辺は

$$\max \left\{ \frac{\sqrt{Y} \exp(\frac{3\delta}{\beta_0 - \frac{1}{2}})}{\beta_0 - \frac{1}{2}}, \frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\beta_0 - \frac{1}{2}})}{\beta_0}, \frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\beta_0 - \frac{1}{2}})}{U_m} \right\}$$

と有限値となり矛盾を引き起こす。

結局 $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma$ with $\beta_0 > \frac{1}{2}$ は, もはや $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero とは成り得ない。□

注

$$0 < a, b, c \text{ に対して, } \frac{1}{\min\{a, b, c\}} = \max \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right\}.$$

上記主定理 1 を何回 (有限回) か繰り返し使い $\zeta(s)$ の関数等式 functional equation を使えば

主定理 2 $\zeta(s)$ の全ての複素零点 complex zero $\rho = \beta + i\gamma$ は,

$$\beta = \frac{1}{2}$$

を満たす。□

が得られる。

主定理 1 を証明するには次の幾つかの補題を必要とする。

補題 1 $\sigma > 1, m = 0, 1, 2, \dots$ とする。

$m = 0$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < 1 + \frac{1}{\sigma - 1}$$

$m = 1, 2, \dots$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^\sigma} &< m! \left(\frac{1}{\sigma - 1} \right)^m \left\{ \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{1}{e} \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma} \right)^m \right\} \\ &\ll m! \left(\frac{1}{\sigma - 1} \right)^{m+1} \quad (\text{as } m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成立する。

証明 先ず $m = 1, 2, \dots$ のときを考える。

$f(y) := y^{-\sigma} (\log y)^m$ とおくと $f'(y) = y^{-\sigma-1} (\log y)^{m-1} \{m - \sigma \log y\}$ であるから, $f'(y_0) =$

0 となるのは, $y_0 = \exp(\frac{m}{\sigma})$ のときのみである。従って $f(y)$ の増減を考えると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^\sigma} &= \sum_{n=2}^{[y_0]-1} \frac{(\log n)^m}{n^\sigma} + \frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma} + \sum_{n=[y_0]+1}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^\sigma} \\ &< \int_2^{[y_0]} \frac{(\log x)^m}{x^\sigma} dx + \frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma} + \int_{[y_0]}^{\infty} \frac{(\log x)^m}{x^\sigma} dx \\ &< \int_1^{\infty} \frac{(\log x)^m}{x^\sigma} dx + \frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma} \\ &= m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + \frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma} \\ &\leq m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + \frac{(m/\sigma)^m}{(\exp(m/\sigma))^\sigma} \\ &= m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + \left(\frac{m}{e\sigma}\right)^m \\ &\leq m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + m! \frac{1}{e} \left(\frac{1}{\sigma}\right)^m \\ &= m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^m \left\{ \frac{1}{\sigma-1} + \frac{1}{e} \left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^m \right\} \end{aligned}$$

但し, $[t]$ は実数 t の整数部分を表わす。又,

$$\left(\frac{m}{e}\right)^m \leq \frac{m!}{e}$$

を使った。

$m = 0$ のときは

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\sigma} dx = 1 + \frac{1}{\sigma-1}$$

となり, 補題は証明された。□

補題 2 $a_i, c_i = c_i(\nu) \in \mathbf{C}$, $f_i(\nu) \rightarrow 0$ as $\nu \rightarrow \infty$, ($i = 0, 1, \dots, n$) とする。又, $|a_0| > |a_i|$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $|c_i|^{1/\nu} \rightarrow 1$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) as $\nu \rightarrow \infty$, $c_0 \neq 0$ とする。このとき

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^n c_i(\nu)(1 + f_i(\nu))^\nu a_i^\nu \right|^{1/\nu} = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i| = |a_0|$$

が成立する。

証明 $\max_{i=1,2,\dots,n} |a_i/a_0| =: 1/r$ ($r > 1$) とおく。

$$\frac{1 + f_i(\nu)}{1 + f_0(\nu)} \rightarrow 1, |c_i|^{1/\nu} \rightarrow 1 \text{ as } \nu \rightarrow \infty, (i = 1, 2, \dots, n)$$

また, n が有限 finite であるので, $\forall \epsilon > 0$ に対して $\exists \nu_0$ が存在して,

$$\left| \frac{c_i^{1/\nu}}{c_0^{1/\nu}} \cdot \frac{1 + f_i(\nu)}{1 + f_0(\nu)} \right| < 1 + \epsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ for } \forall \nu > \nu_0$$

となるが, ここで ϵ を十分小さく選び

$$\frac{1 + \epsilon}{r} =: \frac{1}{R} < 1$$

とする。

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=0}^n c_i(\nu)(1 + f_i(\nu))^\nu a_i^\nu \right|^{1/\nu} \\ &= |c_0|^{1/\nu} |a_0| |1 + f_0(\nu)| \left| 1 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{c_0} \left(\frac{1 + f_i(\nu)}{1 + f_0(\nu)} \right)^\nu \left(\frac{a_i}{a_0} \right)^\nu \right|^{1/\nu} \\ &= |c_0|^{1/\nu} |a_0| |1 + f_0(\nu)| \left| 1 + \sum_{i=1}^n O \left(\left(\frac{1 + \epsilon}{r} \right)^\nu \right) \right|^{1/\nu} \\ &= |c_0|^{1/\nu} |a_0| |1 + f_0(\nu)| \left| 1 + O \left(\frac{1}{R^\nu} \right) \right|^{1/\nu} \\ &= |c_0|^{1/\nu} |a_0| |1 + f_0(\nu)| \left| \left\{ 1 + O \left(\frac{1}{R^\nu} \right) \right\}^{R^\nu \cdot \frac{1}{\nu R^\nu}} \right| \\ &\rightarrow |a_0| \quad (\text{as } \nu \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となって補題は証明された。□

補題 3 [1], [2], [3], [4], [5], [8], [9], [10], [11], [12], [18], [21]

$$(0) \frac{1}{\Gamma(s+1)} = \frac{1}{s\Gamma(s)} = e^{\gamma_0 s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{-n} \right) e^{-\frac{s}{n}},$$

$$(1) \log \Gamma(s+1) = - \left[\gamma_0 s + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log \left(1 - \frac{s}{(-n)} \right) + \frac{s}{(-n)} \right\} \right],$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s+1) &=: \psi(s+1) = \psi(s) + \frac{1}{s} = \\ &= - \left[\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s - (-n)} + \frac{1}{(-n)} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$= \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right),$$

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \psi(s)^{(\nu)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(s+n)^{\nu+1}} \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

$$(3) \zeta(s) = \frac{1}{2(s-1)} e^{(\log 2\pi - 1)s} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{-2q}\right) e^{-\frac{s}{2q}},$$

この対数を取り

$$(4) \log \zeta(s) = \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) s - \log(s-1) - \log 2 - \log \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) + \sum_{\rho} \left[\log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) + \frac{s}{\rho}\right] =$$

$$= (\log 2\pi)s - \log 2 - s - \log(s-1) + \sum_{q=1}^{\infty} \left[\log\left(1 - \frac{s}{(-2q)}\right) + \frac{s}{(-2q)}\right] + \sum_{\rho} \left[\log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) + \frac{s}{\rho}\right],$$

この対数微分を取り

$$(5) \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2} + 1\right) + \sum_{\rho} \left[\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right] =$$

$$= \log 2\pi - \left[\frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{1}\right] + \sum_{q=1}^{\infty} \left[\frac{1}{s-(-2q)} + \frac{1}{(-2q)}\right] + \sum_{\rho} \left[\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right],$$

$$(6) \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = \frac{1}{(s-1)^{\nu+1}} + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(s-(-2q))^{\nu+1}} - \sum_{\rho} \frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

(7) 関数等式 *functional equation* :

$$\zeta(1-s) = 2 \cos \frac{\pi}{2} s \cdot \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \zeta(s).$$

但し, γ_0 は Euler の定数である。

補題 4 ([18] 補題 6.9 系の一般化) $s = \sigma + it \neq 1, \rho, |t| > 2$ として,

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = - \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} + O(\log t) \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

証明 補題 3,(6) より

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \zeta'(s)^{(\nu)} = \frac{1}{(s-1)^{\nu+1}} - \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{[s - (-2q)]^{\nu+1}} - \sum_{\rho} \frac{1}{[s - \rho]^{\nu+1}}.$$

上記第 1 項は、 $O(t^{-\nu-1})$ である。

上記第 2 項については、 $|s+2q|$ は $2q < \max\{-\sigma, 0\}$ で q について単調減少、 $2q \geq \max\{-\sigma, 0\}$ で単調増加であるから

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{|s+2q|^{\nu+1}} &= \left\{ \sum_{2q < \max\{-\sigma, 0\}} + \sum_{2q \geq \max\{-\sigma, 0\}} \right\} \frac{1}{\{(\sigma+2q)^2 + t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}} \\ &< \sum_{2q < \max\{-\sigma, 0\}} \frac{1}{t^{\nu+1}} + \frac{1}{t^{\nu+1}} + \int_{\frac{\max\{-\sigma, 0\}}{2}}^{\infty} \frac{dx}{\{(\sigma+2x)^2 + t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}} \\ &< \frac{\max\{-\sigma, 0\} + 1}{t^{\nu+1}} + \frac{1}{2} \int_{\max\{-\sigma, 0\}}^{\infty} \frac{dy}{\{(\sigma+y)^2 + t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}} \\ &\leq \frac{\max\{-\sigma, 0\} + 1}{t^{\nu+1}} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\{x^2 + t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}} \\ &= \frac{\max\{-\sigma, 0\} + 1}{t^{\nu+1}} + \frac{1}{2t^{\nu+1}} \int_0^{\infty} \frac{tdy}{\{1+y^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}} \\ &< \frac{\max\{-\sigma, 0\} + 1}{t^{\nu+1}} + \frac{1}{2t^{\nu}} \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} \\ &= \frac{\max\{-\sigma, 0\} + 1}{t^{\nu+1}} + \frac{1}{2t^{\nu}} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{t^{\nu}} \left(\frac{\max\{-\sigma, 0\} + 1}{t} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &\ll \frac{1}{t^{\nu}} \end{aligned}$$

第 3 項については、これを 2 つの和に分ける：

$$\sum_{\rho} \frac{1}{[s - \rho]^{\nu+1}} = \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{[s - \rho]^{\nu+1}} + \sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{1}{[s - \rho]^{\nu+1}}$$

この第 2 項を評価する。ここで $t > 0$ と仮定しても一般性を失わない。

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{1}{[s - \rho]^{\nu+1}} \right| &\leq \sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{1}{|s - \rho|^{\nu+1}} \\ &= \sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{1}{[(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2]^{(\nu+1)/2}} < \sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{1}{|t - \gamma|^{\nu+1}} \\ &< \sum_{\gamma < 0} \frac{1}{|\gamma|^{\nu+1}} + \sum_{|t-\gamma| > 1, \gamma > 0} \frac{1}{|t - \gamma|^{\nu+1}} \\ &< \sum_{\gamma > 0} \frac{1}{\gamma^{\nu+1}} + \sum_{|t-\gamma| > 1, \gamma > 0} \frac{1}{|t - \gamma|^{\nu+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m \leq \gamma < m+1} \frac{1}{\gamma^{\nu+1}} + \sum_{m=1}^{[t]-2} \sum_{m \leq \gamma < m+1, |t-\gamma| > 1} \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}} + \\
 &\quad + \sum_{m=[t]+2}^{\infty} \sum_{m \leq \gamma < m+1, |t-\gamma| > 1} \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}} + O(\log t) \\
 &< \sum_{m=1}^{\infty} \#\{\gamma \mid m \leq \gamma < m+1\} \frac{1}{m^{\nu+1}} + \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{[t]-2} \#\{\gamma \mid m \leq \gamma < m+1\} \frac{1}{([t] - (m+1))^{\nu+1}} + \\
 &\quad + \sum_{m=[t]+2}^{\infty} \#\{\gamma \mid m \leq \gamma < m+1\} \frac{1}{(m - ([t]+1))^{\nu+1}} + \\
 &\quad + O(\log t) \\
 &\quad \text{as } \nu \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

ここで、後の補題 5 を使った。更に補題 5 を使うと

$$\begin{aligned}
 &\sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} \\
 &\ll \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log m}{m^{\nu+1}} + \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{[t]-2} \frac{\log m}{([t] - m - 1)^{\nu+1}} + \\
 &\quad + \sum_{m=[t]+2}^{\infty} \frac{\log m}{(m - 1 - [t])^{\nu+1}} + O(\log t)
 \end{aligned}$$

また更に補題 1 を使うと

$$\begin{aligned}
 &\sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} \\
 &\ll \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{e(\nu+1)} + \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{[t]-2} \frac{\log m}{([t] - m - 1)^{\nu+1}} + \\
 &\quad + \sum_{m=[t]+2}^{\infty} \frac{\log m}{(m - 1 - [t])^{\nu+1}} + O(\log t) \\
 &\ll \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{e(\nu+1)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \log t \sum_{l=1}^{[t]-2} \frac{1}{l^{\nu+1}} + \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\log(l + [t] + 1)}{l^{\nu+1}} + O(\log t) \\
 \ll & \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{e(\nu+1)} + \\
 & + \log t + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\log t + \log l}{l^{\nu+1}} + O(\log t) \\
 \ll & \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{e(\nu+1)} + \\
 & + \log t + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\log l}{l^{\nu+1}} + O(\log t) \\
 \ll & \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{e(\nu+1)} + \\
 & + \log t + O(\log t) \\
 \ll & \log t
 \end{aligned}$$

これより

$$\sum_{\rho} \frac{1}{[s - \rho]^{\nu+1}} = \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{[s - \rho]^{\nu+1}} + O(\log t)$$

以上から補題は示された。□

補題 5 $N(T) := \#\{\rho = \beta + i\gamma \mid \zeta(\rho) = \zeta(\beta + i\gamma) = 0, 0 < \gamma \leq T\}$
 とすると,

$$N(T+1) - N(T) < \frac{5}{2} \log T \text{ for } T \gg 1 \text{ (} T \geq e^{100}\text{)}.$$

証明 [18] を精密化：補題 3,(2),(5) より

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s}{2} + 1 \right) \\
 & = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2} \right) - \frac{1}{s-1} + \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \left\{ \log \frac{s}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{s}{2}} + O\left(\frac{1}{|s|^2} \right) \right\} + \frac{1}{s} \\
 & = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2} \right) - \frac{1}{s-1} + \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\
 \Leftrightarrow &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \log s - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2s} + \frac{1}{s} + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right) \\
 &= -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{s-1} + \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\
 \Leftrightarrow & \\
 & \frac{1}{2} \log s \\
 &= -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2} + \frac{1}{2} \log 2\right) + O\left(\frac{1}{|s|}\right) + \\
 & \quad + \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\
 \Leftrightarrow & \\
 & \frac{1}{2} \log s = O(1) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\}
 \end{aligned}$$

ここで $s = (1 + \epsilon) + iT$ ($0 < \epsilon$) と置くと

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \log((1 + \epsilon) + iT) \\
 &= O(1) - \frac{\zeta'}{\zeta}((1 + \epsilon) + iT) + \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{(1 + \epsilon + iT) - \rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\
 &= O(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\epsilon+iT}} + \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{(1 + \epsilon + iT) - \rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\
 &= O(1) + \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{(1 + \epsilon + iT) - \rho} + \frac{1}{\rho} \right\}
 \end{aligned}$$

この両辺の実部 \Re を取って

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \log \sqrt{(1 + \epsilon)^2 + T^2} \\
 &= O(1) + \sum_{\rho} \Re \left\{ \frac{1}{(1 + \epsilon + iT) - \rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\
 &= O(1) + \sum_{\rho} \left\{ \frac{1 + \epsilon - \beta}{(1 + \epsilon - \beta)^2 + (T - \gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \right\} \\
 &> O(1) + \sum_{\rho} \frac{\epsilon}{(1 + \epsilon)^2 + (T - \gamma)^2} \\
 \Rightarrow & \\
 & \frac{1}{2} \log T + \frac{1}{4} \log \left(1 + \left(\frac{1 + \epsilon}{T} \right)^2 \right) \\
 &> O(1) + \sum_{\rho} \frac{\epsilon}{(1 + \epsilon)^2 + (T - \gamma)^2} \\
 \Rightarrow &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \log T > O(1) + \sum_{\rho} \frac{\epsilon}{(1 + \epsilon)^2 + (T - \gamma)^2} \\
 \Rightarrow & \frac{1 + \epsilon'}{2} \log T \\
 & > \sum_{\rho} \frac{\epsilon}{(1 + \epsilon)^2 + (T - \gamma)^2} \text{ with some } \epsilon' > 0 \\
 & > \sum_{T < \gamma \leq T+1} \frac{\epsilon}{(1 + \epsilon)^2 + 1} = \frac{\epsilon}{(1 + \epsilon)^2 + 1} \sum_{T < \gamma \leq T+1} 1 \\
 \Rightarrow & \frac{(1 + \epsilon')((1 + \epsilon)^2 + 1)}{2\epsilon} \log T \\
 & > \sum_{T < \gamma \leq T+1} 1 = N(T + 1) - N(T)
 \end{aligned}$$

ここで $\epsilon = \sqrt{2}$, $\epsilon' = 0.035533$ と置くと

$$\begin{aligned}
 \frac{5}{2} \log T & > \frac{(1 + \epsilon')((1 + \sqrt{2})^2 + 1)}{2\sqrt{2}} \log T \\
 & = \frac{1 + 0.035533}{2} (4.828427124 \dots) \log T > N(T + 1) - N(T) \\
 & \text{for } T \gg 1
 \end{aligned}$$

となり証明は終了した。□

補題 6 (Theorem 26 of [7] の一般化)

$m \gg 1$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$ に対して, $m - 1 < T_m \leq m$ なる T_m が存在して

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\nu!} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT_m)^{(\nu)} \right| & \ll (6 \log T_m)^{\nu+2} \\
 & \ll (6 \log m)^{\nu+2}
 \end{aligned}$$

を満たす。

証明 虚軸方向の区間 $(i(m - 1), im]$ を, $\frac{5}{2} \log m + 1$ 等分すると, 補題 5 により, $\frac{5}{2} \log m + 1$ 個に分割された臨界帯 critical strip: $0 < \sigma < 1$ の小区間には, $\zeta(s)$ の零点 zero を含まないものが少なくとも 1 個ある。この小区間の虚軸方向の 2 等分点を iT_m として, 補題 4 を使うと

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT_m)^{(\nu)} \\
 \ll & \sum_{|T_m - \gamma| \leq 1} \frac{1}{|(\sigma - \beta) + i(T_m - \gamma)|^{\nu+1}} + O(\log T_m) \\
 \ll & \sum_{|T_m - \gamma| \leq 1} \frac{1}{|T_m - \gamma|^{\nu+1}} + O(\log T_m)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\ll \sum_{|T_m - \gamma| \leq 1} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} \log T_m + 1 \right)^{-1} \right\}^{-\nu-1} + O(\log T_m) \\
 &\ll \sum_{|T_m - \gamma| \leq 1} \{5 \log T_m + 2\}^{\nu+1} + O(\log T_m) \\
 &\ll (5 \log T_m) \{5 \log T_m + 2\}^{\nu+1} + O(\log T_m) \quad (\sum \text{に補題 5 を使った。}) \\
 &\ll (6 \log T_m)^{\nu+2} \\
 &\ll (6 \log m)^{\nu+2}
 \end{aligned}$$

となり補題は証明された。□

補題 7 $s = \sigma + it$ を $\zeta(s)$ の正則点として、 s に一番近い $\zeta(s)$ の複素零点は 1 つとして、それを ρ_0 とする。そして $|s - \rho_0| < |s - (-2q)|$ ($q = 1, 2, \dots$), $|s - \rho_0| < |s - 1|$, $|s - \rho_0| \ll 1$, $|s - \rho_0| < \sigma < |s|$ とする。

このとき

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = -\frac{1 + O\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(s - \rho_0)^{\nu+1}}$$

$t = \gamma_0$ のときは

$$= -\frac{1 + O\left(\frac{\log |\gamma_0|}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} = -\frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}}$$

証明 補題 4,5 より (as $\nu \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned}
 &\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = - \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{(s - \rho)^{\nu+1}} + O(\log t) = \\
 &= -\frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} - \sum_{\rho; \rho \neq \rho_0, |t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{(s - \rho)^{\nu+1}} + O(\log t) \\
 &= -\frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} - \frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} \sum_{\rho; \rho \neq \rho_0, |t-\gamma| \leq 1} \frac{(s - \rho_0)^{\nu+1}}{(s - \rho)^{\nu+1}} + O(\log t) \\
 &= -\frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} - \\
 &\quad -\frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} \sum_{\rho; \rho \neq \rho_0, |t-\gamma| \leq 1} O\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right) + O(\log t) \quad (** \text{による。}) \\
 &= -\frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} - \frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} O\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right) \sum_{\rho; \rho \neq \rho_0, |t-\gamma| \leq 1} 1 + O(\log t) \\
 &= -\frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} - \frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} O\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right) O(\log t) + O(\log t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} - \frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} O\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right) + O(\log t) \\
 &= -\frac{1 + O\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} + O(\log t) \\
 &= -\frac{1 + O\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} + \frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} O\left((s - \rho_0)^{\nu+1} \log t\right) \\
 &= -\frac{1 + O\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} + \frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} O\left(2^{-(\nu+1)} \log t\right) \quad (|s - \rho_0| \ll \frac{1}{2} \text{ による。}) \\
 &= -\frac{1 + O\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} \\
 &= -\frac{1 + O\left(\frac{\log C_m}{2^{\nu+1}}\right)}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} = -\frac{1 + O\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)}{(s - \rho_0)^{\nu+1}}
 \end{aligned}$$

$t = \gamma_0$ のときは $s - \rho_0 = \sigma - \beta_0$ となるので

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1 + O\left(\frac{\log |\gamma_0|}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} = -\frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \\
 &= -\frac{1 + O\left(\frac{\log C_m}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \quad \text{as } \nu \rightarrow \infty \quad \square
 \end{aligned}$$

補題 8 [10], [11], [18]

$c > 0, Y > 0$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{Y^w}{w^2} dw = \begin{cases} \log Y, & (1 \leq Y) \\ 0, & (0 < Y \leq 1) \end{cases}$$

補題 9 ([20] の改変)

$c > 0, X, Y > 1, n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{X^w (Y^w - 1)}{n^{\frac{w}{\nu}} w^2 \log Y} dw = \begin{cases} 1, & (n \leq X^\nu) \\ \frac{1}{\log Y} \log\left(\frac{XY}{n^{\frac{1}{\nu}}}\right) \leq 1, & (X^\nu \leq n \leq (XY)^\nu) \\ 0, & ((XY)^\nu \leq n) \end{cases}$$

証明 被積分関数を展開して補題 8 を使えば良い。□

補題 10

実数上有界な台 $[B, C]$ を持つ複素数値関数 $f(v) = f_1(v) + if_2(v)$, $(f_1(v) :=$

$\Re f(v)$, $f_2(v) := \Im f(v)$ の Fourier 変換：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \exp(ivx) dv \quad \cdots (a)$$

は x の実解析的関数 real analytic function である。更に x を $z = x + iy$ に拡張した

$$F(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \exp(ivz) dv \quad \cdots (b)$$

は $z = x + iy$ の複素解析的関数 complex analytic function である。

注 この補題は、ある意味、弱い意味で Paley-Wiener の定理の逆となっている。

証明 複素解析的ならば実解析的であるから、後者を証明すれば良い。

$$F(z) = F(x + iy) = F_1(z) + iF_2(z) = F_1(x + iy) + iF_2(x + iy)$$

と置いて実数値関数 $F_1(z)$, $F_2(z)$ が Cauchy-Riemann の方程式を満たしていることを以下に示す。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \exp(ivz) dv &= \int_B^C f(v) \exp(ivz) dv, \\ f(v) \exp(ivz) &= \{f_1(v) + if_2(v)\} \exp[iv(x + iy)] = \\ &= \{f_1(v) + if_2(v)\} e^{-vy} \{\cos(vx) + i \sin(vx)\} \\ &= \{f_1(v) \cos(vx) - f_2(v) \sin(vx)\} e^{-vy} + i\{f_1(v) \sin(vx) + f_2(v) \cos(vx)\} e^{-vy} \end{aligned}$$

であり、この場合積分と偏微分の交換が可能であることから

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= - \int_B^C v \{f_1(v) \sin(vx) + f_2(v) \cos(vx)\} e^{-vy} dv, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \int_B^C v \{f_1(v) \cos(vx) - f_2(v) \sin(vx)\} e^{-vy} dv, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= - \int_B^C v \{f_1(v) \cos(vx) - f_2(v) \sin(vx)\} e^{-vy} dv, \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} &= - \int_B^C v \{f_1(v) \sin(vx) + f_2(v) \cos(vx)\} e^{-vy} dv \end{aligned}$$

となり (勿論これらの積分が存在する場合を考えている), これより

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{\partial F_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= - \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{aligned}$$

が従う。これは Cauchy-Riemann の方程式である。□

主定理 1 の証明

以降, $o(\cdot)$, $O(\cdot)$, \ll , \sim 等の記号は $\nu \rightarrow +\infty$ のときを主に考えている。

$s = \sigma + i\gamma_0$, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, $\nu \in \mathbf{N}$, $1 \ll \nu$, $X, Y > 1$, $\delta > 1$ として次の積分を考える :

$$I_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \frac{(-1)^{\nu+1} \zeta'}{\nu! \zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1) dw}{w^2 \log Y}$$

$(\frac{1}{2} < \sigma < 1, w = u + iv).$

ここで, 後に $X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right) \ll \frac{1}{\sigma-\beta_0}$, $\delta > 1$ [22] とする。 δ は後に決める。

$\sigma = \Re s > 1$ であるとき,

$$\frac{(-1)^{\nu+1} \zeta'}{\nu! \zeta} (s)^{(\nu)} = \frac{1}{\nu!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}$$

は一様絶対収束するので積分 \int と和 \sum が交換出来て, 補題 9 を使うと, この積分 I_ν は

$$I_\nu = \frac{1}{\nu!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s} \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \frac{X^w (Y^w - 1)}{n^{w/\nu}} \frac{dw}{w^2 \log Y}$$

$$= \frac{1}{\nu!} \sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s} c_n,$$

$$\text{where } c_n := \begin{cases} 1 & , (n \leq X^\nu) \\ \frac{1}{\log Y} \log \left(\frac{XY}{n^{1/\nu}}\right) \leq 1 & , (X^\nu \leq n \leq (XY)^\nu) \\ 0 & , ((XY)^\nu \leq n) \end{cases}$$

... (1)

となる。ここで, $\Lambda(n)$ は von Mangoldt 関数, 即ち,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & (n = p^k, \text{ with some prime } p \text{ and some } k \in \mathbf{N} \text{ のとき}) \\ 0, & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

$$(-1)^{\nu+1} \frac{\zeta'}{\zeta} (s)^{(\nu)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s} \quad (\sigma > 1)$$

である。

ここで積分路を次の $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ に移す。積分路 L は次の通りである :

$A > 1$ として

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$$

$$L_1 = (\nu - i\infty, \nu + i\nu(V_m^- - \gamma_0)],$$

$$\begin{aligned} L_2 &= [\nu + i\nu(V_m^- - \gamma_0), -A + i\nu(V_m^- - \gamma_0)], \\ L_3 &= [-A + i\nu(V_m^- - \gamma_0), -A + i\nu(V_m^+ - \gamma_0)], \\ L_4 &= [-A + i\nu(V_m^+ - \gamma_0), \nu + i\nu(V_m^+ - \gamma_0)]. \\ L_5 &= [\nu + i\nu(V_m^+ - \gamma_0), \nu + i\infty]. \end{aligned}$$

留数定理により,

$$\begin{aligned} I_\nu &= \operatorname{Res}_{w=0} \left\{ \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\ &= \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\ &= -\frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\ &\quad \dots (2) \end{aligned}$$

を得る。ここで、補題 7 を使った。また、 $\nu \gg 1$ であるので $\frac{\zeta'}{\zeta}\left(s + \frac{w}{\nu}\right)$ の特異点 $w = \nu(\rho - s)$ は $\Re \nu(\rho - s) \ll -A$ となり、積分路 L の定義により積分路 L の右側に特異点 $w = \nu(\rho - s)$ は存在しない (Fig.1,2 参照) :

$$\begin{aligned} \sigma - \frac{A}{\nu} &\leq \Re \left(s + \frac{w}{\nu}\right) = \sigma + \frac{u}{\nu} \leq \sigma + 1 \\ V_m^- &\leq \Im \left(s + \frac{w}{\nu}\right) = \gamma_0 + \frac{v}{\nu} \leq V_m^+ \end{aligned}$$

次に (2) の 5 つの積分を上から評価する。

積分路 L_1 上では

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\ &\ll \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\nu(V_m^- - \gamma_0)} \frac{1}{\nu!} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 1)^{(\nu)} \right| \frac{(XY)^\nu}{|w|^2} dw \\ &\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^{\sigma+1}} \int_0^\infty \frac{dw}{|w|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^{\nu+1}}{n^{\sigma+1}} \int_0^\infty \frac{dw}{|w|^2} \\
 &\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!} (\nu+1)! \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2} \int_0^\infty \frac{dv}{\nu^2+v^2} \quad (\text{補題 1 を使った。}) \\
 &= \frac{(XY)^\nu}{\nu\nu!} (\nu+1)! \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \\
 &= (XY)^\nu \frac{\nu+1}{\nu} \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2} \left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 &\ll (XY)^\nu \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2} \\
 &\ll \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu \ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu = \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^\nu \quad \dots (3)
 \end{aligned}$$

となる。

積分路 L_5 上でも同様に

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{L_5} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 &\ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu = \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^\nu \quad \dots (3')
 \end{aligned}$$

積分路 L_2 上では

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 &\ll \frac{1}{\log Y} \int_{\nu+i\nu(V_m^- - \gamma_0)}^{-A+i\nu(V_m^- - \gamma_0)} \frac{1}{\nu!} \left| \frac{\zeta'}{\zeta} \left(\sigma + i\gamma_0 + \frac{u}{\nu} + \frac{i}{\nu}\nu(V_m^- - \gamma_0)\right)^{(\nu)} \right| \times \\
 &\quad \times \frac{(XY)^\nu}{|i\nu(V_m^- - \gamma_0)|^2} dw \\
 &\ll \frac{1}{\log Y} \int_{\nu}^{-A} \frac{1}{\nu!} \left| \frac{\zeta'}{\zeta} \left(\sigma + \frac{u}{\nu} + iV_m^-\right)^{(\nu)} \right| \frac{(XY)^\nu}{|\nu(V_m^- - \gamma_0)|^2} du \\
 &\ll \frac{(XY)^\nu}{\log Y} \int_{\nu}^{-A} \frac{1}{(U_m)^{\nu+1}\nu^2} du \\
 &\ll \frac{(XY)^\nu}{\log Y} (A + \nu) \frac{1}{\nu^2(U_m)^{\nu+1}} \ll \left(\frac{XY}{U_m}\right)^\nu = \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)^\nu \quad \dots (4)
 \end{aligned}$$

ここでは U_m の定義を使った。積分路 L_4 上でも同様に

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_4} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw$$

$$\ll \left(\frac{XY}{U_m} \right)^\nu = \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m} \right)^\nu \dots (4')$$

次に残りの積分路 L_3 上の積分について考える。 $B \gg 1$ として積分路 L_3 を 3 つ：

$$L_{3,1} := [-A + i\nu(V_m^- - \gamma_0), -A - iB],$$

$$L_{3,2} := [-A - iB, -A + iB],$$

$$L_{3,3} := [-A + iB, -A + i\nu(V_m^+ - \gamma_0)],$$

$$0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \text{ と } B \text{ を選ぶ.}$$

に分けて評価する。 A の値は後に決めるが、その A の値に対して B を定める。

さて

$$\left(s - \rho_0 + \frac{w}{\nu}\right)^{\nu+1} = \left(s - \rho_0 + \frac{-A + i\nu}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

を考える。

仮定している $s - \rho_0 = \sigma - \beta_0$ を使い $\nu \gg 1$ を考えると

$$\begin{aligned} & \left\{ s - \rho_0 + \frac{-A + i\nu}{\nu} \right\}^{\nu+1} \\ &= \left\{ (\sigma - \beta_0) + \frac{-A + i\nu}{\nu} \right\}^{\nu+1} \\ &= \left\{ (\sigma - \beta_0) \left(1 + \frac{-A + i\nu}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right) \right\}^{\nu+1} \\ &= (\sigma - \beta_0)^{\nu+1} \left\{ 1 + \frac{-A + i\nu}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right\}^{\nu+1}, \end{aligned}$$

$$\left\{ 1 + \frac{-A + i\nu}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right\}^{-(\nu+1)}$$

は $|v| \leq B$ のとき、

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \frac{-A + i\nu}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right\}^{-(\nu+1)} \\ &= \frac{1}{\exp\left(\frac{-A + i\nu}{\sigma - \beta_0}\right)} \exp\left\{ O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\} \\ &= \left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right) \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{\nu}{\sigma - \beta_0}\right) \end{aligned}$$

であり, $|v| \geq B$ のときは,

$$\begin{aligned} & \left| 1 + \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right|^{-(\nu+1)} \\ &= \left| 1 + \frac{-A}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right|^{-(\nu+1)} \left| 1 + i \frac{v/\{\nu(\sigma - \beta_0)\}}{1 + \frac{-A}{\nu(\sigma - \beta_0)}} \right|^{-(\nu+1)} \\ &\leq \left| 1 + \frac{-A}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right|^{-(\nu+1)} \cdot 1 \quad (|x + iy| \geq |x|, x, y \in \mathbf{R} \text{ を使った。}) \\ &\leq \left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right) \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \end{aligned}$$

である。これらの準備を基に $L_{3,3}, L_{3,2}, L_{3,1}$ 上の積分を評価して行く。先ず $L_{3,3}$ から始める。

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3,3}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+ - \gamma_0)} \left| \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \right| \frac{X^{-A} dw}{|w|^2 \log Y} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+ - \gamma_0)} \left| \frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{\left(s + \frac{w}{\nu} - \rho_0\right)^{\nu+1}} \right| \frac{X^{-A} dw}{|w|^2 \log Y} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_B^{\nu(V_m^+ - \gamma_0)} \frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{\left|s - \rho_0 + \frac{-A+iv}{\nu}\right|^{\nu+1}} \frac{X^{-A} dv}{(A^2 + v^2) \log Y} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_B^{\nu(V_m^+ - \gamma_0)} \frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1} \left|1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma - \beta_0)}\right|^{\nu+1}} \frac{X^{-A} dv}{(A^2 + v^2) \log Y} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_B^{\nu(V_m^+ - \gamma_0)} \frac{\left(1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right) \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \frac{X^{-A} dv}{(A^2 + v^2) \log Y} \\ &\leq \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \int_B^{\nu(V_m^+ - \gamma_0)} \frac{\left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right) dv}{(A^2 + v^2)} \\ &\ll \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \int_B^\infty \frac{dv}{(A^2 + v^2)} \\ &= \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \frac{X^{-A}}{A} \int_{\frac{B}{A}}^\infty \frac{dy}{(1 + y^2)} \\ &= \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \frac{X^{-A}}{A} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\ll \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \frac{X^{-A}}{A} \exp\left(\frac{-A}{\sigma - \beta_0}\right) \\
 &(0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \text{ と } B \text{ を選んだ.)} \\
 &= \frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \frac{X^{-A}}{2\pi A \log Y} \\
 &\dots(5)
 \end{aligned}$$

ここで $w \in L_{3,3}$ であるから, $w = -A + iv = -A + i\nu(y - \gamma_0)$ と置いて,
 $B \leq v \leq \nu(V_m^+ - \gamma_0)$ より

$$\begin{aligned}
 s + \frac{w}{\nu} &= \sigma + i\gamma_0 + \frac{-A + i\nu(y - \gamma_0)}{\nu} \\
 &= \left(\sigma - \frac{A}{\nu}\right) + iy \quad \left(\frac{B}{\nu} + \gamma_0 \leq y \leq V_m^+\right).
 \end{aligned}$$

従って, $\rho \neq \rho_0$ なる ρ に対して $w \in L_{3,3}$ であるとき

$$\begin{aligned}
 \Re\left(s + \frac{w}{\nu}\right) &= \sigma + \frac{-A}{\nu} < \sigma, \\
 \gamma_0 < \gamma_0 + \frac{B}{\nu} &\leq \Im\left(s + \frac{w}{\nu}\right) = \gamma_0 + \frac{v}{\nu} \leq V_m^+, \\
 \frac{1}{2} \left|s + \frac{w}{\nu} - \rho\right| &> \left|s + \frac{w}{\nu} - \rho_0\right|
 \end{aligned}$$

となるので補題 7 を使ったことに注意すべきである。

$L_{3,1}$ 上での積分も同様に

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3,1}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-A + i\nu(V_m^- - \gamma_0)}^{-A - iB} \left| \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \right| \frac{X^{-A} dw}{|w|^2 \log Y} \\
 &\ll \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \frac{X^{-A}}{A} \exp\left(\frac{-A}{\sigma - \beta_0}\right) \\
 &= \frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \frac{X^{-A}}{2\pi A \log Y} \\
 &\dots(5')
 \end{aligned}$$

となる。

最後に $L_{3,2}$ 上の積分を考える：

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw$$

について詳述する:

$|v| \leq B$ のとき,

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right\}^{-(\nu+1)} \\ &= \frac{1}{\exp\left(\frac{-A + iv}{\sigma - \beta_0}\right)} \exp\left\{ O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\} \\ &= \left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right) \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) \end{aligned}$$

であったが, これを詳しく述べると $\frac{A+B}{\nu(\sigma-\beta_0)} \ll 1$ である ($\nu \gg 1$) ので

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right\}^{-(\nu+1)} \\ &= \left\{ 1 + \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right\}^{-1} \times \\ & \times \exp\left[(-\nu) \log\left(1 + \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)}\right)\right] \\ &= \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\}^{-1} \times \\ & \times \exp\left[(-\nu) \left\{ \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)} - \frac{1}{2} \left(\frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)}\right)^2 + \dots \right\}\right] \\ &= \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\}^{-1} \times \\ & \times \exp\left[\frac{A - iv}{(\sigma - \beta_0)} + \frac{1}{2\nu} \left(\frac{-A + iv}{(\sigma - \beta_0)}\right)^2 - \frac{1}{3\nu^2} \left(\frac{-A + iv}{(\sigma - \beta_0)}\right)^3 + \dots\right] \\ &= \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\}^{-1} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) \times \\ & \times \exp\left[\frac{1}{2\nu} \left(\frac{-A + iv}{(\sigma - \beta_0)}\right)^2 - \frac{1}{3\nu^2} \left(\frac{-A + iv}{(\sigma - \beta_0)}\right)^3 + \dots\right] \\ &= \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\}^{-1} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) \exp\left(O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right) \\ &= \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) \times \\ & \times \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\} \\ &= \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) \end{aligned}$$

である。このことを使って

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-A-iB}^{-A+iB} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^{-A+iv} (Y^{-A+iv} - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{-A-iB}^{-A+iB} \frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{\left(s + \frac{w}{\nu} - \rho_0\right)^{\nu+1}} \frac{X^{-A+iv} (Y^{-A+iv} - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-B}^B \frac{1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\left(s - \rho_0 + \frac{-A+iv}{\nu}\right)^{\nu+1}} \frac{X^{-A+iv} (1 - Y^{-A+iv}) idv}{(-A + iv)^2 \log Y} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-B}^B \frac{1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1} \left(1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma - \beta_0)}\right)^{\nu+1}} \times \\
 & \quad \times \frac{X^{-A+iv} (1 - Y^{-A+iv}) idv}{(-A + iv)^2 \log Y} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \times \\
 & \quad \times \int_{-B}^B \frac{\{1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A+iv} (1 - Y^{-A+iv}) idv}{(-A + iv)^2 \log Y} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \times \\
 & \quad \times \int_{-B}^B \frac{\{1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) idv \\
 & \quad \dots (\star)
 \end{aligned}$$

(\star) の右辺の積分を

$$\begin{aligned}
 F_\nu(X) &:= \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \times \\
 & \quad \times \int_{-B}^B \frac{\{1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) idv
 \end{aligned}$$

と置いて

$$\begin{aligned}
 F(X) &:= \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \times \\
 & \quad \times \int_{-B}^B \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) idv
 \end{aligned}$$

とする。

$$\left| \frac{\{1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) \right|$$

$$\leq \frac{2}{(A^2 + v^2) \log Y}$$

をみたし,

$$\frac{2}{(A^2 + v^2) \log Y}$$

は可積分 integrable であるので

Lebesgue の優収束定理 Dominated Convergence Theorem を使って

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(X) = F(X)$$

である。また補題 10 より

$F(X)$ の右辺の積分は $\log X$ の従って $\Re X > 0$ で X の複素解析関数となっている。また $F(X)$ の右辺の X^{-A} も $X = 0$ の近傍を除いて X の複素解析関数であるから

$$F(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \times$$

$$\times \int_{-B}^B \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) idv$$

は $X = 0$ を除いて $\Re X > 0$ で X の複素解析関数となっている。

従って $\nu \gg 1$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1} \zeta'}{\nu! \zeta} \left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} F_\nu(X) \quad \text{with} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(X) = F(X)$$

で $F(X)$ は $X > 0$ で実解析的で ν に依存しない
複素数値実解析関数である。

... (6)

(1), (2), (3), (3'), (4), (4'), (5), (5'), (6), 補題 9, $s = \sigma + it = \sigma + i\gamma_0$ である事を使うと

$$I_\nu \equiv$$

$$= \frac{1}{\nu!} \sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s} c_n$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} + \\
 &+ O\left\{\left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^\nu\right\} + O\left\{\left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)^\nu\right\} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{L_{3,1}} + \int_{L_{3,2}} + \int_{L_{3,3}} \right\} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta}\left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw,
 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left(\frac{1}{2}\right) + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{L_{3,1}} + \int_{L_{3,3}} \right\} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta}\left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw - \\
 &-\frac{1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left(\frac{1}{2}\right) + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta}\left(s + \frac{w}{\nu}\right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 &= \frac{1}{\nu!} \sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s} c_n + \\
 &+ O\left\{\left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^\nu\right\} + O\left\{\left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)^\nu\right\}
 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left[\left\{ \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)\right) + O\left(\frac{X^{-A}}{\pi A \log Y}\right) \right\} + \right. \\
 &+ \left. \left\{ \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)\right) - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right\} \right] = \\
 &= \frac{1}{\nu!} \sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s} c_n + \\
 &+ O\left\{\left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^\nu\right\} + O\left\{\left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)^\nu\right\}
 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \clubsuit$

を得る。ここで上記左辺の第 1 項の中：

$$\alpha_\nu := \left\{ \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)\right) + O\left(\frac{X^{-A}}{\pi A \log Y}\right) \right\} + \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)\right)$$

が

$$|\alpha_\nu| > \frac{3}{4} \quad (\nu \gg 1), \quad \alpha := \lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu$$

であるように $A > 1$, $Y > 1$ を選び (実際の A, B の選び方は第1番目に上記のように A を選び, 第2番目に B を選ぶ。 α を定める際, X を変化させずに A を定めることが出来る事に注意すべきである。), そして

$$\left\{ \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right\}$$

に関して

$$\alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \neq 0$$

となるよう

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) \ll \frac{1}{\sigma - \beta_0}, \quad \delta > 1$$

の δ を選ぶ。これは $F(X)$ が実解析関数であることと, 定数 constant でないこと (注1) から可能である。また上記

$$\alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X)$$

は ν に依存しないことに注意すべきである。

従って上記 ♣ は

♣ \iff

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \alpha_\nu - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right\} = \\ & = \frac{1}{\nu!} \sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s} c_n + \\ & + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{\sigma} \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} \\ & \text{with } \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \neq 0, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(X) = F(X), \quad \alpha := \lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu \\ & \dots (7) \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} & \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(X) = F(X) \\ & \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \neq 0, \quad \alpha := \lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu \end{aligned}$$

より, 即ち

$$\left| \alpha_\nu - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right| \rightarrow \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| > 0 \text{ as } \nu \rightarrow \infty$$

より, 十分小さい正数 $0 < \epsilon_0 \ll 1$ を

$$0 < \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| - \epsilon_0$$

を満たすように選ぶと十分大きい $\forall \nu \gg 1$ に対して

$$0 < \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| - \epsilon_0 < \left| \alpha_\nu - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right| < \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| + \epsilon_0 \cdots (**)$$

となる。

上記 (7) の左辺の絶対値の $\frac{1}{\nu}$ 乗を考えるが, (**) から

$$\begin{aligned} & 0 < \left| \frac{1}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| - \epsilon_0 \right\} \right|^{\frac{1}{\nu}} \leq \\ & \leq \left\{ \frac{1}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left| \alpha_\nu - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right| \right\}^{\frac{1}{\nu}} \\ & \leq \left[\frac{1}{\nu!} \sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^\sigma} c_n + \right. \\ & \quad \left. + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{\sigma} \right)^\nu \right\} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\ & \leq \left[\frac{1}{\nu!} \sqrt{\sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)^2 (\log n)^{2\nu}}{n^{2\sigma}}} c_n^2 \sqrt{\sum_{n \leq (XY)^\nu} 1^2} + \right. \\ & \quad \left. + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{\sigma} \right)^\nu \right\} \right]^{\frac{1}{\nu}} \end{aligned}$$

(Cauchy – Schwarz – Bunyakowski の不等式を使った. 注 2)

$$\begin{aligned} & \leq \left[\frac{1}{\nu!} \sqrt{\sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{(\log n)^{2\nu+2}}{n^{2\sigma}}} \sqrt{(XY)^\nu} + \right. \\ & \quad \left. + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{\sigma} \right)^\nu \right\} \right]^{\frac{1}{\nu}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left[\frac{1}{\nu!} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^{2\nu+2}}{n^{2\sigma}} \sqrt{(XY)^\nu} +} \right. \\
 &\quad \left. + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma} \right)^\nu \right\} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\
 &\leq \left[\frac{1}{\nu!} \sqrt{(2\nu+2)! \left(\frac{1}{2\sigma-1} \right)^{2\nu+3} \sqrt{(XY)^\nu} +} \right. \\
 &\quad \left. + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma} \right)^\nu \right\} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\
 &\leq \left[\sqrt{\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} \left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}} \right)^{2\nu} \frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3} \sqrt{(XY)^\nu} +} \right. \\
 &\quad \left. + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma} \right)^\nu \right\} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\
 &\leq \left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3} \sqrt{(XY)^\nu} \left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}} \right)^\nu +} \right. \\
 &\quad \left. + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma} \right)^\nu \right\} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\
 &\quad \dots (8)
 \end{aligned}$$

を得る。(8) をまとめると

$$\begin{aligned}
 0 &< \left| \frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| - \epsilon_0 \right\} \right|^{\frac{1}{\nu}} \leq \\
 &\leq \left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3} \sqrt{(XY)^\nu} \left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}} \right)^\nu +} \right. \\
 &\quad \left. + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma} \right)^\nu \right\} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\
 &\quad \dots (9)
 \end{aligned}$$

となる。

ここまでは ν は有限値 finite value であった。ここで、 $\nu \rightarrow \infty$ とすると

(9) は補題 2 を使って

$$\begin{aligned}
 0 < \frac{1}{\sigma - \beta_0} &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right\} - \epsilon_0 \right|^{\frac{1}{\nu}} \leq \\
 &\leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}} \sqrt{(XY)^\nu} \left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}} \right)^\nu + \right. \\
 &\quad \left. + O \left\{ \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m} \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma} \right)^\nu \right\} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\
 &\leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}} \left(\sqrt{Y} \exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) \right)^\nu \left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}} \right)^\nu + \right. \\
 &\quad \left. + O \left\{ \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m} \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma} \right)^\nu \right\} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\
 &= \max \left\{ \left(\frac{\sqrt{Y} \exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma - \frac{1}{2}} \right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma} \right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

(補題 2 を使った。)

…(10)

従って

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sigma - \beta_0} &\leq \\
 &\leq \max \left\{ \left(\frac{\sqrt{Y} \exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma - \frac{1}{2}} \right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma} \right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m} \right) \right\} \\
 &\quad \dots(11)
 \end{aligned}$$

が得られる。

(11) で $\sigma - \beta_0 > 0$ を保ちながら、 σ を β_0 に十分近づければ、 $\beta_0 > \frac{1}{2}$ であるので、(11) の左辺は ∞ に近づき、一方 (11) の右辺は

$$\max \left\{ \left(\frac{\sqrt{Y} \exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma - \frac{1}{2}} \right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma} \right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m} \right) \right\} \Big|_{\sigma=\beta_0}$$

という有限値 finite value に近づき矛盾が生ずる。従って $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$, $\beta_0 > \frac{1}{2}$ なる定理の条件を満たす $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero は存在しない。□

注 1： $F(X)$ が定数でないことの証明

$$\begin{aligned}
G(z) &:= F(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \times \\
&\times \int_{-B}^B \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) idv \\
&= \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right)}{\log Y} \times \\
&\times \int_{-B}^B \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2} \exp((-A + iv)z) idv \\
&\text{with } z := \log X
\end{aligned}$$

$G(z) = \text{constant}$ と仮定して矛盾を導く：この仮定から

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} G(z) &= \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right)}{\log Y} \times \\
&\times \int_{-B}^B \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)} \exp((-A + iv)z) idv \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dz^2} G(z) &= \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right)}{\log Y} \times \\
&\times \int_{-B}^B \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv}) \exp((-A + iv)z) idv \\
&= 0
\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
&\int_{-B}^B \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv}) \exp((-A + iv)z) dv \\
&= 0
\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
&\int_{-B}^B \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv}) \exp(ivz) dv \\
&= 0
\end{aligned}$$

\implies

$$\begin{aligned} & \int_{-B}^B \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \exp(ivz) dv \\ &= \int_{-B}^B \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) Y^{-A+iv} \exp(ivz) dv \\ &= Y^{-A} \int_{-B}^B \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) Y^{iv} \exp(ivz) dv \end{aligned}$$

\implies

$$\begin{aligned} & \int_{-B}^B \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \exp(ivz) dv \\ &= Y^{-A} \int_{-B}^B \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) Y^{iv} \exp(ivz) dv \end{aligned}$$

\iff

$$\begin{aligned} & Y^A \int_{-B}^B \exp\left\{iv\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\} dv \\ &= \int_{-B}^B \exp\left\{iv\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\} dv \end{aligned}$$

\iff

$$\begin{aligned} & Y^A \left[\frac{\exp\left\{iv\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{i\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)} \right]_{v=-B}^B \\ &= \left[\frac{\exp\left\{iv\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{i\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)} \right]_{v=-B}^B \end{aligned}$$

\iff

$$\begin{aligned}
& Y^A \frac{\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0}} \\
&= \frac{\sin \left\{ B \left(\log XY - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\}}{\log XY - \frac{1}{\sigma - \beta_0}} = \frac{\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) + B \log Y \right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} + \log Y}
\end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}
& Y^A \frac{\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0}} \\
&= \frac{\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\} \cos(B \log Y) + \cos \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\} \sin(B \log Y)}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} + \log Y}
\end{aligned}$$

ここで, $\log Y = 2\pi l$, $l, B \in \mathbf{N}$ とすると

\Leftrightarrow

$$Y^A \frac{\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0}} = \frac{\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} + 2\pi l}$$

$\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\} \neq 0$ であると, σ の値を調節して, 出来るので

\Leftrightarrow

$$Y^A = \frac{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0}}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} + 2\pi l} = \frac{\frac{1}{\sigma - \beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma - \beta_0} - \log X - 2\pi l}$$

となる。又 $0 < \sigma - \beta_0 \ll 1$ であるので $\frac{1}{\sigma - \beta_0} - \log X \gg 1$ であるが, $A \gg 1$ であるので

\Leftrightarrow

$$1 \ll e^{2\pi l A} = \frac{\frac{1}{\sigma - \beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma - \beta_0} - \log X - 2\pi l} \sim 1$$

となり矛盾を引き起こす。従って $Y = e^{2\pi l}$, $l \in \mathbf{N}$, $1 \ll B \in \mathbf{N}$ と選べば $F(X) = G(z) \neq \text{constant}$. \square

注 2： Hölder の不等式と Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式の使い分け

(8),(9) を得るとき,

$$\frac{1}{\nu!} \sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^\sigma} c_n$$

に Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式を使って

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\nu!} \sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^\sigma} c_n \right]^{\frac{1}{\nu}} \leq \\ & \leq \left[\frac{1}{\nu!} \sqrt{\sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)^2 (\log n)^{2\nu}}{n^{2\sigma}} c_n^2} \sqrt{\sum_{n \leq (XY)^\nu} 1^2} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\ & \leq \left[\frac{1}{\nu!} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^{2\nu+2}}{n^{2\sigma}} \sqrt{(XY)^\nu}} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\ & \leq \left[\frac{1}{\nu!} \sqrt{(2\nu+2)! \left(\frac{1}{2\sigma-1}\right)^{2\nu+3} \sqrt{(XY)^\nu}} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\ & \leq \left[\sqrt{\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} \left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu} \frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3} \sqrt{(XY)^\nu}} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\ & \leq \left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3} \sqrt{(XY)^\nu} \left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^\nu} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\ & \rightarrow \frac{\sqrt{XY}}{\sigma-\frac{1}{2}} \text{ as } \nu \rightarrow \infty \quad (a), \quad X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

これに対して Hölder の不等式を使うと ($\mu > 1, \frac{1}{\mu} + \frac{\mu-1}{\mu} = 1$)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\nu!} \sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^\sigma} c_n \right]^{\frac{1}{\nu}} \leq \\ & \leq \left[\frac{1}{\nu!} \left\{ \sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)^\mu (\log n)^{\mu\nu}}{n^{\mu\sigma}} c_n^\mu \right\}^{\frac{1}{\mu}} \left\{ \sum_{n \leq (XY)^\nu} 1^{\frac{\mu-1}{\mu}} \right\}^{\frac{\mu-1}{\mu}} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\ & \leq \left[\frac{1}{\nu!} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^{\mu(\nu+1)}}{n^{\mu\sigma}} \right\}^{\frac{1}{\mu}} \{(XY)^\nu\}^{\frac{\mu-1}{\mu}} \right]^{\frac{1}{\nu}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left[\frac{1}{\nu!} \left\{ (\mu(\nu+1))! \left(\frac{1}{\mu\sigma-1} \right)^{\mu(\nu+1)+1} \right\}^{\frac{1}{\mu}} \{(XY)^\nu\}^{\frac{\mu-1}{\mu}} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\ &\leq \left[\left\{ \frac{(\mu(\nu+1))!}{(\nu!)^\mu} \left(\frac{1}{\mu\sigma-1} \right)^{\mu(\nu+1)+1} \right\}^{\frac{1}{\mu}} \{(XY)^\nu\}^{\frac{\mu-1}{\mu}} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\ &\rightarrow \frac{(XY)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma-\frac{1}{\mu}} \text{ as } \nu \rightarrow \infty \quad (b), \quad X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right) \\ &(\Gamma(s) \text{ に関する Stirling の公式を使った。}) \end{aligned}$$

以上から次が云える。

補題 11 $\sigma > \frac{1}{2}$, $\mu > 2$ に対して,

$$\frac{\sqrt{XY}}{\sigma-\frac{1}{2}} < \frac{(XY)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma-\frac{1}{\mu}}.$$

証明 $\frac{1}{\mu} =: x$ として,

$$f(x) := \frac{(XY)^{1-x}}{\sigma-x} \quad (0 < x \leq \frac{1}{2})$$

の増減を調べる。

$$f'(x) = \frac{(XY)^{1-x}}{(\sigma-x)^2} \{-(\sigma-x) \log XY + 1\}$$

より

$$f'(x_0) = 0 \iff x_0 = \sigma - \frac{1}{\log XY}$$

となるので以下に増減表を作ると ($\frac{1}{2} < \sigma < 1$)

| | | | | | |
|------|---------------------|------------|--|------------|-----------|
| x | 0 | | $x_0 = \sigma - \frac{1}{\log XY}$ | | σ |
| f' | | - | 0 | + | |
| f | $\frac{XY}{\sigma}$ | \searrow | $(\log XY)(XY)^{1-\sigma+\frac{1}{\log XY}}$ | \nearrow | $+\infty$ |

X, Y は大きい値を取る事が出来るので

$$x_0 = \sigma - \frac{1}{\log XY} > \frac{1}{2} \iff X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right) \quad (\delta > 1), \quad Y > 1$$

とする事が出来る。従って

$$\min_{0 < x \leq \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

即ち $\min_{\mu \geq 2} f\left(\frac{1}{\mu}\right)$ を与える μ は $\mu = 2$ である。□

注意

補題 11 より $\mu > 2$ のとき

$$\frac{\sqrt{XY}}{\sigma - \frac{1}{2}} < \frac{(XY)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma - \frac{1}{\mu}}.$$

であるが、ここで $\sigma \rightarrow \frac{1}{2} + 0$ のとき、上記

左辺 the left-hand side $\rightarrow +\infty$, 右辺 the right-hand side \rightarrow 有限値 finite value となり矛盾 contradiction が生ずるので、これを救う為には

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right), \mu' = 2, \text{ i.e. } X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)$$

とするか、

分母の μ を $\mu = 2$ とする、即ち

$$\text{補題 11 の右辺: } \frac{(XY)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma - \frac{1}{\mu}} \text{ を } \frac{(XY)^{1-\frac{1}{2}}}{\sigma - \frac{1}{2}}$$

とする必要性が出て来る。□

(A) $X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right), \mu \geq 2, \mu \geq \mu'$ の形 **form:** $\sigma - \frac{1}{\mu'}$ の必要性

(a), (b) を導く際

(μ は、 $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu-1} = 1, \mu > 1$ で Hölder's inequality に現れるもの)

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{(\log n)^{\mu(\nu+1)}}{n^{\mu\sigma}} &\sim \int_1^{(XY)^\nu} \frac{(\log x)^{\mu(\nu+1)}}{x^{\mu\sigma}} dx = \\ &= \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\mu(\nu+1)+1} \left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right)^{\mu(\nu+1)+1} \int_0^{\mu\nu(\sigma - \frac{1}{\mu}) \log XY} y^{\mu(\nu+1)+1-1} e^{-y} dy = \\ &= \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\mu(\nu+1)+1} \left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right)^{\mu(\nu+1)+1} \gamma(\mu(\nu+1) + 1, \mu\nu \left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right) \log XY) \end{aligned}$$

($\gamma(a, z)$ は不完全 gamma 関数)

この不完全 gamma 関数 : $\gamma(\mu(\nu + 1) + 1, \mu\nu \left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right) \log XY)$ が $\sigma > \frac{1}{\mu}$ のときでも

$$\gamma(\mu(\nu + 1) + 1, \mu\nu \left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right) \log XY) \neq o(\Gamma(\mu(\nu + 1) + 1)) \text{ as } \nu \rightarrow \infty,$$

$$\gamma(\mu(\nu + 1) + 1, \mu\nu \left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right) \log XY) \sim \Gamma(\mu(\nu + 1) + 1) \text{ as } \nu \rightarrow \infty$$

となる為には

$$\lambda := \frac{\mu\nu \left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right) \log XY}{\mu(\nu + 1) + 1} > 1$$

が必要である ([22] 参照):

As $\nu \rightarrow \infty$,

$$\lambda := \frac{\mu\nu \left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right) \log XY}{\mu(\nu + 1) + 1} = \frac{\mu \left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right) \log XY}{\mu \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) + \frac{1}{\nu}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right) \log XY > 1$$

\Leftrightarrow

$$XY > \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right)$$

$Y > 1$ であるので

\Leftrightarrow

$$Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right) > \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right) \geq \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right) \quad (\delta > 1)$$

\Leftrightarrow

$$\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu'}} \geq \frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu}}$$

\Leftrightarrow

$$\frac{1}{\mu'} \geq \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow \mu \geq \mu'$$

これを満たす為には

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right), \quad \mu \geq \mu', \quad \delta > 1$$

となる X の形 form が必要である。

(B) (A) の形で $\mu' \geq 2$ である事の必要性

一方, I_ν の積分路を移動した結果現れる

$$\sum_{n \leq X^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s} c_n \neq 0 \quad (c_n = 1 \text{ for } n \leq X^\nu) \text{ for } \nu \rightarrow \infty$$

である為には, $X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right) > 1$ が必要である。この為には $\sigma - \frac{1}{\mu'} > 0$ である必要があるが, $\sigma \rightarrow \frac{1}{2} + 0$ を考慮に入れると $\mu' \geq 2$ が必要である。

これと前述の事を合せると

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right), \quad \mu \geq \mu' \geq 2, \quad \delta > 1$$

となる X の形 form が必要である。

(C) 次の場合分けをする

(C-1) $\sigma - \frac{1}{2} > \frac{1}{\log XY}$ の場合

(C-2) $0 < \sigma - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\log XY}, \mu \geq 2, \mu' \geq 2, (\mu - 2)(\mu' - 2) \neq 0$ の場合

(C-3) $0 < \sigma - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\log XY}, \mu \geq 2, \mu' \geq 2, (\mu - 2)(\mu' - 2) = 0$ の場合

(C-1) の場合

$$\sigma - \frac{1}{2} > \frac{1}{\log XY}$$

\iff

$$XY > \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)$$

\iff

$$Y \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right) > \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)$$

$\sigma \rightarrow \frac{1}{2} + 0$ を考えると

$$\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu'}} \geq \frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}$$

\iff

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu'} &\geq \frac{1}{2} \\ \iff \\ \mu' &\leq 2 \end{aligned}$$

この場合, (B) より $\mu' = 2$ と結論される。従って $\mu \geq \mu' = 2$ である。

(C-2) の場合

$$\mu \geq 2, \mu' \geq 2, (\mu - 2)(\mu' - 2) \neq 0 \text{ より}$$

$$\mu > 2, \mu' > 2 \text{ であるが}$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma_0\right) = 0 \text{ であるとき, (11) と同様に}$$

$$\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \max \left\{ \left(\frac{\sqrt{Y} \exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right)}{\sigma - \frac{1}{\mu}} \right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right)}{\sigma} \right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right)}{U_m} \right) \right\}$$

... (12)

となるが,

これは $\sigma \rightarrow \frac{1}{2} + 0$ とすると, 左辺 $\rightarrow \infty$, 右辺 \rightarrow 有限値 *finite value*

となって矛盾 *contradiction* を生ずる。従って (C-2) の場合は起こり得ない。

(C-3) の場合

$\mu' = 2, \mu > 2$ となるか or $\mu' > 2, \mu = 2$ or $\mu' = 2, \mu = 2$ である。

$\mu' = 2, \mu > 2$ の場合

この場合, $Y > 1$ より

$$\begin{aligned} XY &= Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right) = Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) > \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) \\ \implies \\ \log XY &> \frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}} \\ \implies \\ \sigma - \frac{1}{2} &> \frac{1}{\log XY} \end{aligned}$$

となって (C-3) の $0 < \sigma - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\log XY}$ と矛盾を生じ, この場合は起こりえない。

$\mu' > 2, \mu = 2$ の場合

(A),(B) の結論 $\mu \geq \mu' \geq 2$ を合せ考えると

$$2 = \mu \geq \mu' > 2$$

となって, これは矛盾であり, この場合も起こりえない。

$\mu' = 2, \mu = 2$ の場合

これは (C-1) の特別な場合の結論である。この場合

$$XY = Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right) = Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) > \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)$$

となり、これは $\sigma - \frac{1}{2} > \frac{1}{\log XY}$ を導き、これは (C-1) の場合である。従って、この場合も起こり得ない。

以上をまとめると、(C-1) の場合のみが起こり得るので、(11) は Hölder's inequality を使って次のように一般化される：

$$\begin{aligned} & \mu \geq \mu' = 2, \beta_0 \geq \frac{1}{2} \text{ として} \\ & \frac{1}{\sigma - \beta_0} \leq \\ & \leq \max \left\{ \left(\frac{\left(Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) \right)^{1 - \frac{1}{\mu}}}{\sigma - \frac{1}{\mu}} \right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma} \right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m} \right) \right\} \\ & \dots (13) \end{aligned}$$

が得られる。ここで $\sigma \rightarrow \beta_0 > \frac{1}{2}$ とすれば、(13) の左辺は $+\infty$ に発散し、右辺は有限値となり矛盾を引き起こす。従って仮定した $\zeta(s)$ の零点 $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ は存在しない。

また、 $\beta_0 = \frac{1}{2}$ の場合は

$$\begin{aligned} & \mu \geq \mu' = 2, \beta_0 = \frac{1}{2} \text{ として} \\ & \frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \max \left\{ \left(\frac{\left(Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) \right)^{1 - \frac{1}{\mu}}}{\sigma - \frac{1}{\mu}} \right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma} \right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m} \right) \right\} \\ & \dots (14) \end{aligned}$$

が得られる。ここで $\sigma \rightarrow \frac{1}{2}$ とすれば、(14) の左辺は $+\infty$ に発散し、右辺も $+\infty$ に発散し、矛盾は生じないので $\sigma = \frac{1}{2}$ 上の critical line には $\zeta(s)$ の零点 zeros が存在し得る事となる。

以上が Hölder の不等式と Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式の使い分けである。

□

パラメータ $X, Y, A, B, \sigma - \beta_0$ の選び方

$X = \exp\{\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\}, Y = e^{2\pi l}, A, l, B \in \mathbf{N}, \sigma - \beta_0$ は次の条件 (a), (b), (c)

$$0 < \sigma - \beta_0 \ll \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{XY} = \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{e^{2\pi l} \exp\{\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\}} \cdots (a)$$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \cdots (b)$$

$$|\alpha_\nu| = \left| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(1 + O\left(\frac{\log \gamma_0}{2^\nu}\right)\right) + O\left(\frac{X^{-A}}{\pi A \log Y}\right) \right| > \frac{3}{4} \cdots (c)$$

$(\nu \gg 1)$

満たすが、先ず (a) を満たすように $\sigma - \beta_0$ を選び、次に (c) を満たすように A を選んでから、(b) を満たすように B を選ぶ。

主定理 2 の証明

m を固定して主定理 1 を繰り返し適用すると、

$C_{m-1} < \gamma_0 < C_m$ 内にある零点 ρ_0 の実部 β_0 は次第に小さくなり、
非零領域 zero free region :

$$\{\sigma + it \mid \beta_0 < \sigma, C_{m-1} < t < C_m\}$$

は、左方向に広がって行き、遂には

$$\{\sigma + it \mid \frac{1}{2} < \sigma, C_{m-1} < t < C_m\}$$

となる。

主定理は次の結論を導いている。即ち、存在を仮定した ρ_0 は実際には存在せず、 $\frac{1}{2} < \sigma$ となる $\zeta(s)$ の零点 $s = \sigma + it$ は存在しないことになる。この手続きを各 ρ_0 に施せば、結局 $\zeta(s)$ の非自明な零点は半平面 $\frac{1}{2} < \sigma$ には存在しないと結論付けられる。

$\beta_0 = \frac{1}{2}$ では上記矛盾が生じないので、この過程は $\sigma = \frac{1}{2}$ で止まる。

従って $\beta_0 > \frac{1}{2}$ となり得ない。また $\zeta'(s)$ の関数等式 functional equation により、 $0 < \beta_0 < \frac{1}{2}$ でもあり得ず、 $\beta_0 = \frac{1}{2}$ となる。□

参考文献

- [1] Apostol, T.M.: *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.
- [2] Chandrasekharan, K.: *Arithmetical Functions*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1970.
- [3] Davenport, H.: *Multiplicative Number Theory*, 2nd ed., Springer, 1980. (1st ed. Markham, 1967.)

- [4] Estermann, T.: *Introduction to Modern Prime Number Theory*, Cambridge Univ. Press, 1961.
- [5] Huxley, M.N.: *The Distribution of Prime Numbers (Large sieves and zero-density theorems)*, Oxford, Clarendon Press, 1972.
(p.54(12.39) $e^{B(x)s} \rightarrow e^{B(x)s}$, (12.40) $\frac{1}{2} \log 2\pi \rightarrow \frac{1}{2} \log \pi$ とすべきである。p.56 (13.6) もそうである。)
- [6] 一木正幸 Ichinoki, M.: 『素数定理；その解析的証明』丸善出版サービスセンター, 2003. *The Prime Number Theorem; its analytical proofs*, Maruzen Publish Service Center, 2003.
- [7] Ingham, A.E.: *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge Univ. Press, 1932.
- [8] Karatsuba, A.A. (translated by Nathanson, M.B.): *Basic Analytic Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993, translation from the original Russian ed.: *Osnovy analiticheskoy teorii chisel*, 2nd ed., Nauka, Moscow 1983.
- [9] Kowalski, E.: *Un cours de théorie analytique des nombres*, Société Mathématique de France, 2004.
- [10] Landau, E.: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Leipzig, 1909, § 66, 87, 88. [Reprint: Chelsea 1953, Chelsea 1974, two volumes in one.]
- [11] 三井孝美 Mitsui, T.: 『整数論；解析的整数論入門』至文堂, 1970. *Number Theory; Introduction to Analytic Number Theory (in Japanese)*, Shibundo, Tokyo, 1970.
- [12] Montgomery, H.L. and Vaughan, R.C.: *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory*, Cambridge Univ. Press, 2007.
- [13] 本橋洋一 Motohashi, Y.: 『解析的整数論 I—素数分布論—』, 朝倉書店, 2009, *Analytic Number Theory I—Theory of Prime Number Distribution—*, Asakura-Shoten, Tokyo, 2009.
- [14] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: Riemann 予想の証明に就いて On a Proof of the Riemann Hypothesis, 鹿児島経済論集, 第 63 卷 1 号, 2022 年 6 月, 1-39, *The Kagoshima Journal of Economics*, **63**, June 2022, 1-39.
- [15] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: Riemann 予想の証明に就いて [II] On a Proof of the Riemann Hypothesis [II], 鹿児島経済論集, 第 63 卷 2 号, 2022 年 8 月, 57-93, *The Kagoshima Journal of Economics*, **63**, August 2022, 57-93.
- [16] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: Riemann 予想の証明に就いて [III] On a Proof of the Riemann Hypothesis [III], 鹿児島経済論集, 第 63 卷 3 号, 2022 年 12 月, 133-180, *The Kagoshima Journal of Economics*, **63**, December 2022, 133-180.
- [17] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: Riemann 予想の証明に就いて [IV] On a Proof of the Riemann

- Hypothesis [IV], 鹿児島経済論集, 第 63 巻 4 号, 2023 年 3 月, 243-289, *The Kagoshima Journal of Economics*, **63**, March 2023, 243-289.
- [18] Narkiewicz, W.: *The Development of Prime Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
(邦訳: 中嶋真澄 訳『素数定理の進展・上』, 丸善出版, 訂正版 2014, 2012, 『素数定理の進展・下』, 丸善出版, 2013)
- [19] Rademacher, H.: *Topics in Analytic Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
- [20] Selberg, A.: On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes, *Arch. f. Math. og Naturv.*, **B. 47**(1943), No.6, 87-105.
- [21] 龍沢周雄 Tatzawa, T.: 『関数論』 共立出版, 共立全書 233, 1980. *Complex Function Theory* (in Japanese), Kyouritsu-Shuppan, Tokyo, 1980.
- [22] Temme, N.M.: *Special Functions*, John Wiley & Sons, New York, 1996, § 11.2.3, § 11.2.4.
- [23] Titchmarsh, E.C.: *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1951. [2nd ed. revised by Heath-Brown, D.R., 1986.]
- [24] Turán, P.: Über die Verteilung der Primzahlen (I), *Acta Sci. Szeged*, **10**(1941), 81-104.

(received 21 January 2023.)

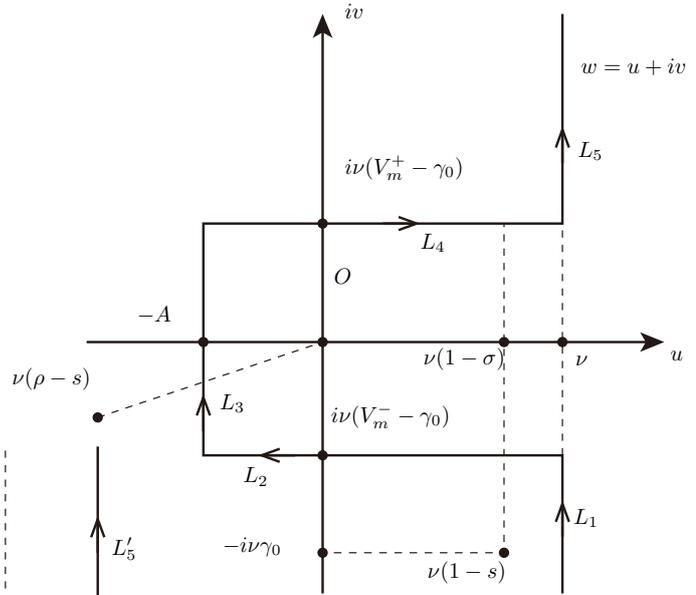


Fig. 1

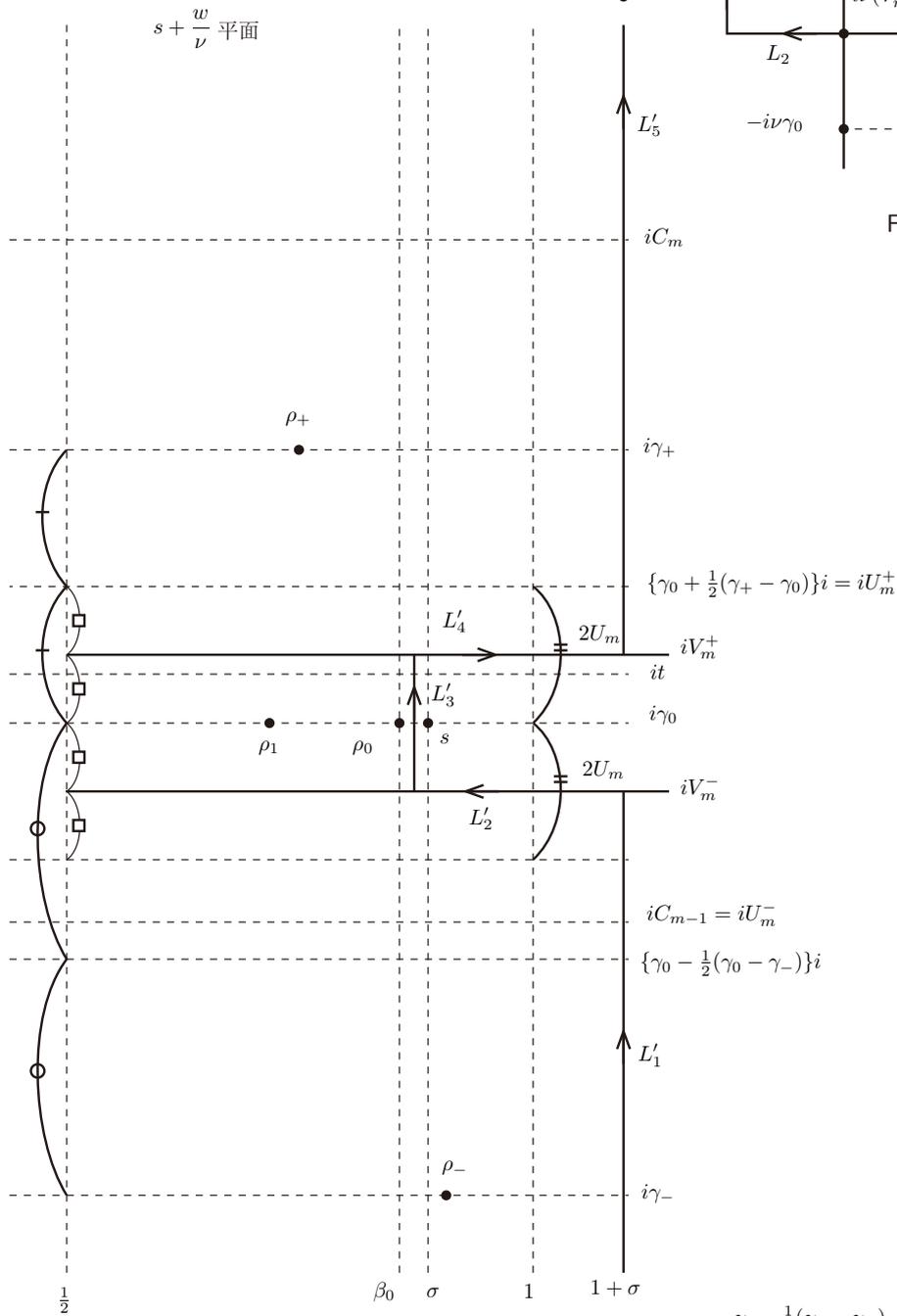


Fig. 2 $\left. \begin{array}{l} \gamma_0 - \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_-) < C_{m-1} \\ \gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_0) < C_m \end{array} \right\}$ の場合