

Gerber-Shiu 関数の展開公式

西 岡 國 雄 北 村 仁 代

An Expansion Formula to the Gerber-Shiu Function

Kunio NISHIOKA and Kimiyo KITAMURA

In order to incorporate the effects of operational risks and economic fluctuations, we define the surplus process $\{R(t)\}$ of an insurance company, by

$$\text{jump diffusion model} \quad R(t) = x + t + \sigma B(t) - \sum_{k=0}^{N(t)} U_k, \quad x \geq 0.$$

(See (I.6) for more informations). The company goes to ruin at a moment of $\tau \equiv \inf\{t > 0 : R(t) < 0\}$. When it occurs, important quantities are the surplus $R(\tau-)$ immediately prior to τ , and the deficit $|R(\tau)|$. Therefore, given a suitable penalty function $W(z, y)$ for $y, z \geq 0$, the severity of ruin is defined by

$$\text{the Gerber-Shiu function} \quad \psi(x) = \mathbf{E}_x[e^{-\alpha \tau} W(R(\tau-), |R(\tau)|)],$$

where $\alpha \geq 0$ is a fixed discount rate.

One of main topics on the risk theory is to analyze ψ , because ψ can be various quantities related to the risk theory. To this end, we present an expansion formula to ψ under a general claim size distribution and a general W . In the special case of $\sigma = 0$, $W \equiv 1$, and $\alpha = 0$, our formula becomes to the Pollaczek-Khintchine formula whose usefulness is well known.

Key Words : the Gerber-Shiu function, the jump diffusion model, an expansion formula to the Gerber-Shiu function, Pollaczek-Khintchine formula

I 序

1. 保険会社破産の深刻度

保険会社の収益を

$$\begin{cases} \text{初期資産を } x \geq 0, \\ \text{時刻 } t \text{ までの claim 総額 (claim 過程) を } S(t), \\ \text{時刻 } t \text{ までの, 保険料などの収益 (profit 過程) を } P(t), \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

とすると, 保険会社が「claim も含めた, すべての損益を時刻 t で精算した直後」の残存資産 (*surplus* 過程) $\{R(t)\}$ は, 次のように表現される¹⁾:

$$R(t) = x + P(t) - S(t), \quad t \geq 0. \quad (\text{I.2})$$

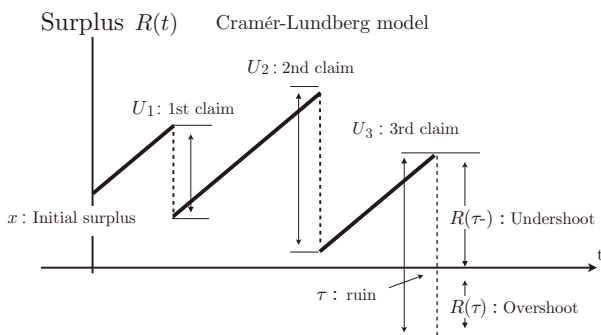
この $R(t)$ が負になった時点

$$\tau \equiv \inf\{t > 0 : R(t) < 0\} \quad (\text{I.3})$$

で会社は破産する.

例えば, 「破産直前の surplus $R(\tau-)$ (undershoot) と破産額 $|R(\tau)|$ (overshoot) が大きいほど深刻な破産とする」など, 色々な破産の深刻度があるが, それらは, 次の Gerber-Shiu 関数で一般的に定量化される。

図 1 Cramèr-Lundberg model, (I.5), での破産 path の例



1) より詳しく言うと, $P(t)$ は, 保険料収入などの総利益から, claim 以外の総経費を減じたものとする。また損益は, それらの発生と同時に精算する。

定義 I.1. (Gerber-Shiu 関数) 2 変数 $x, y \geq 0$ の非負, 有界可測関数 $W(x, y)$ (penalty 関数と呼ぶ) に対し, 破産の penalty を $W(R(\tau-), |R(\tau)|)$ と定める。Penalty の平均を現在価値に割り引いた関数 ψ を「破産の深刻度」とする。すなわち, $\alpha \geq 0$ を discount rate とし,

$$\text{Gerber-Shiu 関数 } \psi(x) = \mathbf{E}_x [e^{-\alpha \tau} W(R(\tau-), |R(\tau)|)] \quad x \geq 0. \quad \diamond \quad (\text{I.4})$$

注意 I.2. ψ は, 提案者に因んで Gerber-Shiu 関数と呼ばれている (Gerber and Shiu, [1997], [1998])。Penalty 関数 W はいろいろ選べるが, 適切に設定することにより, risk theory で研究対象となる色々な量を表現することが出来る, さらに再保険料の設定, 数理ファイナンスへの適用など多くの応用がある (注意 I.3, 例 I.4)。 \diamond

2. Jump diffusion model

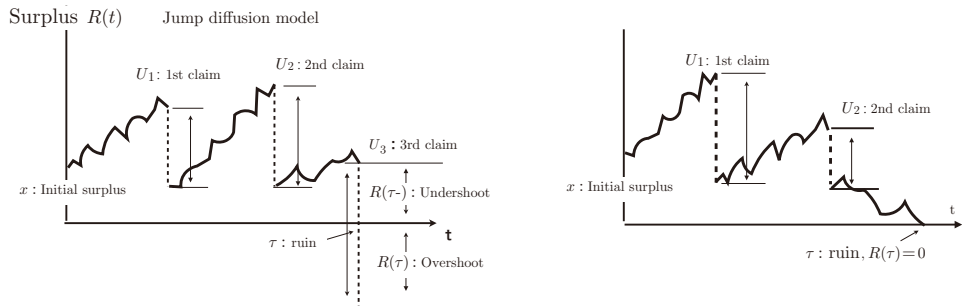
Surplus 過程 $\{R(t)\}$ として, どのようなモデルを考えるかは, 重要な問題である。1930 年に F. Lundberg ([7, 1930], [14, 1969]; 再出版) は, $\{R(t)\}$ として

$$\text{Cramèr-Lundberg model, 後述の (I.6) 式で } \sigma = 0 \text{ としたモデル} \quad (\text{I.5})$$

を提案した。Cramèr-Lundberg model は, 標準的なモデルとして, 現在も破産問題や Gerber-Shiu Risk Thoery などで広く使われている。

一方で, (I.5) は, 実務と乖離しているとの認識も広がっている。実際 (I.5) では, 保険会社の破産原因は claim 支払い不能による債務超過 (図 1) に限られるが, 現実には会社経営の失敗 (operational risk) 等に起因する破産事例が多数あることが, 判明している (我々は, 日米での保険会社破産の事例を調査した, 付録 B)。

図 2 Jump diffusion model, (I.6), での破産 path の例



そこで、景気変動や会社経営による損益を考慮し、profit 過程 $P(t)$ に確率変動を加えたモデルを採用する²⁾。

$$\text{Jump diffusion model, } R(t) = x + t + \sigma B(t) - \sum_{k=0}^{N(t)} U_k, \quad x \geq 0. \quad (\text{I.6})$$

この (I.6) では以下を仮定する：

- (i) 単位時間当たりの平均収益は、簡単のため 1 とした。
 - (ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ は Poisson rate ρ の Poisson 過程。
 - (iii) 定数 $\sigma \geq 0$ は拡散係数, $\{B(t)\}$ は標準 Brown 運動で, $\{N(t)\}$ とは独立。
 - (iv) $\{U_k, k = 1, 2, \dots\}$ は、共通分布測度が $\mu(dx)$ の非負、独立、同分布の確率変数列で $\{N(t)\}$, $\{B(t)\}$ とは独立。なお記述の都合上, $U_0 \equiv 0$ と約束する。
- さらに、平均 $\mathbf{E}[U_1] \equiv m_\mu$ の存在と、次の *safty loading* を仮定する, *i.e.*

$$\text{safty loading, } 1 - \rho m_\mu > 0. \quad \diamond \quad (\text{I.7})$$

3. 本報告の概要

まず, jump diffusion model (I.6) で駆動される Gerber-Shiu 関数 $\psi(x)$ は

$$\begin{aligned} 0 = & -(\rho + \alpha) \psi(x) + \psi'(x) + \frac{\sigma^2}{2} \psi''(x) + \rho \int_0^x \mu(dy) \psi(x-y) + \\ & + \rho \int_x^\infty \mu(dy) W(x, |x-y|), \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

の解となる。この解を求めるため、 ψ の Laplace 変換 $\widehat{\psi}$ を考えるが、Lundberg's positive index γ_\blacktriangle ((II.7), 補題 II.2) を導入することにより、(II.1) は

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(s) = & \left(\rho \frac{\widehat{W}_\mu(\gamma_\blacktriangle) - \widehat{W}_\mu(s)}{s - \gamma_\blacktriangle} + \frac{\sigma^2}{2} W(0, 0) \right) \times \\ & \times \frac{1}{A(s)} \left(1 - \rho \frac{\widehat{\mu}(\gamma_\blacktriangle) - \widehat{\mu}(s)}{(s - \gamma_\blacktriangle) A(s)} \right)^{-1}, \quad A(s) \equiv 1 + \frac{\sigma^2}{2}(s + \gamma_\blacktriangle), \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

に変換される。この (II.12) の右辺は、簡単な方法で、Laplace 逆変換ができる形に変形で

2) このモデルでは、claim 支払いによる破産以外にも、破産 path が存在する (図 2 を参照)。また (I.6) で、 $\sigma = 0$ (Cramèr-Lundberg model) と $\sigma = 1/2$ (jump diffusion model) 以外は同じとして、それぞれの ψ を計算した例が、西岡 [2023, § V, 5] にある。 x が小さいとき、両者は異なる挙動をとる。

きることを示す。そして実際に逆変換を行うと、次の主結果に到達する³⁾：

$$\begin{aligned} \text{定理 III.4 (展開公式)} \quad \psi(x) &= \frac{\sigma^2}{2} W(0, 0) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k H_{k+1} * F_{\blacktriangle}^{*k}(x) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k+1} W_{\blacktriangle} * H_{k+1} * F_{\blacktriangle}^{*k}(x), \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

- W_{\blacktriangle} , (III.3) は主に penalty 関数 W と 共通分布測度 μ に由来する関数,
- F_{\blacktriangle} , (III.2) は共通分布測度 μ に由来する関数で, W とは無関係,
- H_k , (III.1) は k 次の不完全 Erlang 分布で, W とは無関係である。

一方, Cramèr-Lundberg model では,

$$\text{保険会社の破産確率} \quad \psi(x) = \mathbf{P}_x[\tau < \infty], \quad x \geq 0 \quad (\text{I.8})$$

の展開公式として, 「Pollaczek-Khintchine の公式」がよく知られており, (I.8) の挙動解明の有力な道具となっている。我々の展開公式 (III.4) は, $\sigma \rightarrow 0$, $W \equiv 1$, $\alpha = 0$ とする特別な場合に, その公式と一致する。

すなわち, 展開公式 (III.4) は, Pollaczek-Khintchine の公式を, jump diffusion model (I.6) および一般の penalty 関数 W に拡張したものである。

注意 I.3. 1990 年代頃までは, Cramèr-Lundberg model に対する破産確率 (I.8) の研究が, Risk Theory の主なテーマであったが, 「理論と実務とのギャップ」が指摘され, 研究が下火となった。ところが, 1997 年に「Gerber-Shiu 関数」が提案され (Gerber-Shiu [1997]), その応用の広さから, Gerber-Shiu 関数に関連した研究 (Gerber-Shiu Risk Thoery) が, 極めて活発になっている。さらに,

「operational risk による損失」は「保険のクレームデータ」と酷似している

との指摘 (Embrechts-Samorodnitsky [9, 2002]) もあり, 数理ファイナンスなど, さらなる適用範囲の拡大も提案されている。◇

例 I.4. Penalty 関数 W の例。 (i) $W(x, y) = x^j |y|^k$: ψ は undershoot の j 次モーメントと overshoot の k 次モーメントの同時分布を現在価値に割り引いた量となる。

(ii) $W(x, y) \equiv 1$: このとき,

3) (III.4), 右辺, 第 2 項は, 図 2, 左図の破産による penalty, 第 1 項は右図の破産によるもので, 後者は Cramèr-Lundberg model では存在しない。

$$\psi(x) = \mathbf{E}_x[e^{-\alpha \tau}] = \mathbf{E}_x[e^{-\alpha \tau} I_{\{\tau < \infty\}}].$$

は、「破産する (= $I_{\{\tau < \infty\}}$) というイベント」を、割引率 α で、現在価値に割り引く、すなわち *discounted ruin probability* となる。

(ii) 定数 $a, b \geq 0$ に対し, $W(x, y) \equiv I_{\{x > a, |y| > b\}}$: これは, 資産額 a 以上だった会社が, 破産額 b 以上で破産することを「深刻な破産」と設定し, その「深刻な破産」を現在価値に割り引いたものとなる。「Gerber-Shiu 測度」の分布関数に相当する。◇

4. 記号

本報告では, 特に断らずに, 以下の記号を常用する: $\{R(t)\}$ (I.6) に関して,

$$\mathbf{P}_x[\cdot] \equiv \mathbf{P}[\cdot | R(0) = x], \quad \mathbf{E}_x[\cdot] \equiv \mathbf{E}[\cdot | R(0) = x],$$

$\sigma \geq 0$ は拡散係数, $\rho > 0$ は Poisson rate, $\alpha \geq 0$ は discount rate, $F(x) \equiv \mu[0, x] = \mathbf{P}[0 \leq U_1 \leq x]$ は「共通分布」, その tail $F^c(x) \equiv 1 - F(x)$ は「共通 tail」と呼ぶ。 $m_\mu \equiv \mathbf{E}[U_1]$ は共通確率変数の平均で, この記号を使う。Laplace 変換に関しては, 次の記号を使用する:

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \mathcal{L}_x[f(x)](s) = \int_0^\infty dx e^{-sx} f(x) \quad (\text{関数 } f \text{ の Laplace 変換}), \\ \hat{\mu}(s) &\equiv \mathcal{L}_x[\mu(dx)](s) = \int_0^\infty \mu(dx) e^{-sx} \quad (\text{測度 } \mu \text{ の Laplace 変換}), \\ \mathcal{L}_s^{-1}[\varphi(s)](x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iM}^{c+iM} ds e^{sx} \varphi(s) \quad (\text{Laplace 逆変換, } c > 0), \\ f \text{ と } g \text{ の convolution を } f * g, \quad k \text{ 重の convolution } f^{*k} &\equiv \underbrace{f * \cdots * f}_k. \end{aligned}$$

II Gerber-Shiu 関数が満たす積分微分方程式

1. 積分微分方程式と Laplace 変換

命題 II.1. 「共通分布測度 $\mu(dx)$, Poisson rate ρ 」である jump diffusion model (I.6) を考える。Discount rate $\alpha \geq 0$ のとき, penalty 関数 W に対する

$$\text{Gerber-Shiu 関数 } \psi(x) = \mathbf{E}_x[e^{-\alpha \tau} W(R(\tau-), |R(\tau)|)]$$

は, 次の積分微分方程式を満たす:

$$0 = -(\rho + \alpha)\psi(x) + \psi'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\psi''(x) + \rho \int_0^x \mu(dy) \psi(x-y) +$$

$$+ \rho \int_x^\infty \mu(dy) W(x, y-x), \quad x \geq 0, \quad (\text{II.1})$$

$$\text{境界条件} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0 \quad \diamond \quad (\text{II.2})$$

証明 長い証明となるので、本報告では割愛し、別途、報告する。 \square

まず、(II.1) 両辺の Laplace 変換を行う。 $s \geq 0$ として、

$$\widehat{\psi}(s) = \int_0^\infty du e^{-s u} \psi(u), \quad \widehat{\mu}(s) = \int_0^\infty \mu(du) e^{-s u}, \quad (\text{II.3})$$

$$W_\mu(x) \equiv \int_x^\infty \mu(dy) W(x, y-x), \quad (\text{II.4})$$

$$\widehat{W}_\mu(s) \equiv \mathcal{L}_x[W_\mu(x)](s) = \int_0^\infty dx e^{-s x} \int_x^\infty \mu(dy) W(x, y-x), \quad (\text{II.5})$$

と置くと、(II.1) は次に変換される。

$$0 = \widehat{\psi}(s) \left\{ -(\rho + \alpha) + s + \frac{\sigma^2}{2} s^2 + \rho \widehat{\mu}(s) \right\} - \left(1 + \frac{\sigma^2}{2} s \right) \psi(0) - \frac{\sigma^2}{2} \psi'(0) + \rho \widehat{W}_\mu(s), \quad s \geq 0. \quad (\text{II.6})$$

2. Lundberg's positive index

困ったことに (II.6) では、 $\widehat{\psi}$ だけでなく、初期値

$$\left(1 + \frac{\sigma^2}{2} s \right) \psi(0) + \frac{\sigma^2}{2} \psi'(0)$$

も未知関数である。まず、これを求める。

(1) $\sigma > 0$ の場合 $\sigma > 0$ とすると、 $\mathbf{P}_0[\tau = 0] = 1$ 。すると

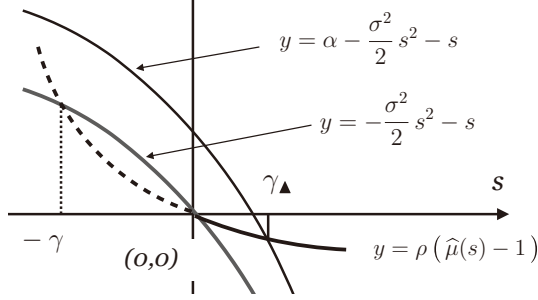
$$\psi(0) = \mathbf{E}_0[e^{-\alpha \tau} W(R(\tau-), |R(\tau)|)] = W(0, 0).$$

次に、 $\widehat{\mu}(s)$ に関する代数方程式 (= *Lundberg's fundamental equation*)

$$-\alpha + s + \frac{\sigma^2}{2} s^2 + \rho (\widehat{\mu}(s) - 1) = 0, \quad (\text{II.7})$$

を考える。 $s \geq 0$ では

- $f_1(s) \equiv \alpha - s - \sigma^2 s^2/2$ は狭義単調減少で、 $f_1(0) = \alpha > 0$, $f_1(\infty) = -\infty$.

図3 Lundberg's fundamental equation と γ_{\blacktriangle} 

- $f_2(s) \equiv \rho(\widehat{\mu}(s) - 1)$ は狭義単調減少で, $f_2(0) = 0$, $f_2(\infty) = -\rho$.

だから, (II.7) には唯一の正值解が存在する (図3 参照)。

今後, その正值解を γ_{\blacktriangle} と表し, *Lundberg's positive index* と呼ぶ。なお (II.6) を考えると, $s = \gamma_{\blacktriangle}$ で $\widehat{\psi}$ の係数 $\{\dots\} = 0$ となるので,

$$\left(1 + \frac{\sigma^2}{2} \gamma_{\blacktriangle}\right) \psi(0) + \frac{\sigma^2}{2} \psi'(0) = \rho \widehat{W}_{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}). \quad (\text{II.8})$$

- (2) $\sigma = 0$ の場合 $\sigma = 0$ とした (II.7)

$$-\alpha + s + \rho(\widehat{\mu}(s) - 1) = 0, \quad (\text{II.9})$$

も唯一の正值解を持つが, それも *Lundberg's positive index* γ_{\blacktriangle} と表す。 $\sigma = 0$ とした (II.6) に $s = \gamma_{\blacktriangle}$ を代入すると, $\psi(0) = \rho \widehat{W}_{\mu}(\gamma_{\blacktriangle})$ となる。

補題 II.2. γ_{\blacktriangle} を (II.7), (II.9) の *Lundberg's positive index* とする。

- (i) Gerber-Shiu 関数 ψ の初期値は以下の通り :

	$\psi(0)$	$\sigma^2 \psi'(0)/2$
$\sigma > 0$	$W(0,0)$	$\rho \widehat{W}_{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - (1 + \sigma^2 \gamma_{\blacktriangle}/2) W(0,0)$
$\sigma = 0$	$\rho \widehat{W}_{\mu}(\gamma_{\blacktriangle})$	---

- (ii) (II.6) に即して述べる。 $\sigma \geq 0$ に対し,

$$\left(1 + \frac{\sigma^2}{2} s\right) \psi(0) + \frac{\sigma^2}{2} \psi'(0) = \rho \widehat{W}_{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) + \frac{\sigma^2}{2} (s - \gamma_{\blacktriangle}) W(0,0). \quad \diamond$$

注意 II.3. (i) μ が light tail (指数モーメントを持つ) の場合, ある $c > 0$ があり, $\widehat{\mu}(s)$ のグラフは $-c < s < 0$ の領域 (図 3 の点線部分) でも存在する。

特に $\alpha = 0$ とした (II.7) の解は, 2つ ($s = 0, -\gamma$) ある。負の解の絶対値 γ は *adjustment coefficient* と呼ばれ, 破産確率 $\mathbf{P}_x[\tau < \infty]$, (I.8) に対する Cramèr-Lundberg 近似などで, 重要な役割を果たしている。

(ii) Adjustment coefficient γ は, μ が light tail の場合にしか存在しないが, Lundberg's positive index γ_{\blacktriangle} は 1 次モーメントを持つすべての確率測度 μ で存在する。

(iii) 特別な μ 以外では, 代数的な方法で, (II.7) の解を求めることは, ほぼ不可能である。そのため一般には, σ , α と γ_{\blacktriangle} との関数関係を明示することはできない。 \diamond

3. $\widehat{\psi}$ の展開

(1) (II.6) と 補題 II.2 より,

補題 II.4. Gerber-Shiu 関数の Laplace 変換 $\widehat{\psi}(s)$, (II.3) は次の等式を満たす。

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(s) & \left(\rho(\widehat{\mu}(s) - 1) - \alpha + s + \frac{\sigma^2}{2} s^2 \right) \\ & = \rho(\widehat{W}_{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{W}_{\mu}(s)) + \frac{\sigma^2}{2} (s - \gamma_{\blacktriangle}) W(0, 0). \quad \diamond \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

いま,

$$A(s) \equiv 1 + \frac{\sigma^2}{2} (s + \gamma_{\blacktriangle}) \quad (\text{II.11})$$

と置くと,

$$s - \gamma_{\blacktriangle} + \frac{\sigma^2}{2} (s^2 - \gamma_{\blacktriangle}^2) = (s - \gamma_{\blacktriangle}) A(s)$$

となる。これと Lundberg's positive index γ_{\blacktriangle} の定義式 (II.7) との和をとり

$$\rho(\widehat{\mu}(s) - 1) - \alpha + s + \frac{\sigma^2}{2} s^2 = (s - \gamma_{\blacktriangle}) A(s) + \rho(\widehat{\mu}(s) - \widehat{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}))$$

となる。つまり (II.10) の両辺は $s = \gamma_{\blacktriangle}$ が共通の零点となるので, これを考慮して, (II.10) を変形する。

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(s) & = \left(\rho \frac{\widehat{W}_{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{W}_{\mu}(s)}{s - \gamma_{\blacktriangle}} + \frac{\sigma^2}{2} W(0, 0) \right) \times \\ & \quad \times \frac{1}{A(s)} \left(1 - \frac{\rho}{A(s)} \frac{\widehat{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{\mu}(s)}{(s - \gamma_{\blacktriangle})} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

(2) $s \geq 0$ とする。(II.11) より $|A(s)| \geq 1$ となり, 平均値の定理から

$$\frac{\rho}{|A(s)|} \left| \frac{\widehat{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{\mu}(s)}{(s - \gamma_{\blacktriangle})} \right| \leq \rho \left| \frac{\widehat{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{\mu}(s)}{s - \gamma_{\blacktriangle}} \right| = \rho |\widehat{\mu}'(\theta)| \quad \text{for some } \theta \geq \gamma_{\blacktriangle} \wedge s \geq 0.$$

$|\widehat{\mu}'(s)|$ は単調減少だから, $|\widehat{\mu}'(\theta)| \leq |\widehat{\mu}'(0)| = m_{\mu}$ 。ここで, 「safty loading (I.7), *i.e.* $\rho m_{\mu} < 1$ 」を考慮すると

$$\frac{\rho}{|A(s)|} \left| \frac{\widehat{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{\mu}(s)}{(s - \gamma_{\blacktriangle})} \right| \leq \rho |\widehat{\mu}'(0)| = \rho m_{\mu} < 1. \quad (\text{II.13})$$

命題 II.5. ψ の Laplace 変換 $\widehat{\psi}(s) = \mathcal{L}_x[\psi(x)](s)$ は, 次のように展開出来る :

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(s) &= \left(\rho \frac{\widehat{W}_{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{W}_{\mu}(s)}{s - \gamma_{\blacktriangle}} + \frac{\sigma^2}{2} W(0,0) \right) \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \left(\frac{1}{A(s)} \right)^{k+1} \left(\frac{\widehat{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{\mu}(s)}{s - \gamma_{\blacktriangle}} \right)^k, \quad s \geq 0. \quad \diamond \quad (\text{II.14}) \end{aligned}$$

証明 (II.13) より, “(II.12) の右辺, 最後の項” を次式で置き換えることが出来る :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{since } |z| < 1, \quad \text{where } z = \frac{\rho}{A(s)} \frac{\widehat{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{\mu}(s)}{s - \gamma_{\blacktriangle}}. \quad \square$$

注意 II.6. (II.12) から,

$$\widehat{\psi}(s) = \frac{1}{A(s)} \left(\rho \frac{\widehat{W}_{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{W}_{\mu}(s)}{s - \gamma_{\blacktriangle}} + \frac{\sigma^2}{2} W(0,0) \right) + \widehat{\psi}(s) \frac{\rho}{A(s)} \frac{\widehat{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{\mu}(s)}{s - \gamma_{\blacktriangle}}.$$

$\sigma = 0$ の場合 (Cramèr-Lundberg model), この式は, Gerber-Shiu 関数の再生方程式として知られている (Gerber-Shiu, [1998])。 \diamond

III Gerber-Shiu 関数の展開公式

(1) (II.14) の Laplace 逆変換を行うが, そのための補題を用意する。なお, 補題の証明は付録 A で述べる。

補題 III.1. (i) $A(s) = 1 + \frac{\sigma^2}{2}(s + \gamma_{\blacktriangle})$, (II.11) に対し,

$$H_k(x) \equiv \mathcal{L}_s^{-1} \left[\left(\frac{1}{A(s)} \right)^k \right] (x) = \left(\frac{2}{\sigma^2} \right)^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \exp \left\{ -x \left(\gamma_{\blacktriangle} + \frac{2}{\sigma^2} \right) \right\}. \quad (\text{III.1})$$

ここで $k = 1, 2, \dots, 0! \equiv 1$ と約束する。(H_k は不完全 Erlang 分布と呼ばれる。)

(ii) $H_k, k = 0, 1, \dots$, は, 無限回微分可能な有界連続関数で,

$$\int_0^\infty dx H_k(x) = \left(\frac{1}{A(0)} \right)^k = \left(\frac{2}{2 + \sigma^2 \gamma_\blacktriangle} \right)^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad \diamond$$

補題 III.2. (i) 共通分布測度 μ に対し,

$$\begin{aligned} F_\blacktriangle(x) &\equiv \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{\widehat{\mu}(\gamma_\blacktriangle) - \widehat{\mu}(s)}{s - \gamma_\blacktriangle} \right] (x) = \int_x^\infty \mu(dy) e^{-\gamma_\blacktriangle(y-x)} \\ &= \gamma_\blacktriangle \int_0^\infty dy e^{-\gamma_\blacktriangle y} \{F^c(x) - F^c(x+y)\}, \quad F^c(x) \equiv \mu[x, \infty). \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

(ii) F_\blacktriangle は正值, 右連続で左極限があり, $0 \leq F_\blacktriangle(x) \leq F^c(x)$ for all $x \geq 0$. さらに

$$\int_0^\infty dx F_\blacktriangle^{*k}(x) \leq m_\mu^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad \diamond$$

補題 III.3. (i) 共通分布測度 μ および penalty 関数 W に対し

$$\begin{aligned} W_\blacktriangle(x) &\equiv \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{\widehat{W}_\mu(\gamma_\blacktriangle) - \widehat{W}_\mu(s)}{s - \gamma_\blacktriangle} \right] (x) = \int_x^\infty dz e^{-\gamma_\blacktriangle(z-x)} W_\mu(z) \\ &= \int_x^\infty dz e^{-\gamma_\blacktriangle(z-x)} \int_z^\infty \mu(dy) W(z, y-z) \geq 0, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

(ii) W_\blacktriangle は正值, 1 階微分可能かつ可積分。実際, $\|W\| \equiv \sup_{x, y \geq 0} |W(x, y)|$ とすると,

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq 0} |W_\blacktriangle(x)| &\leq \left(m_\mu \wedge \frac{1}{\gamma_\blacktriangle} \right) \|W\|, \quad \sup_{x \geq 0} |(W_\blacktriangle)'(x)| \leq 2 \|W\|, \\ \int_0^\infty dx W_\blacktriangle(x) &\leq \frac{m_\mu}{\gamma_\blacktriangle} \|W\|. \quad \diamond \end{aligned}$$

(2) これらの補題から, (II.14) の両辺の Laplace 逆変換が実行でき, 次を得る。なお定理と系の証明は付録 A で行う:

定理 III.4. (展開公式) Jump diffusion model (I.6) および penalty 関数 W に対する Gerber-Shiu 関数 ψ , (I.4) は次式のように展開出来る。なお記述の都合上, $F_\blacktriangle^{*0}(x) = \delta(x)$ (Dirac の delta 関数) と約束する。

(i) $\sigma > 0$ のとき,

$$\psi(x) = \frac{\sigma^2}{2} W(0, 0) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k H_{k+1} * F_\blacktriangle^{*k}(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k+1} W_{\blacktriangle} * H_{k+1} * F_{\blacktriangle}^{*k}(x), \quad x \geq 0. \quad (\text{III.4})$$

(ii) $\sigma = 0$ のとき,

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k+1} W_{\blacktriangle} * F_{\blacktriangle}^{*k}(x), \quad x \geq 0. \quad \diamond \quad (\text{III.5})$$

系 III.5. $\sigma > 0$ のとき, (III.4) で定義された ψ は, $x \geq 0$ で 2 階微分可能な有界関数である。 \diamond

注意 III.6. $\sigma = 0$ の場合 (Cramèr-Lundberg model), この表現は既知である, 実際, Gerber-Shiu [1998] で述べられている再生方程式から導くことができる。

また, $\sigma = 0$, $W \equiv 1$, $\alpha = 0$ とすると, $\psi(x) = \mathbf{P}_x[\tau = \infty]$ (存続確率), (I.8) となる。そのとき (III.5) は, よく知られている Pollaczek-Khintchine の公式⁴⁾ と一致する。 \diamond

F_{\blacktriangle} , W_{\blacktriangle} は F^C , W を (I.6) に合わせて加工したものである。どうなるかを例示する。

例 III.7. (i) μ が, 指数 $\lambda > 0$ の指数分布のとき, $F_{\blacktriangle}(x) = \lambda e^{-\lambda x} / (\lambda + \gamma_{\blacktriangle})$.

(ii) 係数 $1/2$ の Weibull 分布 $\mu(dx) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x}} e^{-\sqrt{ax}} dx$, $a > 0$ のとき, Erf(\cdot) を誤差関数として,

$$F_{\blacktriangle}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a\pi}{\gamma_{\blacktriangle}}} \left(1 - \text{Erf}\left(\sqrt{\gamma_{\blacktriangle}x} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\gamma_{\blacktriangle}}}\right) \right) \exp\left\{\gamma_{\blacktriangle}x + \frac{a}{4\gamma_{\blacktriangle}}\right\}. \quad \diamond$$

例 III.8. 例 I.4 で述べた penalty 関数 W を考える。 (i) $W(x, y) \equiv 1$ のとき,

$$W_{\mu}(x) = \int_x^{\infty} \mu(dy) = F^c(x) \Rightarrow W_{\blacktriangle}(x) = \int_x^{\infty} dy e^{-\gamma_{\blacktriangle}(y-x)} F^c(y).$$

(ii) $W(x, y) = I_{[a, \infty)}(x) I_{[b, \infty)}(y)$, $a, b \geq 0$, のとき,

$$\begin{aligned} W_{\mu}(x) &= \int_x^{\infty} \mu(dy) I_{[a, \infty)}(x) I_{[b, \infty)}(y-x) = I_{[a, \infty)}(x) F^c(x+b) \\ &\Rightarrow W_{\blacktriangle}(x) = \int_{\max\{x, a\}}^{\infty} dy e^{-\gamma_{\blacktriangle}(y-x)} F^c(y+b). \quad \diamond \end{aligned}$$

4) 例えば, Asmussen-Albrecher [2010] を見よ。

参考文献

- 上田和勇, 米国保険会社の倒産リスクに関する一考察, 危険と管理, 19 (1991), 185–195, 日本リスクマネジメント学会。
- 植村信保, 生命保険会社の経営破綻要因, 保険学雑誌 598 (2007), 35–52, 日本保険学会。
- 西岡國雄, Gerber-Shiu 関数に対する優および劣関数の構成, 企業研究, 42 (2023), 中央大学企業研究所, 掲載予定。
- 吉澤卓哉, 大成火災破綻前史-破綻への途から外れる機会はなかったのか, 保険学雑誌 627 (2014), 1–30, 日本保険学会。
- Asmussen, S. and Albrecher, H., Ruin Probability, 2nd Ed., Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, Vol. 14, World Scientific, 2010.
- Atlas Magazine, Insurance News Around The World, <https://www.atlas-mag.net/en,> Archives 2019.
- Cramèr, H., Historical review of Phillip Lundberg's work on risk theory, Skand. Aktua. (Suppl.), 52 (1969), 6–12.
- Dufresne, F. and Gerber, H. U., Risk theory for a compound Poisson process that is perturbed by a diffusion, Insurance: Mathematics and Economics, 10 (1991), 51–59.
- Embrechts, P. and Samorodnitsky, G., Ruin theory revisit: stochastic models for operational risk, Operations Research and Industrial Engineering, Technical Report, Cornell Univ., 2002.
- Gerber, H. U. and Loisel, S., Why ruin theory should be of interest for insurance practitioners and risk managers nowadays?, Proceedings of Actuarial and Financial Mathematics, 2012, Bruxelles, Belgium.
- Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W., The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin, Insurance: Mathematics and Economics, 21 (1997), 129–137.
- Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W., On the time value of ruin, North American Actuarial J., 2 (1998), 48–72 .
- Kyprianou, A. E., Gerber-Shiu Risk Theory, EAA Series, Springer, 2013.
- Lundberg, F., Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikemasse. Skand. Aktua., 13 (1930), 1–83.

〈付録 A〉 定理, 補題および系の証明

補題 III.1 の証明 (i) $k = 1$ の場合は, 両辺の Laplace 変換をとればよい。後は, 部分積分と帰納法を使う。(ii) は (i) から自動的に得られる。□

補題 III.2 の証明 (i) 特に

$$\widehat{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) = \int_0^{\infty} \mu(dy) e^{-\gamma_{\blacktriangle} y} \quad (.1)$$

だから

$$\begin{aligned} F_{\blacktriangle}(x) &= \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{\widehat{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{\mu}(s)}{s - \gamma_{\blacktriangle}} \right] = \\ &= e^{\gamma_{\blacktriangle} x} \int_0^{\infty} \mu(dy) e^{-\gamma_{\blacktriangle} y} - \int_0^x \mu(dy) e^{\gamma_{\blacktriangle}(x-y)} = (\text{III.2}). \end{aligned}$$

また, $\mu[x, x+h) = F^c(x) - F^c(x+h)$ だから, 部分積分と変数変換 $t = y - x$ から,

$$\begin{aligned} F_{\blacktriangle}(x) &= F^c(x) - \gamma_{\blacktriangle} \int_x^{\infty} dy F^c(y) e^{-\gamma_{\blacktriangle}(y-x)} = \\ &= \gamma_{\blacktriangle} \int_0^{\infty} dt e^{-\gamma_{\blacktriangle} t} \{F^c(x) - F^c(x+t)\}. \end{aligned}$$

(ii) (III.2) より $0 \leq F_{\blacktriangle}(x) \leq F^c(x) \leq 1$ は明らか。すると

$$\int_0^{\infty} dx F_{\blacktriangle}(x) \leq \int_0^{\infty} dx F^c(x) = m_{\mu}.$$

$k = j$ で (ii) が成立すると仮定すれば, 次式の通り, 数学的帰納法が完成する:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx F_{\blacktriangle}^{*(j+1)}(x) &= \int_0^{\infty} dx \int_0^x dy F_{\blacktriangle}(x-y) F_{\blacktriangle}^{*j}(y) = \\ &= \int_0^{\infty} dy F_{\blacktriangle}^{*j}(y) \int_y^{\infty} dx F_{\blacktriangle}(x-y) \leq \int_0^{\infty} dy F_{\blacktriangle}^{*j}(y) m_{\mu} \leq m_{\mu}^{j+1}. \quad \square \end{aligned}$$

補題 III.3 の証明 (i) まず Laplace 逆変換は,

$$\mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{s - \gamma_{\blacktriangle}} \right] (x) = e^{\gamma_{\blacktriangle} x}, \quad \mathcal{L}_s^{-1} [\widehat{W}_{\mu}] = W_{\mu}(x) = \int_x^{\infty} \mu(dy) W(x, y-x) \quad (.2)$$

だから,

$$\mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{\widehat{W}_{\mu}(s)}{s - \gamma_{\blacktriangle}} \right] (x) = \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{s - \gamma_{\blacktriangle}} \right] * \mathcal{L}_s^{-1} [\widehat{W}_{\mu}] (x) = \int_0^x dy e^{\gamma_{\blacktriangle}(x-y)} W_{\mu}(y).$$

すると

$$W_{\blacktriangle}(x) \equiv \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{\widehat{W}_{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{W}_{\mu}(s)}{s - \gamma_{\blacktriangle}} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\gamma_{\blacktriangle} x} \int_0^{\infty} dt e^{-\gamma_{\blacktriangle} t} W_{\mu}(t) - \int_0^x dt e^{\gamma_{\blacktriangle} (x-t)} W_{\mu}(t) \\
&= \int_x^{\infty} dt e^{-\gamma_{\blacktriangle} (t-x)} W_{\mu}(t) = \text{(III.3)}.
\end{aligned}$$

(ii) (III.3) より, 正値と 1 階の微分可能性がわかる。

$$0 \leq W_{\mu}(x) \leq \int_x^{\infty} \mu(dy) \|W\| = F^c(x) \|W\| \leq \|W\|.$$

これより, 上段の不等式は簡単にわかる。一方

$$0 \leq \int_0^{\infty} dx W_{\blacktriangle}(x) = \int_0^{\infty} dx \frac{1 - e^{-\gamma_{\blacktriangle} z}}{\gamma_{\blacktriangle}} W_{\mu}(z) \leq \frac{\|W\|}{\gamma_{\blacktriangle}} \int_0^{\infty} dx F^c(x). \quad \square$$

定理 III.4 証明 Step 1. (III.4) の右辺が, $x \geq 0$ に関して一様に収束することを示す。

(III.4), 第 2 項を考える。補題 III.3 より,

$$\sup_x |W_{\blacktriangle}(x)| \leq m_{\mu} \|W\|$$

である。すると, 補題 III.1, III.2 より

$$\begin{aligned}
\sup_x \rho^{k+1} W_{\blacktriangle} * H_{k+1} * F_{\blacktriangle}(x) &\leq \rho^{k+1} m_{\mu} \|W\| \int_0^x dy H_{k+1} * F_{\blacktriangle}(y) \\
&\leq \|W\| \rho^{k+1} m_{\mu}^{k+1} \int_0^{\infty} dy H_{k+1}(y) \leq \|W\| \rho^{k+1} m_{\mu}^{k+1}.
\end{aligned}$$

(III.4), 第 1 項も同様だが, 「safty loading 条件 $\rho m_F < 1$ 」を仮定しているので,

$$\begin{aligned}
\sup_x \left(\text{(III.4), 右辺} \right) &\leq \left(\frac{\sigma^2}{2} W(0, 0) + \|W\| \right) \sum_k \rho^k m_{\mu}^k \\
&= \left(\frac{\sigma^2}{2} W(0, 0) + \|W\| \right) \frac{1}{1 - \rho m_{\mu}} < \infty.
\end{aligned}$$

Step 2. (III.4) の右辺を Laplace 変換する。右辺の級数は一様収束しているので, 各項毎に Laplace 変換できるが, 補題 III.1, III.2, III.3 より (II.14) の右辺になる。Laplace 変換の一意性より, 定理が示された。 \square

系 III.5 証明 (III.4), 右辺の 2 階微分可能性が問題となる。

Step 1. まず convolution の微分を考える。 g, h がそれぞれ 1 階微分可能なら,

$$\begin{aligned}
(g * h)' &= g(x) h(0) + \int_0^x dy g(y) h'(x-y) = g(x) h(0) + g * h'(x), \\
(g * h)'' &= g'(x) h(0) + g(0) h'(x) + \int_0^x dy g'(x-y) h'(y) \\
&= g'(x) h(0) + g(0) h'(x) + g' * h'(x)
\end{aligned}$$

と $g * h$ は 2 階微分可能となる, さらに $h(0) = 0$ なら, $(g * h)' = g * h'$ である。

Step 2. この結果を使い, (Ⅲ.4), 右辺で項別の微分可能性を調べる。

補題Ⅲ.1 より H_1 は無限回微分可能だから, $H_1 * F_{\blacktriangle}$ は 1 階微分可能である。また, 補題Ⅲ.3 から W_{\blacktriangle} は 1 階微分可能だから, *Step 1* の結果より, 次の各項はすべて 2 階微分可能である:

$$H_1, H_3 * F_{\blacktriangle}^{*2} = H_1 * (H_1 * F_{\blacktriangle})^{*2}, W_{\blacktriangle} * H_1, W_{\blacktriangle} * H_2 * F_{\blacktriangle}, W_{\blacktriangle} * H_3 * F_{\blacktriangle}^{*2}.$$

$k \geq 3$ の項を評価する。補題Ⅲ.1 より, H_2 は無限階微分可能, すべての導関数が $[0, \infty)$ で可積分, かつ $H_2(0) = 0$ である。*Step 1* の結果より,

$$\begin{aligned} (H_{k+1} * F_{\blacktriangle}^{*k})'' &= \left((H_{k-3} * F_{\blacktriangle}^{*k} * H_2) * H_2 \right)'' = \left(H_{k-3} * F_{\blacktriangle}^{*k} * H_2 * H_2' \right)' \\ &= \left((H_{k-3} * F_{\blacktriangle}^{*k} * H_2') * H_2 \right)' = H_{k-3} * F_{\blacktriangle}^{*k} * H_2' * H_2'. \end{aligned}$$

ここで記述の都合上, $H_0(x) \equiv \delta(x)$ と約束した。同様に

$$(W_{\blacktriangle} * H_{k+1} * F_{\blacktriangle}^{*k})'' = W_{\blacktriangle} * H_{k-3} * F_{\blacktriangle}^{*k} * H_2' * H_2'$$

だから, (Ⅲ.4), 右辺の各項は 2 階微分可能である。

Step 3. (Ⅲ.4), 右辺の導関数が, 一様に絶対収束していることを示す。

$k \geq 3$ の項を評価する。*Step 2* の結果と 補題Ⅲ.1, Ⅲ.2 から

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq 0} |\rho^k (H_{k+1} * F_{\blacktriangle}^{*k})''| &= \sup_{x \geq 0} |\rho^k H_{k-3} * F_{\blacktriangle}^{*k} * H_2' * H_2'| \\ &\leq \rho^k \sup_{x \geq 0} |H_2'| \int_0^\infty dy |H_2'(y)| \int_0^\infty dy H_{k-3}(y) \int_0^\infty dy F_{\blacktriangle}^{*k} \\ &\leq \left\{ \sup_x |H_2'| \int_0^\infty dy |H_2'(y)| \right\} (\rho m_\mu)^k. \\ \sup_{x \geq 0} |\rho^{k+1} (W_{\blacktriangle} * H_{k+1} * F_{\blacktriangle}^{*k})''| &= \sup_{x \geq 0} |\rho^k W_{\blacktriangle} * H_{k-3} * F_{\blacktriangle}^{*k} * H_2' * H_2'| \\ &\leq \left\{ \rho \sup_x |W_{\blacktriangle}| \left(\int_0^\infty dy |H_2'(y)| \right)^2 \right\} (\rho m_\mu)^k. \end{aligned}$$

補題Ⅲ.1, Ⅲ.3 から, W_{\blacktriangle} は有界, H_2' は有界かつ絶対可積分である。よって, safty loading (I.7) より $\rho m_\mu < 1$ だから, (Ⅲ.4), 右辺の 2 階導関数は一様絶対収束している。□

〈付録 B〉 日米保険会社の破産事例

1960 年から現在 (2022 年 9 月) まで, 日米の保険会社について, 破産事例を調査した。その際, 保険会社の破産原因を次の 3 つに分類する。

記号	説明
CT 巨額損失	会社内で対応できる規模でなく、再保険、住宅保証基金などによる顧客対応が必要であった。
OR 経営の失敗	「逆ザヤ」の発生などの経営陣による経営の失敗。
RC 経営環境の悪化	売上が継続的に減少し、必要経費を捻出できない状況が続いた。経済環境の悪化および競争に負けた結果としてのシェア減少等により発生した。

日本および米国での集計結果は、次表の通りで、損害保険会社の破産原因は、大規模災害による claim 不払いによる破産だけでなく、むしろ、「経営の失敗」などそれ以外の要因によることが多い。

国	種別の調査数	破産原因が判明した数	CT	OR	RC
日本	全保険会社 11	11	1	9	1
	うち、生保以外 3	3	1	1	1
米国	全保険会社 26	13	1	11	1
	うち、生保と健保以外 9	5	1	4	0

1. 資料——日本における保険会社の破産事例

日本においては、「保険会社の破産を避ける」との考えが根底にあり、合併による救済などの措置を講じるため、破産件数は少ない。

(1) 2022年8月現在、金融庁において免許を付与されている損害保険会社の数は、55社であり、うち、日本の損害保険会社は33社である。ところが、戦後から今日までに破産した損害保険会社および保険法人は3社である。

発生年	会社名	業種	破産の原因
2011	たてもの株式会社 ⁵⁾	住宅瑕疵保険	RC
2001	大成火災海上保険株式会社 ⁶⁾	損害保険	OR
2000	第一火災海上保険相互会社 ⁷⁾	損害保険	CT

5) 国土交通省が2011年に公表した資料に、保険法人、たてもの株式会社の業務廃止の理由が記載されている。資料によると、業務廃止理由は、「業績の不振及び、財務基盤強化のための資本増強が実現できなかったことにより、保険等の業務を適正かつ確実に運営していくことが困難となったため」と記載されている。(https://www.mlit.go.jp/report/press/house04_hh_000285.html)

6) 同社が破産に至る経緯については、吉澤 [2014] が詳細に検証した。それによると、同社の破産原因は、FR社 (Fortress Re, Inc.) 経由でのプールによる海外再保険取引にある。2001年9月11日に発生した同時多発テロによる影響も含め、同年9月30日において、FR社経由による海外再保険取引に基づいて、同社が支払う債務額が、少なくとも744億円となり、大幅な債務超過が見込まれることとなった。

7) 同社は、日本経済の変化に伴い、「逆ザヤ」と呼ばれる状況に落ち入り、不良債権や有価証券の含み損等を原因として、債務超過に陥ったことが破産原因である。

(2) 次に、生命保険会社の破産事例について、破産の形態を分類する。戦後に破産した生命保険会社は、

大和生命 (2008), 東京生命 (2001), 協栄生命 (2000), 千代田生命 (2000),
大正生命 (2000), 第百生命 (2000), 東邦生命 (1999), 日産生命 (1997)

の 8 社であるが、破産の原因はすべて「OR = 経営の失敗」である。すなわち、どの会社も、1980 年代の予定利率の引き上げや配当還元促進と、1990 年代の資産価格の下落による資産運用環境の悪化による「逆ザヤ」や、経営陣の不適切経営が原因で、債務超過に陥ったことが破産の原因である⁸⁾。

2. 資料——米国における保険会社の破産事例

米国においては、顧客の損害が回避できるなら、保険会社および再保険会社の破産を容認する姿勢⁹⁾であるため、ここ 30 年余りの間に、大企業も含めた数十の保険会社が破産している。以下は、Atlas Magazine [6, 2019] に掲載された、同時期の主要な保険会社の破産リストをもとに、破産した企業とその理由を分類した表である。

Wind-up date	Company	Class of Business	Causes
2021	Bedivere Insurance	Non-life	OR ¹⁰⁾
2019	Senior American Insurance	Long term care and home health care	?
2018	Healthcare Providers Insurance Exchange	Medical and Malpractice	?
2017	Penn Treaty Network ¹¹⁾	Life	OR ¹²⁾
2016	American Medical and Life Insurance	Health, life and accident	?
2015	Lincoln General Insurance	Non life	?
2015	CoOpportunity Health	Life and health	RC ¹³⁾
2015	SeeChange Health Insurance	Health	?

8) 生命保険の破産要因については、例えば、植村 [2007] によって、詳細に検証されている。

9) Atlas Magazine [2019] : *The word “bankruptcy” scares everywhere except in the United States where it is not perceived as a failure but rather as a hiccup. Debts are written off and a new chance is granted to the company to start anew.*

10) See documents published by Pennsylvania Insurance Department. (<https://www.insurance.pa.gov/Regulations/LiquidationRehab/Pages/Bedivere-Insurance-Company.aspx>)

11) Penn Treaty Network America Insurance Company and its subsidiaries among which American Network.

12) See Insurance department Pennsylvania press release. (https://www.insurance.pa.gov/Regulations/LiquidationRehab/Documents/American%20Network/AMERICAN_NETWORK_MARCH.1.2017.PRESS_RELEASE.pdf)

13) Des Moines Register (2015). (<https://www.desmoinesregister.com/story/news/health/2015/01/23/iowa-liquidating-coopportunity-health/22223393/>)

2013	Executive Life Insurance Company of New York	Life	OR ¹⁴⁾
2013	Lumbermens Mutual Casualty Company	Health	OR ¹⁵⁾
2013	Universal Health Care Insurance	Accident and health	?
2012	Standard Life Insurance Company of Indiana	Life	?
2011	Golden State Mutual Life Insurance Company	Life, accident and health	OR ¹⁶⁾
2010	National States Insurance Company	Accident and health	?
2010	Booker T. Washington Insurance Company	Life, accident and health	?
2006	Southern Family Insurance Company	Non life	?
2003	Legion Insurance Company	Non life and health	?
2003	Fremont Indemnity Insurance Company	Health, workman's compensation	OR ¹⁷⁾
2002	Conseco Inc.	Life	OR
2002	PHICO Insurance Company	Health, workman's compensation	?
2001	Reliance Insurance Company	Life and non life	OR ¹⁸⁾
2000	California Compensation Insurance Company	Non life	CT
1989	American Mutual Liberty Insurance Company	Non life	?
1987	Mission Insurance Company	Non life	OR ¹⁹⁾

14) See Atlas Magazine. (<https://www.atlas-mag.net/en/article/bankruptcy-of-insurance-and-reinsurance-companies-in-the-usa>)

15) See Illinois Official Report. (<https://www.illinoiscourts.gov/Resources/fb809d84-f9a4-4b7a-8fdb-1e0076e2058f/1170996.pdf>)

16) Huston W. (2021). (<https://www.baystreetcapitalholdings.com/black-owned-life-insurance-companies>)

17) See Insurance Journal (2009). (<https://www.insurancejournal.com/news/west/2009/06/15/101387.htm>)

18) See document published by Pennsylvania insurance department. (<https://www.insurance.pa.gov/Regulations/LiquidationRehab/Pages/Reliance%20Insurance%20Company.aspx>)

19) See Insurance Journal (2006). (<https://www.insurancejournal.com/news/national/2006/02/09/65216.htm>)

1986	Midland Insurance Company	Non life	OR ²⁰⁾
1985	Transit Casualty Insurance Company	Non life	OR ²¹⁾

3. コメントと先行研究

(1) 植村 [2, 2007] が指摘するように、保険会社の破産原因は、経済環境の悪化による運用資産の収益率の低下、本業以外のビジネスへの展開等の不適切経営、想定よりも保険商品が売れない等のビジネスモデルの失敗、大規模事故によって保険金の支払いが過大になることなど、多様な要因が複雑に絡まっているケースがある。よって、付録 B,2 のすべてについて、破産原因を特定することはできなかった。

(2) 上田 [1, 1991] では、米国において、1989年に破産した29社の損害保険会社について、破産原因を調査したが、巨額損失による支払不能が2社、経営者の経営失敗が6社、15社は自動車保険における引き受け上の問題としており、自動車保険会社間での競争の激化によって、保険商品の不適切な価格付けや、過度のリスクテイクが推察されている。ここでも、大規模災害による支払不能が原因の破産は、7%未満と報告している。

20) See REUTERS. (<https://jp.reuters.com/article/newyork-midland/update-1-ny-to-sell-midland-insurance-privately-a-first-idUSN0435500720090304>)

21) See, Mingo (2001). (<https://www.insurancejournal.com/magazines/mag-features/2001/03/05/22307.htm>)