JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
8 (1) Maret 2023 28-33
Tersedia secara online di https://www.journal.unipdu.ac.id/index.php/jmpm
Terakreditasi S3 – SK No. B/1796/E5.2/KI.02.00/2020

Print-ISSN : 2502-986X
Online-ISSN : 2502-9878
JMPM Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Journals of Mathematics and Mathematics Education

Graf Nilpoten dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima

(*A Note on Nilpotent Graph of Ring Integer Modulo with Order Prime Power*)

Deny Putra Malik [1], I Gede Adhitya Wisnu Wardhana [2*], Putu Kartika Dewi [3], Ratna Sari Widiastuti [4], Fariz Maulana [5], Abdul Gazir Syarifudin [6], Zata Yumni Awanis [7]

[1,2,7] Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram – Jl. Majapahit No. 62 Selaparang, Kota Mataram, Nusa Tenggara Barat, Indonesia, 83115
[3] Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha – Jl. Udayana No.11 Banjar Tegal, Kabupaten Buleleng, Bali, Indonesia, 81116
[4] Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Udayana – Jl. Raya Kampus Unud Kuta Selatan, Kabupaten Badung, Bali, Indonesia, 80361
[5,6] Prodi Matematika, FMIPA, Institut Teknologi Bandung – Jl. Ganesa No.10 Coblong, Kota Bandung, Jawa Barat, Indonesia, 40132
[*] email penulis korespondensi: adhitya.wardhana@unram.ac.id

Abstrak

Graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo merupakan salah satu representasi graf pada struktur aljabar. Penelitian ini bertujuan mencari bentuk dan sifat graf nilpoten dari gelanggang bilangan prima modulo yang kemudian digeneralisasi menjadi gelanggang bilangan bulat modulo berpangkat prima sebarang. Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur. Pada gelanggang bilangan bulat modulo, diperoleh bentuk graf nilpotennya adalah suatu graf bintang. Kemudian karakteristik dari graf nilpoten pada gelanggang bilangan bulat modulo berpangkat prima sebarang adalah memuat subgraf lengkap dan memuat sejumlah buah subgraf bintang.

Kata kunci: bilangan bulat modulo; gelanggang; graf; nilpoten.

Abstract

Nilpotent graph of ring integer modulo is one of the graph representations in algebraic structures. This study aims to find out the shape and properties of a nilpotent graph of ring prime numbers modulo which is then generalized to a ring of integers modulo with arbitrary prime power. The method used in this research is a literature study. In the ring of integer modulo, we get the shape of a nilpotent graph as a star graph. Then, the characteristic of a nilpotent graph on a ring integer modulo with arbitrary prime power is that it contains a complete subgraph and contains a number of as a star subgraph.

Keywords: *integer modulo; ring; graph; nilpotent.*

Cara mengutip dengan APA 6 style: Malik, D.P., Wardhana, I.G.A.W., Dewi, P.K., Widiastuti, R.S., Maulana, F., Syarifudin, A.G., & Awanis, Y.Z. (2023). Graf Nilpoten dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima. *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 8(1), 28-33. https://dx.doi.org/10.26594/jmpm.v8i1.2920.

PENDAHULUAN

Representasi graf pada struktur aljabar adalah topik menarik yang sedang hangat, topik ini melibatkan dua bidang matematika, yakni graf dan aljabar. Untuk struktur aljabar berupa grup, terdapat graf koprima yang diperkenalkan oleh Ma dan rekan-rekannya pada tahun 2014 (Ma dkk., 2014). Selain itu, terdapat graf non-koprima yang diperkenalkan oleh Mansoori dan rekan-rekannya pada tahun 2016 (Mansoori dkk., 2016). Terdapat juga graf irisan yang diperkenalkan oleh Akbari pada tahun 2015 (Akbari dkk., 2015). Selanjutnya, untuk struktur aljabar berupa gelanggang, terdapat graf nilpoten yang diperkenalkan oleh Nikmehr dan Khojasteh pada tahun 2013 (Nikmehr & Khojasteh, 2013).

Terkait representasi graf pada suatu grup, mencari *numerical invarian* dari graf tersebut adalah topik yang menarik, dimana terlebih dahulu diperlukan bentuk dan karakter dari graf tersebut. Setelah bentuk dan karakter graf koprima dari grup dihedral D_{2n} didapatkan, ditemukan *numerical invariant* dari graf koprima tersebut, berupa radius, diameter dan *girth* (Syarifudin dkk., 2021). Beberapa peneliti lain mencari graf koprima pada grup lain. Misalkan pada grup *generalized quaternion*, Nurhabibah dkk. (2021) menemukan bentuk dan karakter graf koprima dari grup *generalized quaternion*. Selanjutnya Nurhabibah dkk. (2023) menemukan *numerical invarian* dari graf *generalized quterrnion*. Studi tersebut dilanjutkan oleh Gayatri dkk. (2023) yang memberikan bilangan *clique* dan bilangan *chromatics* dari graf tersebut. Selain graf koprima, studi pada graf non-koprima juga banyak dilakukan, Misuki dkk. (2021) berhasil menemukan bentuk dan karakter graf non-koprima pada beberapa kasus khusus. Selanjutnya, Nurhabibah dkk. (2022) berhasil memperumum hasil temuan dari Misuki tersebut. Asmarani dkk. (2021) memberikan bentuk dan karakter dari graf pangkat untuk grup dihedral, dimana Syechah dkk. (2022) memberikannya pada grup integer modulo, dilanjutkan Nurhabibah dkk. (2021) dengan bentuk dan karakter graf irisan dari grup dihedral. Sedangkan Ramdani dkk. (2022) memberikan *numerical invarian* dari graf irisan.

Studi terkait representasi graf dari struktur aljabar ring tidak banyak dilakukan, salah satunya adalah graf nilpoten (Nikmehr & Khojasteh, 2013). Graf nilpoten dari suatu ring didefinisikan sebagai graf dengan simpul semua unsur ring dan dua simpul bertetangga apabila perkaliannya merupakan unsur nilpoten. Belum adanya studi terkait bentuk dan karakter graf nilpoten dari ring integer modulo membuat kajian ini sangat penting untuk diselesaikan.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian dasar, yaitu penelitian yang dilakukan untuk memperoleh pengetahuan baru yang belum diketahui sebelumnya. Proses penelitian dilakukan dengan studi literatur tentang gelanggang dalam struktur aljabar, elemen nilpoten dari ring, teori graf, representasi graf dari suatu ring, graf nilpoten dan hal-hal lain yang mendukung penelitian ini. Selanjutnya, penulis mencari permasalahan yang ada seputar graf nilpoten dan memberikan jawaban atas permasalahan itu.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Elemen nilpoten dari suatu gelanggang adalah unsur yang dikalikan dengan dirinya sendiri secara berulang akan menjadi unsur nol. Secara formal, unsur nilpoten didefinisikan sebagai berikut

Definisi 1 (Silverman, 2022) Untuk suatu gelanggang R, elemen $x \in R$ dikatakan unsur nilpoten apabila $x^k = 0_R$ untuk $k \in \mathbb{N}$.

Himpunan semua unsur nilpoten dari gelanggang R dinotasikan dengan $N(R)$. Mudah dilihat bahwa $N(R)$ membentuk suatu ideal dari gelanggang R. Selanjutnya unsur nilpoten ini digunakan untuk mendefinisikan graf dari suatu gelanggang.

Definisi 2 Nikmehr & Khojasteh (2013), untuk suatu gelanggang R, graf nilpoten dari R, dinotasikan dengan Γ_R adalah graf dengan himpunan simpulnya adalah R $u, v \in R$ dikatakan bertetangga apabila $uv \in N(R)$.

Untuk gelanggang $\mathbb{Z}_n$ dengan n suatu bilangan prima, didapatkan bahwa himpunan nilpotennya hanya terdiri dari unsur nol.

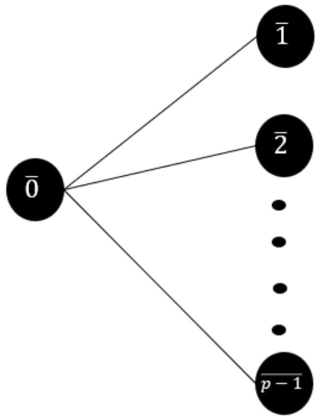
Teorema 1 Jika $\mathbb{Z}_n$ adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan n suatu bilangan prima, maka $N(R) = \{\bar{0}\}$.

Bukti: Misalkan $\bar{x} \in N(R)$, menurut definisi diperoleh $\overline{x^k} = \bar{0}$, akibatnya diperoleh $n|x^k$. Karena n bilangan prima maka $n|x$, atau dengan perkataan lain $\bar{x} = \bar{0}$. Akibatnya terbukti $N(R) = \{\bar{0}\}$. ■

Berdasarkan Teorema 1, didapatkan *conjecture* terkait bentuk dari graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo n adalah suatu graf bintang. Dan *conjecture* ini berhasil dibuktikan benar dalam Teorema 2.

Teorema 2 Jika $\mathbb{Z}_n$ adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan n suatu bilangan prima, maka $\Gamma_{\mathbb{Z}_n} = K_{1,n-1}$.

Bukti: Jelas bahwa $\bar{0}$ bertetangga dengan semua unsur lain di $\mathbb{Z}_n$. Misalkan $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah dua simpul yang bertetangga, berdasarkan definisi $\overline{xy} = \bar{0}$, akibatnya $n|xy$. Karena n bilangan prima, maka $n|x$ atau $n|y$, akibatnya $\bar{x} = \bar{0}$ atau $\bar{y} = \bar{0}$. Sehingga dapat disimpulkan $\bar{0}$ bertetangga dengan semua simpul lain, dan dua simpul yang bertetangga salah satunya adalah unsur nol. Jadi terbukti bahwa $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah graf bintang $K_{1,n-1}$. ■



Gambar 1. Graf Nilpoten dari $\mathbb{Z}_p$ pada Teorema 2

Berikutnya akan diberikan graf nilpoten dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ untuk n berupa pangkat prima dari 2 dengan terlebih dahulu menentukan himpunan nilpotennya.

Teorema 3 Jika $\mathbb{Z}_n$ adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan $n = 2^k$ dimana $k \in \mathbb{N}$, maka $N(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \dots \overline{2^n - 2}\}$.

Bukti: Misalkan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_n$ suatu unsur nilpoten, maka berdasarkan definisi $\bar{x}^m = 0$, untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$. Akibatnya $2^k|x^m$, dan berakibat $2|x^m$. Karena 2 adalah bilangan prima, maka $2|x$, sehingga x adalah kelipatan 2. Jadi terbukti $N(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \dots \overline{2^n - 2}\}$. ■

Berdasarkan Teorema 3, graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo n adalah suatu pangkat prima dari 2 memiliki karakteristik-karakteristik sebagai berikut.

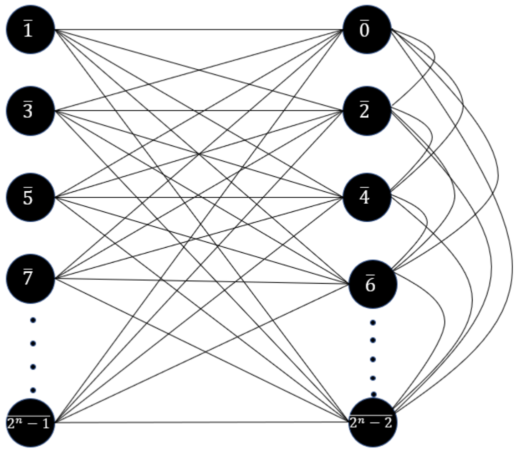
Teorema 4 Jika $\mathbb{Z}_n$ adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan $n = 2^k$ dimana $k \in \mathbb{N}$, maka $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ memuat subgraf lengkap $K_{2^{k-1}}$.

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa subgraf yang dimaksud adalah $N(\mathbb{Z}_n)$. Misalkan $\bar{x}, \bar{y} \in N(\mathbb{Z}_n)$ sebarang, karena $N(\mathbb{Z}_n)$ adalah ideal dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$, maka $\overline{xy} \in N(\mathbb{Z}_n)$. Akibatnya setiap $\bar{x}, \bar{y} \in N(\mathbb{Z}_n)$ yang berbeda adalah dua simpul yang bertetangga, sehingga $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ memuat subgraf lengkap $K_{2^{k-1}}$.■

Karakteristik lainnya dari graf nilpoten pada gelanggang bilangan bulat modulo dengan orde pangkat prima dari 2 adalah memiliki subgraf bintang kembar.

Teorema 5 Jika $\mathbb{Z}_n$ adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan $n = 2^k$ dimana $k \in \mathbb{N}$, maka $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ memuat 2^{k-1} buah subgraf bintang $K_{1,2^{k-1}}$.

Bukti: Teorema 5 menunjukkan bahwa ada 2^{k-1} unsur yang bukan merupakan unsur nilpoten. Akan ditunjukkan bahwa setiap unsur yang bukan nilpoten ini akan membentuk subgraf bintang dengan semua unsur di $N(\mathbb{Z}_n)$. Misalkan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_n - N(\mathbb{Z}_n)$ dan $\bar{y} \in N(\mathbb{Z}_n)$ sebarang, karena $N(\mathbb{Z}_n)$ adalah ideal, maka $\overline{xy} \in N(\mathbb{Z}_n)$, sehingga $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ bertetangga. Jadi $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ memuat 2^{k-1} buah subgraf bintang $K_{1,2^{k-1}}$. ■



Gambar 2. Graf Nilpoten dari $\mathbb{Z}_{2^k}$ pada Teorema 5

Berikutnya akan diberikan graf nilpoten dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ untuk n berupa pangkat prima sebarang dengan terlebih dahulu menentukan himpunan nilpotennya.

Teorema 6 Jika $\mathbb{Z}_n$ adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan $n = p^k$ dimana $k \in \mathbb{N}$, maka $N(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{0}, \bar{p}, \overline{2p}, \overline{3p}, \ldots \overline{p^k - p}\}$.

Bukti: Misalkan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_n$ suatu unsur nilpoten, maka berdasarkan definisi $\bar{x}^m = 0$, untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$. Akibatnya $p^k | x^m$, dan berakibat $p | x^m$. Karena p adalah bilangan prima, maka $p | x$, dan x adalah kelipatan p. Jadi terbukti $N(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{0}, \bar{p}, \overline{2p}, \overline{3p}, \ldots \overline{p^k - p}\}$. ■

Berdasarkan Teorema 6, graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo n adalah suatu pangkat prima sebarang memiliki karakteristik-karakteristik sebagai berikut.

Teorema 7 Jika $\mathbb{Z}_n$ adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan $n = p^k$ dimana $k \in \mathbb{N}$, maka $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ memuat subgraf lengkap $K_{p^{k-1}}$.

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa subgraf yang dimaksud adalah $N(\mathbb{Z}_n)$. Misalkan $\bar{x}, \bar{y} \in N(\mathbb{Z}_n)$ sebarang, karena $N(\mathbb{Z}_n)$ adalah ideal dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$, maka $\overline{xy} \in N(\mathbb{Z}_n)$. Akibatnya setiap $\bar{x}, \bar{y} \in N(\mathbb{Z}_n)$ yang berbeda adalah dua simpul yang bertetangga, sehingga $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ memuat subgraf lengkap $K_{p^{k-1}}$.■

Karakteristik lainnya dari graf nilpoten pada gelanggang bilangan bulat modulo dengan orde pangkat prima sebarang adalah memiliki subgraf bintang kembar.

Teorema 8 Jika $\mathbb{Z}_n$ adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan $n = p^k$ dimana $k \in \mathbb{N}$, maka $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ memuat $n - p^{k-1}$ buah subgraf bintang $K_{1,p^{k-1}}$.

Bukti: Teorema 5 menujukkan bahwa ada $n - p^{k-1}$ unsur yang bukan merupakan unsur nilpoten. Akan ditunjukkan bahwa setiap unsur yang bukan nilpoten ini akan membentuk subgraf bintang dengan semua unsur di $N(\mathbb{Z}_n)$. Misalkan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_n - N(\mathbb{Z}_n)$ dan $\bar{y} \in N(\mathbb{Z}_n)$ sebarang, karena $N(\mathbb{Z}_n)$ adalah ideal, maka $\overline{xy} \in N(\mathbb{Z}_n)$, sehingga $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ bertetangga. Jadi $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ memuat $n - p^{k-1}$ buah subgraf bintang $K_{1,p^{k-1}}$. ■

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada artikel ini ditunjukkan bahwa graf nilpoten dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ untuk n suatu bilangan prima merupakan graf bintang $K_{1,n-1}$. Graf nilpoten dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ untuk n adalah pangkat $k \in \mathbb{N}$ dari bilangan prima p memuat sebuah subgraf lengkap $K_{p^{k-1}}$. Ditunjukkan pula bahwa graf nilpoten ini memuat $n - p^{k-1}$ buah subgraf bintang $K_{1,p^{k-1}}$. Lebih lanjut, penelitian yang akan datang dapat menyelidiki graf nilpoten dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ dengan n merupakan perkalian pangkat dari dua atau lebih bilangan prima berbeda.

DAFTAR RUJUKAN

Akbari, S., Heydari, F., & Maghasedi, M. (2015). The intersection graph of a group. *Journal of Algebra and Its Applications*, *14*(5). https://doi.org/10.1142/S0219498815500656

Asmarani, E. Y., Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2021). The power graph of a dihedral group. *Eigen Mathematics Journal*, *4*(2), 80–85. https://doi.org/10.29303/emj.v4i2.117

Gayatri, M. R., Aini, Q., Awanis, Z. Y., Salwa, S., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). The clique number and the chromatics number of the coprime graph for the generalized quarternion group. *JTAM (Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika)* , *7*(2), 409–416. https://doi.org/10.31764/jtam.v7i2.13099

Ma, X., Wei, H., & Yang, L. (2014). The coprime graph of a group. *International Journal of Group Theory*, *3*(3), 13–23. https://doi.org/10.22108/ijgt.2014.4363

Mansoori, F., Erfanian, A., & Tolue, B. (2016). Non-coprime graph of a finite group. *AIP Conference Proceedings*, *1750*(June 2016). https://doi.org/10.1063/1.4954605

Misuki, W. U., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Irwansyah. (2021). Some results of non-coprime graph of the dihedral group D2n for n a prime power. *AIP Conference Proceedings*, *2329*(February). https://doi.org/10.1063/5.0042587

Nikmehr, M. J., & Khojasteh, S. (2013). On the nilpotent graph of a ring. *Turkish Journal of Mathematics*, *37*(4), 553–559. https://doi.org/10.3906/mat-1112-35

Nurhabibah, Malik, D. P., Syafitri, H., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). Some results of the non-coprime graph of a generalized quaternion group for some n. *AIP Conference Proceedings*, *2641*(December 2022), 020001. https://doi.org/10.1063/5.0114975

Nurhabibah, N., Syarifudin, A. G., & Wardhana, I. G. A. W. (2021). Some results of the coprime graph of a generalized quaternion group Q_4n. *In Prime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, *3*(1), 29–33. https://doi.org/10.15408/inprime.v3i1.19670

Nurhabibah, N., Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W., & Aini, Q. (2021). The intersection graph of a dihedral group. *Eigen Mathematics Journal*, *4*(2), 68–73. https://doi.org/10.29303/emj.v4i2.119

Nurhabibah, N., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2023). Numerical invariants of coprime graph of a generalized quaternion group. *J. Indones. Math. Soc*, *29*(01), 36–44.

Ramdani, D. S., Wardhana, I. G. A. W., & Awanis, Z. Y. (2022). The intersection graph representation of a dihedral group with prime order and its numerical invariants. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, *16*(3), 1013–1020. https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss3pp1013-1020

Silverman, J. H. (2022). *Abstract algebra: an integrated approach*.

Syarifudin, A. G., Nurhabibah, Malik, D. P., & dan Wardhana, I. G. A. W. (2021). Some characterizatsion of coprime graph of dihedral group D2n. *Journal of Physics: Conference Series*, *1722*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1722/1/012051

Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2021). The clique numbers and chromatic numbers of the coprime graph of a dihedral group. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, *1115*(1), 012083. https://doi.org/10.1088/1757-899x/1115/1/012083

Syechah, B. N., Asmarani, E. Y., Syarifudin, A. G., Anggraeni, D. P., & Wardhana, I. G. A. W. W. (2022). Representasi graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo berorde bilangan prima. *Evolusi: Journal of Mathematics and Sciences*, *6*(2), 99–104.