ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.977
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-213-223

Поступила в редакцию 10.03.2023
Received 10.03.2023

А. И. Астровский[1], В. В. Горячкин[2], М. П. Дымков[1]

[1]Белорусский государственный экономический университет, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ, НАБЛЮДАЕМОСТИ И ОПТИМИЗАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВОЛЬТЕРРА

Аннотация. Исследуются дискретные нестационарные линейные системы уравнений типа Вольтерра, существенной особенностью которых является зависимость каждого последующего состояния от всей предыстории процесса. Получено представление решений таких систем в форме Коши с учетом управляющих воздействий. Установлены необходимые и достаточные условия точечной управляемости, точечной управляемости по выходу и наблюдаемости, а также исследована линейно-квадратичная задача оптимизации рассматриваемых систем уравнений Вольтерра.

Ключевые слова: дискретные нестационарные линейные системы Вольтерра, формула Коши, точечная управляемость, точечная управляемость по выходу, наблюдаемость, линейно-квадратичная оптимизация

Для цитирования. Астровский, А. И. Об управляемости, наблюдаемости и оптимизации дискретных нестационарных линейных систем Вольтерра / А. И. Астровский, В. В. Горячкин, М. П. Дымков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 3. – С. 213–223. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-213-223

Anatoly. I. Astrovskii[1], Vladimir V. Goryachkin[2], Mikhail P. Dymkov[1]

[1]Belarusian State Economic University, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

ON THE CONTROLLABILITY, OBSERVABILITY, AND OPTIMIZATION OF DISCRETE NONSTATIONARY LINEAR VOLTERRA SYSTEMS

Abstract. In this article**,** we study discrete nonstationary linear dynamic systems of Volterra type. An essential feature of such kind of systems is that their current states depend on the previous states of this system. The formula Cauchy, which gives us the solution of linear Volterra systems with the control inputs, is obtained. The necessary and sufficient conditions of the pointwise controllability, pointwise output controllability, and observability are proven. Also the linear-quadratic optimization problem for the nonstationary Volterra control systems is studied.

Keywords: discrete nonstationary linear Volterra systems, formula Cauchy, pointwise controllability, pointwise controllability for output, observability, linear-quadratic optimization

For citation. Astrovskii A. I., Goryachkin V. V., Dymkov M. P. On the controllability, observability, and optimization of discrete nonstationary linear Volterra systems. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 213–223 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-213-223

Введение. В последние годы особый интерес привлекают дискретные системы с последействием, существенной особенностью которых является зависимость состояний системы от предыстории процесса [1, 2]. Среди таких систем особое место занимают системы уравнений Вольтерра, у которых состояние в каждый момент времени зависит от всей предыстории процесса. Для таких систем при нахождении решения в текущий момент времени необходима вся информация от начального до текущего моментов времени. В [3, 4] предложен алгебраический подход исследования структурных свойств линейных дискретных стационарных систем такого типа. При изучении устойчивости [5], управляемости, наблюдаемости [6, 7], задач линейно-квадратичной оптимизации [8, 9] удобно использовать представление (или, другими словами, дискретное преобразование) рассматриваемых функций и операторов в кольце степенных рядов. Это позволяет применять ряд алгебраических методов для исследования указанных задач. В [10, 11] изучены вопросы приводимости по Ляпунову, управляемости и наблюдаемости обыкновенных линейных дискретных систем, в том числе с неотрицательными коэффициентами и с изменяющимся во времени пространством состояний, типичным представителем которых являются системы уравнения Вольтера. В [11–18] исследовались вопросы нахождения канонических форм как дискретных, так и непрерывных линейных систем управления, что в ряде случаев позволяет значительно упростить изучение структурных свойств нестационарных объектов управления. В [19–22] рассмотрены специальные классы дискретных систем с двумерной динамикой, для которых изучены такие традиционные задачи, как управляемость, наблюдаемость, стабилизация и другие вопросы теории динамических систем управления.

В данной работе рассматриваются дискретные нестационарные линейные системы уравнений Вольтерра с управляющими воздействиями. Для таких систем управления получен аналог формулы Коши представления решений, установлены необходимые и достаточные условия точечной управляемости, точечной управляемости по выходу и наблюдаемости, доказано существование оптимального решения в задаче минимизации квадратичного функционала.

Представление решений. Рассмотрим систему дискретных нестационарных линейных уравнений Вольтерра следующего вида:

$$x(t+1)=\sum_{j=0}^{t} A_j(t)x(t-j)+B(t)u(t) \qquad (t=0,1,\ldots). \tag{1}$$

Здесь $A_j(t)$ $(j = 0, 1, \ldots, t)$ и $B(t)$ – заданные соответственно $(n \times n)$ и $(n \times m)$ вещественные матрицы, $x(t)$ – n-вектор-столбец решения, а $u(t)\in\mathbb{R}^m$ – вектор-столбец управления в момент t.

Пусть η, τ – заданные целые неотрицательные числа, причем $\tau > \eta$. Назовем промежутком во множестве неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_+$ подмножество вида $[\eta,\tau)=\{\eta,\eta+1,\ldots,\tau-1\}$. Обозначим через $x(t)=x(t,v,u)=x\big(t,v,u[0,t)\big)$ решение системы (1) при $t > 0$ с управлением $u[0,t)=\{u(0),u(1),\ldots,u(t-1)\}$ и начальным условием

$$x(0)=v\in\mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Введем по следующим рекуррентным формулам $(n \times n)$-матрицы $F_j(t)$:

$$F_j(t)=\sum_{i=0}^{t-1} A_i(t-1)F_j(t-i-1) \qquad (t=1,2,\ldots;\ j=0,1,\ldots,t-1), \tag{3}$$

$$F_j(j)=E, \quad F_j(i)=0 \text{ при } i<j \quad (i,j=0,1,\ldots,t),$$

где E – единичная $(n \times n)$-матрица.

Л е м м а 1. *Для любых* t, j $(t=1,2,\ldots;\ j=0,1,\ldots,t-1)$ имеют место равенства

$$F_j(t)=\sum_{i=0}^{t-1} A_i(t-1)F_j(t-i-1)=\sum_{i=0}^{t-j-1} F_{i+j+1}(t)A_i(i+j).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма доказывается методом математической индукции.

Л е м м а 2. *Решение* $x(t)=x(t,v,u)$ $(t=1,2,\ldots)$ *системы* (1) *с начальным условием* (2) *и управлением* $u(j)$ $(j = 0, 1, \ldots, t-1)$ *находится по формуле*

$$x(t)=F_0(t)v+\sum_{j=0}^{t-1} F_{j+1}(t)B(j)u(j). \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $u(j)=0$ $(j=0,1,\ldots,t-1)$, то n-вектор-функция $x(t)=F_0(t)v$ удовлетворяет однородной системе (1) с начальным условием (2). Действительно, полагая последовательно $t = 0, 1, \ldots$ с учетом соотношений (3), имеем

$$x(0)=F_0(0)v, \qquad x(1)=A_0(0)x(0)=F_0(1)v,$$

$$x(2)=A_0(1)x(1)+A_1(1)x(0)=\big(A_0(1)F_0(1)+A_1(1)\big)F_0(0)v=F_0(2)v.$$

Далее применяем метод математической индукции. Пусть формула $x(t) = F_0(t)v$ верна для некоторого $t > 0$. Докажем ее справедливость при $t + 1$. Из (1) в силу (3) имеем представление

$$x(t+1) = \sum_{j=0}^{t} A_j(t)x(t-j) = \sum_{j=0}^{t} A_j(t)F_0(t-j)v = F_0(t+1)v.$$

Покажем, что последовательность $\{z(0) = 0, z(1), \ldots, z(t), \ldots\}$, определенная при $t > 0$ по формуле

$$z(t) = \sum_{j=0}^{t-1} F_{j+1}(t)B(j)u(j), \tag{5}$$

является решением системы (1) при начальном условии $x(0) = 0$. Для упрощения выкладок обозначим через $g(s) = B(s)u(s),\ s \ge 0$. Подставив (5) в правую часть системы (1) и учитывая лемму 1, получим

$$\sum_{j=0}^{t} A_j(t)z(t-j) + g(t) = \sum_{j=0}^{t-1} A_j(t)z(t-j) + g(t) = \sum_{j=0}^{t-1} A_j(t) \sum_{s=0}^{t-j-1} F_{s+1}(t-j)g(s) + g(t) =$$

$$= A_0(t)\sum_{s=0}^{t-1} F_{s+1}(t)g(s) + A_1(t)\sum_{s=0}^{t-2} F_{s+1}(t-1)g(s) + \cdots + A_{t-1}(t)F_1(1)g(0) + g(t) =$$

$$= g(t) + A_0(t)F_t(t)g(t-1) + \big(A_0(t)F_{t-1}(t) + A_1(t)F_{t-1}(t-1)\big)g(t-2) +$$

$$+\big(A_0(t)F_{t-2}(t) + A_1(t)F_{t-2}(t-1) + A_2(t)F_{t-2}(t-2)\big)g(t-3) + \cdots +$$

$$+\big(A_0(t)F_1(t) + A_1(t)F_1(t-1) + A_2(t)F_1(t-2) + \cdots + A_{t-1}(t)F_1(1)\big)g(0) =$$

$$= F_{t+1}(t+1)g(t) + F_t(t+1)g(t-1) + F_{t-1}(t+1)g(t-2) + \cdots + F_1(t+1)g(0) =$$

$$= \sum_{s=0}^{t} F_{s+1}(t+1)g(s) = \sum_{s=0}^{t} F_{s+1}(t+1)B(s)u(s) = z(t+1).$$

Лемма 2 доказана.

Матрицы $F_j(t)$ $(t = 0,1,\ldots; j = 0,1,\ldots,t)$, определенные по формуле (3), назовем матрицами Коши, а представление решения системы (1) в виде (4) – формулой Коши.

Точечная управляемость. В [1–4] для дискретных стационарных систем уравнений Вольтерра даны определения различных понятий точечной управляемости и доказаны необходимые и достаточные условия точечной управляемости на заданном промежутке. Ниже, следуя [1–4], приводятся понятия точечной управляемости на заданном промежутке $[0,\tau)$, точечной управляемости и управляемости по выходу.

Определение 1. Систему (1) назовем точечно управляемой на заданном промежутке времени $[0,\tau)$, если для любых элементов v, w пространства $\mathbb{R}^n$ существует последовательность управляющих воздействий $u[0,\tau) = \{u(0), u(1), \ldots, u(\tau-1)\}$, которая в силу системы (1) с начальным условием (2) обеспечивает равенство $x\big(\tau, v, u[0,\tau)\big) = w$.

С помощью матриц $F_j(t)$, определенных по формуле (3), зададим матрицы $Y_j(t)$ следующим образом:

$$Y_j(t) = \{F_{j+1}(t)B(j),\ F_{j+2}(t)B(j+1), \ldots, F_t(t)B(t-1)\} \quad (t = 1,2,\ldots; j = 0,1,\ldots,t).$$

Справедлива

Теорема 1. *Система* (1) *точечно управляема на заданном промежутке* $[0,\tau)$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из эквивалентных условий:*

$$\operatorname{rank} Y_0(\tau) = n$$

или

$$\det\big(Y_0(\tau)Y_0'(\tau)\big) \ne 0,$$

где символ «штрих» обозначает операцию транспонирования.

Доказательство. В силу соотношения (4) свойство точечной управляемости системы (1) на заданном промежутке $[0,\tau)$ эквивалентно разрешимости системы уравнений

$$\sum_{j=0}^{\tau-1} F_{j+1}(\tau)B(j)u(j) = \xi$$

относительно управлений $u(0),\ u(1),\dots,u(\tau-1)$ при любой правой части $\xi\in\mathbb{R}^n$. Эта система уравнений в матричной записи имеет вид $Y_0(\tau)V=\xi$, где $V=\left(u'(0),u'(1),\dots,u'(\tau-1)\right)'$. Она разрешима относительно V для произвольного $\xi\in\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} Y_0(\tau)=n$. Так как $\operatorname{rank} Y_0(\tau)=\operatorname{rank}\left(Y_0(\tau)Y_0'(\tau)\right)=n$, то определитель матрицы $Y_0(\tau)Y_0'(\tau)$ отличен от нуля. Теорема 1 доказана.

Если система (1) не является точечно управляемой на промежутке $[0,\tau)$, то она не является точечно управляемой на любом его подмножестве $[0,\mu)\subset[0,\tau)$. Однако система (1), не являющаяся точечно управляемой на заданном промежутке $[0,\tau)$, может оказаться точечно управляемой на более широком множестве. В связи с этим естественно ввести следующее

Определение 2. Система (1) называется точечно управляемой, если существует промежуток $[0,\theta)$, на котором она точечно управляема.

Из теоремы 1 следует, что точечная управляемость системы (1) имеет место тогда и только тогда, когда в матрице со счетным множеством столбцов

$$\left(F_1(t)B(0),\ F_2(t)B(1),\ F_3(t)B(2),\dots\right) \quad (t=1,2,\dots)$$

имеется n линейно независимых столбцов. Следовательно, для того чтобы установить, что система (1) не является точечно управляемой, необходимо, вообще говоря, рассмотреть матрицу $\left(F_1(t)B(0),\ F_2(t)B(1),\ F_3(t)B(2),\dots\right)$ со счетным множеством столбцов. Поэтому, в общем случае, вопрос о том, что система (1) не является точечно управляемой, не может быть решен с помощью конечного числа арифметических операций. Однако в некоторых частных случаях этот вопрос решается элементарно. Это показывает следующий

Пример. Пусть $n = 2$, $m = 1$ и для $t \geq 0$ заданы следующие матрицы:

$$B(t)=\begin{pmatrix}0\\ t+1\end{pmatrix},\qquad A_j(t)=\begin{pmatrix}t^2+j & 0\\ t+j & 0\end{pmatrix}.$$

Ясно, что $A_j(t)B(t)=0$ для любых t, j $(t=0,1,\dots;\ j=0,1,\dots,t)$, и поэтому в формуле Коши коэффициенты при управляющих воздействиях равны нулю, т. е. на решения данной системы управления не оказывают влияния. Следовательно, система (1) не является точечно управляемой.

В общем случае для установления точечной управляемости системы (1) необходимо рассмотреть счетное множество столбцов матриц $F_j(t)B(j)$ $(t=0,1,\dots;\ j=0,1,\dots,t)$.

При управлении системой (1) с практической точки зрения представляют интерес ситуации, при которых вне заданного промежутка времени $[\eta,\tau)=\{\eta,\eta+1,\dots,\tau-1\}$, $0<\eta<\tau$ управляющие воздействия равны нулю, т. е. значения управлений $u(t)$ выбираются только для моментов времени $t\in[\eta,\tau)$. Класс таких управлений обозначим через $U_0[\eta,\tau)$, а промежуток $[\eta,\tau)$ назовем промежутком управляемости.

Определение 3. Систему (1) назовем точечно управляемой в классе управлений $U_0[\eta,\tau)$, если для любых элементов v, w пространства $\mathbb{R}^n$, $x(0)=v$ найдется управление $u[0,\tau)$ из множества $U_0[\eta,\tau)$, которое обеспечивает в силу системы (1) равенство $x\left(\tau,v,u[0,\tau)\right)=w$.

Для управлений $u\in U_0[\eta,\tau)$ формула (4) примет вид

$$x(t)=F_0(t)v+\sum_{j=\eta}^{t-1}F_{j+1}(t)B(j)u(j),\qquad t\geq 0.$$

Имеет место утверждение, аналогичное теореме 1.

Теорема 2. Система (1) *точечно управляема в классе управлений* $U_0[\eta,\tau)$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из эквивалентных условий:*

$$\operatorname{rank} Y_\eta(\tau) = \operatorname{rank}\left(F_{\eta+1}(\tau)B(\eta),\, F_{\eta+2}(\tau)B(\eta+1), \ldots,\, B(\tau-1)\right) = n$$

или

$$\det\left(Y_\eta(\tau)Y'_\eta(\tau)\right) \neq 0.$$

Как показывают примеры, нестационарные системы уравнений Вольтерра могут иметь несколько промежутков точечной управляемости.

Проблема полной управляемости (см. [10, с. 354–362]), связанная с попаданием решения системы (1) на заданную последовательность точек $w_k = w_k(\tau_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ (т. е. на дискретную кривую), была рассмотрена в [10] для стационарных систем Вольтерра. Для нестационарных систем подобная задача не исследовалась.

Можно предложить следующий подход к решению этой задачи. Пусть система (1) имеет $q > 1$ непересекающихся промежутков управляемости $[\eta_k, \tau_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$. Рассмотрим дискретную кривую как последовательность точек $\{w_1, w_2, ..., w_q\}$, $w_k \in \mathbb{R}^n$ $(k = 1, ..., q)$, которые заданы на правых границах промежутков точечной управляемости, т. е. $w_k = w_k(\tau_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$. Тогда для решения задачи попадания траектории системы (1) на такую дискретную кривую достаточно положить управление равным нулю вне промежутков $[\eta_k, \tau_k)$, а требуемые управляющие воздействия выбрать только в промежутках $[\eta_k, \tau_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$.

Точечная управляемость по выходу. Предположим, что может быть получена выходная последовательность $y(t)$, связанная с вектором $x(t)$ системы (1) соотношением

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (t = 0, 1, \ldots), \tag{6}$$

где $C(t)$ – заданные вещественные матрицы размера $(r \times n)$. С учетом формулы (4) имеем

$$y(t) = C(t)F_0(t)\nu + \sum_{j=0}^{t-1} C(t)F_{j+1}(t)B(j)u(j) \quad (t = 0, 1, \ldots). \tag{7}$$

Определение 4. Систему (1) назовем точечно управляемой по выходу (6) в классе управлений $U_0[\eta,\tau)$, если при любом начальном условии $x(0) = \nu \in \mathbb{R}^n$ и каждом векторе $\psi \in \mathbb{R}^r$ существует такое управление $u[\eta,\tau)$ из множества $U_0[\eta,\tau)$, что верно равенство $y(\tau) = C(\tau)x\left(\tau, \nu, u[\eta,\tau)\right) = \psi$.

Найдем условия точечной управляемости системы (1) по выходу (6) *в классе управлений* $U_0[\eta,\tau)$. Для этого введем в рассмотрение $(r \times m)$-матрицы $H_j(t) = C(t)F_{j+1}(t)B(j)$ $(t = 0, 1, \ldots; j = 0, 1, \ldots, t)$.

Следуя рассуждениям теоремы 1 с учетом формулы (7) получим, что точечная управляемость по выходу в классе управлений $U_0[\eta,\tau)$ имеет место тогда и только тогда, когда разрешима относительно неизвестных $u(\eta), u(\eta+1), \ldots, u(\tau-1)$ система уравнений

$$\sum_{j=\eta}^{\tau-1} H_j(\tau)u(j) = \xi$$

с произвольной правой частью $\xi \in \mathbb{R}^r$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Система* (1) *точечно управляема по выходу* (6) *в классе управлений* $U_0[\eta,\tau)$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из эквивалентных условий:*

$$\operatorname{rank}\left(H_\eta(\tau), H_{\eta+1}(\tau), \ldots, H_{\tau-1}(\tau)\right) = r$$

или

$$\det \sum_{j=\eta}^{\tau-1} H_j(\tau)H'_j(\tau) \neq 0.$$

Системы уравнений Вольтерра с запаздыванием в управлении. Рассмотрим системы уравнений Вольтерра, в которых управляющее воздействие учитывает эффект запаздывания, т. е. системы управления вида

$$x(t+1)=\sum_{j=0}^{t}A_j(t)x(t-j)+\sum_{j=0}^{t}B_j(t)u(t-j)\quad(t=0,1,\ldots). \tag{8}$$

Лемма 3. *Решение* $x(t)=x(t,v,u)$ *системы* (8) *с начальным условием* (2) *и управлением* $u(j)$ (j = 0, 1, ...) *задается формулой*

$$x(t)=F_0(t)v+\sum_{j=0}^{t-1}\left(\sum_{k=0}^{t-j-1}F_{k+j+1}(t)B_k(k+j)\right)u(j). \tag{9}$$

Доказательство. Функция $x(t)=F_0(t)v,$ как было показано при доказательстве леммы 2, при $u(j)=0$ $(j=0,1,...t-1)$ удовлетворяет однородной системе (8) с начальным условием (2). Далее, в силу принципа суперпозиции достаточно установить, что последовательность $z(t)$, $t > 0$, $z(0) = 0$ вида

$$z(t)=\sum_{j=0}^{t-1}\left(\sum_{k=0}^{t-j-1}F_{k+j+1}(t)B_k(k+j)\right)u(j) \tag{10}$$

удовлетворяет системе (8) для всех $t > 0$ при начальном условии $x(0) = 0$. Для этого подставим (10) в правую часть (8) и докажем, что полученное выражение равно $z(t + 1)$. С учетом $z(0) = 0$ имеем

$$\sum_{l=0}^{t-1}A_l(t)z(t-l)+\sum_{l=0}^{t}B_l(t)u(t-l)=\sum_{l=0}^{t-1}A_l(t)\left(\sum_{j=0}^{t-l-1}F_{k+j+1}(t-l)B_k(k+j)\right)u(j)+\sum_{l=0}^{t}B_l(t)u(t-l)=$$

$$=\sum_{l=0}^{t-1}\left(\sum_{j=0}^{t-l-1}\left(\sum_{k=0}^{t-l-j-1}A_l(t)F_{k+j+1}(t-l)B_k(k+j)\right)u(j)\right)+\sum_{l=0}^{t}B_l(t)u(t-l). \tag{11}$$

Запишем слагаемые в (11) для каждого индекса $l=0,1,\ldots,t.$ Имеем при

$$\begin{aligned}
&l=0: && \sum_{j=0}^{t-1}\left(\sum_{k=0}^{t-j-1}A_0(t)F_{k+j+1}(t)B_k(k+j)\right)u(j)+B_0(t)u(t),\\
&l=1: && \sum_{j=0}^{t-2}\left(\sum_{k=0}^{t-j-2}A_1(t)F_{k+j+1}(t-1)B_k(k+j)\right)u(j)+B_1(t)u(t-1),\\
&\ldots && \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&l=t-2: && \sum_{j=0}^{1}\left(\sum_{k=0}^{1-j}A_{t-2}(t)F_{k+j+1}(2)B_k(k+j)\right)u(j)+B_{t-2}(t)u(2);\\
&l=t-1: && A_{t-1}(t)F_1(1)B_0(0)u(0)+B_{t-1}(t)u(1),\\
&l=t: && B_t(t)u(0).
\end{aligned} \tag{12}$$

Далее перегруппируем слагаемые в (11), собирая с учетом (12) и (3) коэффициенты при $u(0),u(1),...,u(t)$ соответственно. Например, коэффициенты при $u(0)$ имеют следующий вид:

$$u(0):\quad \sum_{k=0}^{t-1}A_0(t)F_{k+1}(t)B_k(k)+\ldots+\sum_{k=0}^{1}A_{t-2}(t)F_{k+1}(2)B_k(k)+A_{t-1}(t)B_0(0)+B_t(t)=$$

$$=\sum_{s=0}^{t-1}A_s(t)F_1(t-s)B_0(0)+\sum_{s=0}^{t-2}A_s(t)F_2(t-s)B_1(1)+\ldots+A_0(t)F_t(t)B_{t-1}(t-1)+B_t(t)=$$

$$=F_1(t+1)B_0(0)+F_2(t+1)B_1(1)+\ldots+F_t(t+1)B_{t-1}(t-1)+B_t(t)=\sum_{k=0}^{t-1}F_{k+1}(t+1)B_k(k).$$

Аналогично можно показать, что коэффициенты при $u(j)$ $(j=1,2,\dots,t)$ имеют вид

$$\sum_{k=0}^{t-j} F_{k+j+1}(t+1)B_k(k+j) \quad (j=1,2,\dots,t). \tag{13}$$

Следовательно, соотношения (11) с учетом (13) и (3) можно представить таким образом:

$$\sum_{l=0}^{t-1}\left(\sum_{j=0}^{t-l-1}\left(\sum_{k=0}^{t-l-j-1} A_l(t)F_{k+j+1}(t-l)B_k(k+j)\right)u(j)\right)+\sum_{l=0}^{t} B_l(t)u(t-l)=$$

$$=\sum_{j=0}^{t}\left(\sum_{k=0}^{t-j} F_{k+j+1}(t+1)B_k(k+j)\right)u(j)=z(t+1),$$

что и требовалось доказать.

Обозначим

$$D_j(t)=\sum_{s=0}^{t-j-1} F_{s+j+1}(t)B_s(s+j) \quad (t=1,2,....;\ j=0,1,...,t).$$

Для системы (8) имеют место следующие утверждения.

Теорема 4. *Система* (8) *точечно управляема на промежутке* $[0,\tau)$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank}\left(D_0(\tau),D_1(\tau),\dots,D_{\tau-1}(\tau)\right)=n$.

Теорема 5. *Система* (8) *управляема по выходу* (6) *на промежутке* $[0,\tau)$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank}\left(C(0)D_0(\tau),C(1)D_1(\tau),\dots,C(\tau-1)D_{\tau-1}(\tau)\right)=r$.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательству теорем 1 и 3. Приведенные в теоремах 4, 5 условия управляемости можно также сформулировать в терминах невырожденности соответствующих матриц.

Наблюдаемость систем уравнений Вольтерра. Сформулируем задачу о возможности однозначного нахождения вектора $x(0)$ системы (1) на основании значений $y(t), t\in[\eta,\tau]$ выходной функции (6) на заданном промежутке $[\eta,\tau]$.

Рассмотрим систему уравнений (1) с выходной функцией (6) при фиксированном управлении, которое, не нарушая общности, будем считать нулевым при $t \ge 0$:

$$x(t+1)=\sum_{j=0}^{t} A_j(t)x(t-j) \quad (t=0,1,\dots). \tag{14}$$

Следуя рассуждениям, изложенным в [10], построим множество $M(\eta,\tau)$ значений выходных функций $y(t)=y(t,v)=C(t)x(t,v)$ $(t\in[\eta,\tau]=\{\eta,\eta+1,\dots,\tau\})$, когда v пробегает пространство $\mathbb{R}^n$. Здесь $x(t,v)$ – решение системы (14) с начальным условием $x(0)=v$.

Определение 5. Систему (14) назовем наблюдаемой по выходу (6) на заданном промежутке $[\eta,\tau]$, если отображение $v\to\{y(t,v)\,(t=\eta,\eta+1,\dots,\tau)\}$ есть биекция пространства $\mathbb{R}^n$ на множество $M(\eta,\tau)$.

Следовательно, в случае наблюдаемости системы (14) по выходу (6) знание выходной функции $y(t,v)$ в точках промежутка $[\eta,\tau]$ позволяет однозначно восстановить начальное состояние $x(0)=v$ и тем самым вычислить решение $x(t,v)$ в каждый момент $t\ge 0$.

Так как значения выходной функции $y(t)=y(t,v)\,(t=\eta,\eta+1,\dots,\tau)$ линейно зависят от начального состояния $x(0)=v$, то $M(\eta,\tau)$ – векторное пространство. Поэтому система (14) наблюдаема по выходу $y(t)=C(t)x(t)$ на промежутке $[\eta,\tau]$ тогда и только тогда, когда равенство $y(t,v)=0,\ t\in[\eta,\tau]$ выполняется лишь при $v=0$.

Построим матрицы

$$S(\eta,\tau)=\begin{pmatrix} C(\eta)F_0(\eta) \\ C(\eta+1)F_0(\eta+1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ C(\tau)F_0(\tau) \end{pmatrix}, \quad N(\eta,\tau)=\sum_{j=\eta}^{\tau} F_0'(j)C'(j)C(j)F_0(j).$$

Ясно, что значения последовательности $y(\eta), y(\eta+1),\dots, y(\tau)$ в силу соотношений (6), (7) удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$S(\eta,\tau)v = \left(y'(\eta), y'(\eta+1),\dots, y'(\tau)\right)'. \tag{15}$$

Система уравнений (15) однозначно разрешима относительно вектора v тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} S(\eta,\tau) = n.$ Поэтому справедлива

Теорема 6. *Система* (14) *наблюдаема по выходу* (6) *на заданном промежутке* $[\eta,\tau]$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из эквивалентных требований:* $\operatorname{rank} S(\eta,\tau) = n$ *или* $\det N(\eta,\tau) \neq 0.$

Оптимизация квадратичного функционала. Рассмотрим задачу минимизации на решениях системы (1) функционала следующего вида:

$$J(u) = \sum_{t\in\mathbb{Z}_+} [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)] \to \min_u, \tag{16}$$

где $Q(t),\ t\in\mathbb{Z}_+$ – заданные неотрицательно определенные вещественные ($n \times n$)-матрицы; $R(t)$, $t\in\mathbb{Z}_+$ – положительно определенные вещественные ($n \times m$)-матрицы.

Функцию $u(t), t\in\mathbb{Z}_+$ будем называть допустимым управлением, если $u = \left(u(0), u(1), \dots\right) \in$ $\in l_2(\mathbb{R}^m),$ где $l_2(\mathbb{R}^m)$ – пространство суммируемых с квадратом последовательностей из $\mathbb{R}^m$.

Решением системы уравнений (1) при заданном допустимом управлении $u(t), t\in\mathbb{Z}_+$ и начальном условии $x(0) = v\in\mathbb{R}^n$ назовем любую функцию $x(t), t\in\mathbb{Z}_+,$ которая удовлетворяет условию $\left(x(0), x(1), \dots\right)\in l_2(\mathbb{R}^m)$ и системе уравнений (1) при всех $t\in\mathbb{Z}_+$.

В силу леммы 2 решение системы уравнений (1) записывается по формуле (4). Так как в (16) присутствуют суммы бесконечного числа слагаемых, то необходимы определенные условия на параметры системы (1), обеспечивающие суммируемость рассматриваемых рядов. В связи с этим будем предполагать, что выполняется условие $\sum_{t\in\mathbb{Z}_+} \sum_{j=0}^{t} \| A_j(t) \| < 1,$ а ряды, составленные из матричных норм $\| Q(t) \|, \| R(t) \|$ абсолютно сходятся. Здесь $\| . \|$ обозначает норму матрицы, согласованную с нормой векторов. Можно показать [4], что при сделанных предположениях всякое решение системы (1) при заданном допустимом управлении $u\in l_2(\mathbb{R}^m)$ принадлежит пространству $l_2(\mathbb{R}^m),$ а функционал (16) будет ограниченным на этих решениях.

Для исследования задач оптимизации в линейных дискретных системах управления, определенных на целочисленной решетке $\mathbb{Z}_+,$ оказалось удобным [4] их операторное представление в соответствующих гильбертовых пространствах последовательностей, суммируемых с квадратом. Этот прием будем использовать и для решения задачи (1), (16). Имеет место следующая

Теорема 7. *Пусть выполнено условие* $\sum_{t\in\mathbb{Z}_+} \sum_{j=0}^{t} \| A_j(t) \| < 1.$ *Тогда задача минимизации* (1), (16) *имеет единственное оптимальное решение.*

Доказательство. Определим оператор $L: l_2(\mathbb{R}^m) \to l_2^0(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$(Lu)(t) = \sum_{j=0}^{t-1} F_{j+1}(t)B(j)u(j), \quad (Lu)(0) = 0, \quad t = 0,1,\dots,$$

где $l_2^0(\mathbb{R}^n)$ обозначает подпространство из $l_2(\mathbb{R}^n),$ элементы которого имеют нулевую первую координату. Тогда решение (4) можно представить в операторной форме в пространстве $l_2(\mathbb{R}^n)$ в виде

$$x = Lu + \omega,\ \omega = \left(F_0(0)v,\ F_0(1)v,\dots\right) \in l_2(\mathbb{R}^n). \tag{17}$$

С учетом (17) функционал (16) можно переписать в операторном виде

$$J(u) = \left((\mathcal{R} + L^*\Gamma L)u, u\right) + 2(L^*\Gamma\omega, u) + (\omega,\omega), \tag{18}$$

где (u, z) – скалярное произведение элементов из пространства $l_2(\mathbb{R}^n)$, $L^*: l_2^0(\mathbb{R}^m) \to l_2(\mathbb{R}^n)$ обозначает оператор, сопряженный к оператору L, а операторы $\Gamma: l_2(\mathbb{R}^n) \to l_2(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{R}: l_2(\mathbb{R}^m) \to l_2(\mathbb{R}^m)$ определяются следующим образом:

$$(\Gamma x)(t) = Q(t)x(t), \quad (\mathcal{R}u)(t) = R(t)u(t), \quad t \in \mathbb{Z}_+.$$

Отметим, что оператор Γ является неотрицательно определенным, а $\mathcal{R}$ – положительно определенный оператор. В таком случае полубилинейная эрмитова форма $K(u,z) = \left((\mathcal{R} + L^*\Gamma L)u, z\right)$ является коэрцитивной на $l_2(\mathbb{R}^n)$ (см., напр., [23]), и поэтому функционал (16) достигает минимума в единственной точке.

Из (18) следует, что для любого допустимого управления $u \in l_2(\mathbb{R}^m)$ выполняется следующее неравенство:

$$J(u) - J(u^0) = \left((\mathcal{R} + L^*\Gamma L)(u - u^0), (u - u^0)\right) \geq 0, \tag{19}$$

где $u^0 = -(\mathcal{R} + L^*\Gamma L)^{-1} L^*\omega$. Отметим, что обратный оператор $(\mathcal{R} + L^*\Gamma L)^{-1}$ существует, так как $(\mathcal{R} + L^*\Gamma L)$ является положительно определенным оператором. Тогда из (19) следует, что функционал (16) достигает своего минимума при $u^0 = -(\mathcal{R} + L^*\Gamma L)^{-1} L^*\omega$. Теорема доказана.

Заключение. Системы линейных дискретных нестационарных уравнений Вольтерра оказались весьма полезными математическими моделями при изучении задач цифровой обработки изображений и их визуализации, при исследовании химических технологий, электрических цепей, нейронных сетей, процессов проката металлов и нарезания пластов при добыче каменного угля и др. В настоящей работе получено представление решений систем уравнений Вольтерра в форме Коши, которое было использовано для изучения таких структурных свойств, как управляемость, наблюдаемость и др. Установлены необходимые и достаточные условия управляемости и наблюдаемости нестационарных линейных дискретных систем уравнений Вольтерра. Для задач оптимизации квадратичных функционалов, заданных на решениях линейных дискретных систем управлений Вольтерра и определенных на целочисленной решетке $\mathbb{Z}_+$, оказалось удобным их операторное представление в гильбертовых пространствах последовательностей. Такой подход позволил получить решение квадратичных задач оптимизации в явном виде как для стационарных, так и нестационарных линейных дискретных уравнений Вольтерра.

Список использованных источников

1. Гайшун, И. В. Управляемость систем, описываемых линейными дискретными уравнениями Вольтерра / И. В. Гайшун, М. П. Дымков // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 7. – С. 88–100.

2. Kolmanovskii, V. B. Asymptotic properties of the solutions for some discrete Volterra equations / V. B. Kolmanovskii, E. Castellanos-Velasco // Dynamic Syst. Appl. – 2005. – Vol. 14 (2). – P. 197–224.

3. Гайшун, И. В. Многопараметрические системы управления / И. В. Гайшун. – Минск: Наука и техника, 1996. – 199 с.

4. Дымков, М. П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления / М. П. Дымков. – Минск: БГЭУ, 2005. – 363 с.

5. Exponential stability of repetitive discrete linear processes / M. Dymkov [et al.] // Int. J. Control. – 2002. – Vol. 75, № 12. – P. 861–869. https://doi.org/10.1080/00207170210131997

6. Z-transform and Volterra operator based approach to controllability and observability of discrete linear repetitive processes / M. Dymkov [et al.] // Multidimensional Syst. Signal Process. – 2003. – Vol. 14, № 4. – P. 365–395.

7. Control Theory for a Class of 2D Continuous-Discrete Linear Systems / M. Dymkov [et al.] // Int. J. Control. – 2004. – Vol. 77, № 9. – P. 847–860. https://doi.org/10.1080/00207170410001726796

8. Optimal Control of Non-Stationary Differential Repetitive Processes / M. Dymkov [et al.] // Int. J. Integral Equat. Operator Theory. – 2008. – Vol. 60, № 2. – P. 201–216. https://doi.org/10.1007/s00020-008-1554-0

9. Дымков, М. П. Линейно-квадратичные задачи оптимизации композитных дискретных 2-D систем управления / М. П. Дымков, И. В. Гайшун // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 2. – С. 71–83.

10. Гайшун, И. В. Системы с дискретным временем / И. В. Гайшун. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2001. – 400 с.

11. Астровский, А. И. Наблюдаемость линейных нестационарных систем / А. И. Астровский. – Минск: МИУ, 2007. – 220 с.

12. Астровский, А. И. О взаимосвязи основных понятий наблюдаемости для линейных дискретных детерминированных систем в банаховых пространствах / А. И. Астровский // Докл. Акад. наук Беларуси. – 1993. – Т. 37, № 6. – С. 11–14.

13. Астровский, А. И. Равномерно точечная наблюдаемость линейных нестационарных систем // А. И. Астровский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 1999. – Т. 43, № 3. – С. 9–12.

14. Астровский, А. И. Связь между каноническими формами линейных дифференциальных систем наблюдения и каноническими формами их дискретных аппроксимаций / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 7. – С. 954–962.

15. Астровский, А. И. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений / А. И. Астровский, И. В. Гайшун. – Минск: Беларус. навука, 2013. – 213 с.

16. Астровский, А. И. Равномерная и равномерно точечная наблюдаемость линейных нестационарных систем / А. И. Астровский // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка. Выліч. тэхніка і кіраванне. – 2016. – Т. 6, № 2. – С. 47–56.

17. Астровский, А. И. Дифференциальные уравнения в кольце с частными производными: свойства, условия наблюдаемости / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 6. – С. 821–826. https://doi.org/10.1134/S0374064118060109

18. Астровский, А. И. Формы Шварца для линейных дискретных систем наблюдения / А. И. Астровский // Тр. Ин-та математики. – 2016. – Т. 24, № 1. – С. 3–8.

19. Крахотко, В. В. Об управляемости дискретных линейных уравнений Вольтерра / В. В. Крахотко, В. В. Горячкин, В. В. Игнатенко // Информационные технологии: материалы 86-й науч.-техн. конф. профессор.-преподавател. состава, науч. сотрудников и аспирантов, Минск, 31 янв. – 12 февр. 2022 г. – Минск, 2022. – С. 246–248.

20. Гайшун, И. В. Условия разрешимости и управляемость линейных двухпараметрических дискретных систем / И. В. Гайшун, В. В. Горячкин // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 2047–2051.

21. Гайшун, И. В. К вопросу об управляемости и наблюдаемости двухпараметрических дискретных систем / И. В. Гайшун, В. В. Горячкин // Вес. Акад. навук БССР. Сер. физ.-мат. навук. – 1989. – № 4. – С. 3–8.

22. Пакшин, П. В. Линейно-квадратичная параметризация стабилизирующих управлений в дискретных системах с двумерной динамикой / П. В. Пакшин, К. Галковский, Э. Роджерс // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 11. – С. 157–173.

23. Лионс, Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж. Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 144 с.

References

1. Gaishun I. V., Dymkov M. P. Controllability of systems described by linear discrete Volterra equations. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2000, no. 7, pp. 88–100 (in Russian).

2. Kolmanovskii V. B., Castellanos-Velasco E. Asymptotic properties of the solutions for some discrete Volterra equations. *Dynamic Systems and Applications*, 2005, vol. 14 (2), pp. 197–224.

3. Gaishun I. V. *Multiparametric Control Systems*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1996. 199 p. (in Russian).

4. Dymkov M. P. *Extreme Problems in Multiparametric Control Systems*. Minsk: BSEU, 2005. 363 p. (in Russian).

5. Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D. H. Exponential stability of repetitive discrete linear processes. *International Journal of Control*, 2002, vol. 75, no. 12, pp. 861–869. https://doi.org/10.1080/00207170210131997

6. Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D. H. Z-transform and Volterra operator based approach to controllability and observability of discrete linear repetitive processes. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2003, vol. 14, no. 4, pp. 365–395.

7. Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D. H. Control Theory for a Class of 2D Continuous-Discrete Linear Systems. *International Journal of Control*, 2004. vol. 77, no. 9, pp. 847–860. https://doi.org/10.1080/00207170410001726796

8. Dymkov S., Dymkov M., Rogers E., Galkowski K. Optimal Control of Non-Stationary Differential Repetitive Processes. International *Journal of Integral Equations and Operator Theory*, 2008, vol. 60, no. 2, pp. 201–216. https://doi.org/10.1007/s00020-008-1554-0

9. Dymkov M. P., Gaishun I. V. Linear-quadratic optimization problems of composite discrete 2-D control systems. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2002, no. 2, pp. 71–83 (in Russian).

10. Gaishun I. V. *Systems with Discrete Time*. Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001. 400 p. (in Russian).

11. Astrovskii A. I. *Observability of Linear Nonstationary Systems*. Minsk, MIU, 2007. 220 p. (in Russian).

12. Astrovskii A. I. On the relationship of the basic concepts of observability for linear discrete deterministic systems in Banach spaces. *Doklady Akademii nauk Belarusi = Doklady of the Academy of Sciences of Belarus*, 1993, vol. 37, no. 6, pp. 11–14 (in Russian).

13. Astrovskii A. I. Uniformly point observability of linear nonstationary systems. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 1999, vol. 43, no. 3, pp. 9–12 (in Russian).

14. Astrovskii A. I., Gaishun I. V. Relationship between Canonical Forms of Linear Differential Observation Systems and Canonical Forms of Their Discrete Approximations. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 963–971. https://doi.org/10.1134/s0012266111070056

15. Astrovskii A. I., Gaishun I. V. *Linear Systems with Quasi-Differentiable Coefficients: Controllability and Observability of Movements*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2013. 213 p. (in Russian).

16. Astrovskii A. I. Uniform and uniformly point observability of linear nonstationary systems. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaunaga universiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naya tekhnika i kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control*, 2016, vol. 6, no. 2, pp. 47–56 (in Russian).

17. Astrovskii A. I., Gaishun I. V. Differential Equations in a Partial Differential Rings: Basic Properties and Observability Conditions. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 1–6. https://doi.org/ 10.1134/S0012266118060101

18. Astrovskii A. I. Schwartz forms for linear discrete observation systems. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2016, vol. 24, no. 1, pp. 3–8 (in Russian).

19. Krahotko V. V., Goryachkin V. V., Ignatenko V. V. On the controllability of discrete linear Volterra equations. *Informatsionnye tekhnologii: materialy 86-i nauchno-tekhnicheskoi konferentsii professorsko-prepodavatel'skogo sostava, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Minsk, 31 yanvarya – 12 fevralya 2022 g.* [Information Technologies: Materials of the 86th Scientific and Technical Conference of the Teaching Staff, Researchers and Postgraduates, Minsk, January 31 – February 12, 2022]. Minsk, 2022, pp. 246–248 (in Russian).

20. Gaishun I. V., Goryachkin V. V. Solvability conditions and controllability of linear two-parameter discrete systems. *Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 12, pp. 2047–2051 (in Russian).

21. Gaishun I. V., Goryachkin V. V. On the question of controllability and observability of two-parameter discrete systems. *Vestsi Akademii navuk BSSR. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics series*, 1989, no. 4, pp. 3–8 (in Russian).

22. Pakshin P. V., Galkovsky K., Rogers E. Linear-quadratic parametrization of stabilizing controls in discrete-time 2D systems. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 11, pp. 2364–2378. https://doi.org/10.1134/s0005117911110117

23. Lyons J. L. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1971. 396 p.

Информация об авторах

Астровский Анатолий Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики, Белорусский государственный экономический университет (Партизанский пр., 26, 220070, Минск, Республика Беларусь). E-mail: aastrov53@gmail.com

Горячкин Владимир Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры технологий программирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: gorvv@bsu.by

Дымков Михаил Пахомович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики, Белорусский государственный экономический университет (Партизанский пр., 26, 220070, Минск, Республика Беларусь). E-mail: dymkov_m@bseu.by

Information about the authors

Anatoly I. Astrovskii – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State Economic University (26, Partizansky Ave., 220070, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: aastrov53@gmail.com

Vladimir V. Goryachkin – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Programming Technologies, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gorvv@bsu.by

Mikhail P. Dymkov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State Economic University (26, Partizansky Ave., 220070, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: dymkov_m@bseu.by