

三つ輪の作図から始める図形の指導

Teaching Method of Compass Construction, Starting from Drawing Three Venn Circles

柿原 聖治

Kakihara Seiji

愛知東邦大学教育学部

要 旨

三つ輪を描かせ、それをひな型として、直線や円を追加させたりすることで目的の図形に近づけていく方法を使った。作図の原理は同じでも、対称図形になっているので、見通しが立てやすく、目的の図形に到達しやすくなった。パズルのように、見つけ出したり作り出したりする楽しさを味わえる学習過程にした。

1. はじめに

本研究の目的は、小・中学校の算数・数学において図形の指導ができる学生を育てることである。

小学校学習指導要領では、作図をする理由について「定規、コンパスなどを用いて、…略…、模様をかくなどの具体的な活動を通して、図形のもつ美しさに関心をもたせる」¹⁾とある。中学校学習指導要領解説では、作図の教え方について「作図の方法を一方向的に与えるのではなく、図形の対称性や図形を決定する要素に着目して作図の方法を見だし」²⁾とある。このことを指導するには、指導者自身が図形のもつ美しさに触れ、様々な作図方法を考える面白さを知っておくことが不可欠である。しかし、学生の実態としては、教科書通りの模範的な作図をしなければならないと思っており、手順に従うことを面倒に感じている者が多い。

そこで、パズルのように目的のものを見つけ出したり、手を加えて新しいものを作り出したりする楽しさを味わうことのできる学習過程を考えた。三つ輪をまず作図させてから、図形の中から目的の図形を見出させたり、直線や円を追加させたりすることで、目的の図形を作図させることにした。

三つ輪そのものを作図したりする研究はあるが、それをベースに種々の図形を自由に作図させて活動させる研究はなく、本研究の新規なところである。

本研究は主に教職課程の大学生を対象にして実践した。大学生くらいになるとどうしても固定観念にとらわれ、小学校レベルの視点や発想がしづらくなってしまふ。小学校レベルの解法も考えることは、多様な視点で物事を考える訓練にもなると考え、教職課程以外の学生も受講する本学の講義「数理の世界」で実践した。

2. 三つ輪

三つ輪とは、図1のように、半径の等しい3つの円がそれぞれの円の中心を通っているものである。コンパスによる作図は小学校3年からあり、三つ輪はその教科書に載っている。「光の三原色」の図でもおなじみの図である。ボロミアン環の類である。

ちなみに、図1の中央には丸味を帯びた三角形ができる。これはルーローの三角形で、定幅曲線の一つである³⁾。

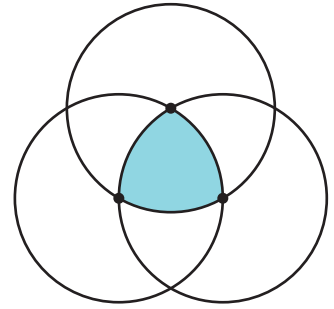


図1 三つ輪とルーローの三角形

3. 正三角形

正三角形の作図は小学校3年にある。「半径が等しい長さの2つの円を使って、円の中心を通る三角形をかきました。」⁴⁾として、図2のように、二つの輪(円)だけでできる正三角形を示している。

ちなみに、この交わった二つの輪はヴェシカ・パイシス (Vesica Piscis: 魚の浮き袋) として知られる。外見的にはベン図の類である。

三つ輪を使う利点は、正三角形が様々な作図できることである(図3)。大きな正三角形も作図できる。

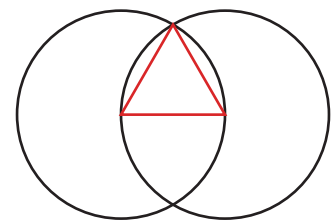


図2 2つの輪の中の正三角形

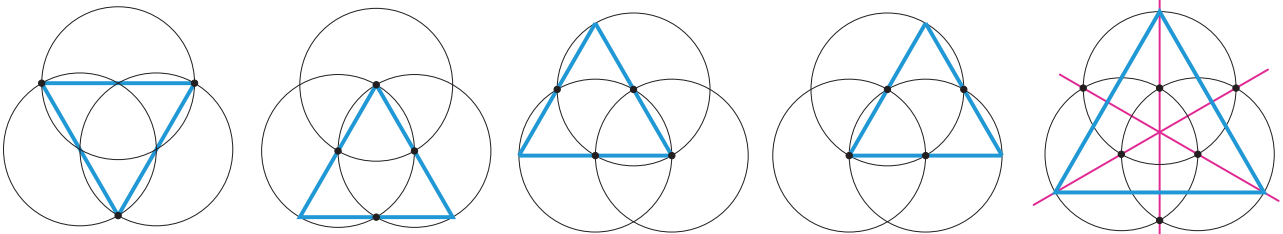


図3 正三角形の作図法(1)

小学校3年の教科書に図4が載っていて、「もようの中から、大きい三角形を1つ、小さい三角形を4つつけましょう。また、それらが正三角形になるわけをかきましょう。」⁵⁾という問題がある。図4では直線が引いてあるので、大学生には簡単すぎ、考える余地が少ない。そこで、筆者はどこに直線を引けばよいかを学生に考えさせた。交点を通る直線をいろいろ延長すれば、多くの正三角形が見つかり、もっと大きな正三角形も描けることを見出させた(図5)。

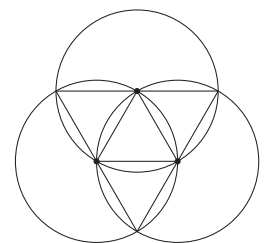


図4 教科書の問題

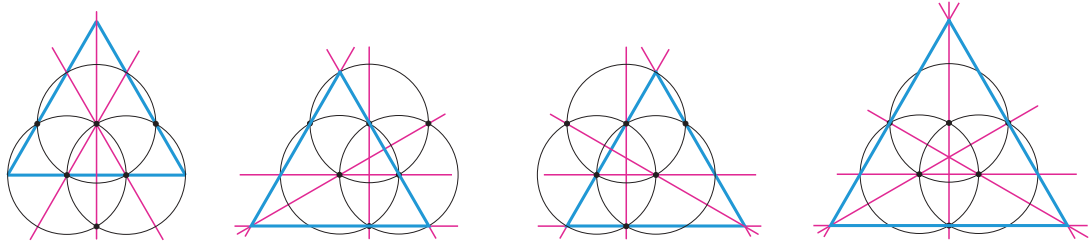


図5 正三角形の作図法(2)

4. 二等辺三角形

頂角 30° の二等辺三角形の面積を求める問題(図6左)は頻出で、筆者はこの問題を講義「数理の世界」の1回目に扱う。

高校数学の公式 $S = 1/2 bc \sin A$ を使えば即座に 64cm^2 と分かる。しかし、この問題はこの公式を知らなくても簡単な問題設定なので、小・中・高校レベルでそれぞれ異なった解法を見出せる問題である。時間をかけて取り組ませている。

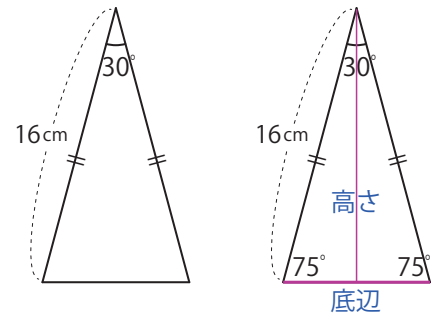


図6 二等辺三角形の面積を求める問題

4.1 高校レベルの解法

高校レベルの知識を用いると、図6右の底辺から考える方法でも解ける。 75° の直角三角形を描く(図7)。二重根号を外して斜辺の長さを求め、 $\sin 75^\circ$ と $\cos 75^\circ$ を出す。あるいは、 75° は $45^\circ + 30^\circ$ なので、加法定理を使って $\sin 75^\circ$ と $\cos 75^\circ$ を出す。その後も面倒な計算にはなるが、何とか正解にたどり着く。

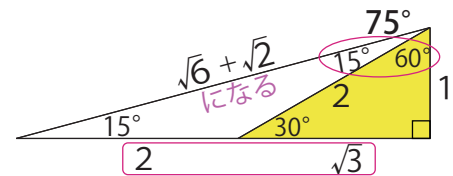


図7 75° の直角三角形の辺の比

大半の学生が、図6右の底辺と高さから面積を求めようとして行き詰まる。そこで、三角関数を用いれば、行き詰まることはないことを示した。この解法は推奨しないが、これも1つの解法であることを教えた。

4.2 中学校レベルの解法

中学校レベルの知識では、図6のように起立した三角形で底辺・高さを考えると、解法は見つからない。底辺を変える必要がある。図形の回転はコンピュータでは瞬時にできるが、試験中にはできない。頭の中で回転させ、イメージさせればよいが、学生には実感が湧かない。そこで、問題用紙を回転させて考えさせている(図8)。

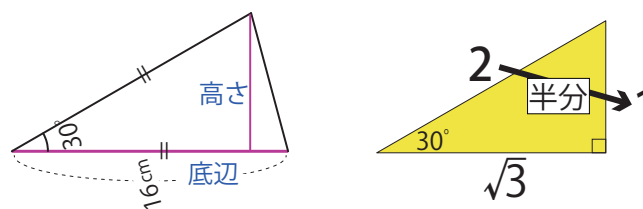


図8 二等辺三角形を倒して底辺を変える

一般に、解法が見つからない場合は、視点を変えて考えられるように、問題用紙を回転させるようにいつも指導し

ている。何もしないよりも解決の糸口を見つけられることが多い。

4.3 小学校レベルの解法

学生は中学校レベルの知識で解きがちである。しかし、小学校教員を目指す学生は解ければよいというわけではなく、小学校レベルでの解法を学ぶ必要がある。一般の学生にとっては、素朴な考えでも解けることが分かり、頭の訓練になる。

図8の方法を一度理解させても、3か月ほど後に再度出題すると、正解者が少し増えるだけで、大半が解けない。この

状況が毎年続いていた。そこで、図9のように、角の二等分線を引いて 30° を作る方法で、二等辺三角形を作図させることにした。作図することから、面積を求めるヒントにしたいと考えた。

この問題は青森県の教員採用試験（小学校、2016年度）でも出題されている。問題文は、「この二等辺三角形の面積を求める問題を、小学校5学年の発展的に考える問題として提示した。この面積の求め方を小学校5学年までの学習内容で説明できるよう図と式を書き、二等辺三角形ABCの面積を求めなさい。」である。

この場合は、相似比 $1 : 2 : \sqrt{3}$ を直接には使えない。面積の数値を出すだけでなく、説明用の図と解法を答える問題である。

二等辺三角形を作図させると、数人の学生が自発的に正三角形を描き加えていた（図10）。二等辺三角形が傾いているので、正三角形を加えやすくなっている。正三角形の辺の midpoint より、二等辺三角形の高さが判明する。以前は、三つ輪を使わず二等辺三角形に正三角形を描き加えていたが、三つ輪を使うと、学生が自発的に正三角形を描き加え、解法を見つけていた。

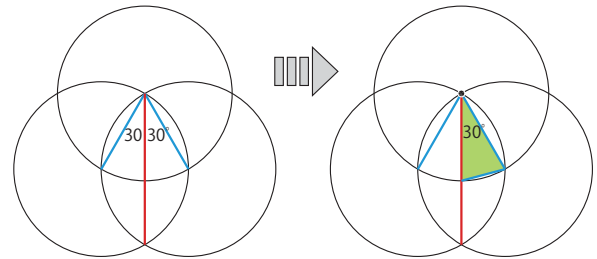


図9 二等辺三角形の作図法

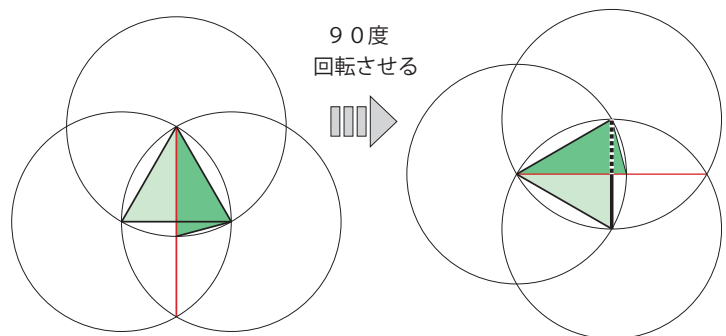


図10 正三角形を追加する

5. 正六角形

正多角形は小学校5年の学習内容で、特に正六角形の作図法が教科書に載っている。図11左⁶⁾のように、必要な弧を描く方法を採用しているが、弧ではなく円を描くと、図11中央になる。三つ輪に4つの円を追加したものと同じことができる。一回り大きい正六角形もできる（図11右）。

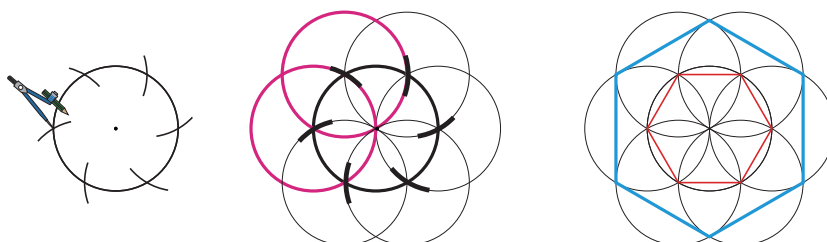


図11 正六角形の作図法（1）

円の半径を r とすると、外側の正六角形の1辺はいくらになるかを考えさせた。図12左より $\sqrt{3}r$ であることが分かる。同様に、図3と図5の正三角形の1辺の長さをそれぞれ考えさせた。容易に $2r$ 、 $3r$ 、 $4r$ と分かるが、図3右の正三角形だけはすぐには分からない。図12右のように分解して $(\sqrt{3} + 1)r$ と算出する必要がある。

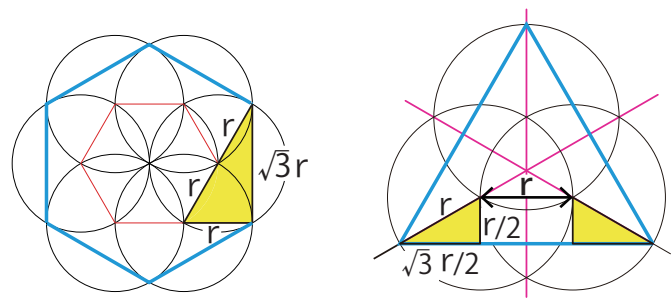


図12 正六角形、正三角形の一辺の長さ

三つ輪だけでも正六角形ができる。どこに直線を引けばよいかを学生に考えさせ、図13のように見つけさせた。

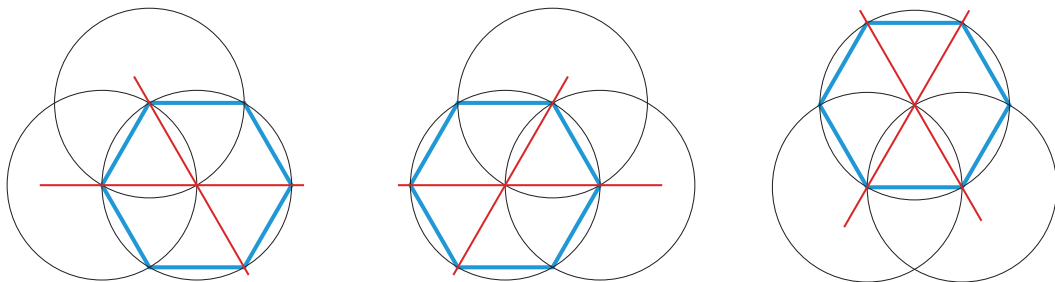


図13 正六角形の作図法(2)

ちなみに、正五角形も三つ輪からスタートして作図できる⁷⁾。ただし、コンパスの幅を2度変える必要がある。

6. 正方形

コンパスの幅を1回でも変えると、正方形は容易に作図できる。しかし、コンパスの幅を変えない方が、簡単で正確に描ける。ここでもコンパスの幅を変えないで作図する。これは「錆びついたコンパス (rusty compass)」と言われる。

方法1：正方形の2本の対角線は直交する性質を使う。どこに直線を引けばよいかを学生に考えさせ、正方形を見出させた(図14)。

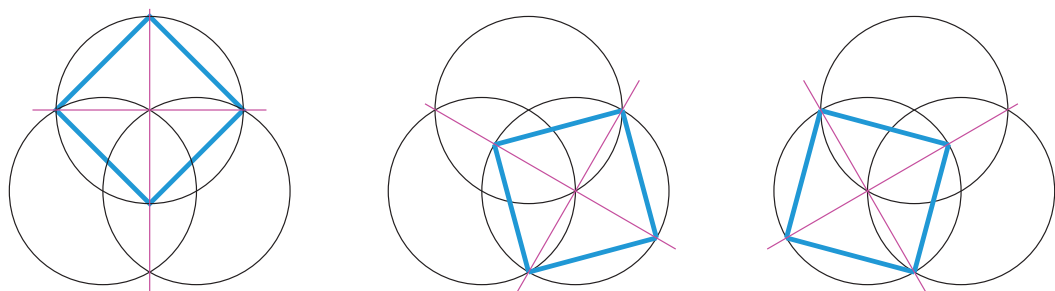


図14 正方形の作図法(1)

方法2：円を1つ追加しても正方形ができる(図15)。その正方形は方法1と同じ大きさで、半径が r の場合、正方形の一辺は $\sqrt{2}r$ となる。しかも、どれも傾いた正方形になる。

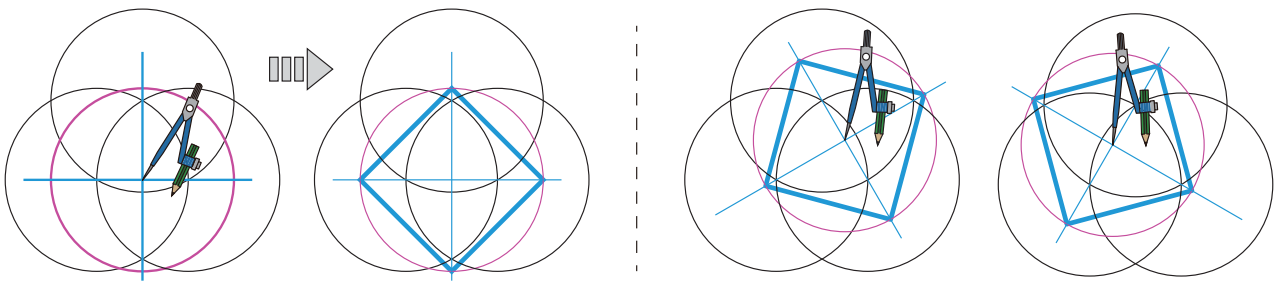


図15 正方形の作図法（2）

方法3：直角を探し、辺が等しくなるように弧を2つ追加する。円の半径と正方形の一辺が等しくなる。

三つ輪から始めると、見通しが立てやすい。三つ輪を使わないと、これより複雑に見える。

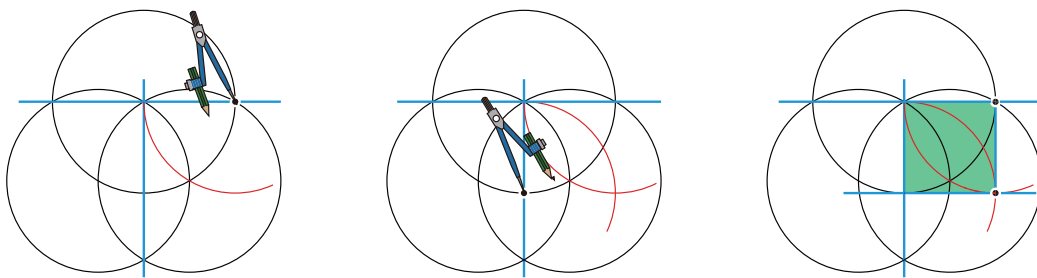


図16 正方形の作図法（3）

7. 垂線、平行線

垂線や平行線の作図も、コンパスの幅を変えると容易にできる。しかし、コンパスの幅を変えない場合、工夫を要する。これも三つ輪を描いてから考えることができる。

直線 ℓ 上の点 P を通る垂線を引く場合、点 P にコンパスの針を置き、三つ輪を描いてから、弧を追加すれば垂線が引ける（図17）。

直線 ℓ 上にない点 P を通り、 ℓ に垂直な直線を引く場合も、同様にすればよいが、変形した三つ輪になる（図18左）。さらに点 P を通り、 ℓ に平行な直線を引く場合は、弧を1つ又は2つ追加すれば引ける（図18右3つ）。

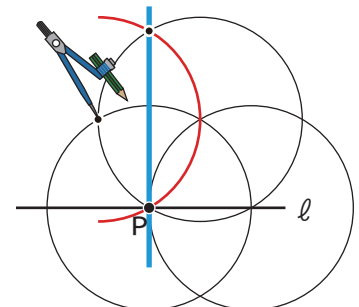


図17 垂線の引き方

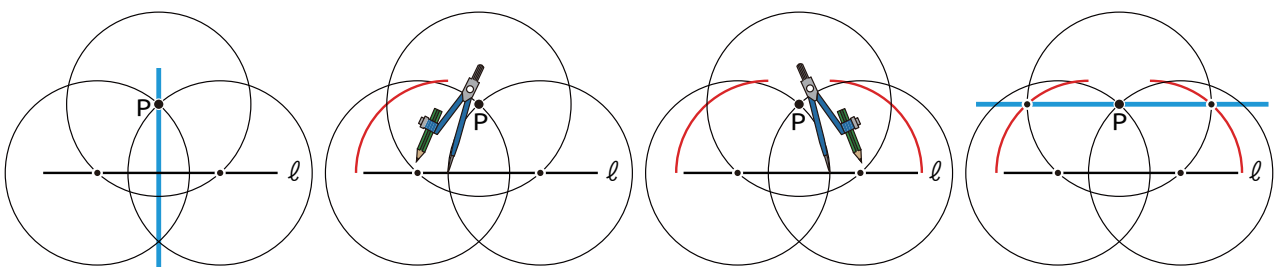


図18 垂線、平行線の引き方

8. おわりに

三つ輪を描かせ、それをひな型として目的の図形に近づけていく方法を使った。弧を描けば三つ輪まで描く必要はないが、三つ輪をひな型として使うと、作図の原理は同じでも、対称図形になっているので、見通しが立てやすく、目的の図形に到達しやすくなった。

作図の問題ではなくても、問題文にある図形を作図させてから考えさせると、学生自らが解決の糸口を見出し、正解に到達する者がいて、三つ輪による作図は有効であることが分かった。

本論は将来の指導者を育てることを目的としたが、このような指導法は、中学校学習指導要領解説にある「平面図形の対称性に着目することで見通しをもって作図し、作図方法を具体的な場面で活用する」²⁾の趣旨とも一致するものである。今回の方法は、三つ輪による作図を用いた小・中学生向けの指導方法の開発に生かすこともできると考える。

【引用文献】

- 1) 文部科学省、『小学校学習指導要領（平成29年告示）』、東洋館出版社、p.75、2018.
- 2) 文部科学省、『中学校学習指導要領解説 数学編 平成29年告示』、日本文教出版大阪、p.75、2018.
- 3) 清水静海ほか、『わくわく 算数4上』、啓林館、p.98、2022.
- 4) 清水静海ほか、『わくわく 算数3下』、啓林館、p.62、2022.
- 5) 清水静海ほか、『わくわく 算数3下』、啓林館、p.112、2022.
- 6) 清水静海ほか、『わくわく 算数5』、啓林館、p.193、2022.

【参考文献】

- 7) 柿原聖治、「黄金比と正多角形の作図法」、『東邦学誌』、第50巻 第2号、p.47、2021.