



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

INVESTIGACIÓN DOCUMENTAL SOBRE

EL DÉCIMO PROBLEMA DE HILBERT

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTOR: JAZMIN NOELIA JIMENEZ ORTIZ
DIRECTOR: Dr. LEONIDAS ANTONIO CERDA ROMERO, PhD.

Riobamba – Ecuador

2023

©2023, Jazmin Noelia Jimenez Ortiz

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, JAZMIN NOELIA JIMENEZ ORTIZ, declaro que el presente trabajo de titulación es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autora asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este trabajo de titulación; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 28 de Abril de 2023

Jazmin Noelia Jimenez Ortiz

070596338-7

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: el Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación, **INVESTIGACIÓN DOCUMENTAL SOBRE EL DÉCIMO PROBLEMA DE HILBERT**, realizado por la señorita: **JAZMIN NOELIA JIMENEZ ORTIZ**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del trabajo de titulación, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	FIRMA	FECHA
Dra. Martha Ximena Dávalos Villegas PRESIDENTE DEL TRIBUNAL	_____	2023-04-28
Dr. Leonidas Antonio Cerda Romero, PhD. DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR	_____	2023-04-28
Ms.C. Ramón Antonio Abancin Ospina ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR	_____	2023-04-28

DEDICATORIA

Quiero dedicar este trabajo a Jehová Dios, quien me ha guiado con mucho cariño en todo mi paso por la Universidad. A mi padre Luis Jiménez por haber hecho posible que yo estudiara en otra ciudad y quien con su amor, paciencia y esfuerzo me ha permitido llegar a cumplir hoy un sueño más además de inculcar en mí el ejemplo de esfuerzo y valentía. Agradezco profundamente a mi madre Irma Ortiz (QEPD) por haber creído en mí desde el principio y, aunque no esta conmigo en este momento, siempre supo que lo iba a lograr. También a mis hermanos, mi familia, amigos y a mi novio Brayan por su confianza y su apoyo incondicional en los buenos y malos momentos.

Jazmin

AGRADECIMIENTO

Agradezco a la Escuela Superior Politécnica, por darme la oportunidad de estudiar en sus institución y al Dr. Leonidas Cerda, principal colaborador durante todo este proceso, quien con su preparación dirección, enseñanza y colaboración me alentó a seguir adelante.

Jazmin

ÍNDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN	viii
ABSTRACT	ix
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1	
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	2
1.1. Planteamiento del problema	2
1.2. Objetivos	2
1.2.1. <i>Objetivo general</i>	2
1.2.2. <i>Objetivos específicos</i>	2
1.3. Justificación	3
CAPÍTULO 2	
2. MARCO TEÓRICO	4
2.1. Referencias teóricas	4
CAPÍTULO 3	
3. MARCO METODOLÓGICO	6
3.1. Descripción del enfoque	6
CAPÍTULO 4	
4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	7
4.1. Procesamiento, análisis e interpretación de resultados	7
4.2. Discusión	7
CAPÍTULO 5	
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	8
5.1. Conclusiones	8
5.2. Recomendaciones	8

BIBLIOGRAFÍA

RESUMEN

Desde que se planteó y resolvió el Décimo Problema de Hilbert, no se ha encontrado una referencia documental que sirva de guía para comprender los tópicos más importantes en la resolución del problema, por lo tanto, se plantea la necesidad de realizar una investigación documental con análisis crítico sobre el Décimo Problema de Hilbert como Trabajo de Integración Curricular, a fin de ayudar a los estudiantes de matemáticas de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo a comprender en profundidad el problema. Para alcanzar este objetivo se realizó una investigación documental, de carácter descriptivo y enfoque cualitativo, se realizó una lectura concienzuda del tema; en libros, artículos, y páginas de internet; de todo el material recolectado se precedió a seleccionar aquellos que ayudarían a los estudiantes con poca experiencia en el tema. Para la escritura de la monografía se generó estilos propios de redacción científica para poder facilitar la comprensión de los lectores usando el editor de texto $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$; como resultado se deja la monografía titulada: Notas sobre el Décimo problema de Hilbert donde se redacta y analiza el Décimo Problema de Hilbert de manera descriptiva y corta para los jóvenes matemáticos, además de una extensa bibliografía que va a servir para la profundización de tópicos relacionados al problema.

Palabras clave: <PROBLEMA MATEMATICO>, <DÉCIMO PROBLEMA DE HILBERT>, <INVESTIGACIÓN>, <INVESTIGACIÓN DOCUMENTAL>, <TÓPICOS>.

SUMMARY/ABSTRACT

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

INTRODUCCIÓN

“Un buen problema es un verdadero hilo conductor a través de los dédalos del laberinto hacia las verdades ocultas.” (Bombal, F., 2013, p.2)

Con esta convicción, David Hilbert, con motivo del segundo congreso Internacional de matemática realizado en París en 1900, preparó un listado de 23 problemas abiertos en ese tiempo, que a su juicio serían el hilo conductor de las investigaciones matemáticas del siglo XX. De estos problemas, el décimo dice:¹

“Dada una ecuación diofántica con cualquier número de incógnitas, se desea hallar un procedimiento que, en un número finito de operaciones se pueda decidir si la ecuación tiene solución o no, dentro de los racionales enteros.”

En lenguaje de la lógica matemática moderna, el Décimo Problema de Hilbert (de ahora en adelante denotado H10) pide hallar un algoritmo que tenga como entrada una ecuación diofántica, y tenga como salida: SI, o NO, dependiendo si la entrada tiene o no soluciones enteras.

En 1970, el matemático ruso Yuri Matiyasevich demostró, basado en los trabajos de Julia Robinson, Martin Davis y Hilary Putnam, que H10 es irresoluble.

Este trabajo de integración curricular deja como resultado una monografía sobre el Décimo Problema de Hilbert, la cual contiene tres capítulos: el primero hace un repaso de la lógica matemática necesaria para entender el lenguaje utilizado en la resolución de H10; el segundo se divide en siete secciones que explican de forma completa la resolución de H10; finalmente, en el tercer capítulo se explican nuevas líneas de investigación que surgieron después de la resolución de H10.

¹Versión libre de la autora.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

En la actualidad, no existe una referencia documental sobre el décimo problema de Hilbert, que sirva como guía para entender los avances que se fueron dando en la matemática hasta llegar a su solución.

Se plantea entonces la necesidad de realizar una investigación documental sobre el décimo problema de Hilbert, a fin de generar un documento de referencia para las nuevas generaciones de matemáticos.

1.2. Objetivos

1.2.1. *Objetivo general*

Generar un documento que sirva de referencia a matemáticos jóvenes y a estudiantes de matemática, para el entendimiento y análisis del décimo problema de Hilbert; a través de una investigación documental sobre registros y referencias bibliográficas de los matemáticos de la época que trabajaron en el problema; con el fin de describir en forma precisa el problema y el proceso sistemático que culminó en su solución.

1.2.2. *Objetivos específicos*

- Definir estrategias de búsqueda y organización de información, estableciendo las más apropiadas para lograr la investigación documental que se propone.
- Identificar fuentes documentales que proporcionan las bases teóricas, por medio de una lectura interpretativa y procesamiento de la información para el entendimiento del tópico.
- Generar estilos propios de redacción científica mediante lectura reflexiva y crítica de textos, manuales y guías de estilos, para documentar las partes esenciales del décimo problema de Hilbert de manera clara y sencilla con fuentes confiables para su posterior divulgación.

1.3. Justificación

A pesar de que han pasado mas de 50 años desde la solución del décimo problema de Hilbert, es difícil encontrar un documento referencial que recoja y presente todas las partes importantes que estuvieron involucradas en su solución, de manera sencilla, formal y en español para estudiantes de la carrera de matemática.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Referencias teóricas

A lo largo de los más de 50 años que han pasado desde la solución del décimo problema de Hilbert, han existido algunas personas a quienes les ha llamado la atención el alcance que tuvo el problema y la solución que comenzaron a estudiarlo y a publicarlo, en su mayoría en otros idiomas, como fue el caso del matemático M. Ram Murty (Murty, M.; & Fodden, B.) quien, a pesar de haber escrito el libro en inglés, ha redactado uno de los más completos y formales del décimo problema de Hilbert; en donde resume el del décimo problema de Hilbert y su solución alternativa en una versión corta en el capítulo N°5 en el que aplica varios teoremas, lemas y definiciones importantes que planteó en capítulos anteriores en el mismo libro, en consecuencia, estas continuas referencias han llegado a dificultar y retrasar la comprensión de todos los pasos al lector.

También existe el libro de la matemática Micaela Avila (Avila, M.) que detalla de manera sencilla varios conceptos básicos para el correcto discernimiento del décimo problema de Hilbert, seguido de una buena cantidad de ejemplos sencillos y prácticos que agiliza la comprensión, en especial de los teoremas; sin embargo la solución del décimo problema de Hilbert se resume demasiado al punto de que en muchas ocasiones no se comprenden los pasos debido a la carencia de conceptos y teoremas técnicos que se necesitan para resolver el décimo problema de Hilbert pues el objetivo del libro era exponer directamente el problema sin seguir, lamentablemente, el desarrollo histórico que originalmente tiene el décimo problema de Hilbert.

Otro libro muy interesante es el de la matemática Francese Silvina (Silvina, F.) en el que se puede tener una idea general del problema debido a que en pocas páginas expone el problema, varios puntos principales y su solución lo que puede servir como una linterna para comprender el décimo problema de Hilbert, en especial se puede encontrar una explicación muy bien detallada sobre la ecuación de Brahmagupta Pell, en la que detalla cómo se encuentran sus soluciones, el generador y cómo se forman las ecuaciones recursivas, logrando que esto facilite la comprensión de la solución del décimo problema de Hilbert, que en otros libros, se da por sentado además de que realiza de manera didáctica evitando confundir a lector.

Mientras que la matemática Sarah Cooper (Cooper, S.) empieza a desarrollar el problema desde la aportación del matemático Gödel y, además de estar en inglés, la escritura matemática es ruda y altamente técnica para alguien que recién estudia el problema por lo que da la percepción de que va

dirigido a un público mejor capacitado para entender el proceso con el que se trata el problema.

Y en el libro del matemático José Vélez (Vélez, J.) describe una introducción interesante en el que agrega definiciones básicas e historia lo cual llega a atraer al estudiante a seguir leyendo además de que se puede apreciar el detalle que se le dio a cada definición, teorema o lema y al igual que en el libro de (Silvina, F.) se encuentra una desglose entendible de la ecuación de Pell y en el que se agrega una relación casi imperceptible con la sucesión de Lucas, que no se a encontrado en otros libros, lo que resulta interesante al lector aunque expone la solución del décimo problema de Hilbert de una manera directa lo que minoriza en gran manera su importancia pero que finaliza con algunas consecuencias que tuvo el décimo problema de Hilbert como lo fue el problema de incompletitud de Gödel.

Finalmente, Natalia Hernández (Hernández, N.; et al.) expuso en su proyecto de grado la solución del décimo problema de Hilbert haciendo principal énfasis a las contribuciones de Davis, Putnam, Robinson y Matiyasevich; principales aportadores en el décimo problema de Hilbert, y a temas generales como los algoritmos, la máquina de Turing que al final era lo que Hilbert precisaba cuando planteó el problema y cómo se relacionan con las ecuaciones recursivas y recursivamente enumerables, encontrando en todo el libro explicaciones cortas, concretas y semiformales al igual que ejemplos se da por hecho de que el lector tiene conocimiento de lo fundamental del décimo problema de Hilbert.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Descripción del enfoque

El presente documento se redactó usando una metodología de enfoque cualitativo, el cual es el resultado de varias conversaciones, recuerdos y una lectura profunda en diversas fuentes bibliográficas verificadas, que permitió escribir el contenido que se ha formado alrededor del décimo problema de Hilbert para solucionarlo.

Al mismo tiempo la investigación corresponde a un estudio descriptivo, debido al interés por producir una monografía de carácter referencial con el objetivo de que se explique los puntos importantes del décimo problema de Hilbert junto con su solución de forma sencilla sin perder la formalidad matemática para los estudiantes de la carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Para ello se buscó y usó bibliografías, en su mayoría, en inglés con autores de alta distinción cuyos libros son trabajosos de conseguir, para componer el documento. Para alcanzar la meta, primero se determinó el tema de investigación, se propuso los objetivos que tendría la monografía y se procedió a buscar información de diferentes fuentes como; libros, ensayos, tesis y páginas de internet.

Luego se clasificó las fuentes de información, seleccionando aquellas que lleguen a ser de más provecho para redactar y al mismo tiempo cumplir con los objetivos planteados en el documento monográfico.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Procesamiento, análisis e interpretación de resultados

Este documento de carácter descriptivo y enfoque cualitativo, generó la monografía "Notas del Décimo Problema de Hilbert", con el objetivo de impulsar a los jóvenes matemáticos al estudio y análisis del problema, presentándolo de manera sencilla sin alejarse de la formalidad matemática, y así poder animarlos a interesarse en la investigación de problemas relacionados con H10. La monografía que se construyó esta dividida en tres capítulos, esenciales para poder comprender fácilmente el H10 y su solución. En el primer capítulo se hace un repaso sobre la lógica matemática; en el segundo capítulo se documenta el décimo problema de Hilbert, se presentan definiciones, lemas y teoremas, los cuales sirven de guía al entendimiento de la resolución de H10; finalmente, en el tercer capítulo se menciona brevemente algunas investigaciones que se originaron a partir de la resolución del H10.

Para comenzar, se explica en que consiste un lenguaje de predicados de primer orden, poniendo mayor interés en la construcción de palabras, términos, y fórmulas del lenguaje, y el uso que tienen estos conceptos en la teoría de modelos. Se presentan ejemplos que complementan la comprensión. Luego se realiza una exposición sobre las ecuaciones diofánticas, los diferentes tipos de funciones diofánticas, el uso del cuantificador acotado en expresiones diofánticas, seguido de las funciones recursivas y finalizando con la presentación de la solución del décimo problema de Hilbert.

4.2. Discusión

Desde que se solucionó el décimo problema de Hilbert hasta la actualidad han pasado más de cincuenta años, y en la actualidad se ha dejado una puerta abierta a otras investigaciones; sin embargo, los estudiantes de la carrera de matemática de la ESPOCH tienen poco conocimiento sobre el tema, por ello se ha considerado necesario redactar un documento que recoja la información necesaria para un entendimiento completo, en un lenguaje que no confunda al lector y funcione como un mapa que lo guíe, en el H10 y temas relacionados a este.

A pesar del gran esfuerzo que se ha realizado, se reconoce que existen ciertos tópicos que se han dado por conocimiento previo y, por lo mismo se ha dejado una bibliografía considerable y referencias que pueden ayudar al estudiante a recordar.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

Este trabajo arroja las siguientes conclusiones:

- i) Se generó un documento de referencia sobre el Décimo Problema de Hilbert, para estudiantes de la Carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, que presente de forma precisa la resolución de este problema.
- ii) Se utilizó estrategias de búsqueda y organización de información, adecuadas para realizar un estudio documental.
- iii) Para entender el Décimo Problema de Hilbert, fue necesario realizar una lectura interpretativa, y procesar de manera adecuada la información obtenida.
- iv) La comprensión de temas propios de estudios de posgrado en matemática es desafiante para estudiantes de pregrado; sin embargo, los conocimientos adquiridos en la Carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo son suficientes para iniciar estos estudios.

5.2. Recomendaciones

Se recomienda que:

- i) Analizar las ventajas de incluir en la malla curricular de la Carrera de Matemática alguna asignatura que trate sobre el Décimo Problema de Hilbert.
- ii) Utilizar esta monografía en la Carrera de Matemática, pues es el inicio para investigaciones sobre problemas diofantinos, y análogos al Décimo Problema de Hilbert.
- iii) Utilizar la bibliografía mencionada en este trabajo, para profundizar en temas que pudieran resultar difíciles para estudiante con poca experiencia en estos tópicos.

BIBLIOGRAFÍA

AVILA, M. *Decidibilidad, Resolubilidad y Algoritmia en Matemáticas.* (Tesis de grado.) Universidad de Sonora, altos estudios. Hermosillo-Mexico. 1979. p.1-117. Disponible en: [/https://lic.mat.uson.mx/tesis/11TesisLupita.PDF](https://lic.mat.uson.mx/tesis/11TesisLupita.PDF)

BERMÚDEZ, T. *Julia Robinson: una mujer matemática. En Las matemáticas del siglo XX una mirada en 101 artículos.* Números: Revista de didáctica de las matemáticas, 2000, p. 419-422. ISSN: 0212-3096. Disponible en: <https://documat.unirioja.es/ejemplar/159639>

BOMBAL, F. *David Hilbert: La búsqueda de la certidumbre.* Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat.(España), 2013, España, vol. 106, p. 1-31. [Consulta: 2013] Disponible en: <https://rac.es/publicaciones/revistas/revista-serie-general/indice/50/>

CAICEDO, F. *Algoritmos, números de Fibonacci y el decimo problema de Hilbert.* Boletín de matemáticas, 1976, vol. 10, no 01-06, p. 1-27. Disponible en: <https://revistas.unal.edu.co/index.php/bolma/article/view/34817/35102>

CASTILLO, I. *Lógica y teoría de conjuntos.* [Libro.] España. Autoedición, 2011. [Consulta: 9 diciembre 2011]. Disponible en: <https://openlibra.com/es/book/logica-y-teoria-de-conjuntos>

CERDA, L. *Problemas de decidibilidad en torno a estructuras con adición y la relación de divisibilidad.* (Tesis doctoral). Universidad de Concepción, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Concepción-Chile. 2017, p.1-37. Disponible en: <http://repositorio.udec.cl/jspui/handle/11594/2679>

COOPER, S. *The solution to Hilbert's tenth problem.* (Master of Science). Department of Mathematics, 1972, p. 1-81. Disponible en: <https://escholarship.mcgill.ca/downloads/nv935438b>

CORI, R.; Lascar, D. *Mathematical Logic: Part 1: Propositional Calculus, Boolean Algebras, Predicate Calculus, Completeness Theorems.* New York-EEUU. OUP Oxford, 2000. ISBN: 0-19-850049-1, p. 1-329.

DA SILVA, R. *Los teoremas de incompletitud de Gödel, teoría de conjuntos y el programa de David Hilbert.* Episteme, 2014, vol. 34, p. 19-40. [Consulta: junio 2014.] ISSN 0798-4324. Disponible en: http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-43242014000100002

DAVIS, M. *Hilbert's Tenth Problem is Unsolvable.* JSTOR, 1973, vol. 80, p. 233-269. [Consulta: 3 marzo 1973]. Disponible en: <https://www.jstor.org/stable/2318447>

GARCIA, N.; & PASTEN, H. *Towards Hilbert's tenth problem for rings of integers through Iwasawa theory and Heegner points. Mathematische Annalen..* vol. 377, 2020, Chile. pp. 989-1013.

GYLYS, P. *Hilbert's 10th Problem Extended to \mathbb{Q} .* 2016. Disponible en:https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_16/2016papers/peter%20gc.pdf

HERNÁNDEZ, I.; & MATEOS, C.; & NÚÑEZ, J. *Diófanto, Hilbert y Robinson: ¿Alguna relación entre ellos?. Números.* Revista de Didáctica de las Matemáticas, 2009, España, vol. 70, p. 75-87. [Consulta: abril 2009]. ISSN: 1887-1984. Disponible en: <http://www.sinewton.org/numeros>

HERNÁNDEZ, N.; et al. *La indecidibilidad y la lógica: el Teorema de Davis-Matijasevič-Putnam-Robinson y la solución negativa al Décimo Problema de Hilbert.* (Tesis de grado.) Universidad de los Andes, Facultad de Ciencias, Matemática, Bogotá-Colombia. 2021. p. 1-63. [Consulta: 3 noviembre 2021.] Disponible en: <https://repositorio.uniandes.edu.co/flexpaper/handle/1992/53441/24404.pdf>

MARTÍNEZ, I.; & Piza, E. *Problemas de decisión y recursividad en sistemas lógicos formales.* Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones. 2016, Costa Rica, vol. 23, p. 11-39. [Consulta: 30 septiembre 2016]. ISSN 1409-2433. Disponible en: <https://www.scielo.sa.cr/pdf/rmta/v23n1/1409-2433-rmta-23-01-00011.pdf>

MURTY, M.; & FODDEN, B. *Hilbert's Tenth Problem: An Introduction to Logic, Number Theory, and Computability.* Canadá. Board, 2019. ISBN: 978-1-4704-4399-3, p. 1-227.

NÚÑEZ, J.; & HERNÁNDEZ, I.; & MATEOS, C. *¿Alcanzaría siquiera a pensar Hilbert que la resolución del décimo de los problemas por él planteados podría venir de la mano de una mujer?: Julia Robinson.* Sevilla-España. I Congreso Universitario Andaluz Investigación y Género, 2009. ISBN: 9788469257159, p. 873-882. Disponible en: <https://idus.us.es/handle/11441/39544>

SILVINA, F. *Trabajo Final de Tesis. "El décimo problema de Hilbert".* (Tesis de grado). Universidad Nacional de la Matanza, Formación continua. San Justo-Argentina. 2010. Disponible en: http://tesismatematica.ucoz.es/_ld/0/19_Tesis_Silvina_F.pdf

UTRERAS, J. *Análogos del Décimo Problema de Hilbert Analogues of Hilbert's Tenth Problem.* Magister [Tesis]. Universidad de Concepción, Facultad de Ciencias, Físicas y Matemáticas. Concepción-Chile. 2010. pp.7-8. [Consulta: 19 mayo 2021] Disponible en:https://go.openathens.net/redirector/udec.cl?url=http://tesisencap.udec.cl/concepcion/utreras_a_j/index.html

VÉLEZ, J. *El décimo problema de Hilbert.* (Tesis de grado.) Universidad Nacional De Colombia, Facultad de Ciencias, Matemática. Bogotá-Colombia. 2001. p. 1-73. Disponible en: <http://www.nupet.com.br/virtual/TeseoDecimoproblemadeHilbert.pdf>

VIDAUX, X. *An analogue of Hilbert's 10th problem for fields of meromorphic functions over non-Archimedean valued fields.* Journal of Number Theory, 2003, vol. 101, p. 48-73. Disponible en: [http://www2.udec.cl/~xvidaux/HTPmero\(JNT\).pdf](http://www2.udec.cl/~xvidaux/HTPmero(JNT).pdf)

WEYL, H. *David Hilbert and his mathematical work.* Bulletin of the American Mathematical Society. 1944, vol. 50, p.612-654. ISSN 1088-9485. Disponible en: <https://www.ams.org/journals/bull/1944-50-09/home.html>