ISBN 978-85-89082-23-5

A Demonstração ao Longo dos Séculos[1]

Hygino H. Domingues[2]

Resumo

O presente artigo visa a apresentar uma simples histórica da busca pela “verdade” na matemática, ao longo dos séculos, e do papel especial desempenhado pela demonstração e pelo método dedutivo nessa tarefa. De permeio mostra-se que muitos dos grandes progressos sofrido pela matemática no curso do tempo tiveram de ser precedidos por progressos concomitantes nos métodos de demonstração.

Abstract

The aim of this paper is to present an historical synthesis of the search for “truth” in mathematics, over the centuries, end of the special role played by demonstration and by deductive method in this task It is shown that many of the greatest advances in mathematics over the course of time had to be perceived as concommitant advances in methods of demonstrations.

Introdução

Segundo Tarski, no artigo *Truth and Proof*, publicado em 1969 na revista *Scientific American*, pode-se considerar a busca da verdade como a essência da atividade científica. Portanto, pode-se considerar a busca da “verdade matemática” como a essência da atividade do matemático. Mas o que é, afinal, “verdade matemática”?

Na matemática, as noções de “verdadeiro” e “falso” estão associadas a proposições. Possivelmente, a mais antiga tentativa de explanar essas noções se deve a Aristóteles em sua *Metafísica:*

> *Dizer do que é que não é, ou*
> *do que não é que é, é falso,*
> *ao passo que dizer do que é que é, ou*
> *do que não é que não é, é verdadeiro.*

Essa formulação, conhecida como clássica ou semântica, deixa a desejar, como parece ocorrer com todas as outras posteriores, dessa ou de outra natureza, por não encerrar em si mesma critério algum para decidir se uma dada afirmação é verdadeira ou falsa. Para exemplificar, consideremos a proposição: “Qualquer altura de um triângulo eqüilátero é também mediana e bissetriz do triângulo”. Para decidir se essa afirmação é

---

[1] Digitalizado por Lucieli M. Trivizoli e Marco A. Escher.
[2] Professor Adjunto aposentado da UNESP, campus de S. José do Rio Preto.

verdadeira ou falsa é preciso chegar, respectivamente, a uma das seguintes conclusões: isso de fato se verifica em todo triângulo eqüilátero ou há um triângulo eqüilátero, pelo menos, em que isso não se verifica. Logo, não há como concluir a “veracidade” ou “falsidade” da afirmação a não ser por meio de uma investigação geométrica.

Diante dessa dificuldade, torna-se imperioso encontrar critérios parciais específicos, que permitam, tanto quanto possível, estabelecer a veracidade ou a falsidade do maior número possível de proposições. Esses critérios obviamente são diferentes nas ciências empíricas e nas ciências dedutivas. Modernamente, no caso destas últimas, principalmente da matemática, esses critérios se inserem no método axiomático-dedutivo e se estribam na idéia de "demonstração".

A Demonstração entre os povos antigos

Mas por vários milênios a matemática se desenvolveu sem se valer desse método. No caso da matemática babilônica e egípcia, por exemplo, os historiadores são concordes em que nenhuma delas se baseou em qualquer estrutura axiomática que pudesse servir de garantia para a validade dos procedimentos práticos de que essencialmente se compunham. O critério de confiabilidade das regras e procedimentos usados era simplesmente a concordância com a realidade a que se destinavam. O que também pode ser tomado como uma idéia de verdade matemática.

Mas como se chegava a essas regras e procedimentos, alguns realmente surpreendentes para o nível da matemática na época? Admite-se que em geral essa forma de conhecimento era o produto da evidência física, da tentativa e erro, da analogia ou do insight dos “matemáticos”. Mas em casos mais sofisticados, como por exemplo, a regra encontrada no papiro Moscou para o volume do tronco de pirâmide de bases quadradas, talvez através de uma “dedução algébrica” a partir da regra para o cálculo do volume de uma pirâmide, regra essa que conheciam e que talvez tivessem obtido estendendo por analogia a regra para a área de um triângulo. A se aceitar essa hipótese, é mister admitir que os matemáticos egípcios chegaram a exercitar a idéia de demonstração, embora talvez de maneira isolada e esporádica, e evidentemente sem os formalismos do método axiomático-dedutivo.

O caminho que levou ao método axiomático em matemática não é bem conhecido mas certamente é longo e está intimamente ligado ao desenvolvimento matemático da

Grécia. Geralmente atribui-se a Tales de Mileto (séc. VII a.C.) a primazia de formular explicitamente, pela primeira vez na história, propriedades das figuras como afirmações gerais. Segundo Proclo (séc. V), em seu *Comentário ao Livro Primeiro dos Elementos de Euclides*, baseado numa história da geometria grega escrita por Eudemo de Rodes (séc. II a.C.), obra essa que não chegou até nossos tempos

> Tales foi o primeiro a ir para o Egito e a levar para a Grécia, na volta, o saber [geometria] que encontrou. Ele descobriu muitas proposições e revelou para seus sucessores os princípios subjacentes a muitas outras, valendo-se de métodos gerais em alguns casos e em outros de métodos empíricos.

É principalmente devido a essa citação, posterior muitos séculos a ele, que às vezes se costuma conferir a Tales o mérito de haver sido o primeiro matemático da história.

Vale ressaltar que possivelmente as propriedades formuladas por Tales (por exemplo "os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais") já eram conhecidos pelos egípcios. Na abordagem destes, porém, não se encontra o embrião de uma ciência teórica, como talvez em Tales, mas apenas fatos matemáticos isolados e em nível de elaboração intelectual muito difícil de precisar.

O referido *Sumario Eudemiano*, diga-se de passagem uma das poucas fontes históricas a respeito da matemática grega do período helênico, trata na sequência das contribuições de Pitágoras de Samos (C. 532 a .C.) e de sua escola à matemática. Segundo esse relato, essa escola teria sido a responsável pela criação da matemática pura, movida por razões intelectuais e na esteira do estudo de problemas abstratos. Portanto, mais ainda que no caso de Tales, parece haver razões significativas para suspeitar de que, em algum momento, os pitagóricos tenham imprimido à sua matemática algum caráter dedutivo.

Quanto a isso o mais razoável, em face do pouco que se conhece com certeza a respeito, é admitir que na maior parte da vida da escola seus membros limitaram-se a estabelecer resultados a partir de casos particulares, tanto na geometria como na aritmética. Todavia, na época dos últimos pitagóricos, isto é, por volta do ano 400 a.C, em função de outros desenvolvimentos, a irmandade pode efetivamente ter dado um grande salto à frente no que se refere à dedução matemática. Mesmo assim, porém, sem nenhuma base axiomática pré-estabelecida. Muito provavelmente, o máximo que fizeram em seus trabalhos foi encadear raciocínios para estabelecer propriedades e encadear propriedades para deduzir outras propriedades de certas partes da geometria, que privilegiavam em função de suas doutrinas, como por exemplo o estudo dos polígonos e poliedros regulares.

A escola pitagórica certamente tinha boas razões intelectuais para não considerar a intuição e a observação como guias únicos na busca do conhecimento geométrico. No curso de sua história, porém, uma outra razão inesperada e forte veio a ser acrescentada, a qual, inclusive, pode ter ocasionado ou acelerado a derrocada da escola. De acordo com a filosofia pitagórica, todos os fenômenos do universo poderiam ser explicados em termos de números inteiros (positivos – os únicos considerados por eles) e suas razões. Essa tese era compatível com a crença que alimentavam de que duas grandezas quaisquer de mesma espécie seriam sempre comensuráveis. Mas no século V a.C, o pitagórico Hipaso de Metaponto, para constrangimento de toda a confraria, demonstrou a falsidade dessa crença. Como, exatamente, não se sabe. Aristóteles (séc. IV a.C.) diz que foi por redução ao absurdo e dá uma demonstração, por esse método, de que a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis, demonstração essa que pode ter sido a encontrada por Hipaso. A demonstração de Aristóteles é essencialmente a que se dá hoje para provar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Em que pese à crise a que esse resultado levou a matemática grega, a demonstração referida deixa claro que a idéia de utilizar encadeamentos de propriedades articuladas mediante raciocínios lógicos para o desenvolvimento da matemática já era uma realidade nessa época. Mas para se chegar ao método postulacional, com vistas à criação de sistemas matemáticos os mais amplos e confiáveis possíveis, faltava uma estruturação preliminar composta de noções básicas, postulados e definições.

Das obras que chegaram até nossos dias, a mais antiga a apresentar essa proposta são *Os Elementos*, de Euclides (c. 300 a.C.), um compêndio da matemática grega básica da época do autor. No modelo dedutivo utilizado por Euclides, possivelmente inspirado em Aristóteles, não há conceitos primitivos. Todos os objetos geométricos a serem estudados, mesmo os mais intuitivos, são explicitamente definidos. Numa proposta dessa natureza, obviamente as primeiras definições têm de ser dadas em termos de conceitos não apresentados antes. (Por exemplo, Euclides definia *ponto* como “aquilo que não tem partes”.) Efetivamente, o objetivo de Euclides não era apenas apresentar formalmente os objetos iniciais de seu discurso mas também garantir que eles correspondiam a uma realidade ligada à experiência e expectativa do leitor. Os postulados que se seguiam, por sua vez, tinham um caráter de auto-evidência (salvo uma notável exceção[3]). Por essas razões, as axiomáticas como a usada por Euclides nos *Elementos*, calcadas de alguma maneira na evidência e na experiência, vieram a ser conhecida como *axiomáticas materiais.*

Na verdade Euclides trabalhou explicitamente com cinco noções comuns e cinco postulados, formulados na abertura da obra. Mas, com certeza inadvertidamente, acabou usando outros pressupostos que, com o tempo, acabaram sendo detectados no crivo das minuciosas análises críticas por que passou a obra. De todo modo, demonstrou nada menos que quatrocentas e sessenta e cinco proposições, sempre utilizando o método sintético. Apesar da falha apontada, e outras que não vêm ao caso, os *Elementos* constituem um grande monumento matemático e o primeiro grande testemunho do poder do método dedutivo na matemática.

É comum, na historiografia matemática, encontrar-se a colocação de que os *Elementos* foram vistos, por cerca de dois milênios (até quase o fim do século XIX), como o modelo por excelência de matemática bem feita. Indiretamente trata-se de uma homenagem ao método axiomático-dedutivo. A respeito disso cabem, porém, algumas considerações. No período helenístico efetivamente as grandes obras matemáticas seguiram esse modelo, mas é difícil precisar se essa tendência foi ditada por Euclides ou se foi uma característica da matemática da época. Seguiu-se, segundo os mais puristas, um declínio da matemática grega que, na verdade, nos primeiros tempos, pode ter sido um desvio do engessamento do modelo euclidiano. Haja vista a *Aritmética* de Diofanto (s. III d.C.?), obra em que não se encontram definições, postulados e proposições (nem portanto demonstrações) e que, não obstante, com justa razão é considerada uma das grandes realizações da matemática grega, especialmente pelo seu caráter inovador tanto pelo conteúdo como pela abordagem.

Um período de transição

Posteriormente, durante a Idade Média, com o grande declínio cultural

[3] O postulado V, cujo enunciado é o seguinte: Se uma reta corta duas outras de um plano formando em um dos lados ângulos interiores cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas duas retas, se prolongadas indefinidamente, cortar-se-ão no lado em que isso acontece.

verificado no Ocidente, em particular na matemática, os *Elementos* tornaram-se uma obra de um nível muito acima das possibilidades da época, só usada muito restrita e superficialmente. Nesse meio tempo, o epicentro da matemática mudou-se para os mundos árabe e hindu mas esses povos, em que pese sua importância para o desenvolvimento da matemática, não priorizavam a demonstração como os gregos do período clássico – longe disso.

Do Renascimento até por volta do início do século XIX, deparamos com o seguinte quadro: de um lado a geometria euclidiana realmente sendo resgatada no Ocidente, com o respeito e a admiração dos estudiosos, graças sobretudo à sua organização lógica, não obstante algumas falhas já detectadas em seu desenvolvimento; de outro, a matemática passando por um surto de desenvolvimento muito grande, em vários campos, só comparável ao do período áureo da matemática grega, mas um desenvolvimento, segundo o historiador M. Kline [1, cap. V a VIII], "ilógico" . De fato, novas áreas da matemática, como a geometria analítica e o cálculo, por exemplo, muito possivelmente não chegaram a satisfazer, sob o ponto de vista do rigor, nem mesmo aos seus criadores. Haja vista que R. Descartes (1596-1650), um cientista que valorizava sobremodo o método axiomático-dedutivo, em particular o método matemático, ao escrever sua única obra matemática, *A geometria*, não utilizou nem postulados e nem demonstrações, marginalizando assim sua própria epistemologia. Quanto ao cálculo, basta citar que um de seus criadores, I. Newton (1643-1727), fez três tentativas para passar a limpo suas idéias, nenhuma delas convincente, rigorosamente falando. Ademais, ao usar uma das versões na sua obra prima *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, optou pela linguagem da geometria euclidiana. Evidentemente não faltava capacidade a esses matemáticos, muito pelo contrário. A verdade é que os fundamentos da matemática, de um modo geral, careciam ainda de uma estruturação mais sólida e abrangente e isso não seria alcançado senão na segunda metade do século XIX, após um arrastado processo de maturação. Mas, diga-se de passagem, esse desenvolvimento "ilógico" teve o seu lado positivo Graças à intuição e ao trabalho ingente dos grandes matemáticos, a matemática evoluiu muito nesse período, senão com consciência plena pelo menos a passos confiantes que, no grosso, levaram ao caminho certo.

Assim, ao se iniciar o século XIX, a geometria de Euclides, com seu alto grau de organização lógica, realmente se diferenciava do resto da matemática ainda tateante a procura de seus alicerces. Mas havia questionamentos à exclusividade que se via nela para descrição do espaço físico. O filósofo David Hume (1711-1776), por exemplo, defendia que a natureza não se ajusta a “modelos fixos e leis necessárias”. Mas o ponto de vista predominante era o do filósofo Immanuel Kant (1724-1804), com toda a sua enorme influência científica, para o qual as propriedades do espaço físico eram necessariamente euclidianas. Kant defendia o caráter *a priori* do conhecimento geométrico e para isso argumentava que uma propriedade como a de que “a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos” não está sujeita a alterações nem a um reforço com novas coleta de dados, visto tratar-se de um conhecimento universal que não comporta exceção alguma.

Uma nova visão

Até perto do final do século XIX, a demonstração em matemática tinha um caráter grandemente material. A demonstração de uma proposição era uma atividade intelectual que visava a nos convencer e a convencer os outros, racional, mas também psicologicamente, da veracidade dessa proposição. A partir de algum momento, porém, tornou-se necessário submeter a noção de demonstração a uma análise mais profunda, com vistas a reduzir o recurso ao uso da evidência intuitiva. Capítulos importantes da matemática, como o cálculo, por exemplo, tinham sido explorados tão profundamente que a intuição apenas ou raciocínios heurístico-geométricos já não bastavam para explicar alguns resultados aparentemente paradoxais. Como entender, por exemplo, que uma curva pudesse recobrir uma parte do plano ou que o todo pudesse não ser maior que uma parte sem remeter essas questões pura e simplesmente para o plano da coerência lógica?

Em função dessa realidade o conceito clássico de demonstração não resistiu. Dentre os matemáticos que contribuíram para a reformulação da idéia de demonstração é imperioso citar G. Frege (1848-1925). Com ele tomou forma o conceito de *demonstração formal*, que Tarski, no artigo citado, sintetiza como a construção de uma sequência de proposições tal que: (i) a primeira proposição é um axioma; (ii) cada uma das outras ou é um axioma ou é dedutível diretamente das que a precedem na seqüência; (iii) a última proposição é aquilo que se pretendia demonstrar. Isso pressupõe a

ISBN 978-85-89082-23-5

formulação de algumas poucas regras de inferência de conteúdo simples. Intuitivamente, todas as regras de inferência parecem ser infalíveis no sentido de que as proposições que delas derivam consistentemente devam constituir verdades da teoria em questão. Apesar de um grande avanço em relação aos procedimentos psicológicos precedentes, a noção de demonstração formal carregava consigo o gérmen de alguns revezes futuros para os especialistas nos fundamentos da matemática.

Novas axiomáticas da geometria

Ao final do século XIX, a axiomatização de sistemas matemáticos diversos, surgidas na esteira da grande liberdade matemática inaugurada com a criação da geometria não euclidiana (1829) e das álgebras não convencionais (anos 1840), já era uma realidade substancial. As noções de grupo, corpo e espaço vetorial, por exemplo, já tinham sido axiomatizadas antes do final do século XIX. Obviamente o processo de aritmetização da análise, com a axiomatização dos sistemas numéricos, não pode ser desvinculado desse movimento.

Tendo em vista o nível de axiomatização que a matemática alcançara e a constatação de que as geometrias, embora possivelmente criadas pelo homem com inspiração no espaço físico, não tinham de ser necessariamente idealizações desse espaço, era de esperar que até o paradigma euclidiano passasse por um reexame mais profundo. O primeiro matemático a realizar um trabalho significativo nos fundamentos da geometria com essa nova visão foi M. Pasch (1843-1931) na sua obra *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1ª ed., 1882). Pasch percebeu claramente que os conceitos iniciais da geometria não deveriam ser definidos, como Euclides o fizera, para evitar o atrelamento da matemática a conceitos físicos e um “retorno ao infinito”. Assim, calcou sua geometria em alguns conceitos primitivos e fez dos axiomas que introduziu apenas enunciados formais que serviam para caracterizar implicitamente esses conceitos. E se os axiomas podiam ser ditados, de alguma maneira, pela experiência, as demonstrações que se seguiam em hipótese alguma deveriam ter qualquer conotação material.

Mas das tentativas de uma nova axiomatização para a geometria euclidiana, a mais bem sucedida foi sem dúvida a de D. Hilbert (1852-1943) em sua obra *Fundamentos da Geometria*, de 1899. A idéia de Hilbert consistiu em aceitar três conceitos primitivos, ponto, reta e plano, e definir as relações mútuas entre esses objetos única e exclusivamente por meio de axiomas. Nenhuma intuição geométrica deveria ser usada nessa etapa e, muito menos, nas demonstrações. Isso de uma certa forma representava um afastamento da tradição aristotélica grega na qual os axiomas simplesmente exprimiam fatos "óbvios” acerca de conceitos já “conhecidos” intuitivamente.

O formalismo e os fundamentos da matemática

Esse trabalho de axiomatização da geometria euclidiana parece ter despertado ou ativado em Hilbert o interesse pelos fundamentos da matemática. Tendo encontrado uma axiomática para a geometria euclidiana consistente na medida em que a aritmética o fosse, como verificou, por que não encontraria uma abordagem semelhante para outras partes da matemática? No afã de concretizar esse projeto, Hilbert acabou se tornando o líder em sua época *do formalismo,* movimento filosófico que objetiva transformar a matemática na ciência das deduções formais, o que pressupunha, entre outras coisas, destituí-la de toda e qualquer conotação material.

Nos anos 1920, Hilbert e sua escola criaram a *teoria da demonstração,* um método que objetivava estabelecer a consistência de qualquer sistema formal. Buscando evitar possíveis objeções, adotou uma lógica que se aproximava dos princípios intuicionistas. Assim é que excluía, por exemplo, demonstrações de existência por contradição, demonstrações por indução transfinita e o axioma da escolha. Com isso a consistência da maior parte da matemática ficava reduzida à da teoria dos números ou a uma teoria dos conjuntos que abarcasse os axiomas de Peano. Mas em 1931, K. Gödel (1906- 1978), provou que é impossível estabelecer a consistência de qualquer sistema matemático amplo o possível para abarcar a aritmética dos números inteiros, pondo uma pá de cal sobre o projeto de Hilbert e sua escola.

A teoria dos conjuntos e os fundamentos da matemática

No âmago das dificuldades encontradas para dar solidez aos fundamentos da matemática estava a *teoria dos conjuntos.* Esse grande pilar da matemática começou a ser erigido a partir de 1874, com uma série de artigos publicados por G. Cantor (1845-1918). Mas Cantor, além de trabalhar com a uma noção muito vaga de conjunto, preocupou-se muito mais em explorar o rico filão que encontrara do que com os seus alicerces. Isso gerou paradoxos que trouxeram uma perda de confiança na nova teoria, aliás, já contestada em seus métodos por muitos matemáticos de primeira linha, e até na própria matemática. Por exemplo, para Cantor era possível falar sem restrições em conjunto de todos os conjuntos. Mas ele atribuíra um cardinal a todo conjunto, mesmo infinito, e estabelecera uma hierarquia dos cardinais. Por esta hierarquia, como não poderia deixar de ser, o cardinal do conjunto de todos os conjuntos deveria ser maior do que o de todos os outros. Mas isso levava a um paradoxo, uma vez que ele provara também que, dado um cardinal, sempre há um outro que lhe é maior.

Muitos acreditavam que para contornar essa crise nos fundamentos da matemática bastava uma boa axiomatização da teoria dos conjuntos. E a primeira tentativa de peso nesse sentido foi feita por E. Zermelo (1871-1953), num artigo de 1908. Em 1922, A. Fraenkel (1891-1965) conseguiu aprimorar o sistema de Zermelo. Com o sistema Z-F resultante era possível a construção dos números naturais e portando de toda a análise clássica, possivelmente sem cair em paradoxos, embora ainda não se tenha uma demonstração disso. Além desse buraco negro na teoria dos conjuntos, o sistema Z-F inclui o chamado *axioma da escolha* cuja aceitação, para muitos, é mais um ato de fé do que uma adoção matemática.

Vale acrescentar ainda que o sistema Z-F leva a resultados que embora coerentes com seus princípios contradizem frontalmente a intuição mais penetrante. Como, por exemplo, o *paradoxo de Banach-Tarski* do qual um caso particular, descoberto em 1914, garante que é possível decompor uma superfície esférica em duas partes que podem ser recompostas de maneira a resultarem em duas novas superfícies esféricas, cada uma com raio igual ao da superfície inicial.

E agora ?

Não há dúvida que a visão formalista da matemática prevaleceu soberanamente no século XX e que o sistema Z-F é uma de suas vigas mestras. Além do mais, em virtude da generalização e da abstração que foram cultivadas em grande escala, a matemática se desenvolveu vertiginosamente no século passado, mas às vezes sem um sentido de utilidade que seria de esperar. Haja vista que o eminente matemático francês L. Schwartz chegou a colocar em dúvida a aplicabilidade de consideráveis partes da álgebra abstrata e da topologia algébrica.

Mas em meio a esse domínio do formalismo no século XX, acabou se insinuando no terreno da demonstração matemática, um estranho no ninho, o computador, para constrangimento dos mais puristas. Em 1976, com base numa intrincada e gigantesca análise feita através da computação eletrônica, W. Haken e K. Appel deram a primeira demonstração da *conjectura das quatro cores*, uma questão em aberto desde 1852. Não faltaram objeções à demonstração de Haken-Appel. Como, por exemplo, a de D. Cohen: “Nosso objetivo não é acumular fatos a respeito do mundo ou mesmo a respeito de objetos matemáticos. A missão do matemático é compreender...”. Mas com a ciência cada vez mais dependente do computador e com os matemáticos não podendo se isolar cientificamente, objeções como essa não poderiam vingar e a tendência é desaparecerem.

A verdade é que os métodos matemáticos, por mais que sejam apurados, parecem não poder tudo e portanto deixam vazios que precisam ser preenchidos pela argúcia dos matemáticos e por métodos mais amplos de busca da verdade. Por isso nos parece oportuno terminar com a seguinte colocação de L. A. Steen :

> Sua tarefa [dos matemáticos] está clara agora: não devem eles gastar tempo e energias na busca do fogo fátuo da verdade que constantemente lhes foge das mãos. Ao contrário, deverão encarar suas criações pela óptica da utilidade e da adaptabilidade às circunstâncias, com o espírito sempre aberto a possíveis métodos que possam levar a esses fins. O fato de certos métodos levarem a contradições, quando usados indiscriminadamente, não significa que devam ser abandonados; tal situação apenas aponta para a necessidade de determinar as áreas nas quais esses métodos se mostram seguros.

Bibliografia

BARKER, S.F. **Filosofia da Matemática**, Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1969.

DOMINGUES, H.H. A Busca da Verdade em Matemática, **Universitas** 5*:* 73-77, 1995.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**, Campinas, Editora da UNICAMP, 1995.

GOODMAN, N.D. Mathematics as Objective Science, **The American Mathematical Monthly**, Aug.-Sept. 1979, 540-551.

HERSH, R. **What is Mathematics, Really?** , New York, Oxford, Oxford University Press, 1997.

KLINE, M. **Mathematics, the Loss of Certainty**, Oxford, New York, Oxford University Press,

ISBN 978-85-89082-23-5

1980.

KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**, New York, Oxford, Oxford University Press, 1972.

SNAPPER, E. What is Mathematics?, **The American Mathematical Monthly**, Aug.-Sept. 1979, 551-557.

STEEN, L.A. et al. **Historical Topics for the Mathematical Classroom**, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 1979.

TARSKI, A. Truth and Proof, **Scientific American**, 220: 63-70, 75-77, 1969.