ISBN 978-85-89082-23-5

Números racionais: conhecimentos da formação inicial e prática docente na escola básica[1]

The rational numbers: mathematics teacher education and teachers' practice.

Plinio Cavalcanti Moreira[2]

Maria Manuela Martins Soares David[3]

Resumo

Neste artigo, apresentamos uma análise do conhecimento matemático veiculado no processo de formação inicial do professor, confrontando-o com as questões que se colocam na prática docente na escola básica. Nessa análise, tomamos o conhecimento matemático da formação inicial como um objeto de investigação, um elemento a ser problematizado, e não como um "dado", como tem sido usualmente considerado. Restringimos as nossas considerações a certos aspectos do conceito de número racional e às operações neste campo numérico. Os dados utilizados referem-se ao curso diurno de Licenciatura em Matemática da UFMG. O estudo explicita e analisa algumas formas concretas de desarticulação entre o processo de formação inicial e a prática profissional.
Palavras-chave: Educação Matemática, formação de professores, dicotomia formação-prática, saberes profissionais do professor, números racionais.

Abstract

In this article we present an analysis of the mathematical knowledge addressed by the mathematics teacher education process, contrasting this knowledge with issues that emerge from teachers' practice in school. In our study we take teacher education knowledge as an object of investigation, something to be critically understood, and not a "given" object, as it is usually viewed. We restrict our considerations to some aspects of the rational number concept. Data were collected from the mathematics teacher education undergraduate course at UFMG. The study explicitly shows some concrete forms of imbalance between teacher education and teacher practice.
Key words: Mathematics Education, teacher education, dichotomy teacher education-teacher practice, teacher professional knowledge, rational numbers.

Introdução

[1] Digitalizado por Déa Nunes Fernandes Fernandes, Edna Sakon Banin e Marta Macena.
[2] Departamento de Matemática UFMG. plinio@ufmg.br
[3] Faculdade de Educação UFMG. manuela@fae.ufmg.br

ISBN 978-85-89082-23-5

No início dos cursos de licenciatura no Brasil, quando vigorava o conhecido sistema 3+1, a questão da formação matemática do professor da escola básica estava equacionada de um modo simples e direto: aos conhecimentos matemáticos recomendados para a formação do bacharel acrescentava-se o estudo de técnicas didáticas associadas ao desempenho das atividades de ensino escolar.

Tal projeto de formação assentava-se numa concepção de prática docente na escola que a reduz a um processo de simples transmissão do conhecimento matemático. Este, por sua vez, era considerado, dentro do currículo de formação, como um *absoluto epistemológico*, ou seja, um “conteúdo” pré-definido e independente dos condicionantes do processo de escolarização básica em Matemática.

A partir da década de 80, uma série de estudos vem mostrar que, ao contrário, a docência na escola básica é uma prática dotada de alto grau de complexidade, envolvendo relações entre atividades não triviais, desde a gestão da sala de aula até a seleção, re-tradução, adaptação, produção e utilização de saberes específicos do processo de ensino escolar (SHULMAN, 1987; BROMME, 1994; GAUTHIER et al, 1998; TARDIF, 2002).

Por outro lado, o desenvolvimento da ciência cognitiva vem contribuindo para uma maior compreensão de certos aspectos do processo de aprendizagem da Matemática, com reflexos no ensino e, portanto — ao menos potencialmente — nos conhecimentos mobilizados na prática docente escolar. A partir do final da década de 70, a pesquisa cognitiva, que antes se desenvolvia num plano geral, passa a colocar ênfase nas particularidades do conhecimento específico que está em jogo no processo de aprendizagem. Estudos como os de Tall e Vinner, 1981, Behr et al,1983, Vergnaud, 1983, Schoenfeld, 1992 e Brousseau, 1997, entre outros, referem-se, com diferentes enfoques e perspectivas, a questões cognitivas no campo específico da Matemática, algumas vezes atendo-se, particularmente, a certos tópicos ou conceitos.

Esses trabalhos, quando analisados sob uma perspectiva apropriada, podem projetar elementos importantes para a construção de uma visão diferenciada — em relação ao esquema 3+1 e suas variantes — dos saberes envolvidos nas atividades da prática docente escolar e das suas relações com os conhecimentos da formação inicial. Assim, é possível, hoje, situar o conhecimento matemático envolvido no processo de escolarização básica num plano conceitual que não o separa dos conhecimentos a respeito da aprendizagem e do ensino de cada um dos seus tópicos específicos, trabalhados dentro da prática docente escolar.

Por outro lado, desenvolvem-se também estudos internacionais comparativos dos processos de formação de professores de Matemática, nos quais se discute, de maneira central, a questão da articulação com a prática profissional na escola (BALL; COMITI, 1996). No Brasil, propõem-se, através do Conselho Nacional de Educação, diretrizes para a formação de professores do ensino básico, em que se faz notar a ênfase posta no papel da prática: 800 horas, dentre as 2800 mínimas do currículo, devem ser destinadas à prática de ensino e estágio supervisionado em escolas de educação básica. Isso vem reforçar, ainda mais, a necessidade de que se aprofunde o debate sobre a questão das formas de se conceber teoricamente e de se implementar institucionalmente a articulação da formação com a prática. No caso da licenciatura em Matemática, parece claro que o conhecimento matemático trabalhado no processo de formação não pode mais ser considerado como um “dado” e, sim, ser problematizado, transformar-se em objeto de investigação e de análise para que possa ser repensado e vir a se constituir, assim, em elemento fundamental no próprio processo de superação das dicotomias e desarticulações apontadas na literatura.

Através de uma análise, interpretação e adaptação ao contexto do nosso trabalho, de uma parte selecionada da literatura de pesquisa do campo da Educação Matemática, procedemos a uma investigação com o objetivo de responder às seguintes questões:

(A) *Que tipo de conhecimento matemático estaria fundamentalmente associado ao ensino e à aprendizagem dos sistemas numéricos, ao longo do processo de educação escolar básica em Matemática?*

(B) *Que tipo de conhecimento matemático, a respeito dos sistemas numéricos, é veiculado dentro do processo de formação matemática no curso de licenciatura em Matemática?*

As nossas respostas a essas questões se conjugam na procura de uma compreensão profunda das razões pelas quais uma articulação inadequada entre o processo de formação do professor e a prática docente escolar vem sendo considerada, recorrentemente, como um problema estrutural dos cursos de licenciatura no Brasil (PEREIRA, 2000) e, em particular, da licenciatura em Matemática (FIORENTINI et al, 2002).

Neste trabalho, apresentamos uma síntese das nossas respostas às questões (A) e (B) — restringindo-nos aos números racionais e ao curso de licenciatura diurno da UFMG — conjuntamente com uma análise que visa a contribuir para o debate em torno da questão geral, a qual se refere às razões de uma desarticulação histórica entre formação inicial e prática docente.

Nossa resposta para a questão (A) é o que resolvemos denominar "*conhecimento matemático envolvido nas questões que se colocam para o professor em sua prática pedagógica na escola*". Esse conhecimento é caracterizado e descrito, neste trabalho, a partir de estudos teóricos e pesquisas empíricas relativas aos processos de aprendizagem e de ensino escolar dos sistemas numéricos. Nossos estudos não nos permitem afirmar, entretanto, que esse conhecimento, em sua plenitude, seja necessário à prática docente escolar, embora não descartemos essa possibilidade. Não tomamos os resultados de nossas pesquisas como saberes necessários (e, portanto, no limite, normativos) para a ação prática do professor em sala de aula. Um estudo das relações — tão complexas e intermediadas por elementos de natureza tão diversificada — entre os resultados das pesquisas no campo da Educação Matemática e as necessidades incontornáveis da prática escolar efetiva não faz parte dos nossos objetivos e nem nos alcança realizar neste trabalho. O nosso entendimento — que se assenta numa percepção mais realista do papel dos estudos e pesquisas que utilizamos como suporte — é o de que o conhecimento que descrevemos, por estar profundamente envolvido nas questões que se colocam para o professor em sua prática de ensino escolar, deve ser objeto de consideração cuidadosa nos processos de formação do professor. De forma análoga, nosso estudo não permite a conclusão de que os conhecimentos que apresentamos como envolvidos nas questões que se colocam para o professor em sua prática docente sejam identificados com os conhecimentos efetivamente mobilizados nessa prática. Na nossa concepção, o processo concreto de educação escolar básica em Matemática desenvolve-se sob condições que envolvem não apenas saberes, mas, também, não-saberes da prática profissional docente (MOREIRA; DAVID, 2003). Assim, do mesmo modo que não consideramos os conhecimentos envolvidos nas questões da prática como estritamente necessários para que o professor desempenhe adequadamente suas atividades docentes na escola (pois isso implicaria a aceitação do postulado de que a prática do professor não pode passar por outros caminhos), também nosso estudo não

ISBN 978-85-89082-23-5

permite afirmar que eles sejam, em sua totalidade, efetivamente mobilizados na prática docente escolar.

Um trabalho mais amplo está sendo elaborado a partir de estudos e pesquisas em que se utilizam fontes e instrumentos de natureza diversificada: livros didáticos escolares e livros destinados a professores do ensino básico; documentos relativos ao curso de licenciatura em Matemática da UFMG (ementas, programas e referências bibliográficas de cada uma das disciplinas); entrevistas com os professores das disciplinas do curso de licenciatura da UFMG nas quais o tema Números é abordado; análise dos textos utilizados como referência básica nas disciplinas do curso de licenciatura da UFMG e, finalmente, de um modo bem amplo, mas seletivo, a literatura de pesquisa no campo da Educação Matemática. Neste texto, entretanto, não exploramos todas as fontes e instrumentos citados.

Os números racionais: formação na licenciatura e questões da prática

Do ponto de vista da preparação do futuro professor para o trabalho pedagógico de construção dos racionais positivos nas salas de aula da escola, o olhar que o processo de formação projeta sobre Q pode ser submetido a fortes questionamentos. Ao longo da formação matemática na licenciatura, o conjunto dos números racionais é visto como um objeto extremamente simples, enquanto as pesquisas mostram que, em termos da prática docente, a sua construção pode ser considerada uma das mais complexas operações da Matemática escolar.

> Os conceitos associados aos números racionais estão entre as idéias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo dos seus oito primeiros anos de escolarização[4]. A importância desses conceitos pode ser vista a partir de diferentes perspectivas: (a) do ponto de vista prático, a habilidade de lidar com esses conceitos aumenta enormemente a capacidade da criança de compreender e manejar uma série de situações e problemas dentro e fora da escola; (b) de uma perspectiva psicológica, os números racionais constituem um cenário rico para um contínuo desenvolvimento intelectual; e (c) do ponto de vista da matemática, o entendimento dos números racionais provê os fundamentos sobre os quais as operações algébricas elementares podem ser desenvolvidas. (BEHR et al, 1983, p.91-92)*[5]

---

[4] presecondary school years, no original em inglês (USA).

[5] As citações marcadas com o símbolo * são traduções nossas de trechos de publicações em língua estrangeira (inglês, francês ou espanhol)

Da perspectiva da nossa análise neste trabalho, um dos aspectos fundamentais que distinguem as construções formais de Z, Q e R — a partir de N, Z e Q, respectivamente — das sucessivas extensões dos conjuntos numéricos que se desenvolvem no processo de escolarização básica é o fato de que essas construções da Matemática acadêmica visam a produzir uma abstração que expresse formalmente as características “essenciais” de um objeto que, a menos da construção formal, já é, de certo modo, conhecido. De fato, as várias construções de R a partir de Q têm em comum a qualidade de expressar o que já se sabia ser “essencial” em R, ou seja, a sua estrutura de corpo ordenado completo. É por isso que não interessa o que seja cada elemento (se um corte de Dedekind, uma classe de equivalência de seqüências de Cauchy, etc). Elon Lima comenta da seguinte maneira a apresentação dos reais, que desenvolve em seu livro *Curso de Análise* (vol.1):

> Frisamos, porém, que nosso ponto de vista coincide com o exposto na p.511 de [Spivak]:
> ‘É inteiramente irrelevante que um número real seja, por acaso, uma coleção de números racionais; tal fato nunca deveria entrar na demonstração de qualquer teorema importante sobre números reais. Demonstrações aceitáveis deveriam usar apenas o fato de que os números reais formam um corpo ordenado completo [...]’
> Assim, um processo qualquer de construção dos números reais a partir dos racionais é importante apenas porque prova que corpos ordenados completos existem. A partir daí, tudo que interessa é que R é um corpo ordenado completo (LIMA, 1976, p.47-48).

As extensões numéricas que se operam na escola são de natureza totalmente diferente, já que o conjunto numérico e a estrutura que resultam do processo de extensão apresentam-se como um universo genuinamente novo para o aluno, e isso constitui um elemento fundamental na conformação da prática docente, no que se refere ao tratamento didático-pedagógico das várias etapas desse processo. Por exemplo, no caso da ampliação dos naturais aos racionais positivos, o professor tem que levar em conta que a criança, até certa altura da sua vida escolar, apenas reconhece, como números, os inteiros positivos, isto é, 1, 2, 3 etc. Como veremos detalhadamente mais adiante, a Matemática escolar tem que operar com os significados concretos das frações e de outras interpretações, para que o aluno alcance, eventualmente, a idéia abstrata de número racional, mas esse processo de construção da abstração não tem como resultado apenas a demonstração da possibilidade de se exibir, formalmente, um conjunto com as características “essenciais” (e já concebidas) dos racionais. Ao contrário, este conjunto numérico ampliado, visto em sua totalidade como um objeto, assim como as relações entre seus elementos (os *novos* números), as *novas* formas de representação, a *nova* ordem, as *novas* operações e suas *novas* propriedades, tudo isso é conhecimento *novo* a ser processado e, eventualmente, assimilado.

Em nenhuma das disciplinas obrigatórias do atual currículo (implantado a partir de 1987) do curso diurno de licenciatura da UFMG se faz, como no currículo anterior se fazia, a construção formal de Z, Q ou R, referida anteriormente. Entretanto, como vimos no trecho citado acima, a abordagem atual que descreve R como um conjunto (cuja existência é postulada, ao invés de demonstrada, como na construção de Dedekind) onde estão definidas duas operações satisfazendo aos axiomas de corpo ordenado completo, pressupõe conhecidas, como nas construções formais, as propriedades “essenciais” do conjunto dos números reais. As referências ao conjunto dos racionais ao longo do curso, em qualquer de suas disciplinas, são feitas considerando-o como uma estrutura simples e conhecida**:** Q não passa do “menor” subcorpo de R, aquele que contém apenas os números da forma $a.b^{-1}$, onde a e b são inteiros, $b \neq 0$ e b^{-1} é o inverso (multiplicativo) de b.

Na disciplina Iniciação à Matemática, que pertence tanto ao currículo da licenciatura quanto ao do bacharelado, desenvolve-se (dependendo do professor, pois isso não consta da ementa) uma discussão sobre os racionais, tomando-se como referência, nestes casos, o livro de Ivan Niven, cujo título é *Números: Racionais e Irracionais.*

Niven apresenta a seguinte definição, na primeira página do capítulo 2, cujo título é *Números Racionais* (o capítulo 1 trata dos naturais e dos inteiros): “um número racional (ou uma fração ordinária) é um <u>número</u> que pode ser colocado na forma a/d, onde a e d são inteiros e d não é zero”. (NIVEN, 1984, p. 30, grifo nosso).

Observe-se que a definição acima pressupõe a noção de número já estendida a um contexto mais amplo do que os naturais ou inteiros. A idéia é a de que, dentre os números (uma noção já concebida, o autor se refere, neste contexto, a números reais), existem aqueles que podem ser colocados na forma a/d, (a e d inteiros, d não nulo); estes são os racionais. Fica subentendido que existem, também, números que não podem ser colocados na forma citada, pois, do contrário, a definição não faria sentido.

ISBN 978-85-89082-23-5

Em seguida, passa-se ao estudo da representação decimal dos racionais, provando-se que todo número racional tem representação finita ou periódica e, reciprocamente, que toda forma decimal finita ou periódica representa um número racional. O capítulo termina com a seguinte interrogação: que tipo de número seria uma forma decimal infinita não periódica? Remete-se o leitor ao próximo capítulo onde serão estudados os irracionais.

Há mais no estudo dos números que é desenvolvido nessa disciplina, mas, no momento, o interesse é mostrar que a análise dos racionais, que é feita na Iniciação à Matemática, centra-se exclusivamente na forma de representação (decimal). O que seja o objeto número racional, isso é suposto conhecido.

Na disciplina Fundamentos de Análise — específica para a licenciatura, em que se faz um estudo dos reais e, portanto, em princípio, poder-se-ia esperar algum tratamento mais detalhado para os racionais — dois livros têm sido a referência básica nos últimos cinco anos: *Análise Real, V.1*, de Elon Lages de Lima, e *Análise I*, de Djairo G. Figueiredo.

No primeiro, apresentam-se os racionais, no capítulo 1, da seguinte maneira: $Q = \{m/n;\ m,n \in Z,\ n \neq 0\}$(LIMA, 1989, p.8). Em seguida, prova-se que Q é enumerável. Algumas páginas à frente, no capítulo 2, o autor comenta: “Nada do que foi dito até agora permite distinguir R de Q, pois os números racionais também constituem um corpo ordenado. Acabaremos agora nossa caracterização de R, descrevendo-o como um corpo ordenado completo, propriedade que Q não tem” (LIMA, 1989, p.16).

Em seguida, deduz-se, a partir da inclusão do postulado da completude, que existe número (real) que não é racional e, no capítulo seguinte, inicia-se o estudo das seqüências de números reais.

Em *Análise I*, logo na página 3, capítulo 1, Figueiredo apresenta os símbolos N, Z e Q, para os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais, respectivamente, escrevendo:

Q - conjunto dos números racionais, isto é, dos números da forma p/q, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$ (FIGUEIREDO, 1975). O autor observa, então, que não está no programa do livro fazer um estudo sistemático desses três conjuntos numéricos. E faz, de passagem, o seguinte comentário:

> Como o leitor deve observar, os números racionais nada mais são que as frações da Aritmética do curso fundamental. Quando lhe ensinaram

ISBN 978-85-89082-23-5

> a operar com as frações, a rigor, o que se estava fazendo era definir as operações de adição e multiplicação. As propriedades (1) a (6) dessas operações, enunciadas a seguir[6] ,apesar de usadas freqüentemente, não receberam maior atenção. Isto parece explicável, porque os números inteiros gozam de quase todas essas propriedades. E, na verdade, se construirmos os racionais a partir dos inteiros, tais propriedades podem ser deduzidas facilmente de propriedades análogas para Z. Também foram ensinadas relações do tipo 8/6 = 4/3 e 3/1 = 3. No fundo essas duas relações são escritas por definição e, portanto, não se demonstram. A primeira define a relação de igualdade entre as frações, isto é, p/q = r/s se ps = qr. A segunda igualdade faz uma identificação do conjunto Z com um subconjunto de Q, isto é, com o subconjunto $\{p/q \in Q:\ q = 1\}$. Portanto, com um certo abuso de linguagem, dizemos que Z é um subconjunto de Q. (FIGUEIREDO, 1975, p.3)

Passa-se em seguida ao estudo da noção de ínfimo e supremo em um corpo ordenado e define-se R como um corpo ordenado onde vale o seguinte postulado (de Dedekind): *todo subconjunto não vazio, limitado superiormente, tem supremo.*

Figueiredo descreve, no breve trecho citado acima, as idéias fundamentais envolvidas no processo de construção formal dos racionais a partir dos inteiros. Entretanto, como ele não se propõe à tarefa de desenvolver a construção em detalhes, deixa implícita uma série de identificações que, do ponto de vista da nossa análise, consideramos interessante explicitar. Assim, para referência, apresentaremos, de forma um pouco mais detalhada, um esboço da construção a que ele se refere, estabelecendo a correspondência do processo com os comentários de Figueiredo (para maiores detalhes, dentro de uma abordagem mais geral, ver, por exemplo, Lang (1972, p.50-54)):

1. Define-se em Z x Z* a seguinte relação de equivalência: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$.

Note-se a idéia de equivalência de frações, com a substituição da fração a/b pelo par ordenado (a,b). Nos termos de Figueiredo: "*também foram ensinadas relações do tipo 8/6 = 4/3 e 3/1 = 3. No fundo essas duas relações são escritas por definição e, portanto, não se demonstram. A primeira define a relação de igualdade entre as frações, isto é, p/q = r/s se ps = qr*".

2. Define-se Q como o conjunto das classes de equivalência da relação ~, isto é, Q é o conjunto $(Z \times Z^*) / \sim$

[6] propriedades que caracterizam a estrutura "corpo" (esclarecimento nosso).

ISBN 978-85-89082-23-5

Assim, um número racional é um conjunto de frações equivalentes, ou seja, *“os números racionais nada mais são do que as frações da Aritmética do curso fundamental”*.

3. Definem-se a soma e o produto a partir dos representantes das classes de equivalência e mostra-se que a definição é “boa”, isto é, o resultado não depende da escolha dos representantes: $(a,b) + (c,d) = (ad+bc, bd)$ e $(a,b) \times (c,d) = (ac,bd)$.

Essas operações possuem seus elementos neutros, satisfazem a propriedade comutativa, associativa, etc, como decorrência imediata da definição e do fato de que essas propriedades valem para os inteiros. A existência do inverso multiplicativo não decorre, evidentemente, da propriedade correspondente para os inteiros, mas segue imediatamente da definição de produto dada acima. Assim, “*quando lhe ensinaram a operar com as frações, a rigor, o que se estava fazendo era definir as operações de adição e multiplicação. As propriedades (1) a (6) dessas operações, enunciadas a seguir, apesar de usadas freqüentemente, não receberam maior atenção. Isto parece explicável, porque os números inteiros gozam de quase todas essas propriedades. E, na verdade, se construirmos os racionais a partir dos inteiros, tais propriedades podem ser deduzidas facilmente de propriedades análogas para Z”*.

4. Finalmente, define-se $Z_0 = \{(a,1), a \in Z\}$ e uma função $f : Z \rightarrow Z_0$ pondo $f(x) = (x,1)$. Prova-se que f é uma bijeção que preserva as operações, isto é, um isomorfismo que identifica a estrutura de Z com a de Z_0, (esta última, “herdada” de Q).

Como Figueiredo coloca, *“a segunda igualdade faz uma identificação do conjunto Z com um subconjunto de Q, isto é, com o subconjunto $\{p/q \in Q: q = 1\}$. Portanto, com um certo abuso de linguagem, dizemos que Z é um subconjunto de Q.”*

Um aspecto que chama a atenção numa construção desse tipo é a profusão de identificações entre objetos que, da perspectiva da Matemática escolar, não é conveniente identificar. Perseguindo-se a idéia de captar aquilo que é “essencial” — do ponto de vista da Matemática científica — certas diferenças tornam-se irrelevantes, seguindo-se a partir daí as identificações. Por exemplo, a passagem ao quociente na etapa 2 identifica, num lance, todas as interpretações escolares “concretas” (os chamados “subconstrutos”) do conceito de número racional, “unificando-os” num construto puramente formal: número racional é uma classe de equivalência de pares

ISBN 978-85-89082-23-5

ordenados de inteiros. Entretanto, Behr et al. assinalam enfaticamente a importância do papel dessas diferentes interpretações da noção de número racional no processo escolar de apreensão do conceito:

> Análises dos componentes do conceito de número racional (Kieren, 1976; Novillis, 1976; Rappaport, 1962; Riess, 1964; Usiskin, 1979) sugerem claramente um motivo pelo qual uma compreensão completa do conceito envolve um formidável esforço de aprendizagem. O número racional pode ser interpretado pelo menos de seis maneiras diferentes (subconstrutos): comparação parte-todo, decimal, razão, quociente indicado, operador e medida de quantidades contínuas ou discretas. Kieren (1976) defende a idéia de que um entendimento completo dos racionais requer não apenas o entendimento de cada subconstruto separadamente, mas também de como eles se inter-relacionam. Análises teóricas e evidências empíricas recentes sugerem que diferentes estruturas cognitivas podem ser necessárias para lidar com os diferentes subconstrutos.
> Vários estudos identificaram estágios no pensamento das crianças sobre os racionais, examinando a gradual diferenciação e progressiva integração de subconstrutos diferentes. Um dos aspectos importantes desses estudos tem sido observar se sujeitos que têm performance num certo estágio em tarefas relativas a um dado subconstruto apresentam resultados no mesmo nível em tarefas envolvendo outro subconstruto. (BEHR et al., 1983, p. 92-93. Referências no original)*

Um outro aspecto que se destaca nessa visão formal do conjunto dos racionais refere-se às operações. Assim como os diferentes subconstrutos associados ao conceito de número racional ficam subsumidos na forma abstrata de um conjunto quociente, os significados das operações se eludem nos algoritmos que as definem. De fato, as definições formais das operações com os racionais não passam de algoritmos para o cálculo dos resultados, e as propriedades se deduzem, imediatamente, como observa Figueiredo, a partir de suas análogas, que já estão estabelecidas entre os inteiros.

No entanto, em termos dos significados, as conexões entre as operações nesses dois campos numéricos não se mostram de modo tão claro. Por exemplo, por que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, enquanto $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$? Sabendo-se que $3\times(2+5) = 3\times2 + 3\times5$, por qual motivo deveríamos esperar que $\frac{2}{3}\times(\frac{4}{5}+\frac{6}{7})$ fosse igual a $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\times\frac{6}{7}$?

Em outras palavras, por que a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição deve permanecer válida entre os racionais? É claro que poderíamos estender as operações para os racionais de modo que algumas das propriedades não permanecessem válidas. Por que a extensão é feita de um modo e não de outro? E por que permanecem válidas todas as propriedades fundamentais?

Se o objetivo é a formação matemática do professor do ensino básico, a elaboração de respostas para essas perguntas conduz, necessariamente, a uma discussão a respeito dos significados das operações entre os naturais, e como elas devem ser estendidas para os racionais de modo que, no processo, esses significados também se generalizem para o novo campo numérico. A argumentação formal — quando restritas aos inteiros, as operações em Q produzem os mesmos resultados que as operações definidas em Z; as propriedades das operações em Q decorrem imediatamente das definições e das propriedades análogas em Z — pressupõe já definidas as operações em Q e apenas confirma o fato de que essas definições são "boas", desde que o objetivo (predeterminado) seja manter válidas as propriedades (comutativa, associativa, distributiva, etc.). Da perspectiva da prática profissional futura do licenciando, entretanto, nota-se claramente a insuficiência e a inadequação dessa forma de ver as relações entre os inteiros e os racionais. Reduzido a essa forma, o entendimento do processo de extensão dos campos numéricos pode projetar uma visão da Matemática como um jogo lógico cujas regras são dadas arbitrariamente quando, de fato, para o processo de escolarização básica em Matemática, o que interessa enfatizar é que as definições das operações e as propriedades mantidas no novo campo são essas — e não outras — porque a utilização empírica dos novos números impõe isso e não por uma decisão arbitrária ou por alguma imposição de natureza puramente lógica e "interna" à Matemática. Morris Kline comenta essa questão do seguinte modo:

> Quando usamos a adição de frações em situações reais, para somar $1/2$ com $1/3$, por exemplo, nós reduzimos ambas a sextos e então somamos $3/6$ com $2/6$ para obter $5/6$. Entretanto, quando multiplicamos frações, multiplicamos os numeradores e os denominadores de modo que $1/2 \times 1/3 = 1/6$. Poderíamos somar frações somando os numeradores e os denominadores para obter $1/2 + 1/3 = 2/5$. Por que não usamos esse método? É mais simples, mas não se adapta às situações empíricas. Como outro exemplo, poderíamos considerar o produto de matrizes. O uso que se faz das matrizes requer que a multiplicação seja não comutativa, embora fosse possível definir uma multiplicação comutativa de matrizes. Uma vez que a multiplicação deve ser não comutativa, os fundamentos lógicos da teoria se ajustam a esse fato. Portanto, a lógica não dita o conteúdo da Matemática; o uso é que determina a estrutura lógica. (KLINE, 1974, p.51)*

ISBN 978-85-89082-23-5

À medida que se ampliam os campos numéricos e se estendem as operações para os novos conjuntos, os significados dessas operações vão tomando um sentido mais amplo e mais geral e, talvez se possa dizer, mais algébrico. Algumas noções associadas a esses significados permanecem, enquanto outras (por exemplo, a identificação da idéia de multiplicação com a de uma soma iterada) vão sendo progressivamente superadas. Outras, ainda, são simplesmente abandonadas como, por exemplo, a ordem linear, quando se passa dos reais aos complexos. O estudo da literatura de pesquisa que fizemos nos indica que as questões que se colocam para o professor da escola — que vai desenvolver, junto com seus alunos, as diferentes etapas desse processo de expansão dos campos numéricos — não se referem às definições que apresentam os resultados das operações ou às demonstrações formais da permanência das propriedades no campo ampliado. Ao contrário, referem-se, fundamentalmente, a uma compreensão das razões pelas quais as operações, com os novos números, devem ser efetuadas de um determinado modo e por que algumas propriedades permanecem válidas. Uma compreensão tal que permita ao professor propor e discutir com seus alunos uma questão central dentro do processo de escolarização básica em Matemática: como estender as operações dos naturais para os racionais positivos e quais as conseqüências dessa extensão?

Conclusão

A construção do conceito de número racional e o estudo das operações nesse campo numérico enfatizam diferentes aspectos e se apóiam em distintos valores conforme se adote a perspectiva da educação escolar ou a da Matemática científica. Enquanto esta última funde numa única expressão — a que sintetiza a essência abstrata do conceito, ou seja, aquilo que lhe dá identidade como objeto matemático científico — as variadas formas de se pensar concretamente a idéia de número racional, a Matemática escolar faz quase o caminho inverso. Como vimos, para o ensino escolar é fundamental “decompor” a idéia de razão de inteiros nas suas diversas formas de manifestação e explicitar as suas diferentes possibilidades de interpretação, uma vez que o processo de construção escolar de um conceito para número racional se desenvolve a partir da integração progressiva dos vários subconstrutos. Nesse sentido, tal conceito é uma

ISBN 978-85-89082-23-5

construção em processo e não um alvo dado e estático, a ser necessária e explicitamente atingido.

Da mesma maneira, na escola as operações com os racionais e seus significados se constroem a partir da análise de uma diversidade de situações concretas, nas quais se torna necessário reconhecer, comparar com o caso dos naturais e re-estabelecer certas relações entre os números, retirando-se, como conseqüência dos significados e do uso, a validade das propriedades. Estas, então, se ajustam aos significados das operações e não vice-versa. Para a Matemática acadêmica, por sua vez, todos os significados relevantes das operações estão impressos nas suas propriedades estruturais (postuladas ou deduzidas das definições formais das operações) e se constituem, então, nos instrumentos verdadeiramente objetivos a serem efetivamente utilizados, em detrimento das formulações menos precisas e das interpretações mais circunstanciais, próprias da Matemática escolar.

Em síntese, é como se a teoria da Matemática científica sobre os racionais resultasse da ação de um fortíssimo compactador que condensa — e, portanto, de certa maneira, esconde — uma variedade imensa de idéias matemáticas em alguns enunciados formais: as definições e os teoremas relativos às propriedades das operações.

Entretanto, é numa forma altamente descompactada, mas não necessariamente desorganizada — e que encerra, também, um grau de complexidade, mas uma complexidade própria da forma escolar — que o professor vai fazer uso de algumas dessas idéias na sua prática docente, ao longo do processo de Educação Matemática na escola básica. A compactação intensa e direcionada em seus objetivos opera, de fato, uma verdadeira metamorfose, de modo que o objeto escolar não pode ser identificado simplesmente com uma parte didatizada do objeto científico.

Por outro lado, a axiomática é, sem dúvida, uma forma importante de organizar e sistematizar o conhecimento matemático, mas serve a propósitos definidos que, muitas vezes, se chocam com os pedagógicos. A idéia dominante, entretanto, é a de que, fora da organização lógico-formal-dedutiva, o conhecimento matemático torna-se um amontoado de fatos dispersos, sem conexões e, portanto, sem o formato de uma teoria. A formação matemática na licenciatura se desenvolve orientada pelos valores conceituais e estéticos da Matemática acadêmica, assegurando, assim, em tese, um estatuto de formação teórico-científica. A articulação do processo de formação na licenciatura com a prática escolar é, então, concebida como uma tarefa a ser executada essencialmente fora do espaço da formação matemática.

O estudo que apresentamos procurou mostrar que a abordagem formal-lógico-dedutiva — nos termos em que se organiza a Matemática científica — não somente é insuficiente para a sistematização da Matemática escolar como é também, muitas vezes, inadequada.

Em suma, o que o estudo sugere é que a construção de uma articulação mais adequada do processo de formação do professor com a prática docente escolar demandaria uma concepção de formação que levasse em conta a especificidade do destino profissional do licenciado, tomando como referência central a Matemática na sua condição de disciplina escolar, ao invés de se tentar integrar à prática escolar uma formação específica orientada pela Matemática científica (o fracasso histórico das disciplinas integradoras reforça a hipótese de que tal formação possa não ser "integrável"). Isso pressupõe, evidentemente, o desenvolvimento, através de outros estudos e pesquisas, de uma compreensão aprofundada das relações entre Matemática científica e Matemática escolar e do papel de cada uma delas na prática docente escolar.

Referências

BALL, D.L.; COMITI, C. Preparing teachers to teach mathematics: a comparative perspective. In: BISHOP, A.; CLEMENTS, K.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LABORDE, C. (Ed.). **International Handbook of Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer, 1996. p.1123-1154.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational-Number Concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of Mathematical Concepts and Processes**. Florida: Academic Press, 1983. p.91-126.

BROMME, R. Beyond subject matter: a psychological topology of teachers' professional knowledge. In: BIEHLER, R. et al. (Ed.). **Didactics of Mathematics as a scientific discipline**. Dordrecht: Kluwer, 1994. p.73-88.

BROUSSEAU, G. **The theory of didactical situations in mathematics.** London: Kluwer, 1997.

FIGUEIREDO, D.G. **Análise I.** Rio de Janeiro: LTC; Brasília, UnB, 1975.

FIORENTINI, D. et al. Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n.36, p.137-160, dez. 2002.

ISBN 978-85-89082-23-5

GAUTHIER, C.; MARTINEAU, S.; DESBIENS, J.F.; MALO, A.; SIMARD, D. **Por uma teoria da pedagogia. Pesquisas contemporâneas sobre o saber docente.** Ijuí: Unijuí, 1998.

KLINE, M. **Why Johnny can´t add**: the failure of the new math. New York: Random House, 1974.

LANG, S. **Estruturas Algébricas**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico; Brasília, Instituto Nacional do Livro, 1972.

LIMA, E.L. **Curso de Análise.** Rio de Janeiro: IMPA; CNPq, 1976.

LIMA, E.L. **Análise Real**. Rio de Janeiro: IMPA; CNPq, 1989. v. 1.

MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetiké**, Campinas, v.11, n.19, p.57-80, 2003.

NIVEN, I. **Números**: Racionais e Irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

PEREIRA, J. E. D. **Formação de professores**: pesquisas, representações e poder. Belo Horizonte: Autêntica, 2000.

SCHOENFELD, A.H. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In: GROWS, D. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** New York: NCTM, 1992. p.334-370.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Cambridge, v.57, n.1, p.1-22, 1987.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Norwell, v.12, p.151-169, 1981.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.** New York: Academic Press, 1983. p.127-174.