ISBN 978-85-89082-23-5

Uma Perspectiva das Concepções de Calouros Universitários Sobre o Valor Absoluto de Números Reais[1]

A Perspective on the Conceptions of College Freshmen Regarding Absolute Value of Real Numbers

Raquel N. Moreira Brumatti[2]

Maria Lúcia L. Wodewotzki[3]

Resumo

Este artigo inicia-se com uma interpretação do papel do conceito de valor absoluto na Matemática universitária e com uma possível descrição de como os alunos aprendem tal conceito. O referencial teórico Ação-Processo-Objeto-Esquema (APOS) utilizado para descrever o desenvolvimento cognitivo é uma extensão das idéias de Piaget sobre abstração reflexiva, e permite-nos classificar as construções mentais presentes no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos avançados. Baseados num modelo provisório de aprendizagem do valor absoluto de números reais, os dados de entrevistas com calouros universitários são interpretados. Os resultados sugerem que o nível de abstração dos alunos participantes não lhes permite um entendimento adequado do conceito. Alguns dados também indicam que o trabalho em grupo e as representações gráficas são fatores relevantes em propostas de ações didáticas, pois parecem facilitar a construção de um conhecimento mais eficiente e significativo.

Palavras-chave: Teoria de aprendizagem. Construções cognitivas. Conhecimento matemático universitário. Valor absoluto.

Abstract

In this paper, we begin with a somewhat pedagogical statement about what we think is the role of the absolute value concept in the mathematical context, and we try to understand how a student learns this concept. The theoretical perspective of cognitive development is an extension of Piaget's ideas about reflective abstraction, and it allows one to describe the mental constructions present in a learning process of advanced mathematical concepts. Based on an initial cognitive model of how the absolute value may be learned, an attempt to interpret the interviewee's data using the Action-Process-Object-Schema (APOS) theoretical framework is made. There is evidence showing that the level of abstraction of these starting college students enables them to have an appropriate understanding of the absolute value. The results of the data analysis also suggest that graphic representations and cooperative learning are relevant factors for a pedagogical approach, because they seem to lead to more efficient and meaningful knowledge.

Keywords: Learning theory. Cognitive constructions. Undergraduate mathematical knowledge. Absolute value.

Introdução

O objetivo principal é apresentar uma perspectiva para análise de construção de conhecimento por um aprendiz supostamente capaz de utilizar um conjunto de técnicas e concepções da Matemática preestabelecidas, e verificar se tal conhecimento

[1] Digitalizado por Ana Paula Purcina Baumann e Marli Regina dos Santos.

[2] CEATEC, PUC-Campinas. brumatti@puc-campinas.edu.br

[3] IGCE - UNESP. mariallw@rc.unesp.br

corresponde às expectativas de aprendizagem no ensino superior. O estudo inicia-se pelo estabelecimento de valores de validade e de alcance do conceito de valor absoluto no contexto da Matemática do ensino superior, e também idealiza uma descrição de processos cognitivos realizados por aprendizes ao lidar com este conceito.

O papel do conceito no contexto matemático

O resgate histórico do conceito de valor absoluto, feito por Gagatsis e Thomaïdis (1993), atribui suas origens à fase de formalização de conceitos matemáticos avançados, como o de função contínua. Os autores identificam quatro fases na evolução do conceito de valor absoluto. Nas duas primeiras, ele aparece, implicitamente, nas estimativas de erros em cálculos de soluções de equações, fases estas em que a noção de número é a de medida de quantidades. Esse conceito se explicita à medida que o conceito de número real evolui do empírico para o formal. Cauchy, pesquisador desta fase, em seus primeiros ensaios sobre Análise Real, em 1821, formalizou o conceito, chamado por ele de "valor numérico", definindo-o, deduzindo e aplicando as propriedades, particularmente, às suas técnicas de épsilons e deltas. Cauchy também relacionou o valor absoluto de um número real ao de módulo de números complexos, já então conhecido, ambos significando distância de um número à origem, motivo de uma das atuais representações, $| x | = \sqrt{x^2}$.

O uso que Cauchy, e posteriormente Weierstrass, fazem do conceito e de suas propriedades constituem a teoria atual do valor absoluto, imersa nas disciplinas do ensino superior Análise Real Contínua e Numérica.

No campo da Análise Contínua, é essencial que um indivíduo interprete o valor absoluto da diferença entre dois números *a* e *b*, $| a\text{-}b |$, como distância entre tais números, que entenda sob quais condições tal distância é invariante, e associe o símbolo $| a\text{-}b | < r$ a intervalos abertos centrados em *b* ou *a*, e que realize majorações com a desigualdade triangular $|a+b| \leq |a|+|b|$. Tais habilidades devem estar articuladas àquelas que permitem discutir condições de existência ou reconhecer tipos de solução de equações e inequações. Para isto, é necessário que se entendam e se usem elementos lógico-matemáticos, como quantificadores e conectivos. Essas habilidades e concepções estão presentes, segundo Tall (1995), no nível do "pensamento matemático elementar", onde se processa a compreensão inicial de conceitos considerados avançados no quadro teórico matemático.

No campo da Análise Numérica, estudam-se os métodos adequados à resolução de modelos matemáticos de situações do mundo real, com variáveis definidas em conjuntos numéricos discretos. Hoje, devido ao uso de recursos tecnológicos, e à expansão dos tipos de modelos usados por outras áreas do conhecimento, restabelece-se a discussão do erro em estimativas de valores. Nas estimativas, obtidas por regras operacionais, é importante controlar o grau de precisão, isto é, a ordem de grandeza do erro. Esta ordem de grandeza é expressa pelo valor absoluto da diferença entre dois limitantes da solução desejada, ou entre uma estimativa e a solução propriamente dita, caso esta seja conhecida. As habilidades e concepções deste nível de conhecimento estão presentes quando se faz uso de teorias Matemáticas, em áreas como as da Matemática Aplicada ou Engenharia.

Contudo, pode-se constatar (CHIARUGI et al., 1990; PERRIN-GLORIAN, 1995; BRUMATTI, 2001) que, em geral, os alunos não apresentam uma compreensão do conceito de valor absoluto compatível com as expectativas destas disciplinas, pois, aparentemente, no ensino superior, ele é (re) ensinado superficialmente, e nos mesmos moldes dos textos apresentados nos livros didáticos sobre o valor absoluto.

Sobre o ensino e a aprendizagem do valor absoluto

Na análise de alguns livros iniciais de Cálculo, Brumatti (2001) mostra que alguns autores enfocam o conceito de modo completo, ou seja, apresentam diversas representações, interpretações e aplicações, e verificam suas propriedades, embora estas estejam geralmente dispersas ao longo de seções distintas ou de listas de exercícios. Há autores que optam pela absoluta falta de citação do conceito, enquanto outros o citam, mas dão pouca atenção às suas aplicações. Às vezes, a apresentação do conceito é informal, evitam-se representações simbólicas e, até mesmo, o seu nome, o que sugere ser uma tentativa de se "deixar para mais tarde" o seu estudo.

A autora conclui que, de fato, tais abordagens não seriam apropriadas para orientar um aluno universitário a reorganizar o conhecimento, estabelecido em geral no ensino médio para, com sucesso, operacionar o valor absoluto, transpor o conhecimento

ISBN 978-85-89082-23-5

construído em uma dada situação a outras do contexto matemático ou, ainda, para orientá-lo na transposição de um conhecimento informal/intuitivo sobre distância ao conhecimento estabelecido pela Matemática.

Relativamente às pesquisas sobre a aprendizagem do conceito, estas restringem-se ao nível pré-universitário, à análise das dificuldades de alunos e das estratégias adotadas por professores, valorizando, em geral, o aspecto algébrico do conceito. Além disso, as poucas propostas apresentadas para o ensino do valor absoluto, em geral, não favorecem uma concepção ligada às raízes históricas do conceito, não exploram bem as características ou propriedades do valor absoluto, que se aplicam em outros conceitos, e não parecem se preocupar com aspectos que podem causar dificuldades na aprendizagem.

Entre os autores que tratam de problemas sobre as dificuldades dos alunos no entendimento de conceitos que, por sua vez, estão relacionados ao entendimento do valor absoluto, podem-se citar, entre outros, aqueles que justificam tais dificuldades em vista de o conceito de valor absoluto admitir várias definições (POLLAK,1987), e o aluno preferir lidar com caminhos únicos (PERRIN-GLORIAN,1995); estar historicamente ligado à formalização de conceitos avançados (GAGATSIS; THOMAÏDIS, 1993; DUROUX, 1983); apresentar-se antes de pré-concepções, e em uma linguagem Matemática que use de conectivos lógicos e/ou quantificadores (DUBINSKY e YAPARAKI, 2001; ROGERSON, 1994) e cuja manipulação apresente grandes dificuldades algébricas (CHIARUGI et al., 1990). E, ainda, há o fato de a função modular ($f(x) = |x|$), além de ser definida por partes, apresentar-se, às vezes, sob forma de função composta nas aplicações do conceito, isto é, $g(x) = | x-a |$ (BREIDENBACH et al., 1992).

Estas considerações e, também a nossa prática docente, sugerem que apresentação e compreensão inadequadas do valor absoluto vão se refletir em: dificuldades na aprendizagem do conceito de limite segundo Weierstrass; no entendimento do exemplo tradicional de função contínua, mas não-diferenciável; na dificuldade em transpor alguma concepção do conceito a situações-problema que envolvam propriedades preservadas por simetria, como no cálculo da primitiva da função $1/x$ ou de áreas de regiões planas e simétricas em relação ao eixo 0x.

ISBN 978-85-89082-23-5

A partir dessas considerações, buscou-se investigar quais concepções e construções de um aprendiz permitem avanços no processo de construção do conhecimento e, assim, propor estratégias de ação pedagógica que as estimule.

Uma Perspectiva do Processo de Construção do Conceito de Valor Absoluto

Duas perguntas orientaram as reflexões sobre quais estruturas cognitivas estão presentes ou são necessárias em processos de aprendizagem do valor absoluto:

- *Como um aluno constrói o seu entendimento do valor absoluto?*
- *Quais os componentes de um esquema mental e as inter-relações entre estes, presentes na aprendizagem, e a aplicação do conceito de valor absoluto?*

A interpretação de estruturas cognitivas baseia-se nas noções de *abstração reflexiva* e de *construções mentais* propostas por Dubinsky (1991) ao estender a teoria de aprendizagem de Piaget (1977) e Piaget et al. (1995) ao contexto da Matemática no ensino superior.

Conhecer é um processo de interações contínuas entre sujeito cogniscente e objeto(s) matemático(s), cujos resultados são assimilados ou acomodados em estruturas lógico-Matemáticas que, por sua vez, são utilizadas em, ou são passíveis de novas transformações. Concepções ou procedimentos mentais (chamados de construções) são fruto desses resultados, sobre os quais pode agir um mecanismo, a *abstração reflexiva* (PIAGET et al., 1995), que os induz a movimentos de equilibração e reorganização. A descrição da natureza da abstração reflexiva - coordenação, interiorização, generalização, reversão, encapsulação (DUBINSKY, 1991) - depende da conjunção de abstrações realizadas pelo sujeito sobre ou através de suas concepções.

O conhecimento de um indivíduo desenvolve-se quando ele realiza atividades ou procedimentos mentais com ou através de suas estruturas cognitivas. Em atividades mentais, a realização ou não de um ou outro tipo de construção (ação, processo ou objeto) evidencia a presença de um certo nível de concepção do conceito em estudo.

Um esquema mental do conceito em foco é uma coleção coerente de processos, objetos e outros esquemas cognitivos construídos, que são recuperados de maneira consciente ou não, reorganizados, coordenados a outros e expandidos para se trabalhar com uma situação dada (CLARK et al., 1997). Aqui, coerente, refere-se à maneira

ISBN 978-85-89082-23-5

própria de se decidir, implícita ou explicitamente, quais componentes fazem parte ou não de um esquema evocado para lidar com aquela situação.

A teoria de aprendizagem APOS (action-process-object-schema) (ASIALA et al., 1996), desenvolvida nessa linha, e que fornece o suporte teórico a esta pesquisa, tem como objetivos: compreender melhor como a Matemática pode ser aprendida; desenvolver e aprimorar técnicas para coleta, análise e avaliação de dados; criar e implementar propostas de ação didática. Nessa direção, é proposto um modelo cognitivo em que são explicitados tanto os níveis de concepções do aprendiz assim como as construções e as abstrações mentais usadas por ele ao lidar com o conceito em foco. A finalidade do modelo é a de esclarecer e aprimorar a epistemologia do conceito e a sua didática, através de ações pedagógicas que possam ampliar o mundo de experiências do aprendiz, para levá-lo a expandir e superar seus níveis de concepções.

O modelo proposto nesta pesquisa, sob a perspectiva APOS, admite que compreender o conceito de valor absoluto de um número é compreender uma relação funcional (função modular, no sentido matemático) que mede distâncias. Entende-se que:

- o sujeito utiliza-se de um esquema mental de números reais para construir a noção inicial de distância entre números e o zero; para isso, realiza uma ação de representar um número dado na reta real graduada, seguida de uma ação física (contagem de unidades da reta) ou operatória (cálculo da diferença entre o número e o zero). Identifica-se, nestes procedimentos, uma concepção empírico-geométrica de função modular, classificada como uma concepção-ação do conceito.
- o sujeito interiorizou as ações anteriores se está apto a realizá-las mentalmente, ou ainda, se as concebe como um processo mental dinâmico mais geral, que transforma números quaisquer em outros, sob uma lei que depende de sua posição relativa ao zero. Neste caso, o sujeito possui um nível concepção-processo do conceito.
- o sujeito exterioriza o seu entendimento da relação funcional quando pode exercer um controle consciente em sua concepção do processo, interiorizada, fase em que recorre ao uso coordenado de quantificadores e de conectivos lógicos (elementos de um esquema mental lógico-matemático) e ao uso de símbolos algébricos (elementos de um esquema algébrico). Estas habilidades evidenciam um nível objeto de concepção da função modular, assim como quando o sujeito pode descrever propriedades da função,

ISBN 978-85-89082-23-5

consegue transformá-la sob translações no plano, aplicando-a em situações Matemáticas nas quais o conceito é pertinente.

- o movimento contínuo de expansão da construção do conhecimento segue através de habilidades do indivíduo em generalizar e reverter processos, e em interiorizar os novos resultados destas construções mentais.[4]

Uma Investigação da Construção Cognitiva do Conceito de Valor Absoluto: Métodos e Procedimentos

A investigação buscou explicar "como" um aluno aprende o conceito de valor absoluto, evidenciando as construções mentais usadas e selecionando as que parecem favorecer aspectos positivos de aprendizagem. Complementa os estudos já realizados sobre o conceito, os quais procuram explicar "por que" e "onde" ocorrem concepções não adequadas, sob o ponto de vista histórico, metodológico e programático. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, pois o objetivo estabelece-se no âmbito da compreensão das ações humanas (práticas, crenças, linguagem, significados). Especificamente, após uma atividade escrita e analisada, realizaram-se entrevistas para se destacar "como" um aluno pensa, as formas de abstrair, as tendências ao interpretar e resolver questões, e as respostas aos estímulos para se reconstruir concepções, já que, escritas na linguagem matemática, escondem, em sua síntese, o caminho e as estratégias cognitivas utilizadas.

Desse modo, as técnicas adotadas da metodologia qualitativa foram observação participante e entrevistas semi-estruturadas com 47 alunos calouros, da disciplina de Cálculo I, do curso diurno de Análise de Sistemas da PUC-Campinas.

De início, os alunos resolveram, em sala de aula, em pequenos grupos de trabalho, questões matemáticas planejadas, com o objetivo de colocar em ação os esquemas e as construções mentais descritas no modelo cognitivo pressuposto. Outras questões foram incluídas para se discutir hipóteses de pesquisas revisadas. As respostas escritas das questões foram avaliadas considerando-se habilidades em usar alguma definição, e propriedades do conceito, e em escrever utilizando a linguagem matemática com clareza e organização lógica. Os registros do rascunho de cada aluno foram examinados para se perceber as opções e tentativas de resolução.

---

[4] Descrições explícitas da natureza das abstrações - coordenação, interiorização, generalização, reversão.

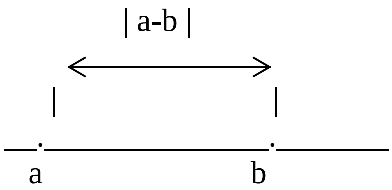
ISBN 978-85-89082-23-5

Para as entrevistas, foram selecionados alguns grupos e indivíduos isolados dessa classe, considerados os mais representativos. Assim, a amostra incluiu desde indivíduos que pareciam fazer uso de poucos esquemas cognitivos e de construções mentais simples, até os de concepções mais complexas, já que os resultados das análises deveriam representar concepções de toda uma classe de alunos.

Em relação às entrevistas, o objetivo era o de esclarecer e reavaliar as concepções do conceito nos âmbitos geométrico e algébrico e as construções cognitivas aparentemente presentes na atividade escrita, bem como esclarecer os caminhos e abstrações cognitivas distintas utilizadas. Esse trabalho compreendeu várias questões formuladas a partir da seguinte proposta:

ATIVIDADES PARA SALA DE AULA

Seja *r* uma representação da reta real graduada, com origem 0 e unidade de medida *u*. Dados dois números reais a e b, indica-se **a distância de a** até **b** por **d(a,b) ou | a-b |.**



Em particular, se b = 0, | a-0 | = |a| indica a distância de a até a origem 0. **|a|** é chamado o **"valor absoluto de a"**, pois também representa a ordem de grandeza absoluta do número a. **"Módulo de a"** é o termo mais comum para descrever o símbolo que, por expressões algébricas, é definido do seguinte modo:

$$|a| := \begin{cases} \text{se } a \geq 0, \text{ então } |a| = a \\ \text{se } a < 0, \text{ então } |a| = -a \end{cases}$$

Responda as questões abaixo, discutindo com seu grupo, e deixando registrados no rascunho, para cada exercício, suas idéias e tentativas.

Resultados da Investigação e Perspectivas Pedagógicas

a) Concepções em nível cognitivo-ação

A análise das respostas escritas dos alunos participantes sugere que a concepção-ação é a mais presente no pensamento dos alunos e se evidencia quando o significado de valor absoluto se expressa por construções mentais que:

- aplicam, em um número dado, uma regra memorizada;

ISBN 978-85-89082-23-5

- aplicam um número na definição analítica ou algébrica do conceito;
- contam unidades de medida sobre representações de números na reta real graduada.

Neste nível de ação, discussões de soluções de equações são feitas por testes pontuais.

As limitações do conhecimento neste nível de concepção refletem-se, por exemplo, na inabilidade em se coordenar, generalizar ou interiorizar construções como as presentes acima. No trecho abaixo, há evidências de que o aluno A utiliza construções do tipo ação para resolver | -3 | e $|\sqrt{2} - 2|$, e o aluno B, quando explica para quais valores reais a equação modular | x-1 | = -x +1 é verdadeira. A análise das entrevistas destes alunos sugere que ambos tinham um entendimento do conceito limitado ao nível cognitivo-ação.

1. Exercício em discussão: Resolva: a)|-3| ...... d)$|\sqrt{2} - 2|$ ....

[aluno A]: *Eu elevo ao quadrado –3 ...Raiz quadrada de 9 é igual a 3. ....*[$\sqrt{2}$ - 2] *já não daria certo porque vai deixar os quadrados dos números negativos... Como tem essa expressão aqui,* | $\sqrt{2}$ - 2 |= $\sqrt{6-4\sqrt{2}}$, *a gente não ia conseguir resolver. Acho que com calculadora daria a resposta certa. Assim, a gente fazia, mas.... que nem.....* |$\sqrt{2}$ *- 2| é igual ao próprio número ...Por definição ...a que foi dada* [na atividade]*... É difícil por....botar no genérico porque |-3| não é , não é o próprio número.... É o 3...*

[a pesquisadora] *Para você, o que é módulo de um número?*

[aluno A]: **...** *É a distância da origem até um certo número. Levando em consideração que raiz de 2 é 1,41...menos 2 dá 0,6. 0,6 em módulo dá 0,6. Seria a distância da origem até 0,6.*

2. Exercício em discussão: Decida se a afirmação é falsa ou verdadeira. Justifique com uma breve explicação.

$$|x-1| := \begin{cases} \text{se } x > 0, |x-1| = x-1 \\ \\ \text{se } x \leq 0, |x-1| = -x+1 \end{cases}$$

[aluno B]: *Nós colocamos assim ... Seria falso, pois se x ≤ 0, |x-1| seria 1-x. ... então eu acho que seria x... o maior valor no caso seria o x ... Ah! Se é menor ou igual* [a zero]*, então poderia ser...* [calcular o módulo de (x-1), significa]*...uma distância do valor x até o ponto –1 ... até o 1, né?! Eu acho que se x>0, está certo. Por exemplo, o 3 ... seria 2 os dois lados ... Se x<0, pegue -3. -3 com -1 daria 4 ... é, ficaria igual, então seria verdadeiro .. .*.[tempo pensando]... *Ponho o 1 ... É, esses valores em direção ao 1, para calcular a distância até o 1. Valores maiores que zero seria isso aqui. Vamos pegar ... 2/3 ... menos 1 ... fica -1/3. Em módulo, fica 1/3. Aí, no caso, fica diferente o resultado ... É, tá errado. A distância é 1/3 ...*

ISBN 978-85-89082-23-5

Seria falso, então, a primeira? ...Teria que generalizar isso, de uma forma.... 3/2 não funciona.... 2/3 funcionaria ... 1/2 funcionaria... É, eu gostaria de saber como você arrumaria [a resposta].

b) Concepções em nível cognitivo process

A concepção que parece favorecer um melhor entendimento do valor absoluto é a concepção-processo. Nesta, o entendimento do valor absoluto apresenta-se como:

➢ uma transformação de números reais quaisquer em números positivos, sem ser necessário exemplificar ou efetuar cálculos;

➢ uma transformação de números reais quaisquer com ação diferenciada ao agir sobre os positivos e os negativos.

Na discussão de equações modulares, uma concepção-processo é evidente quando:

➢ há uso de argumentos gerais, sem se efetuar todos os procedimentos da resolução que, às vezes, apenas no início da resolução, é pontual;

➢ há uso de processos mentais seletivos e iterativos (inúmeras repetições mentais das ações externas realizadas).

Como sugerem os trechos abaixo, um sujeito parece alcançar esta concepção ao coordenar sua concepção processo-geométrica de distâncias entre dois números a alguma concepção processo-algébrica da definição de valor absoluto.

[a pesquisadora] : *Pode explicar como entende a definição do módulo?*

3. [aluno C]: *Tudo? ... Usando o módulo ... Qualquer valor negativo o módulo transforma em positivo ... Qualquer positivo dentro é positivo ... e o zero é zero ... Para A negativo, transforma em –A, e para A positivo transforma em A, e para A zero ... zero.*

Nos protocolos desta entrevista, consta que o aluno não recorreu à folha de atividades para responder à questão, o que sugere não ser apenas uma releitura, sem aparente compreensão. As letras A maiúsculas são anotações próprias do aluno, ao falar.

4. [frases de um grupo A]:... *Por exemplo, | x | = 2...: Módulo de um número igual a 2 é o próprio 2 mesmo. ...ou o -2, né? ...Ah! esquecemos o -2!... É distância de x até o zero... Tem que deixar ele positivo, módulo deixa ele ... Porque distância ... É assim: ... o módulo "pega" o número e deixa ele positivo. É isso, porque a distância é sempre positiva, o módulo deixa sempre positivo.*

[a pesquisadora] *Não entendo bem o que* [a definição do] *módulo tem a ver com distância.*

ISBN 978-85-89082-23-5

[grupo A]:... *Distância do x ao zero ... Se x é positivo, fica aqui* [desenha o intervalo [0, x]numa reta]. *Então, esta é a distância, x .... x-0. Negativo, então aqui x-0 não pode ... Então, fica -x porque distância é positiva....Então é módulo* [como] *na definição. "Pega" o número e dá um resultado positivo, que é a distância dele até zero.*

[a pesquisadora]: *A frase "Não existe solução para equação |x| = -x" é falsa ou verdadeira?*

5. [grupo A]: [respostas rápidas]*Verdadeiro. Porque |x| é sempre maior ou igual a zero.... Porque, aí, o módulo de x vai dar negativo... Negativo*...[todos pensando].... *Ah! , mas e se o x for -5, tem jeito?... Se o x for –5 ... |-5| dá 5. ...e põe o -5 aqui, -(-5) dá 5.... É, oposto...E daí?... Se for positivo, daí seria verdadeiro... Se for negativo!* ....[Se for positivo] *daí seria falso. Se for negativo, daí seria o oposto ... Isso, se x $\geq$ 0, daí ia ficar falso. Se x< 0, daí verdadeiro.*

6. [grupo B]: *Acho que existe... É verdadeira!.... Para todo, é verdadeira para todo x maior que. Menor ou igual a zero, aqui vai dar, quer ver? Módulo....Nunca vai dar -x! Módulo de qualquer número, qualquer valor de x* [o módulo] *vai ser positivo ...Hum, número negativo tem que ser sempre menor ou igual a zero. E daí coloca o negativo e vai ficar positivo... É, vai ser -x. Hum! Agora eu 'tou na dúvida . Ah! eu acho que é falso. Se x for -2, por exemplo, aí vai ser menos o x, e é menos (-2). Ah é! Módulo de x vai ser oposto! .... Falsa, porque a solução é para todo x $\leq$ 0....Existe solução para isso porque x pode ser um número negativo. Aí, com menos, vai dar positivo.*

c) <u>Esquemas cognitivos adjacentes</u>

A análise sugere que concepções de outros esquemas mentais devem estar disponíveis para se alcançar um melhor entendimento do valor absoluto. Um deles seria o esquema de números reais, e os dados deste trabalho ora contestam a hipótese de que, no âmbito aritmético, o aluno está apto a obter o valor absoluto de um número qualquer (CHIARUGI et al.,1990), ora confirmam existirem dificuldades de ordem epistemológica na construção do entendimento da noção de "oposto", pela ligação direta à compreensão de número (DUROUX, 1983). Entender "oposto" como uma transformação numérica posiciona o esquema de funções como componente auxiliar fundamental, observado, entre outras, nas explicações da resolução de $|\sqrt{2} - 2|$:

7. [o aluno procurou explicar a solução, correta, dada pelo seu grupo]:**....** *A gente sabe que dentro do módulo é para resolver apenas a soma, né? Passa para positivo ou negativo. ....não tem que resolver*

aqui, pelo menos não pra mim. Então, no caso... você passa fora do módulo: todo mundo ficaria positivo.... agora não sei se pode....aí ficaria $\sqrt{2}$ + 2 .
[a pesquisadora]: *E, no caso de | 3-7 |, usando a mesma técnica?*
[o aluno]... *Vai ficar 3+7. Aí o resultado é outro... 10 ... é ... não ... Eu acho que o módulo serve ... apenas para tirar aquele sinal negativo de um número.*

8. [um aluno em discussão com o seu grupo]: ...*quando é número assim que dá pra calcular, a gente faz desse modo* [resolveu | 1,5-2 | = | -0,5 |], *mas* | $\sqrt{2}$ *- 2 |, se tornou uma expressão porque esse número aqui para mim não é inteiro, ele é bem quebrado* [mostra o valor na calculadora].
Este aluno concluiu que, $|\sqrt{2} - 2|$ poderá ter dois valores, $\sqrt{2} + 2$ e $\sqrt{2} - 2$.

Dados como os presentes acima sugerem que um aluno deve ter uma compreensão das operações aritméticas e do conceito de oposto no nível cognitivo de objetos, isto é, deve poder interpretá-los tanto como processos de transformação de números reais bem como na condição de resultados de processos específicos. É o que ocorre na adição, em que, por exemplo, 1+2 representa tanto a ação da transformação "soma", aplicada ao par (1, 2), quanto o resultado da transformação, 3. Na transcrição, o aluno percebe uma operação, mas não é capaz de conceber ($\sqrt{2}$ - 2) como a resposta da operação e, daí, como se conceber o oposto de algo que não é um número? Essas habilidades cognitivas parecem necessárias para se ampliar a concepção do conceito de oposto de um número de modo a percebê-lo como uma relação funcional.

E, como a definição analítica do valor absoluto exige selecionar para então concluir, os dados sugerem que um aprendiz deve possuir concepções de um esquema cognitivo lógico-matemático, como as de funções proposicionais (se P então Q). Pesquisas como as de Breidenbach et al. (1992) e alguns dos dados aqui apresentados (vide transcrições 3 e 4 acima) sugerem que o entendimento de funções definidas por partes é alcançado quando as ações de duas ou mais funções proposicionais distintas são interiorizadas e depois coordenadas para se obter um processo único de transformação. Tais habilidades cognitivas evidenciam a presença de uma concepção-processo do conceito de função.

Além disso, estudos na perspectiva APOS, como os de Dubinsky (1991), também indicam que o nível de concepção-processo deve estar presente ao se lidar com as estruturas de um esquema lógico-matemático. Isto porque concepções adequadas de "para todo" ou de "proposições verdadeiras" parecem depender da habilidade de se pensar iterativamente (característica do nível processo), possível para um sujeito capaz de interiorizar e de generalizar ações como, por exemplo, as que testam valores pontuais em proposições Matemáticas. Abaixo, há uma indicação de que a concepção de "algum" é construída por reversão das construções da concepção de "para todo", isto é, primeiro entende-se o todo para depois escolher-se o particular, característica de concepções-processo em esquemas cognitivos lógico-matemáticos.

[a pesquisadora] *Dê algum número cuja distância a –3 é menor que quatro.*
9. [grupo B]: ... *Algum número... Qualquer número? ....Meio. Não, qualquer número aqui* [refere-se ao intervalo desenhado por ela, de centro –3]....*que fosse menor que 4...Então pode ser qualquer número mesmo! ....Menor que 4 espaços...*
[pesquisadora] *....uma resposta para a questão....*
[o grupo B]: *Seria esse pedaço aqui, de 1 a –7.... É o próprio intervalo....Porque pode ser qualquer número, não é?... É, ele* [o valor de x] *está contido dentro desse intervalo.*

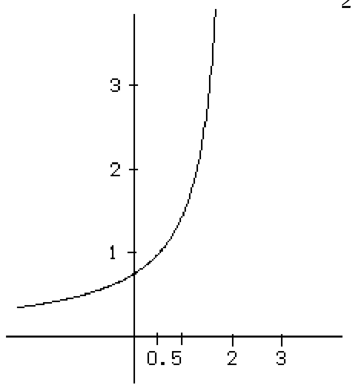
A bibliografia pertinente (DUBINSKY e YAPARAKI, 2001; BREIDENBACH, 1992; CHIARUGI et al., 1990; ZUFFI; 1999) tem sugerido que o nível processo de concepções não é construído apenas por anos de estudo. Construções processo precisam ser estimuladas, e as estratégias de ensino tradicionais não têm demonstrado serem eficientes na produção de tais estímulos.

Outros Fatores de Influência na Construção do Conhecimento

As questões de aplicação do valor absoluto restringiram-se ao estudo do comportamento de funções na vizinhança de um ponto do seu domínio. As informações, dadas por sentenças Matemáticas, foram apenas lidas e interpretadas pelos alunos sobre um trecho do gráfico de uma função qualquer, como no exemplo a seguir:

Observando o gráfico ao lado,
discuta e solucione o exercício:

Existe um valor d tal que,
se | x – 1/2 | < d, então, | f(x) – f(1/2) | < 1.



Dos dados das entrevistas destacaram-se dois fatores de influência no processo de aprendizagem: as representações gráficas e a interação social. O primeiro pareceu estimular os seguintes aspectos favoráveis à aprendizagem: comunicar as sugestões que uma sentença pode induzir no aprendiz; fornecer suporte à verbalização e à representação do pensamento; reorganizar os caminhos cognitivos; permitir formas de controle sobre objetos abstratos.

Entretanto, as análises dos dados também sugerem que os alunos não estão familiarizados com o uso das representações gráficas para sustentar seus argumentos ou suas construções mentais. Isso desfavorece o saber articular as abordagens numérica e/ou algébrica com a visual e, daí, a construção de imagens conceituais. Seria, então, útil incluir, nas propostas de ações didáticas, atividades para estimular o pensar sobre gráficos.

Pelo fato de terem sido realizadas entrevistas com grupos de alunos, alguns efeitos da interação social (ou a ausência desta) evidenciaram-se nas atitudes e no pensamento matemático destes alunos. Segundo Piaget (1977), é através da interação social que o aprendiz se liberta do seu ponto de vista egocêntrico, ao coordenar outros pontos de vista em relação ao seu. Isso propicia a construção de um sistema de relações cognitivas mais amplo e, assim, o desenvolvimento de sua compreensão.

As interações sociais presentes nas entrevistas sugerem os seguintes efeitos positivos no processo de aprendizagem: o desenvolvimento de uma conversação estruturada, com argumentações coerentes e seqüenciais; a reorganização e ampliação dos caminhos cognitivos; a reconstrução do entendimento; o estímulo à reflexão de soluções apresentadas; diminuição do "mal-estar" ou bloqueios cognitivos produzidos por não perceber como concluir uma tarefa.

Mesmo tendo sido percebido um avanço em termos de competências e habilidades, tanto Matemáticas quanto sociais, observou-se que, no decorrer do processo, as relações humanas tornam-se mais intensas e efetivas, de modo que o professor deve estar preparado para atuar como orientador e mediador de conflitos.

Considerações Finais

No caso do valor absoluto, as dificuldades apresentadas pelos alunos, ou mesmo o desinteresse em participar do processo de aprendizagem, parecem estar mais ligados às opções de abordagem do conceito do que à complexidade do próprio conceito. A prática pedagógica vigente tem buscado organizar, enriquecer e enfatizar aspectos algébricos no ensino deste conceito, minimizando interpretações, o que tem favorecido o desenvolvimento de concepções que não permitem a compreensão do conceito na sua totalidade.

Novas propostas de ensino para uma aprendizagem mais significativa devem se preocupar em orientar tanto a construção de concepções mais adequadas quanto a organização do trabalho dos alunos de forma alternativa, de modo a valorizar o desenvolvimento de aspectos socioacadêmicos favoráveis ao processo.

Nesse contexto, o presente trabalho se apresenta como modelo de como “decodificar” uma teoria, tornando-a acessível ao professor e ao estudante, para que possam “recriá-lo” juntos, sem desvalorizar a linguagem e o significado matemático. No seu desenvolvimento, atividades foram propostas para evidenciar as concepções dos alunos e sua maneira de organizar o pensamento matemático, bem como as construções cognitivas utilizadas ao lidar com o conceito. As primeiras análises dessas concepções foram orientadas por um modelo descritivo do processo de construção do conhecimento do conceito, baseado em pesquisas sobre o tema.

Seguiram-se entrevistas para refinamento das primeiras interpretações. Entre os resultados, admite-se que uma concepção do valor absoluto como uma transformação dinâmica entre números, cuja ação, representada por uma certa diferença entre um número e outro (x-a), e que tem um sentido geométrico (mede distância entre x e a), pode permitir ao aluno recorrer a procedimentos cognitivos mais eficientes e, assim, alcançar um entendimento mais amplo do conceito e suas aplicações.

Neste processo de construção de um melhor entendimento, a influência das interações sociais pode ajudar o indivíduo a refletir sobre, a avaliar e a exteriorizar suas concepções. Também destaca-se a importância das interpretações gráficas, o que pode favorecer o aluno a criar imagens conceituais, de grande importância no suporte ao raciocínio lógico-matemático.

Dessa forma, espera-se que, assim como foi tratado este conceito "menor", outros, nesta classificação, sejam discutidos de modo a propiciar o desenvolvimento de um pensamento reflexivo, criativo e crítico em relação a este tipo de conceitos, rumo à construção de um conhecimento mais eficiente e significativo.

Referências

ASIALA, M.; BROWN, A.; DEVRIES, D.J.; DUBINSKY, E.; MATHEWS, D.; THOMAS, K.A. Framework for research and curriculum development in Undergraduate Mathematics Education. In: KAPUT, J.; SCHOENFELD, A.H.; DUBINSKY, E.. (Ed.). **Research in Collegiate Mathematics Education II**. Washington, D.C.: MAS & MAA, 1996. p. 1-321. (Issues in Mathematics Education, v. 6)

BREIDENBACH,D.; DUBINSKY,E.; HAWKS, J.; NICHOLS, D. Development of the process conception of function. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 23, p. 247-285, 1992.

BRUMATTI, R.N.M. **Uma análise do processo de construção de conceitos: o caso do valor absoluto.** 2001. 198 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

CLARK, J.M.; CORDERO, F.; COTRILL, J.; CZARNOCHA, B.; DEVRIES, D.J.; ST JOHN, D.; TOLIAS, G.; VIDAKOVIC, D. Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule. **Journal of Mathematical Behavior**, Norwood, v. 16, n. 3, p.345-364, 1997.

CHIARUGI, I.; FRACASSINA, G.; FURINGHETTI, F. Learning difficulties behind the notion of absolute value. In: PME INTERNATIONAL CONFERENCE, 14., 1990, Mexico. **Proceedings...** Oaxtepex, México , 1990. v.3, p. 231-238.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991. p. 95-126.

DUBINSKY, E.; YAPARAKI, O. **On student learning of AE and EA quantification, in review.** Disponível em: <http://trident.mcs.kent.edu/~edd/publications>. Acesso em: abril de 2001.

DUROUX, A. La valeur absolue: difficulties majeures pour une notion mineure. **Petit X**, Grenoble, n.3, p. 43-87, 1983.

GAGATSIS A.; THOMAÏDIS, I. L'histoire de la valeur absolue et as transposition didactique. In: La Premiere Universite D'ete Europee, 1993, Montpellier, France. **Histoire et epistemologie dan l'education mathematique. Actes**...1993, p. 425-429.

PERRIN-GLORIAN, M.J. The absolute value in secondary school. A case study of "institutionalization" process. In: PME INTERNATIONAL CONFERENCE, 19., 1995, Recife. **Proceedings** ... Recife: UFPe, 1995. v.2, p. 74-81.

PIAGET, J. **Psicologia da inteligência**. Rio de Janeiro: Zahar, 1977. 178 p.

PIAGET, J. et al. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. 292 p.

POLLAK, H.O. Cognitive science and Mathematics Education a mathematician' perspective. In: SCHOENFELD, A.H. (Ed.). **Cognitive science and Mathematic Education**. Washington, D.C: LEA, 1987. p. 253-264.

ROGERSON, A. Theme Graphical & Symbolic representations from primary school to university: symbols as cultural communication – a historical and didactical perspective. In: INTERNATIONAL MEETING OF THE CIEAEM, 46., 1994, Toulouse. **Proceedings...** Toulouse, France: Université Toulouse, 1994. p.10-16.

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: PME INTERNATIONAL CONFERENCE, 19., 1995, Recife. **Proceedings...** Recife: UFPe, 1995. v. 1, p.61-75.

ZUFFI, E.M. **O tema "Funções" e a linguagem matemática de professores do ensino médio** – por uma aprendizagem de significados. 1999. 307 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.