ISBN 978-85-89082-23-5

A Geometria[1]

DESCARTES, René. *A Geometria.* Trad. Emídio C. de Queiroz Lopes. Lisboa: Editorial Prometeu, 2001.

Por Duelci Ap. de Freitas Vaz[2]

Recentemente traduzida e publicada em Portugal, a obra “A Geometria”, de René Descartes (1596-1650) merece, de nossa parte, Educadores Matemáticos e Matemáticos, atenção especial. Sua interpretação é, ainda hoje, motivo de debates científicos e interpretações surpreendentemente diferentes.

A Geometria de Descartes foi publicada inicialmente como um apêndice do Discurso do Método, em 1637. Seu conteúdo pode ser dividido em três partes, ou como está lá, na Geometria, em três livros. Livro primeiro: Dos problemas que se podem construir sem empregar mais do que círculos e linhas retas[3]. Livro segundo: Da natureza das linhas curvas. Livro terceiro: Da construção dos problemas sólidos ou mais que sólidos.

A seguir, comento as partes mais importantes da Geometria.

Como utilizar-se letras em Geometria

Para os geômetras, dos gregos até Viète (1540-1603), a variável representava um comprimento, o produto de duas variáveis, a área, o produto de três variáveis, o volume. Já o produto de quatro ou mais variáveis não tinha significado específico. Em sua Geometria, Descartes introduz o segmento unitário, tornando possível e dando significado a muitos problemas que eram intransponíveis, como é o caso da dimensionalidade, citado anteriormente. Descartes interpreta o símbolo a^2 como o comprimento de um segmento e não como área, como era tradição naquela época, e, assim, faz para as outras potências a^3, a^4, a^5, ...Introduz uma nova simbologia que

[1] Digitalizado por Marcílio Leão e Sinval de Oliveira.

[2] Doutorando em Educação Matemática da UNESP-Rio Claro, São Paulo. Bolsista do CNPq. E-mail: uelci.vaz@ig.com.br.

[3] Segmentos de retas.

permite um avanço no campo da notação, escreve *aa* ou a^2, a^3 ou *aaa,* e assim, sucessivamente. Escreve $a+b$ para a soma de dois segmentos de comprimentos *a e b*, a-b para a diferença, *ab* para o produto, *a/b* para o quociente, $\sqrt{a^2+b^2}$ para a raiz quadrada de $a^2 + b^2$ e $\sqrt{C.a^3-b^3+ab^2}$ para a raiz cúbica de $a^3-b^3+ab^2$, onde o *C* significa cúbica. Justifica que a^3 tem tantas dimensões quanto *abb* e, para se extrair a raiz cúbica de *aabb – b,* deve-se considerar que *aab* está dividida uma vez pela unidade e *b* multiplicada duas vezes pela unidade.

O método de Descartes e as operações

Descartes estabelece um método que, segundo ele, resolve todos os problemas em Geometria. O método pode ser resumidamente dividido em três partes, a saber: nomear, equacionar, construir.

Nomear: consiste em assumir que o problema já está resolvido e, a partir daí, nomear todos os segmentos conhecidos e desconhecidos necessários para a resolução do problema.

Equacionar: estabelecer uma equação envolvendo essas variáveis.

Construir: construir as soluções geometricamente, fazendo uso de régua e compasso. Ele aplica o seu método pela primeira vez para resolver o problema de Pappus, como veremos mais adiante.

Para fazer o produto de *a* por *b,* Descartes toma duas semi-retas com mesma origem *B* e marca em uma delas o segmento unitário *AB* (veja figura 1). Em seguida, marca nessa mesma semi-reta um segmento *BD* de medida *a* e, na outra semi-reta, o segmento *BC* de medida *b*. Traça um segmento de *A* até *C* e, em seguida, partindo de *D*, traça um outro segmento paralelo a *AC*, que encontra a outra semi-reta em *E*, determinando o segmento *DE*. Usando a semelhança ou o Teorema de Tales, conclui que *BE* vale *ab.*

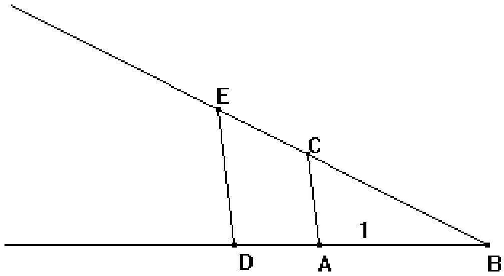

Figura 1

A divisão é realizada por um processo semelhante.

Para extrair a raiz quadrada, ele posiciona em linha reta o segmento unitário *FG* e o segmento *GH* de medida *K.* Determina a circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento *FH* (veja figura 2). Em seguida, constrói o triângulo retângulo, levantando uma altura a partir do ponto *G* até *I*, ponto que está sobre a circunferência do círculo construído, e usando a relação $GI^2 = GH \times FG = GH \times 1 = GH$, obtém a raiz quadrada.

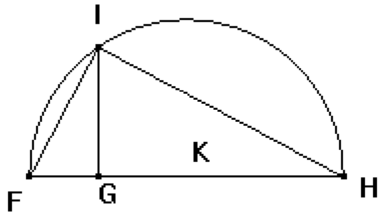

Figura 2

Problemas planos e a resolução de tais problemas

Descartes define problemas planos como sendo aqueles que podem ser resolvidos sem utilizar mais que linhas retas[4] e segmentos circulares traçados sobre uma superfície plana. Equivalente a isso, são os problemas que se reduzem a uma expressão da forma $z^2 - az = \pm b^2$. As raízes negativas ele chamava de falsas.

Resolução da equação $z^2 = az + b^2$, sendo *z* o termo ou segmento desconhecido. Primeiro, ele constrói o triângulo retângulo *NLM,* com $LM = b$ e $LN = a/2$, depois constrói o círculo de centro N e raio NL (veja figura 3). Prolongando a base[5] do

[4]Segmentos de retas.
[5]Seguindo a tradição grega, Descartes chama de base a hipotenusa do triângulo retângulo, pois os gregos construíam o triângulo retângulo apoiado sobre a hipotenusa. A palavra grega “hypoteínousa” (que dá a nossa hipotenusa) significa “a que se estende sob” (o ângulo reto).

triângulo *LMN* até *O*, de modo que *NO* seja igual a *NL*, então a linha *MO* é o segmento *z*.

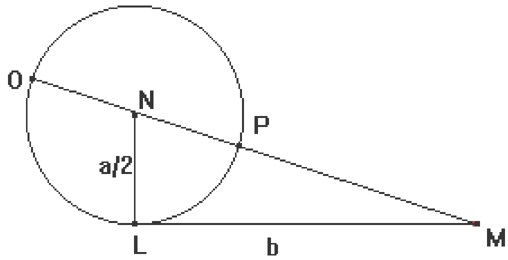

Figura 3

Descartes resolve outros tipos de equações do segundo grau usando construções com régua e compasso e enfatiza que essas construções podem ser obtidas por diversos outros meios e que os antigos não possuíam esse método, caso contrário, argumenta, não teriam escrito livros tão volumosos em que compilaram aqueles métodos já resolvidos.

O problema de Pappus[6] para quatro linhas

Esse problema era conhecido pelos antigos geômetras gregos. Euclides (300 a.C.) o resolveu para três e quatro retas. Pappus de Alexandria o generalizou para um número arbitrário de retas.

O Problema: Sejam dadas as quatro linhas[7] *AB*, *AD*, *EF*, *GH*, encontrar um ponto *C*, tal que, dados os ângulos *x*, *y*, *z*, *t*, linhas podem ser traçadas de *C* até *AB*, *AD*, *EF*, *GH*, fazendo ângulos *x*, *y*, *z*, *t*, respectivamente, tal que *CB.CF* = *CD.CH*, (veja figura 5). Mais ainda, traçar e conhecer a curva contendo tais pontos. Descartes inova o tratamento desse problema, reduzindo-o a duas variáveis, o que permite, atribuindo-se valores a uma delas, determinar os valores correspondentes da outra e, a partir daí, conhecer o lugar geométrico dos pontos.

[6] Pappus de Alexandria foi um geômetra grego, o último representante do gênio matemático, no começo do período de decadência da ciência helênica. Publicou uma importante obra em oito livros, denominada Coleção Matemática, cujo livro VII é também conhecido como o Tesouro da Análise.
[7] Retas.

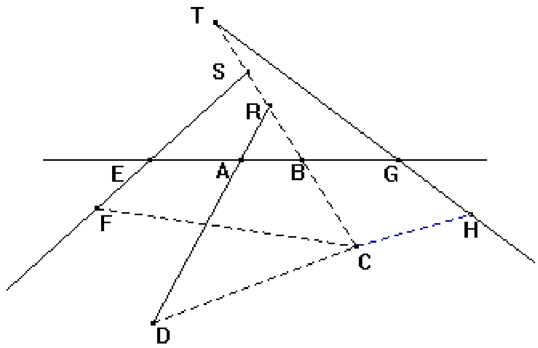

Figura 5

Na resolução, Descartes aplica seu método pela primeira vez.

Primeiro suponho o problema resolvido e, para sair da confusão de todas estas linhas, considero uma das dadas e uma das que há que encontrar, por exemplo, AB e CB, como as principais, às quais trato de referir todas as outras. Designe x o segmento da linha AB compreendido entre os pontos A e B; e seja CB designado por y; e prolonguem-se todas as demais linhas até que cortem também estas duas, prolongadas se necessário e se não lhes são paralelas; como se vê elas cortam a linha AB nos pontos A, E, G e a linha BC nos pontos R, S, T. Ora bem, como todos os ângulos do triângulo ARB são dados, a proporção que há entre os lados AB e RB é também dada, e indico-a como de z para b; de maneira que representando AB por x, RB será $\frac{bx}{z}$ *e a linha total CR será* $y+\frac{bx}{z}$*, pois o ponto B cai entre C e R; se R caísse entre C e B seria* $CR=y-\frac{bx}{z}$ *e se caísse entre B e R, seria* $CR=-y+\frac{bx}{z}$.

Analogamente, os três ângulos do triângulo DRC são dados e, por conseguinte, também a proporção que há entre os lados CR e CD, que indico como z para c, de modo que sendo $CR=y+\frac{bx}{z}$*, será* $CD=\frac{cy}{z}+\frac{bcx}{z^2}$.

Após isto, como as linhas AB, AD e EF são dadas em posição, a distância entre os pontos A e E também é dada e, designando-a por k, ter-se-á EB igual a k+x; que seria k–x se o ponto B caísse entre E e A; e –k+x se E caísse entre A e B. E como todos os ângulos do triângulo ESB são dados, e estabelecendo que BE está para BS assim como z está para d, tem-se: $BS=\frac{dk+dx}{z}$ *e a linha CS é* $\frac{zy+dk+dx}{z}$*. Se o ponto S caísse entre B e C seria* $CS=\frac{zy-dk-dx}{z}$*; e quando C cai*

> *entre B e S teremos* $CS = \frac{-zy + dk + dx}{z}$. *Além disso os três ângulos do triângulo FSC também são conhecidos, e portanto é dada a proporção de CS para CF, que é como z para e, e será* $CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}$. *Analogamente, AG ou l é dada e BG é l-x, pois que no triângulo BGT é também conhecida a proporção BG:BT=z:t, teremos:* $BT = \frac{fl - fx}{z}$, *sendo* $CT = \frac{zy + fl - fx}{z}$. *Agora, como a proporção de TC para CH está dada pelo triângulo TCH, fazendo-a como z para g, tem–se* $CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}$. *(p.21-23).*

Substituindo em *CB.CF =CD.CH*, obtemos uma equação do segundo grau em *x* e *y*. Atribuindo um valor a uma das variáveis, encontramos a segunda. Como isso pode ser feito indefinidamente, encontraremos uma infinidade de pontos e, a partir deles, poderemos construir a curva que representa o lugar geométrico. A resolução do problema de Pappus, dada por Descartes, é reconhecida como a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica. Reduzindo o problema a duas retas e, ao graduá-las, constrói-se o sistema de coordenadas, base da Geometria Analítica.

Posteriormente, no livro II, Descartes explora todas as possibilidades do problema de Pappus, quando proposto para quatro e três retas, mostrando que não se obterá mais que as seções cônicas. O caso para três retas é realizado considerando a terceira e quarta retas coincidentes e, nesse caso, a proporção fica *CB.CF = CD.CD*. O caso especial para cinco linhas é quando tomamos quatro delas paralelas e a quinta perpendicular a essas quatro. A estratégia básica é a mesma usada anteriormente. A generalização do problema de Pappus consiste em notar, como fez Descartes, que a distância de *C* a cada reta é uma expressão de duas variáveis do tipo $ax + by + c$ e, ao substituir na condição dada, teremos um produto, em cada membro, com *n* fatores para o caso de *2n* ou *2n –1* retas.

Curvas geométricas e curvas mecânicas

Descartes faz a seguinte distinção entre curvas geométricas e curvas mecânicas.

ISBN 978-85-89082-23-5

> *[...] por geométrico o que é preciso e exato, e por mecânico o que não o é, e considerando a geometria como uma ciência que ensina geralmente a conhecer as medidas de todos os corpos, não devem excluir-se as linhas por composta que sejam, enquanto possam imaginar–se descritas por um movimento contínuo, ou por vários que se sucedem, e em que os últimos estão inteiramente regidos pelos que os precedem; pois por este meio se pode sempre ter um conhecimento exato da sua medida.* (p.29).

Ele admite como curvas geométricas aquelas geradas por um movimento contínuo e regulado, aquele impulsionado por uma espécie de máquina, como a da figura 6. Todas as curvas descritas pelo movimento dos pontos *B, D, F, H,* ... são chamadas de geométricas. Descartes diz que outros tipos de máquinas podem ser considerados. A característica fundamental a todas as curvas geradas por essas máquinas é que elas são descritas por uma equação algébrica.

Curvas mecânicas: curvas que não podem ser descritas por uma equação algébrica. Mais tarde, Leibniz (1646–1716) chamou-as de transcendentes, curvas descritas por dois movimentos separados, somente pontos especiais podem ser construídos, curvas que algumas vezes são retas e outras são linhas curvas, pois a proporção entre linhas retas e linhas curvas não é conhecida. Exemplos de curvas mecânicas: a quadratriz, a espiral, a hélice.

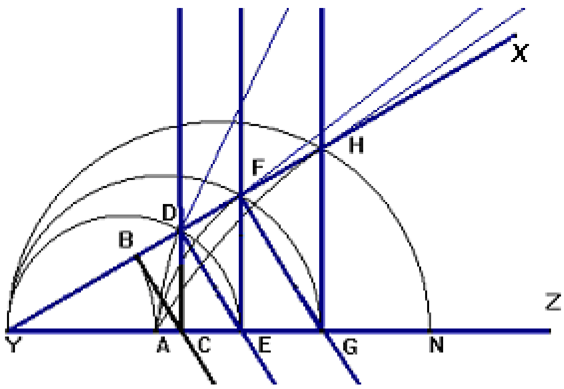

Figura 6

O método da normal (ou Tangente) de Descartes

Inicialmente, Descartes aplica o método da tangente à elipse e mais uma vez usa o seu método para resolver problemas em Geometria. Seja *CP* a reta perpendicular à elipse *CE* em *C* (veja figura 7). *MA* é um segmento de seu diâmetro, ao qual corresponde à ordenada *CM*. Sejam r o *latus rectum*[8] e q seu eixo transverso; então $x^2 = ry - (r/q)\ y^2$ é a sua equação. Por outro lado, temos $s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$, e, substituindo, teremos $y^2 + (\ qry - 2qvy + qvy + qv^2 - qs^2) / (q-r) = 0$; como *CP* deve ser normal, então o círculo com raio *CP* deve tocar a elipse em um único ponto *C;* logo, a equação acima tem raiz dupla e pode ser reescrita $(y-e)^2=0$, onde *e* é a raiz*:* $y^2 = 2ye - e^2$, comparando, teremos, $2e = (2qv - qr)/(q-r)=2e$. Resolvendo em v, obtemos $v = (2e(q-r)+qr)/2q$, e, como $e = y$, $v = (y(q-r)/q)+r/2$. Finalmente, resta construir a equação, que é a parte mais fácil.

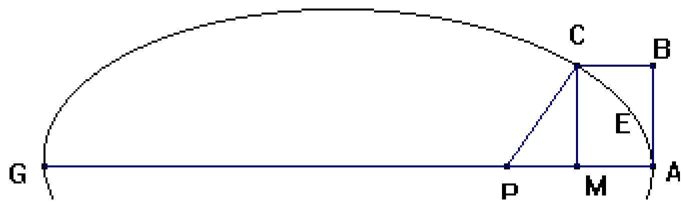

Figura 7

Análise completa das raízes de equações

Na seqüência, Descartes coloca as propriedades das equações polinomiais com coeficiente reais e suas raízes. Chama as raízes reais e positivas de verdadeiras e, as negativas, de falsas. A variável é chamada de quantidade desconhecida e o coeficiente da variável, de quantidade conhecida. A ausência de um termo da equação é indicada por um sinal asterisco (*). O grau da equação é, para Descartes, a dimensão. As propriedades apresentadas na Geometria são, em muitos casos, parecidas com aquelas que encontramos nos livros do terceiro ano do ensino médio. Entre essas propriedades, destaca-se a regra do sinal de Descartes. Para entender a regra do sinal de Descartes, tomemos o exemplo dado na Geometria, quando ele fala das raízes da equação: $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$.

> *A saber: podem existir tantas verdadeiras como de vezes os sinais + e – se encontrem trocados; e tantas falsas como de vezes se encontrem dois sinais + ou dois sinais – seguidos. Assim, na última, depois de* $+x^4$ *segue* $-4x^3$*, há uma variação de sinal de + para —; e depois de –*

---

[8]Lado reto. Segmento de reta com extremos sobre a elipse, e que passa pelo foco, perpendicular ao eixo da elipse.

> *$19x^2$ segue–se $+106x$ e depois de $+106x$ vem – 120, o que corresponde a outros dois câmbios, donde se conclui que há três raízes verdadeiras; e uma falsa, em virtude dos dois sinais – seguidos que antecedem $4x^3$ e $19x^2$.*(p.105).

A importância dessas propriedades é que elas são usadas por ele para resolver problemas de Geometria que recaem em equações algébricas. Isso fica evidente quando explica a invenção dos meios proporcionais, que é realizada através de construções envolvendo parábolas e círculos, como trisseccionar um ângulo, e quando demonstra que todos os problemas propostos podem ser reduzidos ao problema da trissecção do ângulo e da construção dos meios proporcionais.

Considerações finais

A filosofia teve início no final do século VI a.C., com os gregos e dois séculos depois mergulhou num período áureo com o advento de Sócrates, seguido por Platão e Aristóteles. Depois disso, nada de original aconteceu, pelo menos até o século XVI. Na Idade Média, estabeleceu-se a Escolástica, filosofia da Igreja Católica, período marcado por uma forte repressão às idéias científicas. No século XV, estavam enterrados quase todos os campos de atividade intelectual. Mas esse estágio começava a ruir quando grande parte da cultura perdida reaparece com o Renascimento. Depois do Renascimento, seguiram-se a Reforma e a Contra-Reforma. Em 1637, Descartes escreve O Discurso do Método, com três apêndices: A Dióptrica[9], Os Meteoros e A Geometria. Nesta obra, ele estabelece as regras para se obter o conhecimento universal. A frase *"Cogito, ergo sum"* ("Penso, logo existo"), de Descartes, de certa forma, serve para resumir a sua filosofia. Descartes derruba a filosofia estabelecida e se impõe como o pai da moderna filosofia. Estabelece o princípio da dúvida, dizendo que só temos certeza da nossa existência, e tudo que estava sendo aceito como verdade, até então, poderia ser questionado, pois não era um conhecimento consistente devido à ausência de uma sustentação científica sólida.

Neste cenário, A Geometria é também um marco fundamental como a própria filosofia de Descartes. Ela também representa uma ruptura com o passado; ao introduzir uma moderna simbologia, permitiu o desenvolvimento da Matemática que viria a ser

[9]Parte da Física que estuda a refração da luz.

ISBN 978-85-89082-23-5

elaborada logo depois. A sua estrutura está longe da atual estrutura da Geometria Analítica; nela não encontramos nenhum sistema de coordenadas retangulares, nem noções de vetores. Mas nela encontramos a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica.

O século XVII é um período bastante fértil à Filosofia e à Matemática. A Geometria de Descartes foi um dos mais importantes textos no complexo desenvolvimento da álgebra geométrica. A obra pode ser encarada como um documento histórico e, ao lê-la, passamos a conhecer os problemas que eram estudados naquele período e a evolução de seus métodos de resolução. A leitura dessa obra nos permite mergulhar nesse cenário e entender a importante contribuição de Descartes à Matemática.