ISSN 0103-636X

O Papel do Professor e do Aluno Frente ao Uso de um Software de Geometria Interativa: iGeom

The Roles of Teachers and Students When Facing an Interactive Geometry Software: iGeom

Seiji Isotani*
Leônidas de Oliveira Brandão**

Resumo

Neste trabalho discute-se o papel de destaque que a Geometria Interativa (GI) tem adquirido no contexto do ensino de Geometria assistida por computador, enfatizando alguns dos benefícios da GI para professores e alunos. De um lado, auxilia o professor em sua tarefa de criar material didático mais interativo e desenvolver atividades que estimulam a curiosidade. De outro lado, proporciona ao aluno um ambiente no qual a postura participativa e a busca por desafios promovem a troca de experiências e a maturidade para compreender o conteúdo geométrico. Neste contexto, serão apresentados resultados de experiências didáticas realizadas em cursos de licenciatura em matemática e de extensão universitária para professores, utilizando um software de GI chamado iGeom. Além disso, introduz-se como soluções geométricas podem ser didaticamente apresentadas como algoritmos e como é possível implementar algoritmos geométricos com laços repetitivos de modo automático no iGeom facilitando a abordagem de conceitos matemáticos como progressões geométricas, somatórios, convergência, entre outros.

Palavras-Chave: Geometria Interativa. iGeom. Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC). Educação Matemática. Ensino de Geometria.

* Doutor em Engenharia da Informação pela Universidade de Osaka, Japão. Professor do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (ICMC-USP), São Carlos, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Trabalhador São-carlense, 400, Centro, CEP: 13566-590, São Carlos, SP, Brasil. *E-mail*: sisotani@icmc.usp.br.

** Doutor em Matemática Aplicada pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Professor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), São Paulo, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Rua do Matão, 1010, Cidade Universitária, CEP: 05508-090, São Paulo, SP, Brasil. *E-mail*: leo@ime.usp.br.

Abstract

This work discusses the key role played by the Interactive Geometry Software (IGS) in the process of teaching and learning geometry with computational support. We present the important benefits of IGS for teachers and students. On the one hand it helps the teacher in his task of creating more interactive teaching materials and develop activities that stimulate curiosity. On the other hand it provides students with an environment in which the active behavior and the pursuit of challenges promote the acquisition of experiences and the maturity that will lead them to understand the geometrical content. In this context, we present results of didactic activities using a IGS, referred to as iGeom, in undergraduate courses for pre-service math teachers. We also discuss how geometric constructions can be seem as algorithms and how it is possible to implement automatic recursive algorithms on iGeom facilitating the introduction of mathematical concepts such as geometric progressions, series, convergence, among others.

Keywords: Dynamic Geometry. iGeom. ICT. Mathematics Education. Geometry Teaching.

1 Introdução

Atualmente, o desenvolvimento e uso de tecnologias aplicadas à Educação estão recebendo grande atenção da comunidade mundial (AROYO; GRAESSER; JOHNSON, 2007). Tanto no Brasil quanto em outras partes no mundo, ocorre uma grande expansão do uso de tecnologias de *hardware*, como o projeto de um *laptop* por aluno (UCA), e *software*, como o desenvolvimento de programas mais personalizados, interativos e mais *inteligentes*, no ensino. Como consequência, a demanda por pesquisas nessa área têm aumentado consideravelmente. Através dos avanços dessas tecnologias de suporte a educação (incluindo a educação a distância) tornou-se possível difundir o conhecimento de forma mais personalizada, rápida e atendendo às demandas de professores e alunos. Nesse contexto, as tecnologias se transformam em ambientes virtuais onde alunos e professores se comunicam e interagem através de recursos como *chats*, fóruns de discussão, *e-mails* e lousas virtuais, dentre outras ferramentas colaborativas.

A utilização das novas tecnologias, principalmente as de comunicação e de interação, vem reforçando a reestruturação do método tradicional de ensino, denominado por Freire (1987, p. 33) de "*concepção bancária da educação*". Nessa concepção, o professor é a figura central do aprendizado, cabendo ao aluno assimilar, de forma passiva e sem considerar o seu ritmo de aprendizagem, todo o conteúdo exposto no quadro-negro. Em oposição a esse método tradicional, alguns pesquisadores e educadores defendem a educação *problematizadora,* onde o aluno aprende através das situações-problema expostas pelo professor (CLEMENTS, 2000; MARRADES; GUTIÉRREZ, 2000).

Um matemático que se dedicou também ao ensino, Pólya (1978) defende que os métodos educacionais devem privilegiar o desenvolvimento das habilidades e técnicas matemáticas através da resolução de problemas. Para Pólya, uma boa educação deve incentivar que o próprio aluno descubra por si só a solução de problemas.

Além da resolução de problemas, um ponto importante no processo de aprendizagem é fornecer rapidamente ao aluno alguma avaliação sobre as soluções dos exercícios/problemas realizados por ele, seja no modo presencial ou à distância. Como muitos trabalhos observam, a falta de uma avaliação/ validação imediata dificulta a aprendizagem e pode causar a desmotivação do aluno (HARA; KLING, 1999; HENTEA; SHEA; PENNINGTON, 2003). Outra característica importante no processo de aprendizagem é o desenvolvimento, por parte do professor, de material adequado para atender às necessidades do curso e dos alunos. Em cursos à distância, as características mais desejadas no desenvolvimento e apresentação do material, segundo Jones (1996) e Hentea, Shea e Pennington (2003), são: interface simples e adaptável, autonomia, flexibilidade, interatividade e organização.

O uso dessas novas tecnologias pode trazer grandes benefícios ao ensino de Matemática, mas para isso é necessário escolher programas adequados e uma metodologia que tire proveito das suas características positivas, como boas representações gráficas, dinamismo e rapidez em cálculos. Um bom exemplo desse benefício é a Geometria Interativa - GI (ou Geometria Dinâmica - GD), termo utilizado para especificar a Geometria implementada em computador, a qual permite que objetos sejam movidos, mantendo-se todos os vínculos estabelecidos inicialmente na construção (LABORDER; BELLEMAIN, 1997; JACKIW, 1995). O termo *dinâmico* pode ser melhor entendido como contraponto à geometria tradicional de régua e compasso, que é *estática*, pois, após o aluno realizar uma construção, se ele desejar analisá-la com alguns dos objetos em outra disposição terá que refazer completamente a construção.

Na GI ao se construir , por exemplo, a reta *r* mediatriz de dois pontos, ao mover um dos pontos, o programa redesenha toda a construção, mantendo a reta *r* como mediatriz dos pontos, em todas as configurações (Figura 1). Desse modo, um ponto-chave nesse tipo de geometria é a movimentação de objetos, que, por sua vez, é fruto da interatividade do usuário com o programa. Por isso poderíamos também denominá-la *Geometria Interativa*.

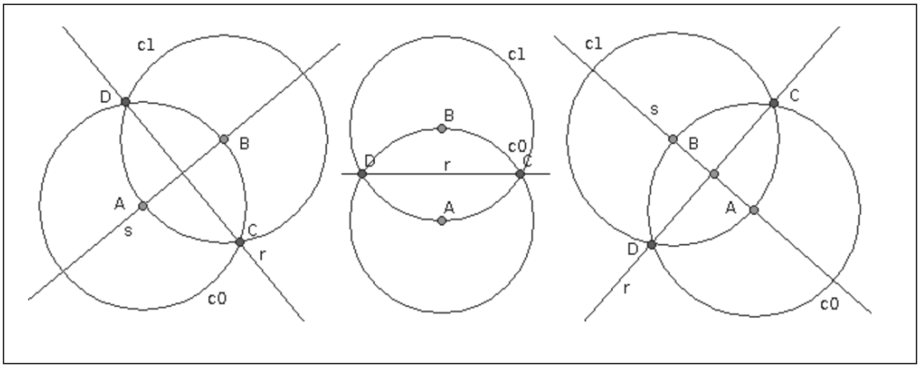


Figura 1 – Exemplo da mediatriz em diversas configurações

A Geometria é, sob nosso ponto de vista, uma das áreas da Matemática que mais se beneficiou com o uso do computador e de suas tecnologias, quando se considera o ensino-aprendizagem. A razão de nossa crença pode ser ilustrada por um antigo ditado, atribuído a Confúcio: *"O aluno ouve e esquece, vê e se lembra, mas só compreende quando faz"*. Ou seja, para aprender é necessário fazer, e a Geometria Interativa auxilia o fazer, permitindo que o aluno vivencie situações-problema e descubra, por si só, relações entre os objetos matemáticos (BRANDÃO; ISOTANI, 2003). Além da Geometria, diversas outras áreas e tópicos da matemática, à exemplo de frações e aritmética, estão sendo muito beneficiadas com o uso da GI (KING; SHATTSCHNEIDER, 1997).

A GI começou a ganhar destaque na década de 90 (BOTANA; VALCARCE, 2002), principalmente com a popularização dos programas comerciais *Cabri Géomètre* (LABORDER; BELLEMAIN, 1997) e *Geometer's Sketchpad* (JACKIW, 1995). Ambos foram tema de diversas pesquisas e trabalhos pedagógicos sobre o uso da GI no ensino.

Neste artigo utilizaremos como suporte as pesquisas realizadas com o sistema *iGeom - Geometria Interativa na Internet*, que é um programa de Geometria Interativa que começou a ser desenvolvido, em 2000, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Coordenado pelo segundo autor deste artigo, um dos objetivos do desenvolvimento desse programa foi *democratizar* o uso da Geometria Interativa, permitindo que qualquer estudante ou professor, com acesso a um microcomputador, pudesse usufruir dos benefícios da GI. Para isso, o programa iGeom é disponibilizado gratuitamente, e é implementado na linguagem de programação *Java* (JAVA, 2013), a qual permite grande portabilidade (possibilidade de uso em diferentes computadores/sistemas operacionais) e cujo uso se possibilita diretamente em páginas Web, na forma de *applet* (programa Java especialmente projetado para uso via Web). O iGeom é gratuito e distribuído a partir do endereço *http:// www.matematica.br/igeom* .

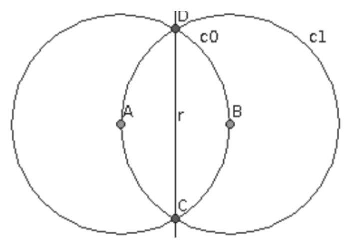
Apesar da existência de diversos trabalhos bem sucedidos na utilização dos programas de GI como ferramenta de suporte ao ensino presencial como, por exemplo, o livro editado por King e Shattschneider (1997) e os trabalhos de Jones (2000), Marrades e Gutiérrez (2000) e Hollebrands (2003), notamos uma lacuna de trabalhos que tenham como objetivo apresentar aspectos pedagógicos que auxiliam professores e alunos no uso efetivo da GI em sala de aula ou em ambientes de educação a distância.

Dentro desse contexto, o presente trabalho tem como objetivo contribuir para o desenvolvimento de práticas didáticas/pedagógicas, utilizando programas de GI, como o iGeom, para auxiliar professores/alunos na utilização efetiva dessa tecnologia em sala de aula e em ambientes de educação a distância. Além disso, neste trabalho discutimos o papel do professor e do aluno frente ao uso dos programas de GI e das novas tecnologias para o ensino, dando destaque aos principais benefícios que tais programas podem proporcionar ao ensino de Geometria.

Sendo assim, o trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2 faremos uma breve apresentação da geometria interativa e de trabalhos relacionados; na seção 3 discutiremos alguns dos benefícios da GI para o ensino; na seção 4 destacamos o papel de professores e alunos durante alguns cursos em que é utilizada a GI em laboratório e em ambientes Web; na seção 5 apresentamos algumas ideias que utilizamos para introduzir o conceito de algoritmo com programas de GI. Finalmente, na seção 6 são apresentadas as conclusões deste trabalho.

2 A Geometria Interativa/Dinâmica

Como citado anteriormente, podemos entender por Geometria Interativa (GI) a implementação computacional da *geometria tradicional*, aquela de régua e compasso. Na GI, após o usuário (e.g. aluno) realizar uma construção, ele pode alterar as posições dos objetos iniciais e o programa redesenha a construção, preservando as propriedades originais. Em função da possibilidade de alterar objetos, preservando-se a construção, podemos dizer que a GI é uma geometria do tipo 1-construção, N-testes, enquanto a tradicional de régua e compasso é do tipo 1-construção, 1-teste (BRANDÃO; ISOTANI, 2003). Desse modo, um programa de GI possibilita, a partir de uma única construção, efetuar um número arbitrário de testes.



Exemplo 1. *Dados dois pontos, A e B, construir sua mediatriz (lugar geométrico dos pontos que equidistam dos dois pontos dados).*

Construção 1. *Dados: ponto A, ponto B (resposta: reta r)*

1. construir a circunferência C0, com centro no ponto A e contendo B.

2. construir a circunferência C1, com centro no ponto B e contendo A.

3. construir a reta r definida pelos pontos C e D, interseções entre C0 e C1.

Figura 2 – Exemplo de construção da mediatriz[1]

Uma vez efetuada a construção pode-se mover os pontos pela área de desenho e o programa de GI, automaticamente, redesenhará os objetos preservando suas propriedades. Desta forma, a reta *r* continuará visualmente sendo a mediatriz de *A* e *B* (Figura 2).

A Geometria Interativa (GI) começou a ganhar destaque na década de 90 (BOTANA; VALCARCE, 2002), principalmente com a popularização dos programas comerciais *Cabri Geometry* (LABORDER; BELLEMAIN, 1997), que surgiram por volta de 1988, e *Geometer's Sketchpad* (GSP) (JACKIW, 1995), que apareceu em 1989. Devido à popularização, diversos trabalhos foram desenvolvidos para discutir e analisar os muitos aspectos pedagógicos do uso dos programas de GI na educação. Dentre esses trabalhos, Jones (2000) afirma que os principais temas abordados dizem respeito a utilização da GI para o aprimoramento do raciocínio dedutivo e para o aprendizado baseado na experimentação.

Para Kortenkamp (1999) e Botana e Valcarce (2002), o uso desses programas permitiu uma nova proposta de ensino de Geometria que visa explorar os mesmos conceitos da Geometria tradicional, mas através de atividades graficamente mais interessantes e interativas. King e Shattschneider (1997) acreditam que a GI se tornou uma ferramenta indispensável tanto para os pesquisadores em matemática pura e aplicada quanto para os educadores matemáticos.

[1] A direita da figura, o enunciado e os passos (algoritmo) utilizados para resolver o problema e, a esquerda, a figura resultante.

Segundo o trabalho de Kortenkamp (1999), em 1999 já existiam mais de 40 programas de GI. Contudo, eram poucos os programas portáveis, que podiam ser executados em diferentes computadores, com diferentes sistemas operacionais, ou que permitiam sua utilização diretamente em páginas Web. Atualmente, apenas os programas desenvolvidos em Java possuem todas essas características. Dentre os programas de GI implementados em Java destacamos: o Cinderella (KORTENKAMP, 1999), o C.a.R. (GROTHMAN, 1999), o Tabulae (GUIMARÃES; BARBASTEFANO; BELFORT, 2002) e o iGeom (BRANDÃO; ISOTANI, 2003).

Como observa Oldknow (1997), todos os programas de GI apresentam muitas ferramentas em comum, dentre elas as de criação de objetos geométricos simples (como pontos, segmentos, retas, circunferências, entre outras); ferramentas para edição (mostrar/esconder objetos, rastrear ponto, gravar/recuperar construção); e ferramentas para construções clássicas (ponto médio, paralela, perpendicular etc). Contudo, cada programa possui particularidades que os tornam singulares, por exemplo, na forma como ocorre a interação entre o usuário e o programa, ou no tipo de *plataforma* (computador + sistema operacional) que pode ser utilizado.

3 Os benefícios da GI

A discussão sobre vantagens/desvantagens pedagógicas entre as duas formas de se *fazer/ensinar* geometria pode ser conduzida sob diferentes pontos de vista. Neste trabalho, abordaremos apenas a interatividade e visualização como mecanismos facilitadores da aprendizagem na GI. O uso da GI no ensino da Geometria traz boas possibilidades de mudança em uma área que vem sendo negligenciada no ensino. Segundo Gravina (1996) e Usiskin (1987), o ensino da Geometria recebe pouca atenção, tanto no ensino fundamental e médio, quanto no ensino superior. Além disso, frequentemente a geometria é ensinada de forma mecânica, sem a preocupação em destacar os conceitos envolvidos (CROWLEY, 1987).

De um lado, notamos problemas na forma tradicional de se ensinar Geometria. Como nota Gravina (1996, p. 2)

> Os livros escolares iniciam o ensino de Geometria com definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares, os ditos desenhos prototípicos. Por exemplo, quadrados com lados paralelos às bordas da folha

> de papel, retângulos sempre com dois lados diferentes, altura em triângulos sempre acutângulos, entre outros. Isto leva os alunos a não reconhecerem desenhos destes mesmos objetos quando em outra situação. E mais, os alunos passam a acreditar que a posição relativa do desenho ou seu traçado particular façam parte das características do objeto, o que os leva a estabelecer desequilíbrios na formação dos conceitos. O aspecto de construção de objetos geométricos raramente é abordado. Dificilmente encontramos no livro escolar a instrução "construa", e no entanto, esta é uma das atividades que leva o aluno ao domínio de conceitos geométricos.

Por outro lado, temos o potencial interativo e aberto de um programa de GI que, segundo Arcavi e Hadas (2000), podem ser comparados a laboratórios virtuais nos quais os estudantes podem manipular, investigar e aprender matemática. Como observam Marrades e Gutiérrez (2000, p. 88-95), discutindo o aprendizado de geometria através dos programas de GI:

> A contribuição dos programas de Geometria Interativa segue em dois ramos. Primeiro, provêem um ambiente no qual estudantes podem experimentar livremente. Dessa forma, eles podem facilmente verificar suas intuições e conjecturas durante o processo de procura de padrões, propriedades, etc. Segundo, estes programas provêem formas não tradicionais para os estudantes aprenderem e entenderem os métodos e conceitos matemáticos [...] permitindo construir figuras complexas e facilmente realizar, em tempo real, uma quantidade enorme de transformações nestas figuras, proporcionando ao estudante o acesso a uma grande variedade de exemplos que dificilmente seriam possíveis em ambientes não computacionais ou em ambientes computacionais estáticos.

Do ponto de vista do aprendizado, também podemos notar vantagens da GI sobre a geometria estática. Usando o modelo de aprendizado de Geometria proposto pelos van Hiele (CROWLEY, 1987)[2], que classificam os níveis cognitivos de aprendizado de Geometria em cinco (visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor), notamos que a Geometria Interativa pode ser bem

[2] Esse modelo é anterior ao surgimento da GI, que aparece por volta de 1987, enquanto o trabalho principal dos van Hiele é da década de 50 (LINDQUIST; SHULTE, 1987).

empregada nos três primeiros níveis. Nesses níveis iniciais, o estudante está começando a abstrair os conceitos matemáticos e, deste modo, a experimentação pode contribuir muito.

No ensino tradicional, o aluno apenas *ouve*, não sendo incentivado a ter uma postura investigativa (ativa) e nem sendo desafiado a construir seu próprio conhecimento. Em uma aula de Geometria tradicional o professor enuncia conceitos, definições e propriedades que, muitas vezes, são apenas memorizados e futuramente reproduzidos pelo aluno sem sua devida compreensão.

Segundo Gravina (1996) e Arcavi e Hadas (2000), a GI proporciona uma nova abordagem ao aprendizado geométrico, onde conjeturas são feitas a partir da experimentação e criação de objetos geométricos. Desse modo, é introduzido o conceito matemático dos objetos a partir da resposta gráfica oferecida pelo programa de GI, surgindo naturalmente daí o processo de argumentação e dedução.

Para King e Shattschneider (1997), destacam-se como principais benefícios e aplicações de um sistema computacional de Geometria Interativa: a prova de teoremas, a precisão e visualização, as explorações e descobertas, as transformações e lugares geométricos e, por fim, a simulação de micromundos. Vale a pena destacar os principais argumentos dos autores em relação a cada uma delas:

- *Prova de teoremas.* Embora a Geometria Interativa não possa provar teoremas, a capacidade de experimentação de hipóteses pode motivar a busca pela prova de um teorema, pois induz à convicção de sua validade. Da mesma forma, pode ajudar e sugerir caminhos para a prova formal.
- *Precisão e visualização.* A construção da geometria é feita pelo estabelecimento de relações geométricas entre os elementos. Pode-se medir ângulos e distâncias e calcular relações com precisão, permitindo facilmente a verificação empírica de hipóteses e teoremas. Os conceitos de um teorema podem ser compreendidos por visualização. Adicionalmente, a precisão também é importante porque construções imprecisas podem conduzir o aluno a conclusões errôneas.
- *Exploração e descoberta.* A manipulação de construções permite que se explore a Geometria e que *novas* relações e propriedades sejam descobertas. Muitas vezes, os próprios alunos *redescobrem* teoremas em sala de aula.
- *Transformações e lugares geométricos.* Pela sua capacidade de

realizar transformações em figuras geométricas, programas de Geometria Interativa são ideais para o estudo de isometrias, similaridades e outras funções. Animando figuras e traçando lugares geométricos de pontos pré-definidos, esses aplicativos também podem explicitar problemas e propriedades normalmente não abordadas na literatura por sua inerente dificuldade.

- *Simulação e micromundos*. Indo muito além da abstração da Geometria, as simulações com programas de GI permitem ilustrar conceitos de cinemática e óptica. Oferecem também a possibilidade de criação de micromundos geométricos, a exemplo daqueles concebidos no âmbito da linguagem Logo (PAPERT, 1999), que propõe ao aluno um campo de experimentação onde ele constrói o conhecimento através da manipulação dos objetos (BELLEMAIN, 2002). Neles, o aluno pode vivenciar experiências geométricas, algumas pré-concebidas pelo professor, e muitas outras descobertas ao acaso, através da exploração interativa e de sua criatividade.

Vale observar que o comentário de King e Shattschneider (1997) sobre *prova de teoremas* na GI, pode começar a ser explorado com alunos que estejam no segundo nível de compreensão, proposto por van Hiele, a análise. Quando o aluno está nesse nível, começa a analisar os conceitos geométricos envolvidos, por exemplo, podendo usar a experimentação para discernir características dos objetos. Um exemplo simples de experimentação no segundo nível é o aluno perceber que um quadrado também é um retângulo, por conter todas as propriedades exigidas desse último, ou perceber quando um retângulo torna-se um quadrado.

Ainda sobre a *prova de teoremas*, podemos acrescentar outra razão para o uso da GI: os contraexemplos. Com a GI o aluno pode mais facilmente encontrar uma configuração que sirva de contraexemplo a uma conjetura em estudo. Essa observação também pode servir como resposta a uma das críticas mais comuns contra a GI: a visualização dispensaria, ou desestimularia, a necessidade de prova matemática. Essa crítica pode ser encontrada, por exemplo, em Munzner (1996).

Em resumo, como a GI possibilita visualizar uma mesma construção de diversas formas, e assim facilitar a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos, podemos utilizar um programa de GI para revelar relações geométricas intrínsecas que poderiam passar desapercebidas numa representação estática (RODRIGUES, 2002). Com isso, o professor pode incentivar o espírito investigativo do aluno, solicitando ao final uma justificativa para as relações encontradas, ou seja, a prova matemática.

4 O papel do professor e do aluno

Nesta seção discutimos o papel do professor e do aluno frente ao uso dos programas de GI e das novas tecnologias para o ensino, dando destaque aos principais benefícios que esses programas podem proporcionar ao ensino de Geometria através do uso dessas ferramentas em cursos realizados no IME-USP.

4.1 O professor

De acordo com Freire (1987), o professor deve livrar-se do estigma de detentor do conhecimento e se transformar em um guia que oferece dicas e estímulos para que os alunos aprendam. Nessa abordagem de ensino, o professor será o *parceiro* do aluno, liderando atividades que visem a exploração e a descoberta, e que favoreçam a criatividade e a interação do aluno com o assunto abordado. Nesse processo de ensino-aprendizagem, o professor irá incentivar e ajudar o aluno a entender a estrutura científica da Matemática e a descobrir por si só o mundo matemático, seus conceitos e suas propriedades. As dicas e conselhos do professor deverão servir como guias durante o processo de descoberta do aluno. Dessa forma, é possível estimular a curiosidade sobre a matemática, e não apenas incentivar a busca por uma resposta.

O uso do computador nas escolas vem recebendo grande atenção por parte dos educadores. Clements (2000) acredita que o uso dessa tecnologia traz grandes benefícios ao ensino, não apenas pelas inovações nas formas de se apresentar o conteúdo, mas também por causa da inevitável mudança nos métodos de ensino, que favorece a visão de parceria e troca de experiências entre professores e alunos. Em diversas escolas do ensino médio e superior o uso do computador está cada vez mais presente no cotidiano e vem sendo incorporado ao currículo escolar, principalmente na área de Matemática (HOLLEBRANDS, 2003). Devido a esse fato, o professor tem sido progressivamente cobrado a utilizar o computador em suas aulas.

No ensino de Matemática, os programas de GI podem ajudar o professor a introduzir os conceitos de matemática/geometria utilizando o computador. Além disso, a forma como será apresentado o conteúdo poderá proporcionar um maior aprendizado por parte dos alunos. Pois, como destacam Arcavi e Hadas (2000), as atividades com a GI oferecem ao professor ferramentas para trabalhar com as capacidades de visualizar, transformar, generalizar, refletir e se comunicar com a informação, habilidades consideradas fundamentais para guiar o aluno durante uma atividade matemática. Além disso, segundo esses mesmos autores o uso sistemático dos programas de GI proporciona: (a) atividades que sejam interligadas por seus conteúdos e suas diferentes representações; (b) oportunidades para o aluno pensar e questionar as atividades, propondo e respondendo questões (as respostas não precisam estar corretas); e (c) com as respostas dos alunos é possível que o professor realize uma reflexão das atividades para chegar em uma conclusão formal. Segundo Marrades e Gutiérrez (2000, p. 95):

> Os programas de Geometria Dinâmica auxiliam o professor a criar ambientes de aprendizado nos quais o aluno pode experimentar e observar a permanência ou não de propriedades matemáticas, propondo e verificando conjecturas de forma muito mais simples se comparada a qualquer outra forma tradicional utilizando régua e compasso.

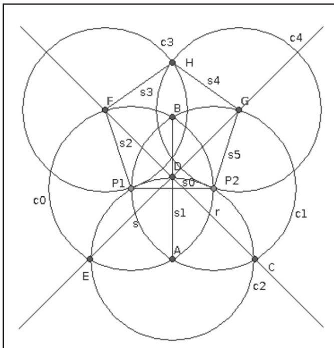
Contudo, todo o potencial benéfico que os programas de GI oferecem requer o preparo adequado por parte do professor e um grande esforço (inicial) de sua parte na preparação de conteúdo. Como muito bem observa Bellemain (2002), a tarefa de utilizar os programas de GI não é simples, pois embora os programas de GI permitam elaborar situações que favorecem a construção de conhecimentos, eles nada ensinam. Cabe ao professor criar bons problemas que usem recursos da GI, propiciando ao aluno o aprimoramento das suas habilidades matemáticas/geométricas.

Uma outra questão que surge com a inserção dos programas de GI (e de outros programas para ensino por computador) é a dificuldade, por parte do professor, em validar a resposta do aluno durante a realização de um exercício e acompanhá-lo durante as atividades propostas (BELLEMAIN, 2002). A razão disso é que a maior parte da interação ocorre entre aluno-computador e o professor na maioria das vezes não têm acesso a essa interação.

Nesse contexto, as ferramentas que facilitam a produção, validação e gerenciamento de exercícios são fundamentais para auxiliar o professor na elaboração e análise das atividades com os programas de GI. Segundo Clements (2000), os programas que permitem ao professor desenvolver exercícios práticos, que podem ser resolvidos utilizando diferentes estratégias, são os mais recomendados para o ensino de Matemática. Além disso, através das ferramentas de validação automática de exercícios, diminuímos a carga de trabalho do professor e, se tais ferramentas estiverem interligadas a um sistema de gerenciamento de conteúdo/curso, pode-se catalogar os trabalhos realizados pelos alunos. Mais ainda, pode-se utilizar uma biblioteca de conteúdo, de modo que o professor possa utilizar com facilidade suas experiências passadas ou as de outros professores. Um sistema de gerenciamento que possui esses recursos é o *SAW* (BRANDÃO; ISOTANI; MOURA, 2006; MOURA; BRANDÃO, L.; BRANDÃO, A., 2007).

Um bom exemplo de um programa de GI que possui funcionalidades para facilitar o gerenciamento, a produção e a validação de exercícios é o programa *iGeom* (BRANDÃO; ISOTANI, 2003; ISOTANI; BRANDÃO, 2006; ISOTANI; BRANDÃO, 2008). Além destes recursos, o iGeom também permite a comunicação com sistemas de gerenciamento de curso (por exemplo, o SAW) viabilizando o armazenamento e gerenciamento das soluções encaminhadas pelo aluno bem como a construção de bibliotecas de aulas e de exercícios.

Um exemplo do apoio fornecido ao professor por esse tipo de recurso ocorreu em uma disciplina de graduação para licenciandos no IME-USP, em 2005 (*Noções de Ensino de Matemática Utilizando o Computador - MAC118*). Utilizando o SAW+iGeom foi disponibilizado aos alunos um exercício para construção de um pentágono a partir de um segmento dado: um aluno encaminhou, várias vezes, como solução uma construção conhecida por ele a qual o iGeom identificava como incorreta (apresentada na Figura 3), apesar de parecer correta, apresentando pequenas disparidades entre os comprimentos de seus ângulos o que poderia ser atribuída a erros numéricos.



s0:= Segmento(P1, P2);
c0:= Circunferência(P1, P2);
c1:= Circunferência(P2, P1);
A:= Interseção sul(c0, c1);
B:= Interseção norte(c0,c1);
s1:= Segmento(A, B);
c2:= Circunferência(A, P1);
C:= Interseção(c1, c2);
D:= Interseção(s0, c2);
r:= Reta(C,D);
E:= Interseção(c0, c2);
s:= Reta(E,D);
F:= Interseção(c0, r);
c3:= Circunferência(F, P1);
G:= Interseção direita(c1, s);
c4:= Circunferência(G, P2);
s2:= Segmento(P1, F);
H:= Interseção norte(c3, c4);
s3:= Segmento(F, H);
s4:= Segmento(H, G);
s5:= Segmento(G, P2);

Figura 3 – Construção aproximada do Pentágono no iGeom[3]

[3] Construção aproximada do pentágono desenvolvida no iGeom e enviada por um aluno de licenciatura do IME-USP em 2005.

Entretanto uma pesquisa bibliográfica conduzida pelo monitor da turma (Renato Douglas) constatou que a resposta encaminhada era de fato errônea: na imagem aqui apresentada, os ângulos internos nos pontos *F* e *G* têm ângulos de 109°2’28" (e não 108°), conforme Fourrey (1924, p. 86-89).

4.2 O aluno

Fazendo uso dos benefícios da GI citados anteriormente, tornamos o aluno a peça-chave de seu próprio aprendizado. Contudo, nesse paradigma de ensino-aprendizagem, a postura participativa do aluno é requisito mínimo para a compreensão do assunto em discussão. Dessa forma, um aluno motivado a aprender pode fazer uso dos programas de GI em prol de um aprendizado mais ativo onde a busca pelo conhecimento pode produzir resultados sensivelmente positivos (HOLLEBRANDS, 2003).

A transição do método tradicional de ensino para o ensino auxiliado por computador pode afetar tanto o professor quanto o aluno. Assim como o professor já habituado ao ensino tradicional precisa adaptar-se aos recursos computacionais, o mesmo pode ocorrer com o aluno, que precisará adaptar-se aos sistemas de ensino por computador e abandonar o comportamento passivo. Nesse contexto, após o período de adaptação, o aluno precisa estar constantemente buscando desafios e, sempre que possível, compartilhando suas dúvidas e experiências com os colegas e professores. É através dessa interação, e da superação das dificuldades encontradas durante as atividades propostas pelo professor, que o aluno obtém as habilidades e os conhecimentos necessários para compreender o conteúdo apresentado. Para Santos e Sola (2001), as atividades baseadas na resolução de exercícios são as mais importantes no ensino de Geometria, pois ajudam o aluno a fazer e testar conjeturas e, dessa forma, adquirir o conhecimento necessário para entender os conceitos e aplicá-los posteriormente.

Com a ajuda dos programas de GI, podemos criar exercícios interativos nos quais, se o aluno agir ativamente, modificando as características de vários objetos matemáticos, ele aprenderá pesquisando, analisando e verificando o que ocorre genericamente (MELO; FERREIRA; PONTES, 2000). Nessa abordagem é possível disponibilizar representações gráficas de objetos geométricos que aproximam o objeto representado na tela do computador (desenho) ao objeto teórico (figura/conceito), favorecendo o desenvolvimento de uma leitura geométrica dos desenhos e contornando, assim, uma das grandes dificuldades no ensino da Geometria (BELLEMAIN, 2001). Segundo o estudo realizado por Hannafin (2001), reportando a inserção de um programa de GI em salas de aula do ensino médio, após o período de adaptação e reconhecimento do programa os alunos sentiram-se mais livres (tanto para perguntar, quanto para fazer conjeturas), trabalharam mais e demonstraram maior interesse no assunto abordado.

Além desses benefícios, os recursos computacionais de validação automática e gerenciamento de exercícios podem auxiliar o aprendizado do aluno. Segundo Hentea, Shea e Pennington (2003), após a realização de cada exercício, o oferecimento de respostas rápidas ao aluno contribui para o seu aprendizado. Uma das razões para essa afirmação se deve ao fato de o aluno poder tirar as dúvidas imediatamente após o surgimento das mesmas. Além disso, utilizando uma ferramenta de gerenciamento podemos: (a) armazenar as construções de cada aluno para seu estudo posterior; e (b) oferecer exercícios de acordo com a velocidade do aluno em resolvê-los, respeitando seu ritmo de aprendizagem.

Algumas aplicações que fizemos do iGeom embutido no gerenciador de cursos SAW, entre 2004 e início de 2006, confirmaram as observações de Hannafin (2001) e Hentea, Shea e Pennington (2003). As aplicações se deram em uma disciplina de graduação MAC118, com a participação de 2 professores, 3 monitores e mais de 150 alunos, e em cursos de extensão universitária no IME-USP para professores de Matemática[4]. Por exemplo, através do questionário preenchido pelos alunos da disciplina MAC118, em 2005, e dos cursos de Verão, em 2006, constatamos que cerca de 75% dos participantes nunca tiveram, ou tiveram pouco contato com programas de GI. Apesar disso, após o período inicial, para compreensão do funcionamento do iGeom+SAW, a grande maioria dos participantes conseguiu resolver todos os exercícios propostos, o que não acontecia anteriormente ao uso desses programas.

Outro benefício que o uso do iGeom+SAW proporciona é o oferecimento de respostas *imediatas* para cada exercício realizado. Com os recursos atualmente oferecidos o aluno pode tirar as dúvidas imediatamente após o surgimento das mesmas. Como afirma um aluno que cursou a disciplina MAC118, em 2004, utilizando o iGeom+SAW: *"... caso a construção estivesse certa, já estava enviada e caso estivesse errada, começaria novamente e tiraria as dúvidas na mesma hora..."*.

Em edições anteriores da disciplina MAC118, todos os exercícios eram realizados utilizando o programa iGeom, mas sua correção era feita manualmente

[4] http://www.ime.usp.br/verao

pelos monitores e professores. Devido ao número de alunos, a correção consumia grande parte do tempo dos monitores e o resultado da correção do exercício era entregue ao aluno duas ou três semanas após a realização do mesmo. Eram propostos cerca de *20* exercícios por semestre. Com o uso do SAW e da ferramenta de validação automática do iGeom, além de reduzir o trabalho de professores e monitores, foi possível aplicar mais de *40* exercícios, com a apresentação imediata do resultado da validação, além de permitir que os exercícios fossem realizados via Internet (ISOTANI, 2005).

Outra avaliação do SAW+iGeom realizada por Moura, Brandão L. e Brandão A. (2007), em 2006, verificou que o número de exercícios propostos pelos professores e resolvidos por seus alunos aumentou de 20 para 70 durante o mesmo período. De acordo com a avaliação realizada no referido trabalho, os autores indicam que essa mudança no comportamento de alunos e professores ocorreu como consequência do uso dos recursos de avaliação automática do iGeom, o que incentivou os alunos em seus estudos e, também, reduziu o trabalho dos professores/monitores em corrigir os exercícios. Isso permitiu a criação de exercícios preparatórios (em classe e como tarefa de casa) que serviam para auxiliar e facilitar a compreensão e resolução do problema principal em questão.

Destaca-se, também, a possibilidade do iGeom ser acoplado em ambientes de aprendizagem colaborativa ou ambientes semânticos, permitindo que alunos compartilhem suas construções e troquem suas experiências (ISOTANI et al., 2010).

5 Um exemplo de aplicação

Um exemplo pouco explorado de aplicação, utilizando os programas de GI, refere-se à introdução dos conceitos de algoritmo. Um recurso facilitador para essa abordagem é a possibilidade de encapsular uma sequência de passos de uma construção na forma de uma função geométrica, que denominaremos por *script*. Essa introdução pode ser melhor explorada se o sistema ainda permitr *scripts* recorrentes, para explorações de laços de modo simples. Dos sistemas de GI já citados, apenas o GSP e o iGeom dispõe de *scripts* recorrentes.

Um *algoritmo* é uma sequência finita de passos que, aplicada a um conjunto de *dados de entrada,* produz um conjunto de *dados de saída* (ou resposta). Além disso, a menos de uma classe particular de algoritmos, um algoritmo deve ser *determinístico*, ou seja, sempre que for aplicado sobre um mesmo conjunto de entradas, deve produzir o mesmo conjunto de saídas. Observe-se que, se o conjunto de entrada for vazio, a saída do algoritmo será sempre a mesma.

Uma característica importante de um algoritmo é que ele resolve uma *classe de problemas* e não uma *instância*. Por exemplo, um algoritmo de ordenação para N números inteiros (digamos com N < 10^8), ordena qualquer conjunto com até N inteiros, em qualquer configuração (isto é, qualquer que seja a permutação, dentre as N! possíveis). A aplicação do algoritmo sobre um particular conjunto de inteiros constitui a resolução de uma instância do problema. Essa observação permite reinterpretarmos a caracterização da GI como uma geometria do tipo 1-N, enquanto a tradicional (estática) seria do tipo 1-1: uma solução geométrica implementada em GI, na prática constitui um algoritmo, enquanto a correspondente solução estática equivale a uma aplicação do algoritmo geométrico sobre um conjunto fixado de dados (estáticos e, portanto, único).

A caracterização de soluções geométricas como algoritmos, pode ser melhor percebida utilizando-se a GI, pois ao finalizar uma construção e testá-la com outras configurações (de entrada), fica claro que a mesma pode ser aplicada a qualquer outro conjunto de entradas (dentre os possíveis). Por outro lado, como observa Rodrigues (2002), as soluções obtidas pela geometria da régua e compasso são estáticas e particulares, pois não podem ser alteradas e nenhuma delas garante o significado genérico de sua definição. Por exemplo, o desenho estático de um círculo possui um centro e raio, ambos fixos, mas o conceito de círculo não depende de valores arbitrários.

Para introduzir o conceito de algoritmo geométrico, vamos examinar o exemplo sobre a construção da mediatriz de dois pontos dados, *A* e *B*. No Quadro 2, apresentamos um esquema dos passos para obter a mediatriz *r* de *A* e *B*.

Mediatriz(A,B):
    C0 := Circ(*A*,*B*);
    C1 := Circ(*B*,*A*);
    ln := Intersec(*C0*,*C1*,*n*); //interseção Norte
    ls := Intersec(*C0*,*C1*,*s*); //interseção Sul
    r := Reta(*ln*,*ls*);
    Resposta *r*;

Quadro 2 - Um algoritmo para construção de mediatriz

Note-se que os passos descritos podem ser aplicados a quaisquer pares de pontos (não coincidentes) constituindo, assim, um algoritmo. Os comandos

Circ, *Intersec* e *Reta* podem ser entendidos como primitivas (funções) geométricas: *Circ(X, Y)* é a circunferência centrada em *X* e passando pelo ponto *Y* ; *Intersec(X, Y, p)* é um dos pontos de interseção entre os objetos *X* e *Y* (podem existir dois, neste caso definidos por *norte*, se *p* = *n*, ou *sul*, se *p* = *s*); e *Reta(X, Y)* é a reta que contém os pontos *X* e *Y* (se *X* = *Y* , a reta não será única).

Desse modo, é natural esperar que programas de GI permitam que construções geométricas sejam armazenadas explicitamente na forma de *funções*, como fazem o iGeom, GSP e Cabri. Como já citado, tais funções geométricas, por agruparem sequências de comandos, serão aqui denominadas por *script/macro*. Uma vez armazenada uma função, pode-se: (a) marcar os objetos de entrada (na ordem correta) e depois selecionar a função desejada (como no iGeom e GSP); ou (b) selecionar a função e depois marcar os objetos de entrada (Cabri). A primeira forma pode ser dita do tipo *seleção+ação* enquanto a segunda é do tipo *ação+seleção*.

A possibilidade de armazenar algoritmos geométricos como funções é bastante útil do ponto de vista didático, pois permite que o aluno armazene em funções as construções que utiliza mais frequentemente e, com isso, possa concentrar sua energia nas tarefas novas. Os programas já citados (iGeom, Cabri e GSP) permitem até que uma função, já armazenada, seja invocada durante a geração de uma nova função e com isso aproveitamos funções prontas para construir outras mais complexas.

Exemplos nos quais os usos das funções geométricas são muito úteis são aqueles com processo de repetição, nos quais é necessário aplicar várias vezes a mesma sequência de passos, como no exemplo *Aquiles e a Tartaruga* ou *paradoxo de Zenão*, apresentado por Brandão (2002, p. 31): "Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida, sendo que Aquiles tem o dobro da velocidade da tartaruga, e por isso, a tartaruga larga à frente".

Para simular geometricamente esse exemplo (Figura 4), supomos que para um dado instante t0, Aquiles esteja no posição A e a tartaruga na posição B. Definimos uma função *dist_metade* que obtém a próxima posição da tartaruga para o instante t1, o momento que Aquiles chega no ponto B. Na Figura 4, no momento t1, a tartaruga terá percorrido metade da distância percorrida por Aquiles (pois tem metade de sua velocidade), estando portanto, na posição F (cuja distância ao ponto B é igual a distância entre E e B). O algoritmo para construir a simulação está indicado no Quadro 3.

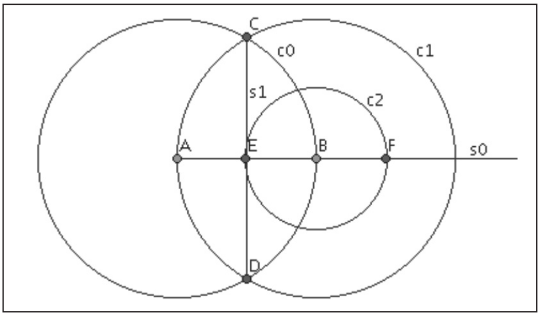


Figura 4 – Representação gráfica da Função dist_metade

dist_metade(*A,B*)
Entrada: ponto *A*, ponto *B*.
Saída: ponto *F* tal que *F* pertence *semirreta(A,B)* e *d(B, F)=d(A,B)/2*.
1. *r* := *semi_reta(A,B)*; semi-reta começando em *A*, passando por *B*
2. *C0* := *circ(B,A)*; circunferência centrada em *B*, passando por *A*
3. *C1* := *circ(A,B)*; circunferência centrada em *A*, passando por *B*
4. *C* := *inters(C0,C1, n)*; *C* é interseção "superior"(norte) entre as circunferências *C0* e *C1*
5. *D* := *inters(C0,C1, s)*; *D* é interseção "inferior"(sul) entre as circunferências *C0* e *C1*
6. *S1* := *segm(C,D)*; *S1* é o segmento ligando *C* à *D*
7. *E* := *inters(r, S1)*; *E* é interseção entre *r* e *S1*
8. *C2* := *circ(B,E)*; circunferência centrada em *B*, passando por *E*
9. *F* := *inters(C2, r, n)*; *F* é interseção "superior" (norte) entre *C2* e *r*

Quadro 3 – Construção de uma função *dist_metade* para o problema do *Aquiles e a Tartaruga* que obtém a próxima posição da tartaruga em relação a sua posição atual e a posição de aquiles

Utilizando a função *dist_metade*, podemos simular esta hipotética corrida a partir de eventos discretos, definindo duas sequências, uma de tempo $\{t_k\}_{k \in N}$ e uma de posição $\{P_k\}_{k \in N}$. Sendo t_0 o instante de largada e P_0 a posição inicial da tartaruga, podemos definir as sequências, para $k > 0$, da seguinte forma:

(1) t_k: o instante em que Aquiles atinge a posição P_{k-1}.

(2) P_k : a posição ocupada pela tartaruga no instante t_k.

Desse modo, a construção apresentada na Figura 4 serve para gerar os pontos P_k, como esquematizado no Quadro 4.

aquiles(A,B)
Entrada: ponto A, ponto B.
Saída: ponto F tal que F pertence *semirreta(A,B)*.
1. $F \leftarrow$ *dist_metade(A,B): aplicar os 9 passos do Quadro 3)*
2. $G \leftarrow$ *aquiles(B,F): recorrência, aplicada aos pontos B e F.*

Quadro 4 – Esquema para geração de respostas para o problema do *Aquiles e a Tartaruga*

Zenão argumentava que a metade de um número positivo (distância) é um número positivo e, desse modo, sendo o tempo e o espaço contínuos, Aquiles jamais alcançaria a tartaruga[5]. Como observado em Ávila (1999), o aparente paradoxo divulgado por Zenão ilustra a dificuldade que os matemáticos tinham, antes do surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, com o conceito infinito e infinitésimo.

Note-se que o algoritmo geométrico apresentado no Quadro 5 possui um bloco de repetição (ou laço[6]), comum nas linguagens de programação usuais (como C, Pascal ou Java). O passo geral do algoritmo do Quadro 5 é:

$P_{k+1} \leftarrow$ *dist_metade*(P_{k-1},P_k), para $k > 1$, sendo $P_0=B$ e $P_1=$ *dist_metade(A,B)*.

Assim, para efetuar a simulação utilizando *dist_metade*(.,.) é necessário aplicá-la seguidas vezes. Entretanto, se na própria definição desse algoritmo incorporarmos uma chamada recursiva, a própria recorrência controla as múltiplas aplicações. Portanto, é natural imaginar que tal recurso também possa ser incorporado aos *scripts* na GI. A partir do *script dist_metade* podemos produzir um novo *script*, de nome *aquiles*, também com 2 parâmetros, anotando a repetição através de uma *recorrência* (ou *recursão*). Deste modo, podemos definir o algoritmo recursivo *aquiles(A,B)* de modo simplificado invocando o algoritmo *dist_metade* como seu passo 1 e como passo 2, uma chamada recursiva (invocando a própria função/algoritmo). A justificativa de que este algoritmo simula a corrida hipotética entre Aquiles e a Tartaruga está resumida no Quadro 5.

[5] Note que o problema deste argumento é supor que a soma de infinitas parcelas positivas será sempre infinito, o que não é verdade. No exemplo, temos uma soma de p.g. infinita, de razão menor que 1, $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = 1$

[6] Sequência de passos repetitivos, que constitui a parte central do algoritmo.

Sendo A e B as posições iniciais, respectivamente, de Aquiles e da tartaruga, então:

1. $P_0 = B$ é a posição inicial da tartaruga e A é a posição inicial de Aquiles;
2. $P_1 \leftarrow$ *dist_metade(A,* P_0*)* quando Aquiles chegar à posição P_0 a tartaruga estará em P_1 (da construção $P_1 \in \overrightarrow{AP_0}$ e $d(P_0, P_1) = \frac{d(A,B)}{2}$);
3. $P_2 \leftarrow$ *dist_metade(* P_0, P_1*)* quando Aquiles chegar à posição P_1 a tartaruga estará em P_2 (da construção $P_2 \in \overrightarrow{P_0P_1}$ e $d(P_1, P_2) = \frac{d(P_0,P_1)}{2} = \frac{d(A,B)}{2^2}$)

e assim por diante.

Quadro 5 – Descrição resumida das posições de Aquiles e da Tartaruga, de acordo com o algoritmo aquiles(A,B)

A recorrência é caracterizada pela instrução na linha 2 do algoritmo presente no Quadro 5. Entretanto, existe um problema com o pseudocódigo da construção *aquiles(A,B)* que é não indicar uma condição de parada. Nas linguagens de programação usuais, como C ou Java, utiliza-se um condicional para invocar a recorrência (e portanto, a recorrência é interrompida quando essa condição não é satisfeita). Em nosso caso, como está implementado no *iGeom*, fazemos o controle definindo a priori o número de chamadas recorrentes. O número de vezes (conhecido como *profundidade*) que a recorrência será aplicada é definido na chamada da função/algoritmo pelo usuário. Por exemplo, a Figura 5 mostra o uso do algoritmo *aquiles* utilizando-se nível de profundidade um (poderia-se produzir uma construção mais *limpa* escondendo-se os objetos intermediários): o passo 1 resultará no ponto F e será feita uma chamada recorrente, no passo recursivo 2, invocando o algoritmo com os parâmetros B e F, *aquiles(B,F)*, o que resultará no ponto J.

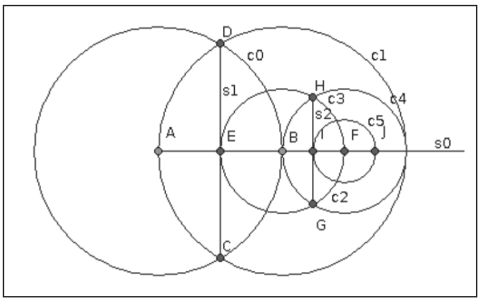


Figura 5 – Aplicação do script recursivo aquiles com profundidade 2. Aplicações para (A,B) = F, (B,F) = j, (F,j) = N

Atualmente, conhecemos apenas dois programas de GI que permitem *scripts recorrentes*, o *iGeom* e o *GSP*. O uso de recorrência em *scripts*, nos programas de GI, permite uma elegante introdução ao conceito de algoritmo, sem a necessidade de explicar variáveis ou comandos do tipo *for*. Além disso, o uso de recorrência agiliza a construção de *fractais*[7] geométricos (MANDELBROT, 1983), com os quais podemos explorar conceitos de progressões geométricas, somatórios e até de convergência. O exemplo da corrida entre Aquiles e a tartaruga pode ser utilizado para iniciar tal atividade, seguindo-se de algum exemplo graficamente mais interessante, como o fractal baseado em circunferências apresentado na Figura 6.

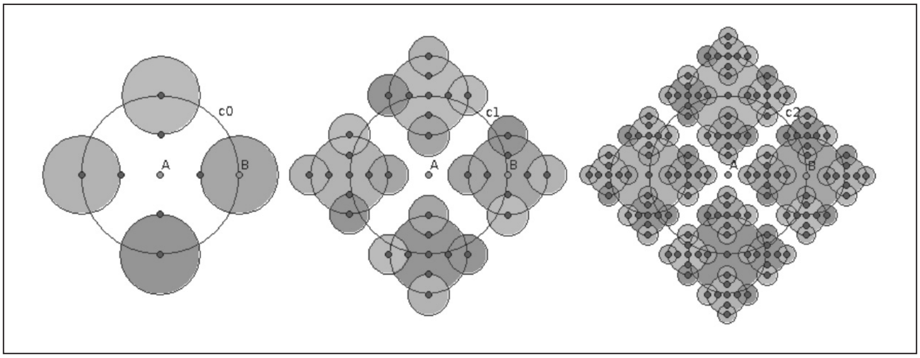


Figura 6 – Exemplo de fractal baseado em circunferências gerado no programa iGeom

6 Conclusões

A introdução da tecnologia em sala aula traz algumas dificuldades, sendo uma delas a adaptação às ferramentas e de método de ensino/aprendizagem. Desse modo para que sejam melhor incorporadas é importante que os benefícios sejam rapidamente percebidos por professores e alunos. Segundo Jones (2000), o ensino de Matemática com suporte tecnológico ainda está dando seus primeiros *passos* quando comparada às outras áreas de pesquisa em educação Matemática. Contudo, o mesmo autor concorda que com o aparecimento das ferramentas interativas, que podem ser manipuladas dinâmicamente/

[7] O nome fractal é devido à Benoit Mandelbrot, derivada do latim *fractus*, que significa quebrado, partido ou irregular. Apesar de não existir um definição universalmente aceita para fractal, uma característica comumente aceita é a *auto-similaridade*, que significa que podemos reconhecer o todo da figura olhando apenas uma parte da mesma.

interativamente e diretamente pela Internet, este cenário está começando a se modificar. Sob nosso ponto de vista, a Geometria é uma das áreas da Matemática que mais se beneficiou com o uso do computador e isso se deve à Geometria Interativa.

Porém, a tarefa de utilizar os programas de GI não é simples, cabe ao professor criar bons problemas que usem os recursos da GI, propiciando ao aluno o aprimoramento das suas habilidades matemáticas e geométricas. Com o intuito de facilitar e promover a inserção da GI nos cursos de Matemática e Geometria, o foco principal deste trabalho foi apresentar alguns aspectos didáticos/pedagógicos do uso da GI no ensino, enfatizando as dificuldades e, principalmente, os benefícios de sua utilização no desenvolvimento de atividades, auxiliando tanto o professor em sua tarefa de criar material didático mais interativo e desenvolver atividades que estimulam a curiosidade sobre a matemática, quanto o aluno, proporcionando um ambiente no qual a postura participativa e a busca por desafios promovem a troca de experiências e a maturidade para compreender o conteúdo apresentado.

Neste trabalho mostramos alguns destes benefícios com a implantação da Geometria Interativa, utilizando o *iGeom*, junto à um sistema gerenciador de curso, *SAW*. Observamos um ganho de produtividade para o professor, tanto na elaboração de atividades quanto na avaliação de soluções de alunos. E, para o aluno, notamos como benefícios seu maior envolvimento nas atividades e maior satisfação em receber rapidamente avaliações para os exercícios resolvidos. Além disso, o uso da GI na Web abriu novas possibilidades de aprendizagem, permitindo que o aluno explore os conceitos dados em aula em sua própria casa e, eventualmente, eliminando dúvidas e realizando novas investigações. Muito além de simples páginas interativas, o SAW+iGeom oferece um ambiente virtual propício para o incentivo da prática construtiva e meios para o gerenciamento, compartilhamento e o armazenamento de conteúdo educacional interativo.

Um exemplo prático da utilização desses recursos pode ser encontrado no iMática a partir do endereço *http://www.matematica.br/igeom/docs/exemplo1/*. Trata-se de um *site* criado pela então aluna Sandra Cairolli como trabalho final da disciplina MAC118 - *Noções de ensino de matemática usando o computador*, em 2004. Esse trabalho possui diversas atividades (divididas em aulas, tópicos e exercícios) para ensino de Geometria. Todas elas podem ser realizadas diretamente na Web e o resultado da validação (se está correta ou não) de cada solução é fornecida pelo iGeom após o usuário marcar sua resposta e clicar no botão de *envio de resposta*.

Finalmente, na seção 5 apresentamos um exemplo pouco explorado de aplicação, utilizando os programas de GI para introduzir os conceitos de algoritmo e recursão. Através de alguns exemplos, discutimos como soluções geométricas podem ser vistas como algoritmos e como é possível implementar algoritmos geométricos com laços repetitivos (utilizando o iGeom) com os quais podemos explorar conceitos de progressões geométricas, somatórios e até de convergência.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer os alunos e professores que participam das atividades apresentadas neste trabalho. Gostaríamos, também, de estender nossos agradecimentos ao CNPq e a FAPESP pelo apoio financeiro.

Referências

ÁVILA, G. Os Paradoxos de Zenão. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 2, n. 39, p. 9-16, 1999.

ARCAVI, A.; HADAS, N. Computer mediated learning: an example of an approach. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, Berlin, v. 5, n. 1, p. 25-45, 2000.

AROYO, L.; GRAESSER, A.; JOHNSON, L. Intelligent Educational Systems of the Present and Future. **IEEE Intelligent Systems**, Washington, v. 22, n. 4, p. 20-21, 2007.

BELLEMAIN, F. Geometria dinâmica: diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO TÉCNICO, 15., 2011, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Universidade de São Paulo, 2001. p. 1314-1329. CD-ROM.

BELLEMAIN, F. O paradigma micromundo. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 1., 2002, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: Universidade Estadual do Rio de Janeiro, 2002. p. 51-62. CD-ROM.

BOTANA, F.; VALCARCE, J. L. A dynamic-symbolic interface for geometric theorem discovery. **Computer & Education**, Amsterdam, v. 38, n. 1-3, p. 21-35, 2002.

BRANDÃO, L. O. Algoritmos e fractais com programas de geometria dinâmica. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 49, n. 2, p. 27-34, 2002.

BRANDÃO, L. O.; ISOTANI, S. Uma ferramenta para ensino de geometria dinâmica na internet: igeom. In: WORKSHOP SOBRE INFORMÁTICA NA ESCOLA. CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, 9., 2003, Campinas. **Anais...** Rio Grande do Sul: Sociedade Brasileira de Computação, 2003. p. 1476-1487. CD-ROM.

BRANDÃO, L. O.; ISOTANI, S.; MOURA, J.G. Imergindo a Geometria Dinâmica em Sistemas de Educação a Distância: iGeom e SAW. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, Rio Grande do Sul, v. 14, n. 1, p. 41-49, 2006.

CLEMENTS, D. H. From exercises and tasks to problems and projetcs - unique contributions of computers to innovative mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdam, v. 19, n. 1, p. 9-47, 2000.

CROWLEY, M. L. The van hiele model of the development of geometric thought. In: LINDQUIST, M. M. (Ed.). **Learning and Teaching Geometry, k-12**, Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1987. p. 1-16.

FOURREY, E. **Procédés Originaux de Instructions Géométriques**. Paris: Librairie Vuibert, 1924.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987. V. 21

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica – uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996, Belo Horizonte. **Anais...** Rio Grande do Sul: Sociedade Brasileira de Computação, 1996. p. 1-13. CD-ROM.

GROTHMAN, R. **C.a.R**.: Compass and Rules, 1999. Disponível em: < http://car.rene-grothmann.de/doc_en/index.html >. Acesso em: 24 mar. 2013.

GUIMARÃES, L. C.; BARBASTEFANO, R.; BELFORT, E. Tools for synchronous distance teaching in geometry. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS, 2nd, 2002, Crete. **Proceedings…**Crete: University of Crete, 2002. p. 134-143. Disponível em: <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/>. Acesso em: 24 mar. 2013

HANNAFIN, R. D. Learning with dynamic geometry programs: Perspectives of teachers and learners. **The Journal of Educational Research**, Oxford, v. 94, n. 3, p. 132-144, 2001.

HARA, N.; KLING, R. Student's frustrations with a web-based distance education course. **First Monday:** Journal on the Internet, Chicago, v. 4, n.2, p. 1-24, 1999.

HENTEA, M.; SHEA, M. J.; PENNINGTON, L. A perspective on fulfilling the expectations of distance education. In: CONFERENCE ON INFORMATION TECHNOLOGY CURRICULUM, 4th, 2003, Indiana. **Proceedings...** New York: ACM, 2003. p. 160-167. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1145/947121.947158>. Acesso em: 24 mar. 2013

HOLLEBRANDS, K. F. High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. **Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdam, v. 22, n. 1, p. 55-72, 2003.

ISOTANI, S.; MIZOGUCHI, R.; INABA, A.; IKEDA, M. The foundations of a theory-aware authoring tool for CSCL design. **Computers & Education**, Amsterdam, v. 54, n. 4, p. 809-834, 2010.

ISOTANI, S.; BRANDÃO, L. O. An algorithm for automatic checking of exercises in a dynamic geometry system: iGeom. **Computers & Education**, Amsterdam, v. 51, n. 3, p. 1283-1303, 2008.

ISOTANI, S.; BRANDÃO, L. O. Como Usar a Geometria Dinâmica? O Papel do Professor e do Aluno Frente às Novas Tecnologias. In: WORKSHOP SOBRE INFORMÁTICA NA ESCOLA. CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, 12., 2006, Campo Grande. **Anais...** Rio Grande do Sul: Sociedade Brasileira de Computação, 2006. p. 120-128. CD-ROM.

ISOTANI, S. **Desenvolvimento de Ferramentas no iGeom:** Utilizando a Geometria Dinâmica no Ensino Presencial e a Distância. 2005. 92f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

JACKIW, N. **The Geometer's Sketchpad v3.0.** Berkeley: Key Curriculum Press, 1995.

JAVA **Linguagem de Programação Java**. Disponível em: <http://java.sun.com/: Sun Microsystems>. Acesso em: 24 mar. 2013.

JONES, D. Computing by distance education: problems and solutions. **ACM SIGCSE Bulletin**, New York, v. 28, n. SI, p. 139-146, 1996.

JONES, K. Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. **Educational Studies in Mathematics**, Berlin, v. 44, n. 1, p. 55-85, 2000.

KING, J.; SHATTSCHNEIDER, D. **Geometry Turned On - Dynamic Software in Learning, Teaching and Research.** Washington: Mathematical Association of America, 1997.

KORTENKAMP, U. **Foundation of Dynamic Geometry**. 1999. 175f. Dissertation (Ph.D. of Technical Sciences) – Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Zurich, 1999. Disponível em: <http://kortenkamps.net/papers/diss.pdf>. Acesso em: 24 mar. 2013.

LABORDER, J. M.; BELLEMAIN, F. **Cabri Geometry II**. Dallas: Texas Instruments, 1997.

LINDQUIST, M.; SHULTE, A. **Learning and Teaching Geometry, k-12**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1987.

MANDELBROT, B. **The fractal geometry of nature**. New York: W.H. Freeman, 1983.

MARRADES, R.; GUTIÉRREZ, A. Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. **Educational Studies in Mathematics**, Berlin, v. 44, n. 1, p. 87-125, 2000.

MELO, L.; FERREIRA, J. M.; PONTES, J. D. A. Um software educacional para o descobrimento de propriedades matemáticas. In: WORKSHOP SOBRE INFORMÁTICA NA ESCOLA, CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, 6., 2000, Curitiba. **Anais...** Rio Grande do Sul: Sociedade Brasileira de Computação, 2000. p. 1476-1487. CD-ROM.

MOURA, J. G.; BRANDÃO L. O.; BRANDÃO, A. A. F. A Web-based Learning Management System with Automatic Assessment Resources. In: IEEE FRONTIERS IN EDUCATION CONFERENCE, 13th, 2007, Wisconsin. **Proceedings…** Washington: IEEE Press. 2007. p. 1-6. Disponível em: <http://fie-conference.org/fie2007/index.html>. Acesso em: 24 mar. 2013

MUNZNER, T. Mathematical visualization: standing at the crossroads. In: CONFERENCE ON VISUALIZATION, 7th, 1996, California. **Proceedings…** Washington: IEEE Press, 1996. p. 451-453. CD-ROM.

OLDKNOW, A. Dynamic geometry software - a powerful tool for teaching mathematics, not just geometry! In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN MATHEMATICS TEACHING, 3rd, 1997, Koblenz. **Proceedings…** Koblenz: Institut fur Mediendidaktik der Universitat in Koblenz, 1997. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.38.1400>. Acesso em: 24 mar. 2013.

PAPERT, S. **Mindstorms**: children, computer and powerful ideas. 2. ed. New York: Basic Books, 1999.

PÓLYA, G. **Arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978.

RODRIGUES, D. W. L. **Uma avaliação comparativa de interfaces homem-computador em programas de geometria dinâmica.** 2002. 133f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

SANTOS, E. T.; SOLA, J. I. R. A proposal for an on-line library of descriptive geometry problems. **Journal for Geometry and Graphics**, Lemgo, v. 5, n. 1, p. 93-100, 2001.

USISKIN, Z. Resolving the continuing dilemmas in school geometry. In: LINDQUIST, M. M. (Ed.). **Learning and Teaching Geometry, k-12**, Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1987. p. 17-31.

Submetido em Abril de 2012.
Aprovado em Julho de 2012.