



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003057
EDN: WILGFO

Автоколебательные системы с управляемой фазой внешнего воздействия

Д. А. Крылосова², А. П. Кузнецов¹, Ю. В. Седова¹, Н. В. Станкевич^{1,2}✉

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия

E-mail: krylosovadarina@gmail.com, kuzalexpr@yandex.ru, sedovayv@yandex.ru, ✉stankevichnv@mail.ru

Поступила в редакцию 2.06.2023, принята к публикации 10.08.2023,

опубликована онлайн 12.09.2023, опубликована 29.09.2023

Аннотация. Цель настоящей работы состоит в исследовании автоколебательных систем при адаптивном внешнем воздействии. Имеется в виду ситуация, когда фаза внешнего воздействия дополнительным образом зависит от динамической переменной осциллятора. **Методы.** Используются методы карт динамических режимов и карт ляпуновских показателей, а также построение фазовых портретов и стробоскопических сечений. **Результаты.** В обзорном плане излагаются результаты для случая линейного затухающего осциллятора. Исследованы два случая автоколебательных систем — осциллятор ван дер Поля и автономный квазипериодический генератор с размерностью фазового пространства, равной трем. Описаны картины характерных динамических режимов. Описаны сценарии развития многомерного хаоса. Даны иллюстрации влияния управляющего параметра, отвечающего за степень зависимости фазы от переменной осциллятора, на динамику системы при разных частотах воздействия. **Заключение.** Введение зависимости фазы от динамической переменной приводит к расширению языков субгармонических резонансов, слабо выраженных в классическом осцилляторе ван дер Поля. Особенно это заметно для четных резонансов периодов 2 и 4. Для генератора квазипериодических колебаний в неавтономном случае наблюдаются трехчастотные торы, их области начинают доминировать при возрастании параметра адаптивности, вытесняя языки резонансных двухчастотных торов. Обнаружена разновидность многомерного хаоса, характеризующегося близким к нулю дополнительным показателем Ляпунова, показана возможность развития гиперхаоса в результате разрушения двухчастотного тора.

Ключевые слова: неавтономный осциллятор, фаза, осциллятор ван дер Поля, квазипериодичность, хаос.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-12-00121), <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

Для цитирования: Крылосова Д. А., Кузнецов А. П., Седова Ю. В., Станкевич Н. В. Автоколебательные системы с управляемой фазой внешнего воздействия // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 549–565. DOI: 10.18500/0869-6632-003057. EDN: WILGFO

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Self-oscillating systems with controlled phase of external force

D. A. Krylosova², A. P. Kuznetsov¹, Yu. V. Sedova¹, N. V. Stankevich^{1,2}✉

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia

E-mail: krylosovadarina@gmail.com, kuzalexp@yandex.ru,

sedovayv@yandex.ru, ✉stankevichnv@mail.ru

Received 2.06.2023, accepted 10.08.2023, available online 12.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. The purpose of this work is to study self-oscillatory systems under adaptive external action. This refers to the situation when the phase of the external action additionally depends on the dynamical variable of the oscillator. In a review plan, the results are presented for the case of a linear damped oscillator. Two cases of self-oscillatory systems are studied: the van der Pol oscillator and an autonomous quasi-periodic generator with three-dimensional phase space. *Methods.* Methods of charts of dynamical regimes and charts of Lyapunov exponents are used, as well as the construction of phase portraits and stroboscopic sections. *Results.* In a review plan, the results are presented for the case of a linear damped oscillator. Two cases of self-oscillatory systems are studied: the van der Pol oscillator and an autonomous quasi-periodic generator with a three-dimensional phase space. The pictures of characteristic dynamical regimes are described. Scenarios for the development of multidimensional chaos are described. Illustrations are given of the influence of the control parameter, which is responsible for the degree of dependence of the phase on the oscillator variable, on the dynamics of the system at different frequencies of action. *Conclusion.* The taking into account of the dependence of the phase on a dynamical variable leads to an extension of the tongues of subharmonic resonances, which are weakly expressed in the classical van der Pol oscillator. This is especially noticeable for even resonances of periods 2 and 4. For the generator of quasi-periodic oscillations in the non-autonomous case, three-frequency tori are observed, their regions begin to dominate with an increase in the adaptivity parameter, displacing the tongues of resonant two-frequency tori. A variety of multidimensional chaos characterized by an additional Lyapunov exponent close to zero is discovered, the possibility of developing hyperchaos as a result of destruction is shown.

Keywords: non-autonomous oscillator, phase, van der Pol oscillator, quasi-periodicity, chaos.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation (Project no. 21-12-00121), <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

For citation: Krylosova DA, Kuznetsov AP, Sedova YuV, Stankevich NV. Self-oscillating systems with controlled phase of external force. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(5):549–565. DOI: 10.18500/0869-6632-003057

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В природе и технике часто встречаются ситуации, когда внешнее воздействие на систему зависит не только от времени, но и от состояния самой системы. Это характерный пример наличия обратной связи. Примерами в радиотехнике и задачах коммуникации могут служить системы фазовой автоподстройки частоты [1–5]. В биологии система сердечно-сосудистой регуляции живых организмов при изменении нагрузки увеличивает или уменьшает частоту сердцебиений [6, 7]. Подобные ситуации характерны и для нейродинамики. Они могут быть охарактеризованы как адаптивные свойства системы, когда воздействие на нее управляется динамикой самой системы.

В качестве простейшего предмета для подобного изучения могут выступать колебательные системы при внешнем воздействии в случае, когда фаза воздействия зависит от динамической переменной системы. При этом автономная система, подвергаемая воздействию, может быть разного типа. Логично выбрать ситуации, отвечающие основным видам колебательных процессов. Это может быть простейший затухающий осциллятор, автоколебательная система с периодическим режимом, а также система с квазипериодическими колебаниями. Первый случай был ранее детально рассмотрен в [8–10] и в виде краткого обзора представлен в разделе 1. Следующая

ситуация, которую естественно ввести в рассмотрение — система с периодическими автоколебаниями. Такой случай на примере системы ван дер Поля обсуждается в разделе 2. В разделе 3 рассматривается управляемая система с автономной квазипериодичностью — квазипериодический генератор.

1. Случай затухающего осциллятора

Простейший случай колебательной системы с управляемой фазой внешнего воздействия представляет собой затухающий осциллятор, описываемый уравнением

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + x = A \sin(pt + kx). \quad (1)$$

Здесь начальная фаза воздействия линейно зависит от динамической переменной x . Система существенно зависит от трех параметров: амплитуды воздействия A , частоты воздействия p , параметра интенсивности управления фазой k . Нормировка в уравнении (1) выбрана так, что собственная частота осциллятора равна единице, α — параметр затухания осциллятора.

Система (1) подробно обсуждалась в [8–10]. Было исследовано устройство плоскостей различных пар параметров [8, 9]. Показано, что зависимость фазы внешнего воздействия от динамической переменной существенно усложняет динамику. Система (1) демонстрирует множество областей колебательных режимов, реализующихся в окрестности частот, кратных резонансной. Обнаружена возможность бифуркаций удвоения периода колебаний и хаоса. В системе также наблюдается мультистабильность. Исследованы и другие случаи зависимости фазы воздействия от переменной, в частности, квадратичной и кубической нелинейности [10]. Обсуждается также еще один случай управления, когда от динамической переменной зависит частота воздействия [9]. Представлена радиоэлектронная экспериментальная реализация на основе колебательного контура с затуханием для случая как управляемой фазы, так и частоты воздействия [9]. Отметим также, что в [11] исследован нелинейный магнитный затухающий осциллятор с нелинейностью типа синуса и линейно зависящей фазой воздействия от угловой переменной.

2. Случай периодических автоколебаний — осциллятор ван дер Поля

Рассмотрим теперь случай, когда возбуждаемая система может генерировать периодические автоколебания. Простейшим примером является осциллятор ван дер Поля [12, 13]:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin(pt + kx). \quad (2)$$

Здесь λ — управляющий параметр, отвечающий за отрицательную диссипацию. Остальные параметры те же, что и в (1). Нормировка выбрана так, что собственная частота осциллятора равна единице.

Уравнение (2) приводится к стандартному виду системы трех уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda - x^2)y - x + A \sin(w), \\ \dot{w} &= p + ky. \end{aligned} \quad (3)$$

Обсудим динамику системы (3). На рис. 1, а представлена карта динамических режимов осциллятора ван дер Поля под гармоническим воздействием (то есть случай $k = 0$) на традиционной для неавтономных систем плоскости параметров частота — амплитуда воздействия (p, A)

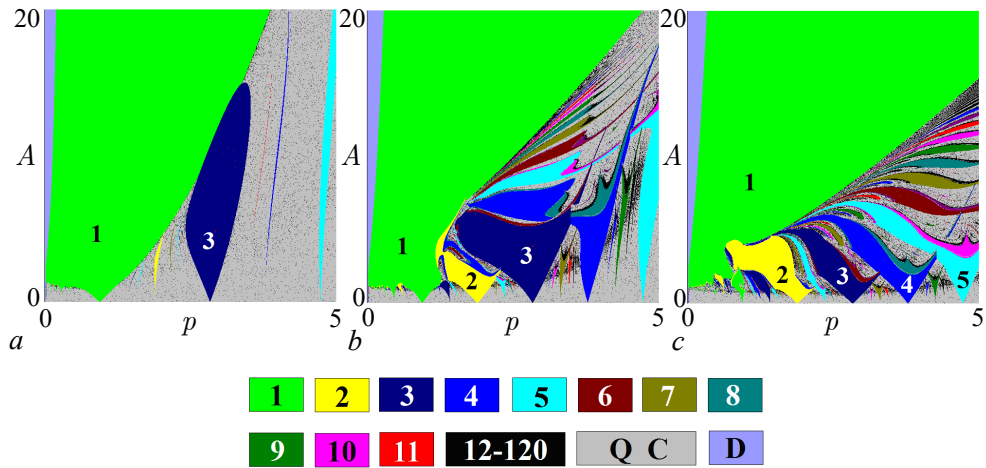


Рис. 1. Карты динамических режимов классического неавтономного осциллятора ван дер Поля (3) для $\lambda = 1$ (a) и с управляемой фазой воздействия для $k = 0.5$ (b) и $k = 1$ (c) (цвет онлайн)

Fig. 1. Charts of dynamical regimes for classical non-autonomous van der Pol oscillator (3) at $\lambda = 1$ (a) and with controlled phase of external force at $k = 0.5$ (b) and $k = 1$ (c) (color online)

для $\lambda = 1$. Такое значение параметра λ удобно тем, что оно является промежуточным между случаями квазигармонического приближения и релаксационных колебаний [12, 13]. Цвет на карте отвечает различным периодам колебаний системы, определяемым в сечении Пуанкаре. Поскольку рассматриваемая система неавтономная, то строилось стробоскопическое сечение. Цветовая палитра и периоды колебаний указаны под рисунком. Непериодические колебания обозначены серым цветом (в данном случае они могут быть квазипериодическими **Q** или хаотическими **C**, этот метод их не различает). Показана также узкая область разбегания траекторий **D**.

На рис. 1, a можно видеть обширную область периода 1, отвечающую основному резонансу. Правее ее располагаются области синхронизации на субгармониках внешней силы (по терминологии [14]). Наиболее выражен язык синхронизации, отвечающий периоду 3, что связано с кубическим характером нелинейности осциллятора ван дер Поля.

Влияние на наблюдаемые режимы зависимости фазы от динамической переменной иллюстрируют рис. 1, b и рис. 1, c, которые относятся к случаям $k = 0.5$ и $k = 1$. Можно видеть, что введение такой зависимости приводит к расширению языков в области синхронизации на субгармониках внешней силы, слабо выраженных в классическом осцилляторе ван дер Поля. Особенно это заметно для четных резонансов периодов 2 и 4. В случае рис. 1, c резонансы с последовательными периодами в области небольших амплитуд воздействия становятся «равноправными».

На рис. 2 показаны увеличенные фрагменты рис. 1, b, иллюстрирующие особенности устройства плоскости параметров. Рис. 2, a представляет увеличенную область между языками периодов 2 и 4. Можно видеть, что при небольших амплитудах воздействия картина стала близка к классическому синус-отображению окружности [15, 16]. Рис. 2, b — область синхронизации на гармониках внешней силы (по терминологии [14]). Она располагается в диапазоне частот, меньших собственной частоты осциллятора. Такие резонансы на карте характеризуются системой языков периода 1 — им отвечает разное число оборотов фазовой траектории, но единственное пересечение с сечением Пуанкаре. Примеры фазовых портретов для разных языков периода 1 для значений параметров, отмеченных точками на карте, представлены на рис. 2, d–g. Хорошо видно увеличение оборотов траектории при уменьшении частоты внешнего сигнала. Между языками периода 1 на рис. 2, b наблюдаются и очень узкие языки других периодов.

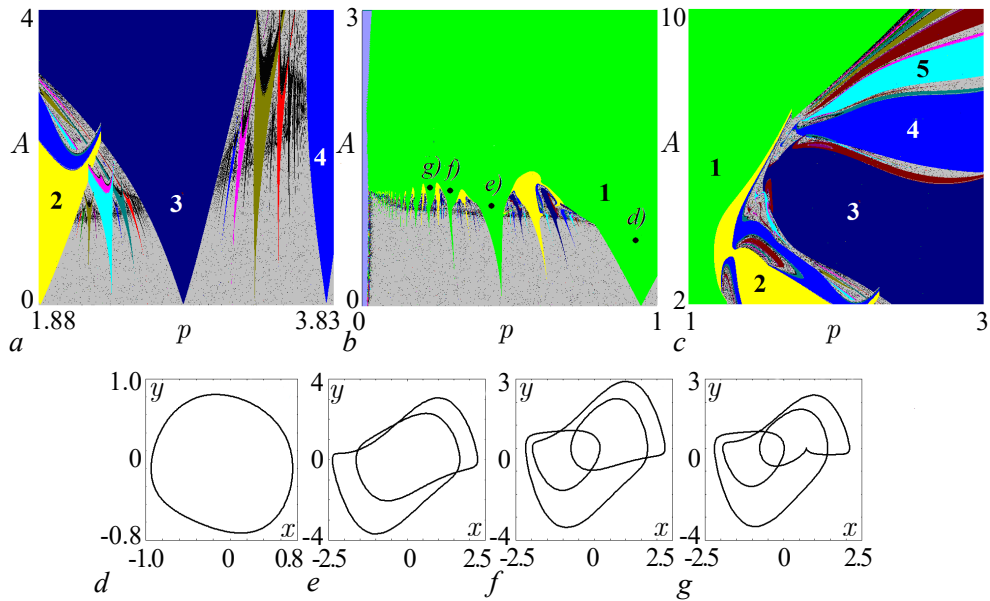


Рис. 2. Увеличенные фрагменты карты динамических режимов неавтономного осциллятора ван дер Поля (3), $\lambda = 1$, $k = 0.5$ (a, b, c). Фазовые портреты, иллюстрирующие синхронизацию на гармониках внешней силы: $p = 0.92$, $A = 0.655$ (d); $p = 0.43$, $A = 1.015$ (e); $p = 0.3$, $A = 1.17$ (f); $p = 0.23$, $A = 1.2$ (g) (цвет онлайн)

Fig. 2. Zoomed fragments of chart of dynamical regime for non-autonomous van der Pol oscillator (3) at $\lambda = 1$, $k = 0.5$ (a, b, c). Phase portraits illustrating synchronization on the harmonics of an external force: $p = 0.92$, $A = 0.655$ (d); $p = 0.43$, $A = 1.015$ (e); $p = 0.3$, $A = 1.17$ (f); $p = 0.23$, $A = 1.2$ (g) (color online)

Фрагмент карты на рис. 2, c иллюстрирует область достаточно больших амплитуд, когда для частот выше собственной вершины резонансных языков разных периодов стягиваются к границе основного резонанса.

Обсудим более детально влияние управляющего параметра k на динамику системы. С этой целью были построены примеры карт динамических режимов на плоскости параметров (k, A) для двух значений частот воздействия: равной собственной частоте осциллятора $p = 1$ (рис. 3, a) и характеризующейся достаточно большой частотной отстройкой $p = 5$ (рис. 3, b).

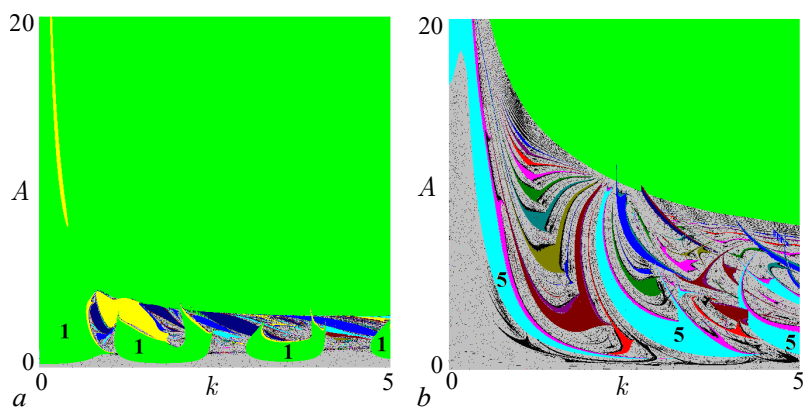


Рис. 3. Карты динамических режимов неавтономного осциллятора ван дер Поля (3) для $p = 1$ (a) и $p = 5$ (b), $\lambda = 1$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Charts of dynamical regime for non-autonomous van der Pol oscillator (3) at $p = 1$ (a) and $p = 5$ (b), $\lambda = 1$ (color online)

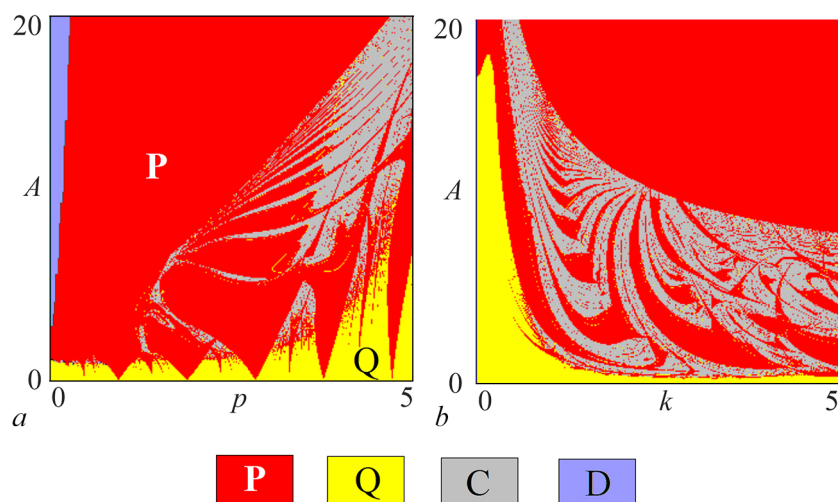


Рис. 4. Карты ляпуновских показателей неавтономного осциллятора ван дер Поля (3) для $k = 0.5$ (a) и $p = 5$ (b), $\lambda = 1$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Charts of Lyapunov exponents for non-autonomous van der Pol oscillator (3) at $k = 0.5$ (a) and $p = 5$ (b), $\lambda = 1$ (color online)

Можно видеть, что при воздействии на резонансной частоте $p = 1$ при небольших амплитудах воздействия возникает система островов периода 1, располагающихся достаточно регулярно вдоль оси k . При больших амплитудах A наблюдается только режим периода 1. В свою очередь для частоты $p = 5$ можно видеть систему островов периода 5. При этом с увеличением амплитуды воздействия наблюдается множество окон самых разных периодов, погруженных в область нерегулярной динамики.

Как мы отмечали, использованный выше метод не различает хаотические и квазипериодические режимы. В рассматриваемой системе, однако, последние возможны (в отличие от случая затухающего осциллятора (1)). Чтобы продемонстрировать это и выявить области локализации данных режимов, были построены примеры карт ляпуновских показателей, показанные на рис. 4. Цвет на картах определялся в соответствии со спектром показателей Ляпунова $\Lambda_{1,2,3}$:

- P** — периодический режим, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_{2,3} < 0$;
- Q** — квазипериодический режим, $\Lambda_{1,2} = 0, \Lambda_3 < 0$;
- C** — хаотический режим $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0$.

Также отмечена узкая область разбегания траекторий **D**.

3. Случай трехмерной автоколебательной системы с адаптивным внешним воздействием — квазипериодический генератор

Увеличим теперь размерность автономной системы до трех. Это создает возможность усложнения ее динамики. Здесь мы рассмотрим трехмерную систему [17, 18], которая в автономном режиме в зависимости от параметров способна демонстрировать состояние равновесия, периодические и квазипериодические колебания. Если говорить о радиофизике, то подобную систему можно назвать квазипериодическим генератором. Известно несколько примеров таких систем [17–23]. Отметим, что квазипериодические генераторы, возбуждаемые даже простым гармоническим сигналом, мало исследованы. Можно указать работы [22, 24], относящиеся к модифицированному генератору Анищенко–Астахова, но там исследована четырехмерная система,

причем в рамках однопараметрического анализа. В работе [25] исследован вариант генератора без состояний равновесия, но в случае импульсного воздействия.

Исследуемая в рамках данной работы система имеет вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= A \sin(pt + kx), \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - \mu \dot{x}^2.\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь λ — управляющий параметр генератора, а ω_0 — частотный параметр. Остальные параметры выбираем аналогично [17, 18]: $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\mu = 0.02$, $\beta = 1/18$, $\lambda = -1$. При таком выборе параметров автономная система (4) может демонстрировать как периодические, так и квазипериодические колебания в зависимости от значения параметра ω_0 . Мы выберем два случая, когда $\omega_0 = 5$ и $\omega_0 = 2\pi$, что отвечает периодическим и квазипериодическим колебаниям автономной системы. Отметим, что зависимость типа режима от параметра ω_0 не позволяет исключить его перенормировкой, как в случае осциллятора ван дер Поля, для которого тип режима не зависит от собственной частоты.

Система (4) приводится к стандартному виду четырех уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)y - \omega_0^2 x + A \sin(w), \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - \mu y, \\ \dot{w} &= p + ky.\end{aligned}\tag{5}$$

При использовании метода карт показателей Ляпунова следует иметь в виду, что поскольку размерность автономной системы увеличилась, то модель (5) будет иметь 4 характеристических показателя Ляпунова $\Lambda_{1,2,3,4}$. Соответственно, возникает возможность новых динамических режимов, так что будем идентифицировать:

- P** — периодический режим, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_{2,3,4} < 0$;
- Q2** — двухчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_{1,2} = 0$, $\Lambda_{3,4} < 0$;
- Q3** — трехчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_{1,2,3} = 0$, $\Lambda_4 < 0$;
- C** — хаос $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_{3,4} < 0$;
- C0** — хаос с дополнительным, близким к нулю показателем Ляпунова $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 \approx 0$, $\Lambda_4 < 0$;
- HC** — гиперхаос $\Lambda_{1,2} > 0$, $\Lambda_3 = 0$, $\Lambda_4 < 0$.

3.1. Случай гармонического внешнего воздействия на периодические и квазипериодические колебания. Сначала рассмотрим случай простого гармонического воздействия, когда $k = 0$. На рис. 5 представлены карты показателей Ляпунова для двух значений параметра ω_0 , когда автономная система демонстрирует периодические и квазипериодические автоколебания. В случае возбуждения периодических автоколебаний (рис. 5, а) можно видеть основной язык синхронизации **P**, имеющий острие в точке, отвечающей частоте внешнего воздействия, равной частоте собственных колебаний генератора. Имеются очень узкие языки синхронизации разных периодов, так можно различить резонансы на удвоенной, утроенной и упятеренной частотах. Языки периодических режимов погружены в область двухчастотных квазипериодических колебаний **Q2**. Заметим, что возле основного языка синхронизации при достаточно больших амплитудах сигнала можно обнаружить небольшую область хаотического поведения, которая возникает при перекрытии языков синхронизации на кратных частотах.

В случае воздействия гармоническим сигналом на устойчивый инвариантный тор могут наблюдаться не только двухчастотные **Q2**, но и трехчастотные **Q3** квазипериодические колебания,

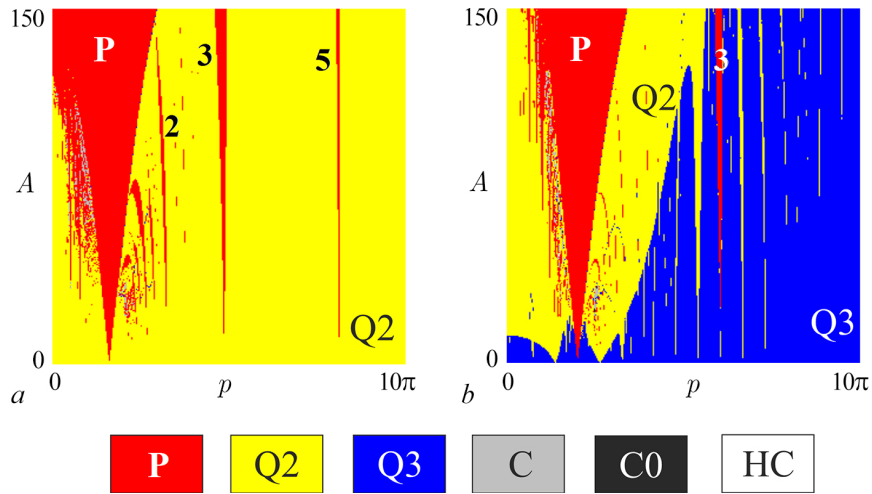


Рис. 5. Карты ляпуновских показателей неавтономного квазипериодического генератора (5) для $k = 0$ и $\omega_0 = 5$ (a), $\omega_0 = 2\pi$ (b). Остальные параметры: $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\mu = 0.02$, $\beta = 1/18$, $\lambda = -1$. Цифрами обозначены периоды циклов в стробоскопическом сечении (цвет онлайн)

Fig. 5. Charts of Lyapunov exponents of a non-autonomous quasi-periodic generator (5) for $k = 0$ and $\omega_0 = 5$ (a), $\omega_0 = 2\pi$ (b). Other parameters: $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\mu = 0.02$, $\beta = 1/18$, $\lambda = -1$. The numbers indicate the periods of cycles in the stroboscopic section (color online)

рис. 5, b. В отличие от рис. 5, a, области двухчастотных торов **Q2** имеют вид языков с остриями, расположенными на оси частоты воздействия. Им отвечают резонансные двухчастотные торы, возникающие на поверхности трехчастотного. Отметим, что внешний сигнал может инициировать периодические колебания **P**, несмотря на то, что автономная система демонстрирует квазипериодический режим. На рис. 5, b наблюдается основной язык синхронизации, а также узкий язык периода 3. Отметим, что хорошо прослеживаются два языка двухчастотной квазипериодичности справа и слева от основного языка синхронизации. Области хаоса возможны возле основного языка синхронизации и занимают малые области в пространстве параметров.

Отметим, что наблюдаемая картина отчасти похожа на возбуждаемые гармоническим сигналом два связанных осциллятора ван дер Поля [26, 27].

3.2. Случай адаптивного внешнего воздействия на периодические колебания. Рассмотрим теперь трансформацию картины режимов в системе (5) при наличии адаптивности внешнего сигнала. Сначала рассмотрим случай $\omega_0 = 5$, когда автономная система демонстрирует периодические автоколебания.

На рис. 6 представлены карта динамических режимов и ляпуновская карта на плоскости период — амплитуда внешнего сигнала (p , A) для значения параметра адаптивности $k = 5$. Хорошо видно, что наличие большой адаптивности приводит к разрушению основного языка синхронизации периода 1. Однако наблюдается развитие языков синхронизации других периодов — выраженными становятся языки периода 3, 4, 5 и т. д. Внутри этих языков на рис. 6, a хорошо прослеживаются бифуркации удвоения периода, например область периода 6 внутри языка периода 3. Внутри языков периода 4 и 5 на карте ляпуновских показателей просматриваются также области квазипериодичности **Q2** (отмечены стрелками на рис. 6, b). Они возникают в результате бифуркации Неймарка–Сакера, что иллюстрируют фазовые портреты в стробоскопическом сечении на рис. 6, c и 6, d. На рис. 6, c показана ситуация, когда на базе предельного цикла периода 4 в результате бифуркации Неймарка–Сакера рождается 4-компонентный двухчастотный инвариантный тор. Черным цветом обозначены неподвижные точки в сечении до порога бифуркации,

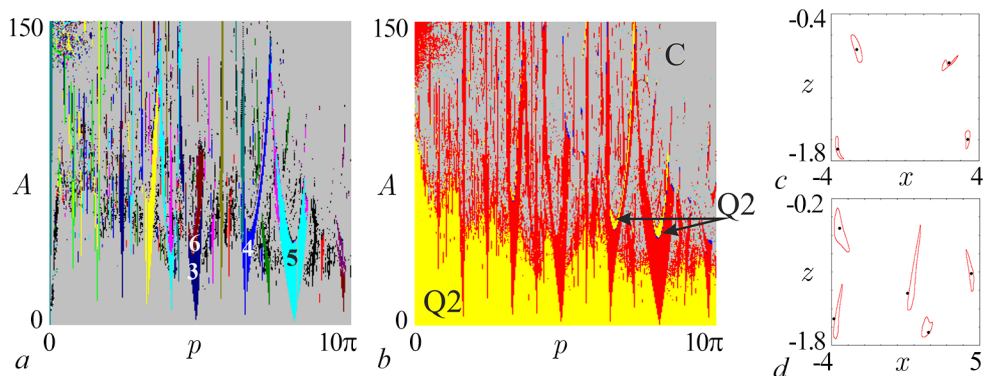


Рис. 6. Карта динамических режимов (a) и карта показателей Ляпунова (b) для генератора квазипериодических колебаний с адаптивным внешним воздействием (5) в режиме периодических колебаний, $\omega_0 = 5$, для $k = 5$. Примеры стробоскопических сечений, демонстрирующие вторичные бифуркации Неймарка–Сакера внутри языков синхронизации: $c - A = 45, p = 21$ (черный цвет), $A = 50, p = 21$ (красный цвет); $d - A = 46, p = 25$ (черный цвет), $A = 46, p = 25.4$ (красный цвет) (цвет онлайн)

Fig. 6. Chart of dynamical regime (a) and chart of Lyapunov exponents (b) for a quasi-periodic generator with an adaptive external action (5) in the regime of periodic self-oscillations, $\omega_0 = 5$, for $k = 5$. Examples of stroboscopic sections showing secondary Neimark–Sacker bifurcations inside synchronization tongues: $c - A = 45, p = 21$ (black), $A = 50, p = 21$ (red); $d - A = 46, p = 25$ (black), $A = 46, p = 25.4$ (red) (color online)

а красным цветом показаны инвариантные кривые за порогом бифуркации. Значения параметров указаны в подписи к рисунку. Аналогичная бифуркация происходит на базе языка синхронизации периода 5, что иллюстрирует рис. 6, d.

Отметим, что адаптивное воздействие приводит к формированию областей хаоса C, появляющихся в результате перекрытия языков синхронизации. Значительные области хаоса наблюдаются также при больших амплитудах сигнала. Наличие обширных областей хаоса является одним из отличий от случая осциллятора ван дер Поля.

3.3. Случай адаптивного внешнего воздействия на квазипериодические колебания.

Теперь перейдем к случаю, когда $\omega_0 = 2\pi$, и автономная система демонстрирует двухчастотные квазипериодические колебания. На рис. 7 представлен набор карт динамических режимов и карт показателей Ляпунова для данной ситуации при различных значениях параметра k , отвечающего за адаптивность системы (5).

Введение даже малой адаптивности (рис. 7, a, $k = 0.5$) меняет картину таким же образом, как и в случае периодических колебаний: основной язык синхронизации разрушается, при этом ярко выраженным становится язык периода 2. На карте показателей Ляпунова можно видеть, что при малых амплитудах наблюдаются трехчастотные торы Q3, со встроенной системой языков двухчастотных торов на комбинационных частотах. С увеличением амплитуды языки двухчастотных торов перекрываются, образуя однородную область Q2. Внутри языков двухчастотных торов можно обнаружить очень узкие языки периодических колебаний, которые с увеличением амплитуды расширяются и возникают хаотические колебания.

При увеличении параметра адаптивности до значения $k = 1$ (рис. 7, b) язык периода 2 также разрушается, но выраженными становятся языки периодов 4 и 5. Области хаоса расширяются, при этом порог возникновения хаоса по амплитуде A уменьшается.

При больших значениях параметра адаптивности внешнего сигнала $k = 5$ (рис. 7, c) на карте режимов мы видим, что происходит почти полное исчезновение периодических режимов. Лишь очень небольшие острова периодичности наблюдаются внутри области нерегулярных колебаний. На карте показателей Ляпунова при этом при малой амплитуде сохраняются трехчас-

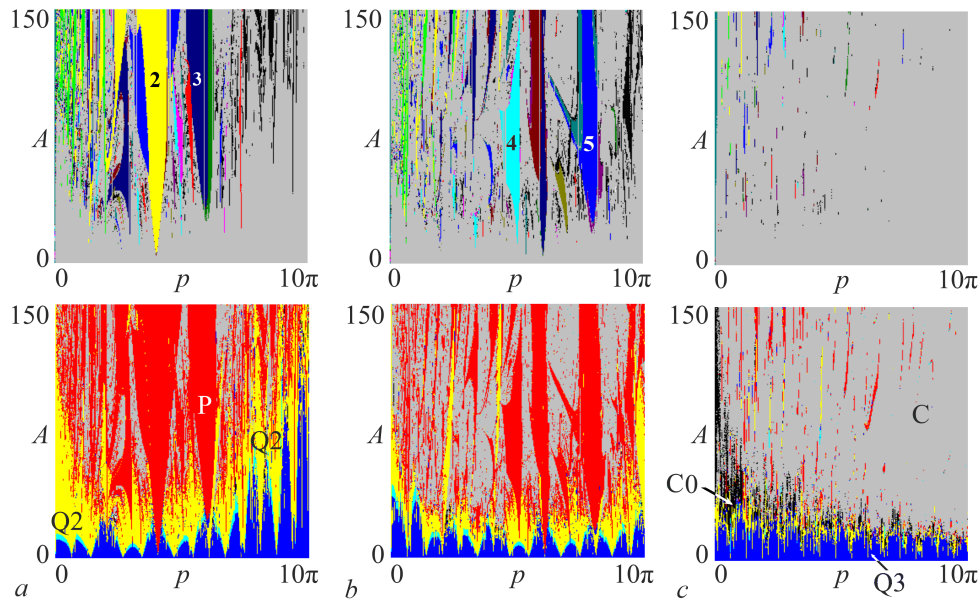


Рис. 7. Набор карт динамических режимов (верхний ряд) и соответствующих карт показателей Ляпунова (нижний ряд) для генератора квазипериодических колебаний с адаптивным внешним воздействием (5) в режиме квазипериодических колебания, $\omega_0 = 2\pi$. $k = 0.5$ (a); $k = 1$ (b); $k = 5$ (c) (цвет онлайн)

Fig. 7. A set of charts of dynamic regimes (top row) and corresponding charts of Lyapunov exponents (bottom row) for a quasi-periodic generator with an adaptive external action (5) in the quasi-periodic oscillation regime, $\omega_0 = 2\pi$. $k = 0.5$ (a); $k = 1$ (b); $k = 5$ (c) (color online)

тотные торы **Q3**, которые начинают доминировать, вытесняя языки двухчастотных режимов, наблюдавшиеся на рис. 7, a, b.

На рис. 8, a представлены графики показателей Ляпунова в широком диапазоне изменения амплитуды внешнего сигнала для частоты воздействия $p = 5$ и их увеличенные фрагменты, рис. 8, b, c. При малой амплитуде воздействия на рис. 8, a хорошо прослеживается трехчастотная квазипериодичность **Q3**, когда $\Lambda_{1,2,3} = 0$. Ее иллюстрирует рис. 8, d, на котором слева представлен аттрактор соответствующего трехчастотного тора в стробоскопическом сечении (рис. 8, d1) и справа в двойном сечении Пуанкаре (рис. 8, d2). При построении двойного сечения выбирались точки, попадающие в слой $|x| < 10^{-2}$, с дополнительным условием $y > 0$. В двойном сечении можно видеть гладкую замкнутую инвариантную кривую, что и отвечает трехчастотному тору.

С увеличением амплитуды сигнала происходит частичный захват частот и рождается двухчастотный тор. Данный переход происходит в результате седло-узловой квазипериодической бифуркации SNQ типа, описанной в [28], и в момент бифуркации рождается пара: устойчивый и седловой торы. На рис. 8, e представлены однократное и двукратное отображения для данного аттрактора. В стробоскопическом сечении хорошо видно, что инвариантная кривая имеет достаточно сложную форму — она многооборотная, то есть имеет большое число вращения (рис. 8, e1). В двойном сечении Пуанкаре можно видеть 17 неподвижных точек (рис. 8, e2), которые отвечают 17-оборотному двумерному тору.

Дальнейшее увеличение амплитуды воздействия приводит к разрушению двухчастотных торов **Q2** и формированию хаотического аттрактора. Это иллюстрирует увеличенный фрагмент графиков на рис. 8, b. Расчеты показывают, что в этом случае второй показатель, как это обычно принято в численных расчетах, может считаться нулевым (его величина порядка 10^{-5}). В то же время третий показатель Ляпунова имеет очень малое значение по абсолютной величине (порядка 10^{-3}), но при этом он отрицателен. На рис. 8, b соответствующая область обозначена **C0**. Эта особенность динамики представляется интересной, и мы дадим несколько комментариев.

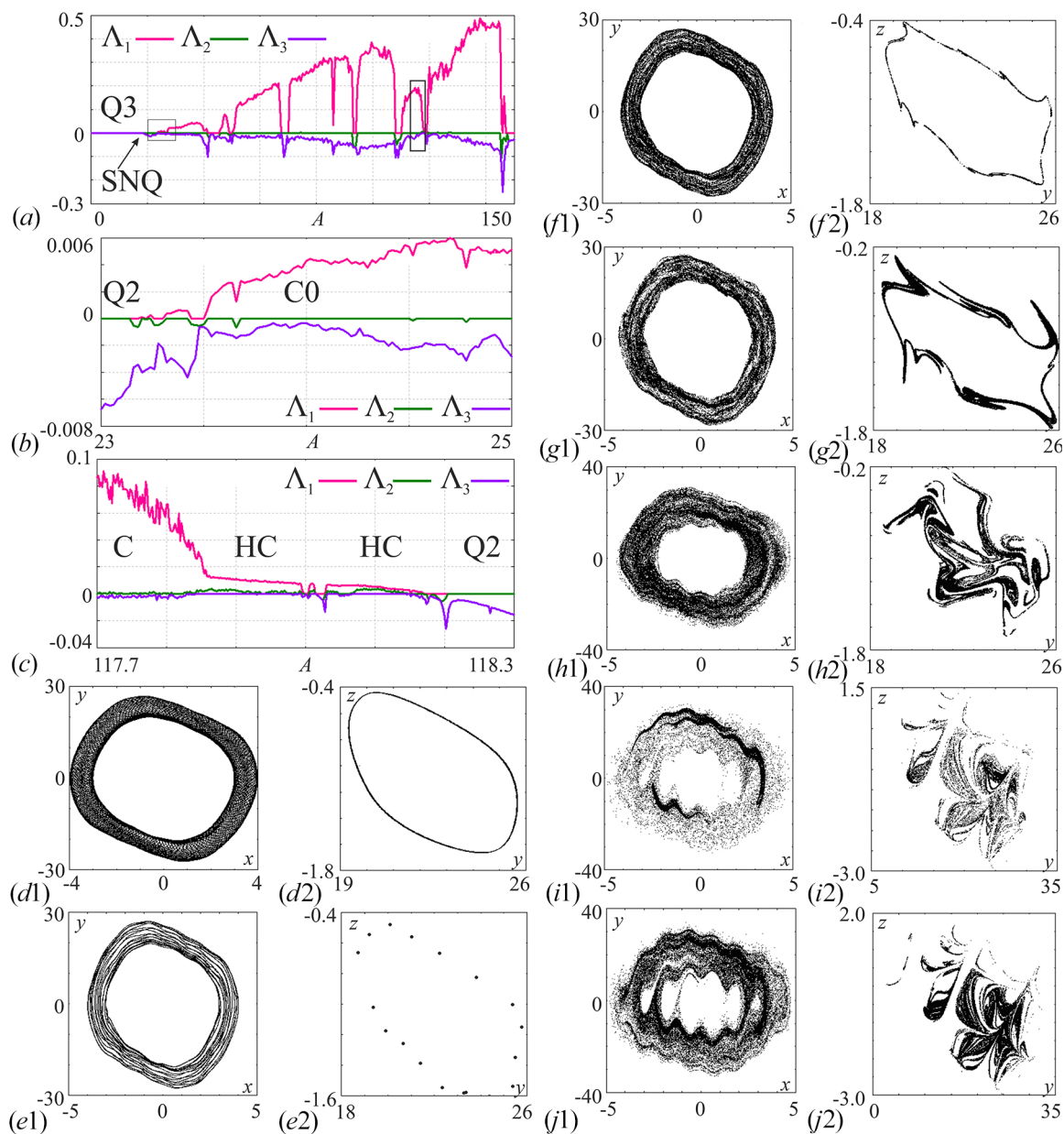


Рис. 8. $a-c$ – Графики показателей Ляпунова в различных масштабах для генератора квазипериодических колебаний с адаптивным внешним воздействием (5) в режиме квазипериодических колебаний, $\omega_0 = 2\pi$, $k = 5$, $p = 5$. SNQ – седло-узловая бифуркация инвариантных торов. Аттракторы системы в стробоскопическом и двойном сечении Пуанкаре: $A = 10$ (d); $A = 23$ (e); $A = 24$ (f); $A = 29$ (g); $A = 60$ (h); $A = 117.8$ (i); $A = 140.0$ (j) (цвет онлайн)

Fig. 8. $a-c$ – Plots of Lyapunov exponents with different scales for a quasi-periodic oscillator with an adaptive external action (5) in the quasi-periodic oscillation regime, $\omega_0 = 2\pi$, $k = 5$, $p = 5$. SNQ is a saddle-node bifurcation of invariant tori. Attractors of the system in the stroboscopic and double Poincaré sections: $A = 10$ (d); $A = 23$ (e); $A = 24$ (f); $A = 29$ (g); $A = 60$ (h); $A = 117.8$ (i); $A = 140.0$ (j) (color online)

В работах [18, 29–34] обсуждалась возможность хаотического аттрактора с двумя (или даже тремя) нулевыми показателями Ляпунова, возникающими в результате разрушения трехчастотного тора или каскада бифуркаций удвоения торов. В то же время строгие результаты отсутствуют, и вопрос является дискуссионным. Поэтому вслед за [18, 33] более аккуратно говорить об «очень близком к нулю» дополнительном показателе. В этом плане представляется интересным рассматриваемый пример аттрактора с близким к нулю, но отрицательным третьим показателем.

Данная особенность связана, скорее всего, с наличием двумерного седлового тора, который возник в результате седло-узловой бифуркации [28]. На рис. 8, *f* представлены стробоскопическое сечение и двойное сечение для хаоса с третьим показателем Ляпунова, близким к нулю. В стробоскопическом сечении аттрактор близок к трехмерному тору (рис. 8, *f1*), однако в двойном сечении мы видим, что инвариантная кривая стала негладкой и начала разрушаться, хотя хорошо просматривается форма изначальной инвариантной кривой (рис. 8, *f2*).

Отметим, что на карте рис. 7, *c* область динамики данного типа показана черным цветом и обозначена **C0**, при этом определялось значение третьего показателя $\Lambda_3 \approx 0$ с порогом для фиксации близкого к нулю значения порядка 10^{-3} . Этот критерий отчасти условный, поскольку зависит от выбранного порога, но позволяет визуализировать область, где наблюдается подобная динамика.

Дальнейшее увеличение амплитудного параметра приводит к разрушению трехчастотного тора и на рис. 8, *g2* в двойном сечении мы видим развитый хаотический аттрактор, который характеризуется одним положительным, одним нулевым и двумя отрицательными показателями Ляпунова. Увеличение амплитуды внешнего сигнала приводит к дальнейшему разрушению трехчастотного тора и на рис. 8, *h1* уже в стробоскопическом сечении мы видим, что аттрактор не похож на тор; двойное сечение демонстрирует сложный хаотический аттрактор.

Для большой амплитуды внешнего сигнала можно также обнаружить область, где два старших показателя Ляпунова — положительные. На рис. 8, *c* представлен увеличенный фрагмент графиков показателей Ляпунова, где отслеживается переход к гиперхаосу НС, когда $\Lambda_{1,2} > 0$. На рис. 8, *i* представлен пример гиперхаотического аттрактора. Интервал, где существует гиперхаос, достаточно мал в пространстве параметров, с дальнейшим увеличением амплитуды реализуется классический хаос. На рис. 8, *j* представлены иллюстрации аттрактора для больших амплитуд внешнего сигнала.

Заключение

Проведено исследование автоколебательных систем с периодическим внешним воздействием, характеризующимся свойством адаптивности, когда фаза воздействия линейно зависит от динамической переменной осциллятора. Рассмотрены особенности поведения автоколебательных автономных систем с двумерным и трехмерным фазовым пространством.

В качестве двумерной модели изучен осциллятор ван дер Поля. Наличие адаптивности воздействия приводит к усложнению картины режимов, так что становятся выраженными языки Арнольда в области синхронизации на субгармониках внешнего сигнала. Внутри языков синхронизации возможны бифуркации удвоения с переходом к хаосу. Увеличение параметра адаптивности приводит к развитию картины, близкой к классическому синус-отображению окружности.

В качестве трехмерной модели изучен генератор автономной квазипериодичности в режиме периодических и квазипериодических автоколебаний. В первом случае внешнее воздействие при наличии адаптивности приводит к тому, что язык основного резонанса периода 1 разрушается, и расширяются языки синхронизации периодов 2, 3 и т. д. Внутри этих языков возможно возникновение квазипериодической динамики за счет бифуркации Неймарка–Сакера, в результате чего происходит формирование многооборотных торов.

В режиме квазипериодических колебаний динамика неавтономной системы становится более богатой. Появляются трехчастотные квазипериодические колебания, образующие область, в которую погружены языки резонансных двухчастотных торов. В случае простого гармонического воздействия возникают периодические режимы периода 1, 3 и др., хотя автономная система демонстрирует квазипериодичность. Наличие адаптивности приводит к разрушению основных мод полной синхронизации. Область трехчастотной квазипериодичности радикально расширяется,

вытесняя языки двухчастотных торов. При этом в небольших областях пространства параметров наблюдается разрушение трехчастотного тора с формированием многомерного хаоса, который в спектре показателей Ляпунова, помимо нулевого, имеет еще один близкий к нулю показатель. Также показана возможность возникновения гиперхаоса в такой системе.

Список литературы

1. *Best R. E.* Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications. 6th ed. New York: McGraw-Hill, 2007. 489 p.
2. *Шалфеев В. Д., Матросов В. В.* Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2013. 366 с.
3. *Kuznetsov N. V., Leonov G. A.* Nonlinear Mathematical Models of Phase-Locked Loops. Cambridge Scientific Publisher, 2014. 218 p.
4. *Kuznetsov N. V., Belyaev Y. V., Styazhkina A. V., Tulaev A. T., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V.* Effects of PLL architecture on MEMS gyroscope performance // *Gyroscopy and Navigation*. 2022. Vol. 13, no. 1. P. 44–52. DOI: 10.1134/S2075108722010047.
5. *Kuznetsov N. V., Lobachev M. Y., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V., Tavazoei M. S.* The gardner problem on the lock-in range of second-order type 2 phase-locked loops // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2023. P. 1–15. DOI: 10.1109/TAC.2023.3277896.
6. *Ottesen J. T.* Modelling the dynamical baroreflex-feedback control // *Mathematical and Computer Modelling*. 2000. Vol. 31, no. 4–5. P. 167–173. DOI: 10.1016/S0895-7177(00)00035-2.
7. *Hall J. E.* Guyton and Hall Textbook of Medical Physiology E-Book. Elsevier Health Sciences, 2015. 1147 p.
8. *Селезнев Е. П., Станкевич Н. В.* Сложная динамика неавтономного осциллятора с управляемой фазой внешнего воздействия // *Письма в ЖТФ*. 2019. Т. 45, № 2. С. 59–62. DOI: 10.21883/PJTF.2019.02.47227.17473.
9. *Krylosova D. A., Seleznev E. P., Stankevich N. V.* Dynamics of non-autonomous oscillator with a controlled phase and frequency of external forcing // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020. Vol. 134. P. 109716. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.109716.
10. *Krylosova D., Seleznev E., Stankevich N.* The simplest oscillators with adaptive properties // In: 2020 4th Scientific School on Dynamics of Complex Networks and their Application in Intellectual Robotics (DCNAIR). 07–09 September 2020, Innopolis, Russia. IEEE, 2020. P. 140–143. DOI: 10.1109/DCNAIR50402.2020.9216759.
11. *Polczyński K., Bednarek M., Awrejcewicz J.* Magnetic oscillator under excitation with controlled initial phase // In: Awrejcewicz J., Kaźmierczak M., Olejnik P., Mrozowski J. (eds) 16th International Conference Dynamical Systems – Theory and Applications. 6–9 December 2021 Łódź. DSTA, 2021. P. 400–401.
12. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М: Техносфера, 2003. 496 с.
13. *Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O.* Synchronization: From Simple to Complex. Berlin: Springer, 2009. 426 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
14. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
15. *Ding E. J., Hemmer P. C.* Winding numbers for the supercritical sine circle map // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1988. Vol. 32, no 1. P. 153–160. DOI: 10.1016/0167-2789(88)90092-9.
16. *Ivanov N. Y., Kuznetsov S. P.* Complex periodic orbits, renormalization, and scaling for quasiperiodic golden-mean transition to chaos // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63, no. 4. P. 046210. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.046210.

17. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Mosekilde E., Stankevich N. V.* Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space // *The European Physical Journal Special Topics*. 2013. Vol. 222, no. 10. P. 2391–2398. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02023-x.
18. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Shchegoleva N. A., Stankevich N. V.* Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2019. Vol. 398. P. 1–12. DOI: 10.1016/j.physd.2019.05.014.
19. *Matsumoto T.* Chaos in electronic circuits // *Proceedings of the IEEE*. 1987. Vol. 75, no. 8. P. 1033–1057. DOI: 10.1109/PROC.1987.13848.
20. *Анищенко В. С., Николаев С. М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // *Письма в ЖТФ*. 2005. Т. 31, № 19. С. 88–94.
21. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73, no. 5. P. 056202. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202.
22. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E*. 2007. Vol. 76, no. 4. P. 046216. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.046216.
23. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Stankevich N. V.* A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010. Vol. 15, no. 6. P. 1676–1681. DOI: 10.1016/j.cnsns.2009.06.027.
24. *Кузнецов А. П., Седова Ю. В.* Воздействие гармонического сигнала на генератор квазипериодических колебаний Анищенко–Астахова // *Письма в ЖТФ*. 2022. Т. 48, № 4. С. 48–50. DOI: 10.21883/PJTF.2022.04.52086.18925.
25. *Stankevich N. V., Kuznetsov A. P., Kurths J.* Forced synchronization of quasiperiodic oscillations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015. Vol. 20, no. 1. P. 316–323. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.04.020.
26. *Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В.* Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // *Известия вузов. ПНД*. 2010. Т. 18, № 4. С. 17–32. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-4-17-32.
27. *Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В.* Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // *Нелинейная динамика*. 2011. Т. 7, № 3. С. 411–425. DOI: 10.20537/nd1103001.
28. *Vitolo R., Broer H., Simó C.* Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2011. Vol. 16, no. 1–2. P. 154–184. DOI: 10.1134/S1560354711010060.
29. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // *Nonlinearity*. 2002. Vol. 15, no. 4. P. 1205–1267. DOI: 10.1088/0951-7715/15/4/312.
30. *Broer H. W., Simó C., Vitolo R.* Chaos and quasi-periodicity in diffeomorphisms of the solid torus // *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*. 2010. Vol. 14, no. 3. P. 871–905. DOI: 10.3934/dcdsb.2010.14.871.
31. *Stankevich N. V., Shchegoleva N. A., Sataev I. R., Kuznetsov A. P.* Three-dimensional torus breakdown and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 15, no. 11. P. 111001. DOI: 10.1115/1.4048025.
32. *Grines E. A., Kazakov A., Sataev I. R.* On the origin of chaotic attractors with two zero Lyapunov exponents in a system of five biharmonically coupled phase oscillators // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2022. Vol. 32, no. 9. P. 093105. DOI: 10.1063/5.0098163.
33. *Karatetskaia E., Shykhmamedov A., Kazakov A.* Shilnikov attractors in three-dimensional orientation-reversing maps // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2021. Vol. 31, no. 1. P. 011102. DOI: 10.1063/5.0036405.

34. Kuznetsov A. P., Sedova Y. V., Stankevich N. V. Coupled systems with quasi-periodic and chaotic dynamics // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023. Vol. 169. P. 113278. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113278.

References

1. Best RE. *Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications*. 6th ed. New York: McGraw-Hill; 2007. 489 p.
2. Shalfeev VD, Matrosov VV. *Nonlinear Dynamics of Phase Synchronization Systems*. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Publishing; 2013. 366 p. (in Russian).
3. Kuznetsov NV, Leonov GA. *Nonlinear Mathematical Models of Phase-Locked Loops*. Cambridge Scientific Publisher; 2014. 218 p.
4. Kuznetsov NV, Belyaev YV, Styazhkina AV, Tulaev AT, Yuldashev MV, Yuldashev RV. Effects of PLL architecture on MEMS gyroscope performance. *Gyroscopy and Navigation*. 2022;13(1):44–52. DOI: 10.1134/S2075108722010047.
5. Kuznetsov NV, Lobachev MY, Yuldashev MV, Yuldashev RV, Tavazoei MS. The gardner problem on the lock-in range of second-order type 2 phase-locked loops. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2023;1–15. DOI: 10.1109/TAC.2023.3277896.
6. Ottesen JT. Modelling the dynamical baroreflex-feedback control. *Mathematical and Computer Modelling*. 2000;31(4–5):167–173. DOI: 10.1016/S0895-7177(00)00035-2.
7. Hall JE. *Guyton and Hall Textbook of Medical Physiology E-Book*. Elsevier Health Sciences; 2015. 1147 p.
8. Seleznev EP, Stankevich NV. Complex dynamics of a non-autonomous oscillator with a controlled phase of an external force. *Technical Physics Letters*. 2019;45(1):57–60. DOI: 10.1134/S1063785019010334.
9. Krylosova DA, Seleznev EP, Stankevich NV. Dynamics of non-autonomous oscillator with a controlled phase and frequency of external forcing. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020;134:109716. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.109716.
10. Krylosova D, Seleznev E, Stankevich N. The simplest oscillators with adaptive properties. In: *2020 4th Scientific School on Dynamics of Complex Networks and their Application in Intellectual Robotics (DCNAIR)*. 07-09 September 2020, Innopolis, Russia. IEEE; 2020. P. 140–143. DOI: 10.1109/DCNAIR50402.2020.9216759.
11. Polczyński K, Bednarek M, Awrejcewicz J. Magnetic oscillator under excitation with controlled initial phase. In: *Awrejcewicz J, Kaźmierczak M, Olejnik P, Mrozowski J, editors. 16th International Conference Dynamical Systems – Theory and Applications*. 6-9 December 2021 Łódź. DSTA; 2021. P. 400–401.
12. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. New York: Cambridge University Press; 2001. 412 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
13. Balanov A, Janson N, Postnov D, Sosnovtseva O. *Synchronization: From Simple to Complex*. Berlin: Springer; 2009. 426 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
14. Landa PS. *Self-Oscillations in Systems With a Finite Number of Degrees of Freedom*. Moscow: Nauka; 1980. 360 p. (in Russian).
15. Ding EJ, Hemmer PC. Winding numbers for the supercritical sine circle map. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1988;32(1):153–160. DOI: 10.1016/0167-2789(88)90092-9.
16. Ivankov NY, Kuznetsov SP. Complex periodic orbits, renormalization, and scaling for quasiperiodic golden-mean transition to chaos. *Phys. Rev. E*. 2001;63(4):046210. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.046210.
17. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Mosekilde E, Stankevich NV. Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space. *The European Physical Journal Special Topics*. 2013; 222(10):2391–2398. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02023-x.

18. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Shchegoleva NA, Stankevich NV. Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2019;398:1–12. DOI: 10.1016/j.physd.2019.05.014.
19. Matsumoto T. Chaos in electronic circuits. *Proceedings of the IEEE*. 1987;75(8):1033–1057. DOI: 10.1109/PROC.1987.13848.
20. Anishchenko VS, Nikolaev SM. Generator of quasi-periodic oscillations featuring two-dimensional torus doubling bifurcations. *Technical Physics Letters*. 2005;31(10):853–855. DOI: 10.1134/1.2121837.
21. Anishchenko V, Nikolaev S, Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions. *Phys. Rev. E*. 2006;73(5):056202. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202.
22. Anishchenko V, Nikolaev S, Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus. *Phys. Rev. E*. 2007;76(4):046216. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.046216.
23. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Stankevich NV. A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010;15(6):1676–1681. DOI: 10.1016/j.cnsns.2009.06.027.
24. Kuznetsov AP, Sedova YV, Anishchenko-Astakhov quasiperiodic generator excited by external harmonic force. *Technical Physics Letters*. 2022;48(2):84–86. DOI: 10.21883/TPL.2022.02.52858.18925.
25. Stankevich NV, Kuznetsov AP, Kurths J. Forced synchronization of quasiperiodic oscillations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015;20(1):316–323. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.04.020.
26. Kuznetsov AP, Sataev IR, Turukina LV. Phase dynamics of periodically driven quasiperiodic self-vibrating oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2010;18(4):17–32 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-4-17-32.
27. Kuznetsov AP, Sataev IR, Turukina LV. Forced synchronization of two coupled van der Pol self-oscillators. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2011;7(3):411–425 (in Russian). DOI: 10.20537/nd1103001.
28. Vitolo R, Broer H, Simó C. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2011;16(1–2):154–184. DOI: 10.1134/S1560354711010060.
29. Broer H, Simó C, Vitolo R. Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing. *Nonlinearity*. 2002;15(4):1205–1267. DOI: 10.1088/0951-7715/15/4/312.
30. Broer HW, Simó C, Vitolo R. Chaos and quasi-periodicity in diffeomorphisms of the solid torus. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*. 2010;14(3):871–905. DOI: 10.3934/dcdsb.2010.14.871.
31. Stankevich NV, Shchegoleva NA, Sataev IR, Kuznetsov AP. Three-dimensional torus breakdown and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2020;15(11):111001. DOI: 10.1115/1.4048025.
32. Grines EA, Kazakov A, Sataev IR. On the origin of chaotic attractors with two zero Lyapunov exponents in a system of five biharmonically coupled phase oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2022;32(9):093105. DOI: 10.1063/5.0098163.
33. Karatetskaia E, Shykhmamedov A, Kazakov A. Shilnikov attractors in three-dimensional orientation-reversing maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2021;31(1):011102. DOI: 10.1063/5.0036405.
34. Kuznetsov AP, Sedova YV, Stankevich NV. Coupled systems with quasi-periodic and chaotic dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023;169:113278. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113278.



Крылосова Дарина Андреевна — аспирант Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. Научные интересы — радиофизика, нелинейная динамика. Имеет более 20 научных публикаций.

Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
E-mail: krylosovadarina@inbox.ru
ORCID: 0000-0003-1572-1049
AuthorID (eLibrary.Ru): 1202883



Кузнецов Александр Петрович — родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук (1996), профессор (2002). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Опубликовал более 150 статей в российских и международных научных журналах. Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 15 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний», «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны» (сборник задач), «Задачи физических олимпиад» и др. Под его руководством защищено 8 кандидатских диссертаций. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001).

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: apkuz@rambler.ru
ORCID: 0000-0001-5528-1979
AuthorID (eLibrary.Ru): 509



Седова Юлия Викторовна — родилась в Саратове (1979). Окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2001). Кандидат физико-математических наук (2004, СГУ). Работает в Саратовском филиале ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН старшим научным сотрудником. Научные интересы — влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Имеет более 40 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: sedovayv@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-7843-646X
AuthorID (eLibrary.Ru): 168897



Станкевич Наталья Владимировна — родилась в Саратове (1985). Окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2007). Кандидат физико-математических наук (2011, СГУ), доцент. Работает на кафедре «Радиоэлектроника и телекоммуникации» СГТУ имени Гагарина Ю. А. (с 2011 года), в настоящее время в должности профессора, и старшим научным сотрудником Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы: нелинейная динамика, многочастотные квазипериодические колебания, многомерный хаос, модели типа Ходжкина–Хаксли, системы с адаптивными свойствами. Имеет более 100 научных публикаций. Член редакционной коллегии журнала «Universal Journal of Electrical and Electronic Engineering».

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
E-mail: stankevichnv@mail.ru
ORCID: 0000-0002-4781-0567
AuthorID (eLibrary.Ru): 600847