Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 286–310
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 286–310
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-286-310, EDN: HMFDHB

Научная статья
УДК 519.63

Об одном итерационном методе решения прямых и обратных задач для параболических уравнений

И. В. Бойков✉, **В. А. Рязанцев**

Пензенский государственный университет, Россия, 440026, г. Пенза, ул. Красная, д. 40

Бойков Илья Владимирович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, i.v.boykov@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-6980-933X, AuthorID: 3167

Рязанцев Владимир Андреевич, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики, ryazantsevv@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-0875-9823, AuthorID: 840034

Аннотация. Статья посвящена приближенным методам решения прямых и обратных задач для параболических уравнений. Предложен приближенный метод решения начальной задачи для многомерного нелинейного параболического уравнения. Метод основан на приведении начальной задачи к нелинейному многомерному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которое аппроксимируется системой нелинейных алгебраических уравнений по технологии метода механических квадратур. При построении вычислительной схемы использованы узлы локальных сплайнов, реализующих оптимальную по порядку аппроксимацию класса функций, к которому принадлежат решения параболических уравнений. Для численной реализации вычислительной схемы используется приведенное в работе обобщение непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений. Исследуется обратная задача для параболического уравнения с дробной производной по временной переменной. Предложены приближенные методы определения порядка дробной производной по времени и коэффициента при производной по пространственной переменной.

Ключевые слова: параболические уравнения, прямая и обратная задачи, дробные производные, приближенные методы

Для цитирования: *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Об одном итерационном методе решения прямых и обратных задач для параболических уравнений // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 286–310. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-286-310, EDN: HMFDHB

Article

On the iterative method for solution of direct and inverse problems for parabolic equations

I. V. Boykov✉, **V. A. Ryazantsev**

Penza State University, 40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia

Il'ya V. Boykov, i.v.boykov@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-6980-933X, AuthorID: 3167
Vladimir A. Ryazantsev, ryazantsevv@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-0875-9823, AuthorID: 840034

Abstract. The paper is devoted to approximate methods for solution of direct and inverse problems for parabolic equations. An approximate method for the solution of the initial problem for multidimensional nonlinear parabolic equation is proposed. The method is based on the reduction of the initial problem to a nonlinear multidimensional intergral Fredholm equation of the second kind which is approximated by a system of nonlinear algebraic equations with the help of the method of mechanical quadratures. For constructing the computational scheme we use the nodes of the local splines which realize order-optimal approximation of the functional class that contains solutions of parabolic equations. For implementation of the computational scheme we use the generalization of the continuous method for solution of nonlinear operator equations that is described in the paper. We also analyse the inverse problem for parabolic equation with fractional order derivative with respect to the time variable. The approximate methods for defining the fractional order of the time derivative and the coeffcient at spatial derivative are proposed.

Keywords: parabolic equations, direct and inverse problems, fractional derivatives, approximate methods

For citation: Boykov I. V., Ryazantsev V. A. On the iterative method for solution of direct and inverse problems for parabolic equations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 286–310 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-286-310, EDN: HMFDHB

Введение

Аналитические и численные методы решения прямых и обратных задач для параболических уравнений являются активно развивающимися направлениями математической физики и вычислительной математики. В настоящее время опубликовано большое число работ, посвященных исследованию и решению параболических уравнений с различными видами нелинейностей [1–7]. При решении параболических уравнений используются различные приближенные методы: разложение по базисным функциям, метод конечных элементов, метод сеток, метод граничных интегральных уравнений, вариационные и проекционные методы, итерационные методы [8, 9].

Различные постановки обратных задач для параболических уравнений и различные методы их исследования изложены в монографиях [10–13].

Для приближенного решения обратных задач для параболических уравнений предложены различные методы, краткий обзор которых сделан в работах [14, 15]. В большинстве работ, посвященных приближенным методам решения обратных задач, рассматриваются уравнения с производными целого порядка.

В настоящее время имеется большое число приложений, которые моделируются параболическими уравнениями с дробными производными (как по временным, так и по пространственным переменным). Представляет значительный интерес разработка численных методов решения как прямых, так и обратных задач для подобных уравнений. Среди этих задач следует выделить обратные коэффициентные задачи и задачи определения порядка производных.

Статья посвящена построению приближенных методов решения некоторых классов прямых и обратных задач для параболических уравнений.

Приведем определения, используемые в статье.

Через $D^k g(t,u_1,\dots,u_n)$ обозначена частная производная

$$D^k g(t,u_1,\dots,u_n)=\partial g(t,u_1,\dots,u_n)/\partial u_k,\quad k=1,2.\dots,n.$$

Пусть X — банахово пространство; K — оператор, действующий из X в X,

$$B(a,r)=\{x,a\in X:\|x-a\|\leqslant r\},\quad S(a,r)=\{x,a\in X:\|x-a\|=r\},$$

$\Lambda(K)$ — логарифмическая норма линейного оператора K, определяемая [16] выражением

$$\Lambda(K)=\lim_{h\downarrow 0}(\|I+hK\|-1)/h,$$

где символ $h\downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая.

Для матриц в часто используемых пространствах логарифмические нормы известны.

Пусть дана вещественная матрица $A=\{a_{ij}\}$, $i,j=1,2,\dots,n$, в n-мерном пространстве R_n векторов $x=(x_1,\dots,x_n)$ с нормой

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^n|x_k|,\quad \|x\|_2=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|, \|x\|_3=\left[\sum_{k=1}^n|x_k|^2\right]^{1/2}.$$

Логарифмическая норма матрицы A равна [17]:

$$\Lambda_1(A)=\max_j(a_{jj}+\sum_{i=1,i\neq j}^n|a_{ij}|),\quad \Lambda_2(A)=\lambda_{\max}\left(\frac{A+A^T}{2}\right),$$

$$\Lambda_3(A)=\max_i(a_{ii}+\sum_{j=1,j\neq i}^n|a_{ij}|).$$

Здесь $\lambda_{\max}((A+A^T)/2)$ — наибольшее собственное значение матрицы $(A+A^T)/2$.

Пусть A, B — квадратные матрицы порядка n с комплексными элементами и $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_n)$ — n-размерные векторы с комплексными компонентами. Рассмотрим следующие системы алгебраических уравнений: $Ax=\xi$ и $By=\eta$. Норма вектора и подчиненная ему операторная норма матрицы фиксируются; логарифмическая норма $\Lambda(A)$ соответствует операторной норме.

Теорема 1 ([18]). *Если $\Lambda(A)<0$, то матрица A не вырожденная и*

$$\|A^{-1}\|\leqslant 1/|\Lambda(A)|.$$

Напомним определения классов функций Гельдера.

Определение 1. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[a,b]$. Говорят, что функция $f(x) \in H_\alpha(M,[a,b])$, если для всех $x_1, x_2 \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|^\alpha.$$

Определение 2. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на R. Если существуют M и α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ такие, что:

1) $f(x) \in H_\alpha(M,L)$;

2) $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right|^\alpha, \forall x_1, x_2 \in R \setminus L$,

то говорят, что $f(x) \in H_\alpha(M,R)$. Здесь $L = [-l,l]$ — достаточно большой замкнутый интервал.

1. Непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений

В настоящее время существует большое число методов решения нелинейных операторных уравнений $A(x) = 0$ в банаховых пространствах [19, 20]. Наиболее востребованными являются, по-видимому, методы простой итерации и Ньютона – Канторовича [19–21]. Непрерывный аналог метода Ньютона – Канторовича предложен в работе [22] и активно применяется при решении многочисленных задач физики [23]. При реализации непрерывного аналога метода Ньютона – Канторовича требуется существование обратного оператора у производной $A'(x)$ оператора $A(x)$, что снижает область его применения. В работе [24] предложен непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений, который не требует обратимости производной $A'(x)$ на траектории решения уравнения $Ax = 0$. В [24] приведены достаточные условия сходимости непрерывного операторного метода к решению уравнения $A(x) = 0$.

В случаях, когда эти условия не выполняются, необходимо обобщение этого метода. Этому вопросу посвящен данный раздел.

Рассмотрим уравнение

$$A(x) - f = 0, \tag{1}$$

где $A(x)$ — нелинейный оператор из банахова пространства B в B.

Уравнению (1) поставим в соответствие задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = -(A'(x(t)))^*(A(x(t)) - f), \tag{2}$$

$$x(0) = x_0, \tag{3}$$

где $A'(x(t))$ — производная Гато (Фреше) оператора $A(x(t))$, $(A'(x(t)))^*$ — оператор, сопряженный с $A'(x(t))$.

По аналогии с доказательствами, приведенными в [24], доказываются следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) *имеет решение* x^* *и на любой дифференцируемой кривой* $g(t)$ *в пространстве* B *выполняется условие*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \Lambda((A'(g(\tau)))^* A'(g(\tau)))\, d\tau \geqslant \alpha_g, \quad \alpha_g > 0. \tag{4}$$

Тогда решение задачи Коши (2)–(3) *сходится к решению* x^* *уравнения* (1) *при* $t \to \infty$ *и при любом начальном приближении* $x_0 \in B$.

Теорема 3. *Пусть уравнение* (1) *имеет решение* x^* *и на любой дифференцируемой кривой* $g(t)$ *в шаре* $B(x^*, r)$, $r > 0$, *выполняются условия:*

1) при всех t, $t \geqslant 0$, $\int\limits_0^t \Lambda((A'(g(\tau)))^* A'(g(\tau)))\, d\tau > 0$;

2) справедливо неравенство (4).

Тогда задача Коши (2)–(3) *при любом начальном значении* $x_0 \in B(x^*, r)$ *сходится при* $t \to \infty$ *к решению* x^* *уравнения* (1).

Если условия теорем 2 и 3 не выполняются, то необходимо провести регуляризацию и перейти от задачи Коши (2)–(3) к задаче

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t) - (A'(x(t)))^*(A(x(t)) - f), \tag{5}$$

$$x(0) = x_0, \tag{6}$$

где α, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации.

При $t \to \infty$ задача Коши (5)–(6) сходится к решению уравнения

$$\alpha x + (A'(x))^*(A(x) - f) = 0$$

при любом начальном значении $x_0 \in B$.

Замечание 1. Выбор α зависит от конкретной задачи.

2. Об одном методе оценки точности решений интегральных уравнений

В этом разделе описан используемый в работе метод получения оценки погрешности вычислительной схемы. Так как вычислительная схема решения многомерных интегральных уравнений, которую будем рассматривать в разделе 3, имеет громоздкий вид, то ограничимся изложением метода на примере одномерного интегрального уравнения Фредгольма (линейного и нелинейного).

2.1. Линейные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$u(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x,y)u(y)\, dy = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{7}$$

Введем интервалы $\Delta_{-1} = (-\infty, -A)$, $\Delta_k = [x_k, x_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots, 2N-1$, $\Delta_{2N} = [x_{2N}, \infty)$, где $x_k = -A + kA/N$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$, A — достаточно большое положительное число, величина которого зависит от класса функций, в котором ищется решение уравнения (7).

Приближенное решение уравнения (7) ищем в виде кусочно-постоянной функции

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k \phi_k(x), \quad \phi_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_k, \\ 0, & x \in (-\infty, \infty) \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2N-1.$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы уравнений

$$u_N(\overline{x}_k) + \sum_{l=0}^{2N-1} \frac{A}{N} h(\overline{x}_k, \overline{x}_l) u_N(\overline{x}_l) = f(\overline{x}_k), \quad k = 0, 1, .., 2N-1. \tag{8}$$

Здесь $\overline{x}_k = x_k + A/2N$, $k = 0, 1, \ldots, 2N-1$.

Система линейных алгебраических уравнений (8) эквивалентна следующей:

$$\alpha_k + \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_l h(\overline{x}_k, \overline{x}_l) = f(\overline{x}_k), \quad k = 0, 1, \ldots, 2N-1.$$

Для определенности будем исследовать систему уравнений (8) в $2N$-мерном пространстве R^{2N} векторов $v = (v_1, v_2, \ldots, v_{2N})$ с нормой $\|v\|_2 = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant 2N} |x_k|$.

Замечание 2. Все рассуждения справедливы для любого банахова $2N$-мерного пространства.

Система (8) в операторной форме имеет вид

$$H_N u_N = f_N.$$

Пусть логарифмическая норма $\Lambda_2(H_N)$ отрицательная. Тогда согласно теореме 1 матрица H_N обратима и $\|H^{-1}\| \leqslant 1/|\Lambda_2(H_N)|$.

Обозначим через $u^*(x)$ решение уравнения (7). Тогда

$$u^*(\overline{x}_k) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\overline{x}_k, y) u^*(y)\, dy = f(\overline{x}_k), \quad k = 0, 1, \ldots, 2N-1. \tag{9}$$

Представим систему (9) в следующем виде:

$$u^*(x_k) + \int\limits_{-\infty}^{-A} h(\overline{x}_k, y) u^*(y)\, dy + \sum_{l=0}^{2N-1} \int_{\Delta_l} h(\overline{x}_k, y) u^*(y)\, dy +$$

$$+ \int\limits_{A}^{\infty} h(\overline{x}_k, y) u^*(y)\, dy = f(\overline{x}_k), \quad k = 0, 1, \ldots, 2N-1. \tag{10}$$

Вычитая из (8) уравнение (10), имеем

$$(u_N(\overline{x}_k) - u^*(\overline{x}_k)) + \sum_{l=0}^{2N-1} \frac{A}{N} h(\overline{x}_k, \overline{x}_l)(u_N(\overline{x}_l) - u^*(\overline{x}_l)) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-A} h(\overline{x}_k, y) u^*(y)\, dy + \sum_{l=0}^{2N-1} \int\limits_{\Delta_l} (h(\overline{x}_k, y) - h(\overline{x}_k, \overline{x}_l)) u^*(y)\, dy +$$

$$+ \sum_{l=0}^{2N-1} \int\limits_{\Delta_l} h(\overline{x}_k, \overline{x}_l)(u^*(y) - u_N^*(\overline{x}_)) \, dy +$$

$$+\int\limits_{A}^{\infty} h(\overline{x}_k, y)u^*(y)\,dy = I_1(k) + \ldots + I_4(k), \quad k = 0, 1, \ldots, 2N-1. \tag{11}$$

Из (11) следует

$$\max_{0\leqslant k\leqslant 2N-1} |u_N(\overline{x}_k) - u^*(\overline{x}_k)| \leqslant \frac{C}{|\Lambda_2(H_N)|}\left(\max_k |I_1(k)| + \max_k |I_2(k)| + \max_k |I_3(k)|\right).$$

Величины $|I_1(k)|$ и $|I_3(k)|$ зависят от класса функций, к которым принадлежит ядро $h(x,y)$ и (или) решение $x^*(t)$ уравнения (7). Например, в предположении, что $|h(x,y)| \leqslant \frac{1}{x^2+y^2}$, имеем

$$|I_1(k)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{-A} |h(\overline{x}_k, y)||u^*(y)\,dy| \leqslant \left[\int\limits_{-\infty}^{-A} \left|\frac{1}{x_k^2+y^2}\right|^2 dy\right]^{1/2} \left[\int\limits_{-\infty}^{-A} |u^*(y)|^2\,dy\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_{-\infty}^{-A} \frac{1}{(x_k^2+y^2)^2}\,dy\right]^{1/2} ||u^*(y)|| \leqslant \frac{C}{A^3}.$$

Здесь и ниже через C обозначены константы, не зависящие от N.

Очевидно, выбором A величину $|I_1(k)|$, точно так же как $|I_4(k)|$, можно сделать как угодно малой.

Сумма $|I_2(k)|$ в предположении, что $h(x,y) \in H_{\alpha,\alpha}(M)$, оценивается неравенством

$$\max_k |I_2(k)| \leqslant \frac{CMA^{1+\alpha}}{N^\alpha}.$$

Сумма $|I_3(k)|$ в предположении, что $u^*(x) \in H_\alpha(M)$, оценивается неравенством

$$\max_k |I_3(k)| \leqslant \frac{CMA^{1+\alpha}}{N^\alpha}.$$

Таким образом, приходим к оценке

$$\max_k |u^*(\overline{x}_k) - u_N(\overline{x}_k)| \leqslant C\left[\max_{-A\leqslant x\leqslant A}\left[\int\limits_{-\infty}^{-A} |h(x,y)|^2\,dy\right]^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \max_{-A\leqslant x\leqslant A}\left[\int\limits_{A}^{\infty} |h(t,y)|^2\,dy\right]^{1/2} + \frac{MA^{1+\alpha}}{N^\alpha}\right].$$

Теорема 4. *Пусть уравнение* (7) *имеет решение* $u^*(x)$, $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |u^*(x)| \leqslant M$, $u^*(x) \in H_\alpha(M)$, $\Lambda_2(H_N) < -\kappa$. *Тогда система* (8) *однозначно разрешима и справедлива оценка*

$$\max_k |u^*(\overline{x}_k) - u_N(\overline{x}_k)| \leqslant C\left[\max_{-A\leqslant x\leqslant A}\left[\int\limits_{-\infty}^{-A} |h(x,y)|^2 dy\right]^{1/2} + \right.$$

$$+ \max_{-A\leqslant x\leqslant A}\left[\left[\int\limits_A^\infty |h(t,y)|^2 dy\right]^{1/2} + \frac{MA^{1+\alpha}}{N^\alpha}\right],$$

где $u^*(x)$ и $u_N^*(x)$ — решения уравнений (7) и (8) соответственно.

Замечание 3. Параметр A может быть выбран, как функция от N, в результате минимизации правой части предыдущего неравенства.

2.2. Нелинейные уравнения

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$K(u) \equiv u(y) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x,y,u(x))\,dx = f(y), \quad -\infty < y < \infty. \tag{12}$$

Воспользуемся обозначениями, введенными в предыдущем пункте.

Приближенное решение будем искать в виде кусочно-постоянной функции $u_N(x)$, коэффициенты α_k которой находятся из системы уравнений

$$u_N(\overline{x_k}) + \frac{A}{N}\sum_{l=0}^{2N-1} h(\overline{x_k},\overline{x_l},u_n(\overline{x_l})) = f(\overline{x_k}), \quad k = 0,1,2N-1. \tag{13}$$

Запишем систему (13) в операторной форме

$$K_N(u_N) \equiv u_N + L_N(u_N) = F_N$$

с очевидными обозначениями K_N, L_N, F_N.

Пусть оператор $K(u)$ отображает пространство $L_2(-\infty,\infty)$ в $L_2(-\infty,\infty)$. Предположим, что функция $h(x,y,u)$ удовлетворяет условию Гельдера $H_\alpha(M)$, $0<\alpha\leqslant 1$, по первым двум переменным и имеет производную, удовлетворяющую условию Гельдера $H_\alpha(M)$ по третьей переменной. Производная $h(x,y,u)$ по третьей переменной обозначается как $h_3'(x,y,u)$.

Пусть уравнение (12) имеет решение $u^*(x)$ в шаре $B(x^*,\rho)$, $\rho>0$, пространства $L_2(-\infty,\infty)$.

Пусть на всех элементах вида $\sum\limits_{l=0}^{2N-1}\beta_k\psi_k(x)$, принадлежащих шару $B(u^*,\rho)$, логарифмическая норма Λ_2 производной Фреше оператора $K_N(u_N)$ отрицательна и не превосходит константы $-\chi<0$.

Так как $u^*(x)$ — решение уравнения (12), то, очевидно,

$$u^*(\overline{x}_k) + \frac{A}{N}\sum_{l=0}^{2N-1} h(\overline{x}_k,\overline{x}_l,u^*(\overline{x}_l)) =$$

$$= f(\overline{x}_k) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\overline{x}_k,y,u^*(y))\,dy + \frac{A}{N}\sum_{l=0}^{2N-1} h(\overline{x}_k,\overline{x}_l,u^*(\overline{x}_l)), \quad k=0,1,\ldots,2N-1. \tag{14}$$

Вычитая из (13) почленно (14), имеем

$$(u_N(\overline{x}_k) - u^*(\overline{x}_k))) + \frac{A}{N}\sum_{l=0}^{2N-1} (h(\overline{x}_k,\overline{x}_l,u_N(\overline{x}_l)) - h(\overline{x}_k,\overline{x}_l,u^*(\overline{x}_l))) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\overline{x}_k, y, u^*(y))\, dy - \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} h(\overline{x}_k, \overline{x}_l, u^*(\overline{x}_l)), \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1. \qquad (15)$$

Уравнение (15) преобразуем следующим образом:

$$(u_N(\overline{x}_k) - u^*(\overline{x}_k)) + \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} h_3'(\overline{x}_k, \overline{x}_l, u^*(\overline{x}_l))(u_N(\overline{x}_l) - u^*(\overline{x}_l)) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\overline{x}_k, y, u^*(y))\, dy - \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} h(\overline{x}_k, \overline{x}_l, u^*(\overline{x}_l)) -$$

$$- \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} \left[h_3'(\overline{x}_k, \overline{x}_l, u^*(\overline{x}_l) + \theta_l(u_N(\overline{x}_l) - u^*(\overline{x}_l))) - h_3'(\overline{x}_k, \overline{x}_l, u^*(\overline{x}_l)) \right].$$

Здесь $0 < \theta_k < 1$, $k = 0, 1, \dots, 2N-1$.

Введем матрицу $W = \{w_{k,l}\}$, $k, l = 0, 1, \dots, 2N-1$, с элементами

$$w_{k,l} = 1 + \frac{A}{N} h_3'(\overline{x}_k, \overline{x}_l, u^*(\overline{x}_l)), \quad k, l = 0, 1, \dots, 2N-1.$$

Пусть логарифмическая норма матрицы W отрицательная:

$$\Lambda_2(W) \leqslant -\kappa < 0.$$

Тогда согласно теореме 1 справедлива оценка

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant 2N-1} |u_N(\overline{x}_k) - u^*(\overline{x}_k)| \leqslant \frac{C}{\kappa} \max_{0 \leqslant k \leqslant 2N-1} \left[|I_1(k)| + |I_2(k)| \right],$$

где

$$I_1(k| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\overline{x}_k, y, u^*(y))\, dy - \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} h(\overline{x}_k, \overline{x}_l, u^*(\overline{x}_l)),$$

$$I_2(k) = \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} \left[h_3'(\overline{x}_k, \overline{x}_l, u^*(\overline{x}_l) + \theta_l(u_N(\overline{x}_l) - u^*(\overline{x}_l))) - h_3'(\overline{x}_k, \overline{x}_l, u^*(\overline{x}_l)) \right].$$

Оценим каждое выражение в отдельности. Очевидно,

$$|I_1(k)| \leqslant \left| \int\limits_{-\infty}^{-A} h(\overline{x}_k, y, u^*(y))\, dy \right| + \left| \int\limits_{-A}^{A} h(\overline{x}_k, y, u^*(y))\, dy - \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} h(\overline{x}_k, \overline{x}_l, u^*(\overline{x}_l)) \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{A}^{\infty} h(\overline{x}_k, y, u^*(y))\, dy \right| = I_{11}(k) + I_{12}(k) + I_{13}(k).$$

Величина $I_1(k)$ зависит от асимптотики функций $h(x, y, u)$ и $u(x, y)$ на бесконечности. В случае, если $|h(x, y, u)| \leqslant \frac{C}{x^2 + y^2}$, $u \in B(u^*, \rho)$, то

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{-A} h(\overline{x}_k, y, u^*(y))\, dy \right| \leqslant C \int\limits_{-\infty}^{-A} \frac{1}{x_k^2 + y^2}\, dy \leqslant C \int\limits_{-\infty}^{-A} \frac{1}{y^2}\, dy = \frac{C}{A}.$$

Так как для $u \in B(u^*, \rho)$ выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |h(x,y,u)|^2\, dx\, dy < \infty,$$

то выбором параметра A значения $I_{11}(k)$ и $I_{13}(k)$ можно сделать как угодно малыми.

Остановимся на оценке $I_{12}(k)$. Очевидно,

$$I_{12}(k) \leqslant \frac{A}{N}\sum_{l=0}^{2N-1}\int_{\Delta_l} |h(\overline{x}_k, y, u^*(y)) - h(\overline{x}_k, \overline{x}_l, u^*(\overline{x}_l))|\, dy \leqslant \frac{2^{2-\alpha}MA^{2+\alpha}}{1+\alpha}\frac{1}{N^\alpha}.$$

Оценим $I_2(k)$:

$$|I_2(k)| \leqslant \frac{A}{N}\sum_{k=0}^{2N-1} M|u_N(\overline{x}_l) - u^*(\overline{x}_l)| \leqslant 2AM\|u_N(x) - u^*(x)\|.$$

Собирая полученные оценки, имеем

$$\|u^*(x) - u_N(x)\|(1-2AM) \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{A^3}{N^2} + \sup_{\substack{x\in[-A,A],\\ u(y)\in B(u^*,\rho)}}\int_{-\infty}^{-A}|h(x,y,u(y))|\, dy + \sup_{\substack{x\in[-A,A],\\ u(y)\in B(u^*,\rho)}}\int_{A}^{\infty}|h(x,y,u(y))|\, dy\right).$$

Если $2AM < 1$, приходим к оценке

$$\|u^*(x) - u_N(x)\| \leqslant \frac{C}{1-2AM}\times$$

$$\times\left(\frac{A^3}{N^2} + \sup_{\substack{x\in[-A,A],\\ u(y)\in B(u^*,\rho)}}\int_{-\infty}^{-A}|h(x,y,u(y))|\, dy + \sup_{\substack{x\in[-A,A],\\ u(y)\in B(u^*,\rho)}}\int_{A}^{\infty}|h(x,y,u(y))|\, dy\right).$$

Замечание 4. Параметр A, как функцию N, можно найти, минимизируя правую часть предыдущего неравенства.

Замечание 5. Выше для простоты обозначений авторы ограничились рассмотрением сплайн-коллокационного метода со сплайнами нулевого порядка. Изложенный метод обоснования распространяется на сплайн-коллокационные методы со сплайнами более высоких порядков.

3. Приближенное решение многомерных нелинейных уравнений теплопроводности

В данном разделе строится приближенное решение начальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(t, x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{16}$$

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \tag{17}$$

где $T \geqslant t > 0$, $\infty < x, y < \infty$.

Будем считать, что функция $F\left(s,\xi,\eta,u(\xi,\eta),\dfrac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\xi},\dfrac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right)$ удовлетворяет условию Гельдера $H_\alpha(M)$, $0<\alpha\leqslant 1$ по первым трем переменным и имеет частные производные, удовлетворяющие условию Гельдера $H_\alpha(M)$ по остальным переменным.

При построении вычислительной схемы перейдем от начальной задачи (16), (17) к интегральному уравнению

$$u(t,x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_0(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F\left(s,\xi,\eta,u(\xi,\eta),\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\xi},\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right)G(x,y,\xi,\eta,t-s)\,d\xi\,d\eta\,ds, \qquad (18)$$

где $G(t,x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi t}\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{4t}\right\}$.

Уравнение (18) будем решать методом механических квадратур, который в данном случае представляет собой возмущение вычислительной схемы коллокаций квадратурными формулами.

Остановимся на построении метода коллокаций. Узлы коллокаций будем выбирать, учитывая определения классов, к которым принадлежат решения уравнений теплопроводности.

В работе [25] введены классы функций $P_r(G,M)$ и $P_{r,s}(G,M)$, к которым принадлежат решения линейных уравнений теплопроводности, и построены оптимальные по порядку (по точности) алгоритмы аппроксимации функций из этих классов.

Напомним определение классов функций $P_r(G,M)$ и $P_{r,s}(G,M)$.

Рассмотрим область $G=\{0\leqslant t\leqslant 1,\Omega=[-1,1]^l,l=1,2,\ldots\}$.

Определение 3 ([25]). Пусть $G=\{0\leqslant t\leqslant 1,\Omega\}$, где $\Omega=[-1,1]^l$, $l=1,2,\ldots$, $\Gamma=\partial\Omega$ — граница области Ω. Через $P_{r,\gamma}(G,M,\alpha)$ обозначим множество функций $f(t,x)$, $x=(x_1,\ldots,x_l)$, определенных и непрерывных в области G и удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции $f(t,x)$ $(0\leqslant t\leqslant 1,\ x\in\Omega)$ по переменной t удовлетворяют условию Гельдера с показателем α, $0<\alpha\leqslant 1$;

2) при любом фиксированном x $(x\in\Omega)$ и при $t>0$

$$\left|\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\right|\leqslant\frac{M\cdot a^k\cdot k^k}{t^k},\quad 0<t\leqslant 1,\quad k=0,1,\ldots;$$

3) при любом фиксированном t $(t>0)$

$$|D^k u(t,x)|\leqslant M,\quad k=0,1,\ldots,r;$$

$$|D^k u(t,x)|\leqslant\frac{M\cdot a^k\cdot k^k}{t^{\gamma(k)}},\quad k=r+1,\ldots,$$

где $\gamma(k)$ — неотрицательная возрастающая функция.

Частным случаем класса $P_{r,\gamma}(G,M,\alpha)$ является класс функций $P_r(G,M)$.

Определение 4 ([25]). Пусть $G=\{0\leqslant t\leqslant 1,\Omega\}$, где $\Omega=[-1,1]^l$, $l=1,2,\ldots$, $\Gamma=\partial\Omega$ — граница области Ω. Через $P_r(G,M)$ обозначим множество функций $f(t,x)$,

$x = (x_1, \ldots, x_l)$, определенных и непрерывных в области G и удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции $f(t,x)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ x \in \Omega)$ по переменной t удовлетворяют условию Гельдера с показателем $1/2$:

$$|u(t_1,x) - u(t_2,x)| \leqslant M|t_1 - t_2|^{1/2};$$

2) при любом фиксированном $x (x \in \Omega)$ и при $t > 0$

$$\left|\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\right| \leqslant C \cdot M \cdot (l+2k)!! \cdot \frac{1}{t^k}, \quad 0 < t \leqslant 1, \quad k = 1,2,\ldots;$$

3) при любом фиксированном t $(t > 0)$

$$|D^k u(t,x)| \leqslant C \cdot M, \quad k = 0,1,\ldots,r;$$
$$|D^k u(t,x)| \leqslant \frac{C \cdot M \cdot 2^k \cdot (k+1)!!}{t^{(k-r)/2}}, \quad k = r+1,\ldots.$$

Ниже при построении вычислительной схемы используются узлы локальных сплайнов, реализующих оптимальные по порядку алгоритмы аппроксимации функций из классов $P_r(G,M)$, $P_{r,s}(G,M)$.

При построении вычислительной схемы интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta,t)\, d\xi\, d\eta, \qquad \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(s,\xi,\eta,u(s,\xi,\eta)) G(x,y,\xi,\eta,t-s)\, d\xi\, d\eta\, ds$$

аппроксимируются интегралами

$$\int\limits_{-A}^{A}\int\limits_{-A}^{A} u_0(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta,t)\, d\xi\, d\eta, \tag{19}$$

$$\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-A}^{A}\int\limits_{-A}^{A} \Phi(s,\xi,\eta,u(s,\xi,\eta)) G(x,y,\xi,\eta,t-s)\, d\xi\, d\eta\, ds, \tag{20}$$

при вычислении которых используются многомерные аналоги составной квадратурной формулы трапеций.

Интегралы (19), (20) вычисляются при $0 < t \leqslant T$, $-A \leqslant x, y \leqslant A$, где A — достаточно большое положительное число. Значение числа A зависит от конкретной физической задачи, моделируемой начальной задачей (16)–(17), и оно в меньшей степени влияет на вычислительный процесс, нежели область определения переменной t. В работе переменная t принимает значения из интервала $(0,1]$. Интерес к этому интервалу обусловлен пограничным слоем, в котором происходит резкое изменение функции $u(t,x,y)$ и ее производных.

Замечание 6. Выбор константы A можно связать с числом N значений функции $u_0(x,y)$ (по каждой переменной), используемых в вычислительной схеме. Так как функция $u_0(x,y)$ непрерывна по обеим переменным и суммируема с квадратом на плоскости R_2, то параметр A естественно выбрать из условия $\max\limits_{R_2 \setminus [-A,A]^2} |u_0(x,y)| \leqslant 1/N$. Это обусловлено тем, что точность аппроксимации класса функций $H_{1,1}([-A,A]^2, 1)$ не превосходит $O(1/N$, где N^2— число функционалов, используемых при аппроксимации.

При вычислении интеграла

$$\int\limits_0^t \int\limits_{-A}^A \int\limits_{-A}^A \Phi(s,\xi,\eta,u(s,\xi,\eta))G(x,y,\xi,\eta,t-s)\,d\xi\,d\eta\,ds$$

используются кубатурные формулы следующего вида:

$$\int_0^\tau \int_0^h \int_0^h \Phi(s,\xi,\eta,u(s,\xi,\eta))G(x,y,\xi,\eta,t-s)\,ds\,d\eta\,ds =$$
$$= \frac{1}{8}\left[\Phi(0,0,0,u(0,0,0)) + \Phi(0,0,h,u(0,0,h)) + \Phi(0,h,0,u(0,h,0)) + \right.$$
$$+\Phi(0,h,h,u(0,h,h)) + \Phi(\tau,0,0,u(\tau,0,0)) + \Phi(\tau,0,h,u(\tau,0,h)) +$$
$$\left. + \Phi(\tau,h,0,u(\tau,h,0)) + \Phi(\tau,h,h,u(\tau,h,h))\right] G\left(x,y,\frac{h}{2},\frac{h}{2},\tau-\frac{\tau}{2}\right) + R(u),$$

где $h(\tau)$ — шаг по пространственной (временной) переменной.

Предполагая $u_0(x,y) \in H_{1,1}(M)$, $x,y \in (-\infty,\infty)$, можно показать, что $|R(u)| = O(\tau+h)$.

После этих предварительных замечаний перейдем к построению вычислительной схемы.

Сначала построим сетку узлов коллокации.

Решение уравнения (18) будем искать в области $\Omega = [-A,A;-A,A;0,1]$. Сетка узлов строится следующим образом.

Построим квадраты:

$$\Omega_0^0 = [-A,A;-A,A;0],$$
$$\Omega_0^l = [-A,A;-A,A;2^l/2^{nr}], \quad l = 0,1,\dots,n_0-1, \quad n_0 = n(r-1)+1,$$
$$\Omega_k = [-A,A;-A,A;2^k/2^n], \quad k = 1,2,\dots,n.$$

Квадрат $\Omega_0^l, l = 0,1,\dots,n_0-1$, покроем прямоугольниками со сторонами, параллельными осям координат, и с ребрами, у одного из которых длина равна $h_0 = 2^{-n/2}$, а длина второго не меньше h_0 и не больше $2h_0$. Построенные прямоугольники обозначим через $\Delta_{0,j}^l$, $l = 0,1,\dots,n_0$, где $n_0 = [4A^2 2^n]$. Не ограничивая общности, можно считать, что области $\Delta_{0,j}^l$, $l = 0,1,\dots$‘$,n_0$, покрыты квадратами с длиной стороны, равной h_0, и $n_0 = [4A^2 2^n]$.

Квадрат $\Omega_k, k = 1,2,\dots,n$, покроем прямоугольниками со сторонами, параллельными осям координат, и с ребрами, у одного из которых длина равна $h_k = kr/(e2^{n-k-1})^{1/2}$, а длина второго не меньше h_k и не больше $2h_k$. Построенные прямоугольники обозначим через $\Delta_{k,j}$, $j = 0,1,\dots,m_k$, где $m_k = O(2^{n-k-1}/k)$. Не ограничивая общности, можно считать, что области $\Delta_{k,j}$, $k = 1,\dots,n$, $j = 0,1,\dots,m_k$, покрыты квадратами с длиной стороны, равной h_k, и $m_0 = [(2A/h_k)^2]$.

Приближенное решение уравнения (18) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$u_n(t,x,y) = \sum_{l=0}^{m-1}\sum_{i_1}\sum_{i_2} \alpha_{i_1,i_2}^{0,l} \Psi_{i_1,i_2}^{0,l}(t,x,y) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i_1}\sum_{i_2} \alpha_{i_1,i_2}^{k} \Psi_{i_1,i_2}^{k}(t,x,y),$$

где

$$\Psi_{i_1,i_2}^{0,l}(t,x,y) = \begin{cases} 1, (t,x,y) \in \Delta_{i_1,i_2}^{0,l}, \\ 0, (t,x,y) \in \Omega \backslash \Delta_{i_1,i_2}^{0,l}, \end{cases} \qquad l = 0,1,\dots,n(r-1)-1;$$

$$\Psi^k_{i_1,i_2}(t,x,y)=\begin{cases}1, (t,x,y)\in\Delta^k_{i_1,i_2},\\ 0, (t,x,y)\in\Omega\backslash\Delta^k_{i_1,i_2},\end{cases}\qquad k=1,2,\ldots,n-1.$$

Коэффициенты $\alpha^{0,l}_{i_1,i_2}$, $\alpha^k_{i_1,i_2}$ определяются из системы уравнений

$$\alpha^{0,l}_{i_1,i_2}=\sum_{j_1=0}^{m_0-1}\sum_{j_2=0}^{m_0-1}\iint\limits_{\Delta^{0,0}_{j_1,j_2}} u_0(\overline{x}^0_{j_1},\overline{x}^0_{j_2})G(\overline{x}^{0,l}_{i_1},\overline{x}^{0,l}_{i_2},\overline{x}^{0,0}_{j_1},\overline{x}^{0,0}_{j_2},\overline{t}^{0,l})\,d\xi\,d\eta+$$
$$+\sum_{k=0}^{n(r-1)-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\iiint\limits_{\Delta^{0,l}_{j_1,j_2}} F\left(\overline{t}^{0,k},\overline{x}^{0,k}_{j_1},\overline{x}^{0,k}_{j_2},\alpha^{0,k}_{j_1,j_2},\frac{\alpha^{0,k}_{j_1+1,j_2}-\alpha^{0,k}_{j_1,j_2}}{h_0},\frac{\alpha^{0,k}_{j_1,j_2+1}-\alpha^{0,k}_{j_1,j_2}}{h_0}\right)\times$$
$$\times G(\overline{x}^{0,l}_{i_1},\overline{x}^{0,l}_{i_2},\overline{x}^{0,k}_{j_1},\overline{x}^{0,k}_{j_2},\overline{t}^{0,l}-\overline{t}^{0,k})\,d\xi\,d\eta\,ds+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\iiint\limits_{\Delta^{k}_{j_1,j_2}} F\left(\overline{t}^{0,k},\overline{x}^{0,k}_{j_1},\overline{x}^{0,k}_{j_2},\alpha^{k}_{j_1,j_2},\frac{\alpha^{k}_{j_1+1,j_2}-\alpha^{k}_{j_1,j_2}}{h_k},\frac{\alpha^{k}_{j_1,j_2+1}-\alpha^{k}_{j_1,j_2}}{h_k}\right)\times$$
$$\times G(\overline{x}^{0,l}_{i_1},\overline{x}^{0,l}_{j_2},\overline{x}^{k}_{j_1},\overline{x}^{k}_{j_2},(\overline{t}^{0,l}-\overline{t}^{k}))\,d\xi\,d\eta\,ds,$$
$$l=0,1,\ldots,n(r-1)-1,\quad k=1,2,\ldots,n-1; \tag{21}$$

$$\alpha^{k}_{i_1,i_2}=\sum_{j_1=0}^{m_0-1}\sum_{j_2=0}^{m_0-1}\iint\limits_{\Delta^{0,0}_{j_1,j_2}} u_0(\overline{x}^0_{j_1},\overline{x}^0_{j_2})G(\overline{x}^{k}_{i_1},\overline{x}^{k}_{i_2},\overline{x}^{0,0}_{j_1},\overline{x}^{0,0}_{j_2},\overline{t}^{k})\,d\xi\,d\eta+$$
$$+\sum_{k_1=0}^{n(r-1)-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\iiint\limits_{\Delta^{0,l}_{j_1,j_2}} F\left(\overline{t}^{0,k_1},\overline{x}^{0,k_1}_{j_1},\overline{x}^{0,k_1}_{j_2},\alpha^{0,k_1}_{j_1,j_2},\frac{\alpha^{0,k_1}_{j_1+1,j_2}-\alpha^{0,k_1}_{j_1,j_2}}{h_0},\frac{\alpha^{0,k_1}_{j_1,j_2+1}-\alpha^{0,k_1}_{j_1,j_2}}{h_0}\right)\times$$
$$\times G(\overline{x}^{k}_{i_1},\overline{x}^{k}_{i_2},\overline{x}^{0,k_1}_{j_1},\overline{x}^{0,k_1}_{i_2},\overline{t}^{k}-\overline{t}^{0,k_1})\,d\xi\,d\eta\,ds+$$
$$+\sum_{k_1=1}^{n-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\iiint\limits_{\Delta^{k_1}_{j_1,j_2}} F\left(\overline{t}^{k_1},\overline{x}^{k_1}_{j_1},\overline{x}^{k_1}_{j_2},\alpha^{k_1}_{j_1,j_2},\frac{\alpha^{k_1}_{j_1+1,j_2}-\alpha^{k_1}_{j_1,j_2}}{h_{k_1}},\frac{\alpha^{k_1}_{j_1,j_2+1}-\alpha^{k_1}_{j_1,j_2}}{h_{k_1}}\right)\times$$
$$\times G(\overline{x}^{k}_{i_1},\overline{x}^{k}_{i_2},\overline{x}^{k_1}_{j_1},\overline{x}^{k_1}_{j_2},(\overline{t}^{k}-\overline{t}^{k_1}))\,d\xi\,d\eta\,ds,$$
$$i_1,i_2=0,1,\ldots,m_k-1,\quad k=1,2,\ldots,n-1. \tag{22}$$

Здесь через $(\overline{x}^k_{i_1,i_2},\overline{y}^k_{i_1,i_2},\overline{t}^k)$ обозначен центр прямоугольного параллелепипеда $\Delta^k_{i_1,i_2}$. Аналогично обозначены центры параллелепипедов $\Delta^{0,l}_{i_1,i_2}$.

Этой системе поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\alpha^{0,l}_{i_1,i_2}(v)}{\partial v}=\sum_{j_1=0}^{m_0-1}\sum_{j_2=0}^{m_0-1}\iint\limits_{\Delta^{0,0}_{j_1,j_2}} u_0(\overline{x}^0_{j_1},\overline{x}^0_{j_2})G(\overline{x}^{0,l}_{i_1},\overline{x}^{0,l}_{i_2},\overline{x}^{0,0}_{j_1},\overline{x}^{0,0}_{j_2},\overline{t}^{0,l})\,d\xi\,d\eta+$$
$$+\sum_{k=0}^{n(r-1)-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\iiint\limits_{\Delta^{0,l}_{j_1,j_2}} F\left(\overline{t}^{0,k},\overline{x}^{0,k}_{j_1},\overline{x}^{0,k}_{j_2},\alpha^{0,k}_{j_1,j_2}(v),\frac{\alpha^{0,k}_{j_1+1,j_2}(v)-\alpha^{0,k}_{j_1,j_2}(v)}{h_0},\frac{\alpha^{0,k}_{j_1,j_2+1}(v)-\alpha^{0,k}_{j_1,j_2}(v)}{h_0}\right)\times$$

$$\times G(\overline{x}^{0,l}_{i_1}, \overline{x}^{0,l}_{i_2}, \overline{x}^{0,k}_{j_1}, \overline{x}^{0,k}_{j_2}, \overline{t}^{0,l} - \overline{t}^{0,k})\, d\xi\, d\eta\, ds +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\iiint\limits_{\Delta^k_{j_1,j_2}} F\left(\overline{t}^{0,k}, \overline{x}^{0,k}_{j_1}, \overline{x}^{0,k}_{j_2}, \alpha^k_{j_1,j_2}(v), \frac{\alpha^k_{j_1+1,j_2}(v)-\alpha^k_{j_1,j_2}(v)}{h_k}, \frac{\alpha^k_{j_1,j_2+1}(v)-\alpha^k_{j_1,j_2}(v)}{h_k}\right)\times$$

$$\times G(\overline{x}^{0,l}_{i_1}, \overline{x}^{0,l}_{j_2}, \overline{x}^{k}_{j_1}, \overline{x}^{k}_{j_2}, (\overline{t}^{0,l} - \overline{t}^{k}))\, d\xi\, d\eta\, ds,$$

$$l = 0, 1, \ldots, n(r-1)-1, \quad i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, m_0 - 1; \tag{23}$$

$$\frac{\partial \alpha^k_{i_1,i_2}(v)}{\partial v} = \sum_{j_1=0}^{m_0-1}\sum_{j_2=0}^{m_0-1}\iint\limits_{\Delta^{0,0}_{j_1,j_2}} u_0(\overline{x}^0_{j_1}, \overline{x}^0_{j_2}) G(\overline{x}^k_{i_1}, \overline{x}^k_{i_2}, \overline{x}^{0,0}_{j_1}, \overline{x}^{0,0}_{j_2}, \overline{t}^k)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+\sum_{k_1=0}^{n(r-1)-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\iiint\limits_{\Delta^{0,l}_{j_1,j_2}} F\left(\overline{t}^{0,k_1}, \overline{x}^{0,k_1}_{j_1}, \overline{x}^{0,k_1}_{j_2}, \alpha^{0,k_1}_{j_1,j_2}(v), \frac{\alpha^{0,k_1}_{j_1+1,j_2}(v)-\alpha^{0,k_1}_{j_1,j_2}(v)}{h_0}, \frac{\alpha^{0,k_1}_{j_1,j_2+1}(v)-\alpha^{0,k_1}_{j_1,j_2}(v)}{h_0}\right)\times$$

$$\times G(\overline{x}^{k}_{i_1}, \overline{x}^{k}_{i_2}, \overline{x}^{0,k_1}_{j_1}, \overline{x}^{0,k_1}_{i_2}, \overline{t}^{k} - \overline{t}^{0,k_1})\, d\xi\, d\eta\, ds +$$

$$+\sum_{k_1=1}^{n-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\iiint\limits_{\Delta^{k_1}_{j_1,j_2}} F\left(\overline{t}^{k_1}, \overline{x}^{k_1}_{j_1}, \overline{x}^{k_1}_{j_2}, \alpha^{k_1}_{j_1,j_2}(v), \frac{\alpha^{k_1}_{j_1+1,j_2}(v)-\alpha^{k_1}_{j_1,j_2}(v)}{h_{k_1}}, \frac{\alpha^{k_1}_{j_1,j_2+1}(v)-\alpha^{k_1}_{j_1,j_2}(v)}{h_{k_1}}\right)\times$$

$$\times G(\overline{x}^{k}_{i_1}, \overline{x}^{k}_{i_2}, \overline{x}^{k_1}_{j_1}, \overline{x}^{k_1}_{j_2}, (\overline{t}^{k} - \overline{t}^{k_1}))\, d\xi\, d\eta\, ds,$$

$$i_1, i_2 = 0, 1, \ldots, m_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{24}$$

Функции $\gamma^{0,l}_{i_1,i_2}(v), \gamma^{k}_{i_1,i_2}(v)$ выбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана в правой части системы (23)–(24) была отрицательной. Если такой выбор невозможен, то следует перейти к итерационным процессам (2), (5), приведенным в разделе 1.

Для решения системы уравнений (23)–(24) может быть использован любой численный метод. Ниже, при решении модельных примеров, был применен метод Эйлера. Вычислительная схема метода имеет вид

$$\alpha^{0,l}_{i_1,i_2}(m+1) - \alpha^{0,l}_{i_1,i_2}(m) = \gamma^{0,l}_{i_1,i_2}(m) h \left[\sum_{j_1=0}^{m_0-1}\sum_{j_2=0}^{m_0-1}\iint\limits_{\Delta^{0,0}_{j_1,j_2}} u_0(\overline{x}^0_{j_1}, \overline{x}^0_{j_2})\times\right.$$

$$\times G(\overline{x}^{0,l}_{i_1}, \overline{x}^{0,l}_{i_2}, \overline{x}^{0,0}_{j_1}, \overline{x}^{0,0}_{j_2}, \overline{t}^{0,l})\, d\xi\, d\eta + \sum_{k=0}^{n(r-1)-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\times$$

$$\times\iiint\limits_{\Delta^{0,l}_{j_1,j_2}} F\left(\overline{t}^{0,k}, \overline{x}^{0,k}_{j_1}, \overline{x}^{0,k}_{j_2}, \alpha^{0,k}_{j_1,j_2}(m), \frac{\alpha^{0,k}_{j_1+1,j_2}(m)-\alpha^{0,k}_{j_1,j_2}(m)}{h_0}, \frac{\alpha^{0,k}_{j_1,j_2+1}(m)-\alpha^{0,k}_{j_1,j_2}(m)}{h_0}\right)\times$$

$$\times G(\overline{x}^{0,l}_{i_1}, \overline{x}^{0,l}_{i_2}, \overline{x}^{0,k}_{j_1}, \overline{x}^{0,k}_{j_2}, \overline{t}^{0,l} - \overline{t}^{0,k})\, d\xi\, d\eta\, ds +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\iiint\limits_{\Delta^k_{j_1,j_2}} F\left(\overline{t}^{0,k}, \overline{x}^{0,k}_{j_1}, \overline{x}^{0,k}_{j_2}, \alpha^k_{j_1,j_2}(m), \frac{\alpha^k_{j_1+1,j_2}(m)-\alpha^k_{j_1,j_2}(m)}{h_k}, \frac{\alpha^k_{j_1,j_2+1}(m)-\alpha^k_{j_1,j_2}(m)}{h_k}\right)\times$$

$$\times G(\overline{x}^{0,l}_{i_1}, \overline{x}^{0,l}_{j_2}, \overline{x}^{k}_{j_1}, \overline{x}^{k}_{j_2}, (\overline{t}^{0,l} - \overline{t}^{k}))\, d\xi\, d\eta\, ds,$$

$$l = 0, 1, \ldots, n(r-1)-1, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1; \tag{25}$$

$$\alpha^k_{i_1,i_2}(m+1) - \alpha^k_{i_1,i_2}(m) = \gamma^k_{i_1,i_2}(m) h \sum_{j_1=0}^{m_0-1} \sum_{j_2=0}^{m_0-1} \iint\limits_{\Delta^{0,0}_{j_1,j_2}} u_0(\overline{x}^0_{j_1}, \overline{x}^0_{j_2}) \times$$

$$\times G(\overline{x}^k_{i_1}, \overline{x}^k_{i_2}, \overline{x}^{0,0}_{j_1}, \overline{x}^{0,0}_{j_2}, \overline{t}^k)\, d\xi\, d\eta + \sum_{k_1=0}^{n(r-1)-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \times$$

$$\times \iiint\limits_{\Delta^{0,l}_{j_1,j_2}} F\left(\overline{t}^{0,k_1}, \overline{x}^{0,k_1}_{j_1}, \overline{x}^{0,k_1}_{j_2}, \alpha^{0,k_1}_{j_1,j_2}(m), \frac{\alpha^{0,k_1}_{j_1+1,j_2}(m) - \alpha^{0,k_1}_{j_1,j_2}(m)}{h_0}, \frac{\alpha^{0,k_1}_{j_1,j_2+1}(m) - \alpha^{0,k_1}_{j_1,j_2}(m)}{h_0}\right) \times$$

$$\times G(\overline{x}^k_{i_1}, \overline{x}^k_{i_2}, \overline{x}^{0,k_1}_{j_1}, \overline{x}^{0,k_1}_{i_2}, \overline{t}^k - \overline{t}^{0,k_1})\, d\xi\, d\eta\, ds +$$

$$+ \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \iiint\limits_{\Delta^{k_1}_{j_1,j_2}} F\left(\overline{t}^{k_1}, \overline{x}^{k_1}_{j_1}, \overline{x}^{k_1}_{j_2}, \alpha^{k_1}_{j_1,j_2}(m), \frac{\alpha^{k_1}_{j_1+1,j_2}(m) - \alpha^{k_1}_{j_1,j_2}(m)}{h_{k_1}}, \frac{\alpha^{k_1}_{j_1,j_2+1}(m) - \alpha^{k_1}_{j_1,j_2}(m)}{h_{k_1}}\right) \times$$

$$\times G(\overline{x}^k_{i_1}, \overline{x}^k_{i_2}, \overline{x}^{k_1}_{j_1}, \overline{x}^{k_1}_{j_2}, (\overline{t}^k - \overline{t}^{k_1}))\, d\xi\, d\eta\, ds,$$

$$i_1, i_2 = 0, 1, \ldots, m_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{26}$$

Функции $\gamma^{0,l}_{i_1,i_2}(m), \gamma^k_{i_1,i_2}(m)$ выбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана в правой части системы (25)–(26) была отрицательной. При выполнении этого условия итерации (25)–(26) сходятся к решению $u^*_n(t,x,y)$ системы уравнений (21)–(22).

Остановимся на оценке точности предложенного алгоритма. Пусть $u^*(t,x,y)$ — решение задачи (16)–(17), $u^*(t,x,y)$ удовлетворяет условию Гельдера $H_\alpha(M)$ по каждой переменной. Пусть ядро уравнения (18) имеет вид

$$F\left(s, \xi, \eta, u(\xi,\eta), \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi}, \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right) G(x, y, \xi, \eta, t-s),$$

и известны асимптотики функций $u^*(\xi,\eta)$, $\dfrac{\partial u^*(\xi,\eta)}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial u^*(\xi,\eta)}{\partial \eta}$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$|u^*(\overline{t}^{0,k_1}, \overline{x}^{0,k_1}_{j_1}, \overline{x}^{0,k_1}_{j_2}) - u^*_n(\overline{t}^{0,k_1}, \overline{x}^{0,k_1}_{j_1}, \overline{x}^{0,k_1}_{j_2})| \leqslant$$

$$\leqslant C \left(\sup_{t,x,y} \left| \int_0^t \iint\limits_{(-\infty,\infty)^2 \setminus [-A,A]^2} F\left(s, \xi, \eta, u^*(\xi,\eta), \frac{\partial u^*(\xi,\eta)}{\partial \xi}, \frac{\partial u^*(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times G(\overline{x}^{0,k_1}_{j_1}, \overline{x}^{0,k_1}_{j_2}, \xi, \eta, \overline{t}^{0,k_1} - s)\, d\xi\, d\eta\, ds \right| + \frac{A^{1+\alpha}}{n^\alpha} \right),$$

где $\sup\limits_{t,x,y}$ берется по сетке узлов.

Аналогичная, но более сложная оценка справедлива и для остальных узлов. Ее не выписываем из-за громоздкости.

Доказательство приведенных оценок опускаются из-за громоздкости выражений. Методика доказательства приведена в разделе 2.

Остановимся на вопросе аппроксимации производных, входящих в функцию $F\left(t, x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

Вычислительные эксперименты показали, что аппроксимация производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ разностными схемами приводит к значительным погрешностям.

Значительно большую точность дает аппроксимация производных формулами, связывающими производные с интегралами Римана [26] или гиперсингулярными интегралами [27, 28].

Напомним формулу интегрирования Ланцоша [26]

$$f'(x) \approx \frac{3}{2\Delta^2} \int_{-\Delta}^{\Delta} t f(x+t)\, dt,$$

где Δ — достаточно малое число, $\Delta > 0$.

При вычислениях естественно использовать ее дискретизацию [26]

$$f'(x) \approx \frac{\left(\sum\limits_{k=-n}^{n} k f(x+kh)\right)}{\left(2\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 h\right)}$$

с шагом h, $h > 0$.

Пример 1. Требуется найти приближенное решение задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2u\ln(u) + 4tu,$$
$$u(0, x, y) = e^{-x^2-y^2}.$$

Точное решение задачи дается функцией $u(t, x, y) = e^{-x^2-y^2-2t}$.

Восстановление неизвестной функции $u(t, x, y)$ осуществлялось при $0 \leqslant t \leqslant T$, где $T = 1$. Двойной интеграл в расчетной формуле метода вычислялся приближенно по многомерному аналогу квадратурной формулы средних прямоугольников на интервале $(x, y) \in [-A, A]^2$ с шагом $h = 2A/N = 10^{-1}$, где $A = 5/2$. Функция $u(t, x, y)$ на каждом из $M = 10$ слоев по переменной t ($t = t_i = i\tau$, где $\tau = T/M$) восстанавливалась на равномерной сетке из $(N + 1)^2 = 51^2 = 2601$ узлов, построенной в квадрате $(x, y) \in [-A, A]^2$. Число шагов L метода Эйлера, а также шаг θ метода Эйлера были зафиксированы формулой

$$L = 100, \quad \theta = 10^{-1}.$$

Результаты счета приведены в табл. 1.

Замечание 7. Полученная оценка погрешности совпадает по порядку с теоретической.

4. Приближенное решение обратных задач

В работах [14, 29, 30] исследовались вопросы применения непрерывного операторного метода к решению обратных коэффициентных задач для параболических уравнений с производными целых порядков. В связи с активным развитием направления, связанного с исследованием задач математической физики с производными дробных порядков и многочисленными приложениями этих задач, возникает необходимость в построении численных методов решения обратных задач для параболических уравнений с дробными производными.

Таблица 1 / Table 1

Решение задачи Коши для нелинейного уравнения теплопроводности
Solving the Cauchy problem for nonlinear heat equation

Значение t (слой $t = t_i$)	Погрешность	Значение t (слой $t = t_i$)	Погрешность
0.1	0.006007	0.6	0.020818
0.2	0.003836	0.7	0.024745
0.3	0.007459	0.8	0.028089
0.4	0.011893	0.9	0.030763
0.5	0.016446	1.0	0.032730

Рассмотрим следующую начальную задачу для дробно-дифференциального уравнения в частных производных [31]:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{27}$$

$$u(0+, x) = \varphi(x), \quad u(0-, x) = 0, \quad u(t, \pm\infty) = 0, \tag{28}$$

где $(t, x) \in R^+ \times R$. Уравнение (27) называется дробно-дифференциальным уравнением диффузии. При $\alpha = 1$ это уравнение совпадает с обычным уравнением диффузии, в то время как при $\alpha < 1$ с его помощью моделируются процессы субдиффузии (замедленной диффузии) [32].

Замечание 8. Дробную производную $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ в уравнении (27) следует понимать в смысле Римана – Лиувилля. Дробная производная Римана – Лиувилля определяется интегральной формулой [33]

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int\limits_0^t \frac{u(s,x)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\, ds, \qquad n = [\alpha] + 1.$$

В данном разделе на примере начальной задачи (27), (28) рассматриваются две задачи:

1) определение коэффициента γ;
2) определение показателя α.

4.1. Приближенный метод определения коэффициента γ

Известно [31], что решение задачи (27)–(28) представимо в виде

$$u(t, x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, x-\xi)\varphi(\xi)\, d\xi,$$

где

$$G(t, x) = \frac{z}{2|x|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!\, \Gamma(-\beta n + (1-\beta))}, \quad \beta = \frac{\alpha}{2}, \quad z = \frac{|x|}{\sqrt{\gamma} t^\beta}. \tag{29}$$

Замечание 9. Ниже, при решении модельных примеров, при вычислении ряда в (29) брался его отрезок, состоящий из первых 100 членов суммы.

Полагая в начальной задаче (27)–(28) решение $u(x,t)$ известным и равным $u^*(t^*,x^*)$ в точке (t^*,x^*), приходим к нелинейному уравнению для определения коэффициента γ:

$$u^*(t^*,x^*) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\gamma}(t^*)^{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-(n+1)\frac{\alpha}{2})} \left(\frac{|x^*-\xi|}{\sqrt{\gamma}(t^*)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^n \varphi(\xi)\, d\xi. \qquad (30)$$

Уравнение (30) аппроксимируется следующим:

$$u^*(t^*,x^*) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}(t^*)^{\frac{\alpha}{2}}} \int\limits_{-A}^{A} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-(n+1)\frac{\alpha}{2})} \left(\frac{|x^*-\xi|}{\sqrt{\gamma}(t^*)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^n \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad (31)$$

где константы A и N выбираются из требования, чтобы погрешность аппроксимации правой части уравнения (30) не превосходила ε, где ε — фиксированное число, обусловленное требованием к точности решаемой физической или технологической задачи.

В соответствии с непрерывным методом решения нелинейных операторных уравнений уравнению (31) сопоставляется задача Коши

$$\frac{d\gamma(v)}{dv} =$$

$$= q(v)\left[\frac{1}{2\sqrt{\gamma(v)}(t^*)^{\alpha/2}} \int\limits_{-A}^{A} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-(n+1)\frac{\alpha}{2})} \left(\frac{|x^*-\xi|}{\sqrt{\gamma(v)}(t^*)^{\alpha/2}}\right)^n \varphi(\xi)\, d\xi - u^*(t^*,x^*)\right],$$

$$\gamma(0) = \gamma_0,$$

где $q(v) = \pm 1$. Знак $q(v)$ выбирается из требования отрицательности логарифмической нормы производной по γ функции

$$\left[\frac{1}{2\sqrt{\gamma(v)}(t^*)^{\frac{\alpha}{2}}} \int\limits_{-A}^{A} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-(n+1)\frac{\alpha}{2})} \left(\frac{|x^*-\xi|}{\sqrt{\gamma(v)}(t^*)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^n \varphi(\xi)\, d\xi\right].$$

Замечание 10. Если это требование невыполнимо, то для решения уравнения (31) используются обобщения, описанные в разделе 2.

Рассмотрим следующий модельный пример.

Пример 2. Рассмотрим начальную задачу (27)–(28), где

$$\varphi(x) = \log\left(\frac{x^2+5}{x^2+2}\right), \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Коэффициент γ, который будем восстанавливать, зафиксируем равным 2.5.

В качестве известного априорно значения возьмем значение $u(0.25, 0.5)$, полученное при приближенном вычислении интеграла в формуле (31) по квадратурной формуле средних прямоугольников на интервале $[-10, 10]$ с шагом $h = 10^{-4}$. Было получено следующее значение функции u: $u(0.25, 0.5) = 0.63395$.

Пусть L — число итераций метода Эйлера, θ — шаг метода Эйлера, γ_0 — начальное приближение метода, ε — погрешность восстановления γ, η — невязка.

Полученные численные результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Восстановление коэффициента γ
Recovery of the coefficient γ

№	L	θ	γ_0	$\approx\gamma$	ε	η
1	500	0.1	1.0	2.36609	0.13391	$5.9\cdot10^{-3}$
2	1000	0.1	1.0	2.48247	0.01753	$6.2\cdot10^{-4}$
3	1500	0.1	1.0	2.49488	0.00512	$6.7\cdot10^{-5}$
4	2000	0.1	1.0	2.49623	0.00377	$7.3\cdot10^{-6}$
5	10000	0.01	0.5	2.47918	0.02082	$7.6\cdot10^{-4}$
6	2000	0.1	4.0	2.49666	0.00334	$1.2\cdot10^{-5}$
7	5000	0.1	10.0	2.49640	0.00360	$2.2\cdot10^{-10}$

Замечание 11. В процессе счета по непрерывному операторному методу интеграл в формуле (31) вычислялся по квадратурной формуле средних прямоугольников на интервале $[-10,10]$, но уже с шагом $h=10^{-1}$. Таким образом, даже довольно грубое вычисление интеграла в формуле (31) практически не оказывает влияния на сходимость метода.

4.2. Приближенный метод определения показателя α

Поставим задачу о восстановлении неизвестного показателя производной α при дополнительном предположении о том, что известным (точно либо приближенно) является значение $\psi=u\,(t^*,x^*)$, где $(t^*,x^*)\in R^+\times R$ — фиксированная точка.

Известно [31], что общее решение задачи (27)–(28) дается следующей интегральной формулой:

$$u(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(\alpha,x-\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{32}$$

где функция Грина $G(\alpha,x,t)$ определяется следующим образом:

$$G(\alpha,x,t)=\frac{z}{2|x|}M(z,\beta),\quad z=\frac{|x|}{t^\beta},\quad \beta=\frac{\alpha}{2},$$
$$M(z,\beta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Br}}e^{\sigma-z\sigma^\beta}\frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!\Gamma[-\beta n+(1-\beta)]},\quad \forall\ z\in C,$$

символ Br обозначает интеграл Бромвича.

Зафиксируем в формуле (32) $t=t^*$ и $x=x^*$, после чего перепишем (32) в следующем виде:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(\alpha,\xi,t)\varphi(x-\xi)\,d\xi-\psi=0,\quad \psi=u(t^*,x^*). \tag{33}$$

Уравнение (33) служит основой для построения численного метода решения задачи восстановления значения параметра α.

Введем вспомогательную функцию $\overline{\alpha}(\sigma)$, $\sigma\geqslant0$, такую, что $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\overline{\alpha}(\sigma)=\alpha$. В соответствии с описанием непрерывного операторного метода функция $\overline{\alpha}(\sigma)$ удовлетворяет следующей задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\sigma} = \nu \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\overline{\alpha}(\sigma), \xi, t)\varphi(x-\xi)\, d\xi - \psi \right\}, \tag{34}$$

$$\overline{\alpha}(0) = \chi, \tag{35}$$

где значение χ фиксируется произвольным образом внутри интервала $(0,1)$, а значение параметра $\nu = \pm 1$ фиксируется таким образом, чтобы обеспечить сходимость метода к решению задачи.

Для решения начальной задачи (34)–(35) может быть применен любой из численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Воспользуемся методом Эйлера. Пусть θ — шаг метода Эйлера, а L — число итераций метода Эйлера. Обозначим $\overline{\alpha}_r = \overline{\alpha}(\sigma_r)$, где $\sigma_r = r\theta$. Тогда вычислительная схема реализуется последовательным $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ счетом по следующей расчетной формуле:

$$\overline{\alpha}(\sigma_{r+1}) = \overline{\alpha}(\sigma_r) + \theta \left\{ \nu_r \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\overline{\alpha}_r, \xi, t)\varphi(x-\xi)\, d\xi - \psi \right\} \right\}, \tag{36}$$

где $\nu_r = \pm 1$.

Результат вычислений фиксируется посредством формулы $\alpha \approx \overline{\alpha}(\sigma_L)$.

Рассмотрим следующий модельный пример.

Пример 3. Рассмотрим начальную задачу (27)–(28), где $\varphi(x) = \log\left(\dfrac{x^2+5}{x^2+2}\right)$, $\gamma = 5/2$. Коэффициент α, который будем восстанавливать, зафиксируем равным $1/2$. В качестве известного априорно значения возьмем значение $u(0.25, 0.5)$.

В результате вычисления значения $u(t,x)$ при $t^* = 0.25$, $x^* = 0.5$ при помощи приближенного вычисления интеграла в правой части формулы (36) по квадратурной формуле средних прямоугольников на интервале $[-10, 10]$ с шагом $h = 10^{-4}$ получено следующее приближенное значение функции u: $u(0.25, 0.5) = 0.63396$.

Обозначим L — число итераций метода Эйлера, θ — шаг метода Эйлера, α_0 — начальное приближение метода, ε — погрешность восстановления α.

Полученные численные результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3 / Table 3

Восстановление коэффициента α
Recovery of the coefficient α

№	L	θ	α_0	$\approx \alpha$	ε	Невязка
1	300	0.1	0.1	0.48543	0.01457	$1.7 \cdot 10^{-3}$
2	300	0.1	0.4	0.49663	0.00337	$3.9 \cdot 10^{-4}$
3	300	0.1	0.6	0.50323	0.00323	$3.7 \cdot 10^{-4}$
4	300	0.1	0.8	0.50915	0.00915	$1.1 \cdot 10^{-3}$
5	1000	0.1	0.9	0.51019	0.01019	$3.0 \cdot 10^{-7}$
6	1000	0.1	1.0	0.51019	0.01019	$3.6 \cdot 10^{-7}$
7	1000	0.1	1.1	0.51019	0.01019	$4.3 \cdot 10^{-7}$

В табл. 4 приводятся результаты, если $u(0.25, 0.5)$ известно с погрешностью 0.07 (первая строка табл. 4) и 0.03 (вторая строка табл. 4).

Таблица 4 / Table 4

Восстановление коэффициента α по дополнительной информации, заданной с погрешностью
Recovery of the coefficient α using additional information given with error

№	$u(t^*, x^*)$	L	θ	α_0	$\approx \alpha$	ε	Невязка
1	0.64	1000	0.1	0.1	0.55401	0.05401	$4.9 \cdot 10^{-7}$
2	0.63	1000	0.1	0.1	0.46615	0.03385	$6.3 \cdot 10^{-7}$

Выводы

В работе предложены приближенные методы решения прямых и обратных задач для параболических уравнений. Прямые и обратные задачи решаются по единой методологии — исходная задача преобразуется в интегральное уравнение, которое затем аппроксимируется по технологии метода коллокации (или механических квадратур). Построенная вычислительная схема реализуется в соответствии с непрерывным методом решения нелинейных операторных уравнений.

Отметим несколько принципиальных моментов. При приближенном решении прямой задачи для нелинейных параболических уравнений в качестве узлов коллокации выбраны узлы локальных сплайнов, реализующие наилучшую по порядку аппроксимацию класса функций $P_r(G, M)$, к которому принадлежат решения линейных параболических уравнений. Исследованы коэффициентная задача и задача восстановления порядка дробной производной. Предложена новая методика обоснования проекционных методов решения линейных и нелинейных интегральных уравнений.

Предложенная методика может быть распространена на ряд других прямых и обратных задач математической физики.

Список литературы

1. *Ladyženskaja O. A., Solonnikov V. A. Ural'ceva N. N.* Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type. Providence : American Mathematical Society, 1988. 648 p.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Москва : Мир, 1972. 588 с.
3. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики : в 2 т. Т. 2. Москва : Медиа, 2012. 886 с.
4. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Новосибирск : Научная книга, 1998. 178 с.
5. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. Москва : Наука, 1985. 376 с.
6. *Корпусов М. О.* Конспект лекций по курсу «Нелинейные эллиптические и параболические уравнения математической физики для аспирантов». Москва : Физический факультет МГУ, 2016. 188 с.
7. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. Москва : Физматлит, 2009. 256 с.
8. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Вычислительная теплопередача. Москва : ЛИБРОКОМ, 2009. 784 с.
9. *Вабищевич П. Н.* Вычислительные методы математической физики. Нестационарные задачи. Москва : Вузовская книга, 2008. 228 с.

10. *Kabanikhin S. I.* Inverse and ill-posed problems. Theory and Applications. Berlin ; Boston : De Gruyter, 2011. 475 p. https://doi.org/10.1515/9783110224016
11. *Hasanov H. A., Romanov V. G.* Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Springer International Publishing AG, 2017. 261 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62797-7
12. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. Москва : Изд-во МГУ, 1994. 206 с.
13. *Beilina L., Klibanov M. V.* Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. New York : Springer, 2012. 408 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7805-9
14. *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Об одном приближенном методе определения коэффициента теплопроводности // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21, № 2. С. 149–163. https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201902.149-163
15. *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Об одном итерационном методе решения параболических уравнений // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы (Саратов, 31 января – 4 февраля 2022 г.). Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. Вып. 21. С. 50–54. EDN: BVALVE
16. *Daleckii Ju. L., Krein M. G.* Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space. Providence : Americal Mathematical Society, 1974. 386 p. (Translations of Mathematical Monographs. Vol. 43).
17. *Dekker K., Verwer J. G.* Stability of Runge – Kutta methods for stiff nonlinear differential equations. New York : Elsevier Science Ltd, 1984. 308 p.
18. *Lozinskii S. M.* Note on a paper by V. S. Godlevskii // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1973. Vol. 13, iss. 2. P. 232–234. https://doi.org/10.1016/0041-5553(73)90144-4
19. *Kantorovich L. V., Akilov G. P.* Functional Analysis. Oxford : Pergamon Press, 1982. 600 p.
20. *Krasnosel'skii M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitskii Ya. B., Stetsenko Ya. V.* Approximate Solution of Operator Equations. Groningen : Wolters-Noordhoff Publishing, 1972. 496 p. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2715-1
21. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. Москва : Бином. Лаборатория знаний. 2011. 640 с. EDN: QJXMXL
22. *Гавурин М. К.* Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов // Известия вузов. Математика. 1958. № 5. С. 18–31.
23. *Пузынин И. В., Бояджиев Т. Л., Виницкий С. И., Земляная Е. В., Пузынина Т. П., Чулуунбаатар О.* О методах вычислительной физики для исследования моделей сложных физических процессов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2007. Т. 38, вып. 1. С. 144–232.
24. *Boikov I. V.* On a continuous method for solving nonlinear operator equations // Differential Equations. 2012. Vol. 48, № 9. P. 1288–1295. https://doi.org/10.1134/S001226611209008X
25. *Boikov I. V., Ryazantsev V. A.* On Optimal Approximation of Geophysical Fields // Numerical Analysis and Applications. 2021. Vol. 14, iss. 1. P. 13–29. https://doi.org/10.1134/S199542392101002X
26. *Lanczos K.* Applied Analysis. New Jersey : Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1956. 539 p.
27. *Бойков И. В., Кривулин Н. П.* Аналитические и численные методы идентификации динамических систем. Пенза : Изд-во Пензенского гос. ун-та, 2016. 398 с.
28. *Бойков И. В., Кривулин Н. П.* Приближенный метод восстановления входных сигналов измерительных преобразователей // Измерительная техника. 2021. № 12. С. 3–7. https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-12-3-7, EDN: PVVHQW
29. *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Численное восстановление начального условия в задачах Коши для линейных параболических и гиперболических уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3 (55). С. 72–88. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2020-3-6

30. *Boykov I. V., Ryazantsev V. A.* An approximate method for solving an inverse coefficient problem for the heat equation // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2021. Vol. 15, iss. 2. P. 175–189. https://doi.org/10.1134/S1990478921020010
31. *Mainardi F.* On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation // Waves and Stability in Continuous Media / ed. by S. Rionero, T. Ruggert. World Scientific, Singapore, 1994. P. 246–251.
32. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. Ульяновск : Артишок. 2008. 512 с.
33. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. Amsterdam : Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 1006 p.

References

1. Ladyženskaja O. A., Solonnikov V. A. Ural'ceva N. N. *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*. Providence, American Mathematical Society, 1988. 648 p.
2. Lions Zh.-L. *Nekotorye metody resheniia nelineinykh kraevykh zadach* [Some Methods for Solution of Nonlinear Boundary Problems]. Moscow, Mir, 1972, 588 p. (in Russian).
3. Mors F. M., Feshbakh G. *Metody teoreticheskoi fiziki* [Methods of Theoretical Physics]. Vol. 2. Moscow, Media, 2012. 886 p. (in Russian).
4. Krylov N. V. *Lektsii po ellipticheskim i parabolicheskim uravneniiam v prostranstvakh Gel'dera* [Lections on Elliptic and Parabolic Equations in Holder Spaces]. Novosibirsk, Nauchnaya kniga, 1998. 178 p. (in Russian).
5. Krylov N. V. *Nelineinye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniia vtorogo poriadka* [Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of the Second Order]. Moscow, Nauka, 1985, 376 p. (in Russian).
6. Korpusov M. O. *Konspekt lektsii po kursu "Nelineinye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniia matematicheskoi fiziki dlia aspirantov"* [Lecture Notes on the Course "Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of Mathematical Physics for Postgraduate Students"]. Moscow, Moscow University Press, 2016. 188 p. (in Russian).
7. Polianin A. D., Zaitsev V. F., Zhurov A. I. *Metody resheniia nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki i mekhaniki* [Methods for Solution of Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 256 p. (in Russian).
8. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. *Vychislitel'naia teploperedacha* [Computational Heat Transfer]. Moscow, LIBROKOM, 2009. 784 p. (in Russian).
9. Vabishchevich P. N. *Vychislitel'nye metody matematicheskoi fiziki. Nestatsionarnye zadachi* [Computational Methods of Mathematical Physics. Nonstationary Problems]. Moscow, Vuzovskaya kniga, 2008. 228 p. (in Russian).
10. Kabanikhin S. I. *Inverse and ill-posed problems. Theory and Applications*. Berlin, Boston, De Gruyter, 2011. 475 p. https://doi.org/10.1515/9783110224016
11. Hasanov H. A., Romanov V. G. *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*. Springer International Publishing AG, 2017. 261 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62797-7
12. Denisov A. M. *Vvedenie v teoriiu obratnykh zadach* [Introduction to the Inverse Problems Theory]. Moscow, Moscow University Press, 1994. 206 p. (in Russian).
13. Beilina L., Klibanov M. V. *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems*. New York, Springer, 2012. 408 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7805-9
14. Boikov I. V., Ryazantsev V. A. On the approximate method for determination of heat conduction coefficient. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Middle Volga Mathematical Society Journal], 2019, vol. 21, iss. 2, pp. 149–163 (in Russian). https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201902.149-163
15. Boikov I. V., Ryazantsev V. A. On an iterative method for solution of parabolic equations. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*: Materials of the 21st International Saratov Winter School (Saratov, January 31 – February 4, 2022). Saratov,

Saratov State University Publ., 2022, iss. 21, pp. 50–54 (in Russian). EDN: BVALVE

16. Daletskii Ju. L., Krein M. G. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 43. Providence, American Mathematical Society, 1974. 386 p.
17. Dekker K., Verwer J. G. *Stability of Runge – Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*. New York, Elsevier Science Ltd, 1984. 308 p.
18. Lozinskii S. M. Note on a paper by V. S. Godlevskii. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1973, vol. 13, iss. 2, pp. 232–234. https://doi.org/10.1016/0041-5553(73)90144-4
19. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional Analysis*. Oxford, Pergamon Press, 1982. 600 p.
20. Krasnosel'skii M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitskii Ya. B., Stetsenko Ya. V. *Approximate Solution of Operator Equations*. Groningen, Wolters-Noordhoff Publishing, 1972. 496 p. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2715-1
21. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moskow, Binom. Laboratoriya znaniy, 2011. 640 p. (in Russian). EDN: QJXMXL
22. Gavurin M. K. Nonlinear functional equations and continuous analogs of iterative methods. *Izvestiya VUZ. Matematika*, 1958, iss. 5, pp. 18–31 (in Russian).
23. Puzynin I. V., Boiadzhiev T. L., Vinitskii S. I., Zemlianaia E. V., Puzynina T. P., Chuluunbaatar O. Methods of computational physics for investigation of models of complex physical systems. *Physics of Particles and Nuclei*, 2007, vol. 38, iss. 1, pp. 70–116. https://doi.org/10.1134/S1063779607010030
24. Boikov I. V. On a continuous method for solving nonlinear operator equations. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, iss 9, pp. 1288–1295. https://doi.org/10.1134/S001226611209008X
25. Boikov I. V., Ryazantsev V. A. On optimal approximation of geophysical fields. *Numerical Analysis and Applications*, 2021, vol. 14, iss. 1, pp. 13–29. https://doi.org/10.1134/S199542392101002X
26. Lanczos K. *Applied Analysis*. New Jersey, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1956. 539 p.
27. Boikov I. V., Krivulin N. P. *Analiticheskie i chislennye metody identifikatsii dinamicheskikh sistem* [Analytical and Numerical Methods for Identification of Dynamical Systems]. Penza, Penza State University Publ., 2016. 398 p. (in Russian).
28. Boikov I. V., Krivulin N. P. On an approximate method for reconstructing input signals of measuring transformers. *Measurement Techniques*, 2021, iss. 12, pp. 3–7 (in Russian). https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-12-3-7, EDN: PVVHQW
29. Boikov I. V., Ryazantsev V. A. Numerical recovery of the initial condition in the Cauchy problems for linear parabolic and hyperbolic equations. *University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, iss. 3 (55), pp. 72–88 (in Russian). https://doi.org/10.21685/2072-3040-2020-3-6
30. Boikov I. V., Ryazantsev V. A. An approximate method for solving an inverse coefficient problem for the heat equation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2021, vol. 15, iss. 2, pp. 175–189. https://doi.org/10.1134/S1990478921020010
31. Mainardi F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation. In: Rionero S., Ruggert T. (eds.) *Waves and Stability in Continuous Media*. World Scientific, Singapore, 1994, pp. 246–251.
32. Uchaikin V. V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of Fractional Derivatives]. Ulyanovsk, Artishok, 2008. 512 p. (in Russian).
33. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 1006 p.

Поступила в редакцию / Received 12.04.2022
Принята к публикации / Accepted 02.03.2023
Опубликована / Published 31.08.2023