

نماذج التأخير والضياع الماركوفية في شبكات البيانات

الدكتور تاج الدين جركس*
الدكتور عدنان معترماوي**
غسان ناصر***

(تاريخ الإيداع 2012 / 5 / 27. قُبل للنشر في 2012 / 9 / 16)

□ ملخص □

تستخدم نظرية الترتيل بشكل واسع لتحليل شبكات اتصالات البيانات المؤلفة من عقد تبديلية مرتبطة فيما بينها بواسطة وصلات النقل ويتم تحليل شبكات البيانات بفصلها إلى نظم جزئية وتحليل كل نظام جزئي بشكل منفرد باستخدام أحد نماذج الترتيل المعروفة. يقدم هذا البحث دليلاً عملياً لتحليل التأخير والضياع وفق منهجية جديدة ومتكاملة لشرح وعرض وتحليل أسس نظرية الترتيل ونماذج الترتيل الماركوفية في شبكات البيانات. يقوم البحث بدراسة وتحليل ومقارنة نماذج الترتيل الماركوفية الأساسية مع التركيز على التأخير والضياع كمقياسين هامين من مقياسي جودة الخدمة والأداء في شبكات البيانات. يوضح البحث كيفية استخدام سلاسل ماركوف لاستنتاج الحالة المستقرة لنماذج الترتيل الماركوفية الأساسية واستنتاج الصيغ الرياضية لمقاييس الأداء المختلفة لهذه النماذج. كما يتضمن البحث استنتاجات وتوصيات مناسبة تساعد في تطوير وإنشاء نماذج أخرى بوجود فرضيات معينة.

الكلمات المفتاحية: التأخير - نظرية الترتيل - نماذج الترتيل الماركوفية - سلاسل ماركوف - احتمال التوقيف - احتمال الضياع.

* أستاذ - قسم هندسة الاتصالات والالكترونيات - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
** مدرس - قسم هندسة الاتصالات والالكترونيات - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية
*** طالب دراسات عليا (دكتوراه) - قسم هندسة الاتصالات والالكترونيات - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

Markovian Delay and Loss Models in the Data Networks

Dr. Tajedin Jarkas*
Dr. Adnan Moatarmawi**
Ghassan Nasser***

(Received 27 / 5 / 2012. Accepted 16 / 9 / 2012)

□ ABSTRACT □

The Queuing Theory is widely used for the analysis of data communication networks consisted of switched nodes. The analysis of data networks is based on method of decomposition where the total network is broken up into subsystem and the subsystems are analyzed individually by using one of the well known queuing models.

This paper provides a practical guide to analysis the delay and loss according to a new integrated method to explain, show, and analyze the queuing theory basics and Markovian queuing models in the data networks.

The paper investigates, analyzes, and compares the basic Markovian queuing models, and also focuses on analyzing the delay and loss as two important measures of the quality of service and performance in the data networks. The paper has conclusions and recommendations which help in the development and establishment other queuing models with specific assumptions.

Keywords: Delay, Queuing Theory, Markovian Queuing Models, Markovian Chains, Blocking Probability, Loss Probability.

* Professor, Department of communication Engineering, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria

** Assistant Professor, Department of communication Engineering, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria

*** Postgraduate Student, Department of communication Engineering, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria

المقدمة:

يعتبر كل من التأخير والضياع في تسليم رزمة مرسله عبر شبكة بيانات من مقاييس الأداء الهامة في الشبكة وهما يتأثران بازدياح الشبكة ويؤثران في أداء الشبكة وفي جودة الخدمة المقدمة من قبل الشبكة وفي اختيار خوارزميات الشبكة كخوارزميات التحكم بالازدحام وخوارزميات التحكم بالتدفق ولذلك يكون من المهم جداً فهم طبيعة وآلية كل من التأخير والضياع في الشبكة وعلاقتها بخصائص الشبكة.

تتميز شبكات البيانات بمشاركة الموارد المتاحة، كسعة المعالجة والتخزين المؤقت وعرض الحزمة، ويؤدي زيادة عدد الرزم المرسله عبر الشبكة عن السعة المتاحة إلى نشوء الازدحام في الشبكة الذي يؤدي بدوره إلى حدوث التأخير كما يؤدي نقص الموارد المتاحة في الشبكة إلى حدوث الضياع في الرزم المرسله عبر الشبكة.

تعتبر نظرية الترتيل إطار العمل الأساس لتحليل التأخير والضياع في شبكات البيانات [1]، و [2].

تركز غالبية البحوث الحالية في شبكات البيانات على تحليل أداء نظم الترتيل لدعم جودة الخدمة في الشبكة [3].

تعتبر شبكات البيانات شبكات من أرتال يوجد فيها عند كل عقدة رتل من الرزم لكل قناة خارجة وعندما يزداد معدل الرزم الواصلة إلى عقدة عن معدل الرزم التي يمكن معالجتها وإرسالها يزداد حجم الرتل بدون حدود وبالتالي يزداد التأخير بدون حدود أيضاً [4].

يتم تحليل شبكات البيانات المعقدة بفصلها إلى نظم جزئية بحيث يتألف كل نظام جزئي من عقدة مفردة ويتم تحليل كل نظام جزئي بشكل منفرد باستخدام أحد نماذج الترتيل المعروفة ولقد وضع جاكسون (Jackson) شروط التحليل إلى نظم جزئية في شبكات الترتيل المفتوحة كما وضع جوردون-نويل (Gordon-Newel) شروط التحليل إلى نظم جزئية في الشبكات المغلقة [5].

تستخدم نماذج الترتيل الماركوفية التي تتميز بأن عمليات الوصول والخدمة فيها تخضع لتوزيعات أسية متناقصة لتحليل شبكات البيانات الماركوفية (Markovian Data Networks) التي تتميز أيضاً بأن جميع عمليات الوصول الداخلية والخارجة هي عمليات بواسونية (Poisson processes) وجميع مراكز الخدمة (العقد) تقوم بتحويل الوصول الماركوفي إلى مخرج ماركوفي [5]، [6]، و [7].

في شبكات البيانات الماركوفية يكون تأخير الشبكة مساوياً لمجموع التأخير على كل وصلة من وصلات الشبكة التي تجتازها الرزمة [4]، [7].

توجد بحوث متعددة تناولت مفهومي التأخير والضياع باستخدام نظرية الترتيل [8] ÷ [12]، ولكن الميزة الفريدة لهذا البحث هي أنه يركز بشكل أساسي على التأخير والضياع في نماذج الترتيل الماركوفية الأساسية وفق منهجية متكاملة وجديدة لشرح وعرض وتحليل نظرية الترتيل في شبكات البيانات ومقارنة هذه النماذج الماركوفية الأساسية المختلفة باستخدام مخططات انتقال الحالة والصيغ الرياضية المختلفة.

تعتبر المنهجية التي يقوم عليها البحث ونتائج التحليل التي تم التوصل إليها ذات أهمية علمية وتطبيقية كبيرة في حقل شبكات اتصالات البيانات وهي تشكل دليلاً عملياً هاماً لتحليل التأخير والضياع في شبكات البيانات.

يساعد هذا البحث بتعميق فهم نظرية الترتيل ونماذج الترتيل الماركوفية الأساسية لإنشاء نماذج ترتيل أخرى تخضع لشروط وفرضيات النظام المعينة.

أهمية البحث وأهدافه:

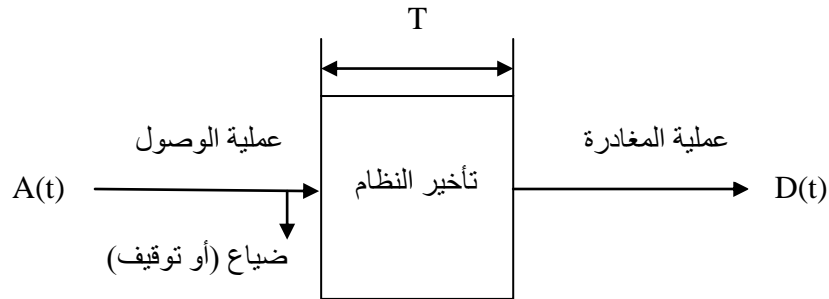
تأتي أهمية هذا البحث من أهمية التأخير والضياح كمقياسين هامين لجودة الخدمة والأداء في شبكات البيانات. يهدف البحث إلى تقديم دليل عملي لتحليل التأخير والضياح وفق منهجية متكاملة وجديدة لشرح وعرض وتحليل أسس نظرية الترتيل ونماذج الترتيل في شبكات البيانات من خلال دراسة وتحليل ومقارنة نماذج الترتيل الماركوفية الأساسية وتقديم استنتاجات وتوصيات تساعد في تعميق فهم نظرية الترتيل وتطبيقاتها في شبكات البيانات وفي تطوير وإنشاء نماذج أخرى تخضع لشروط وفرضيات معينة.

طرائق البحث ومواده:

يعتمد هذا البحث طريقة التحليل الرياضي وهو يقوم على شرح وعرض وتحليل نظرية الترتيل في شبكات البيانات وفق منهجية جديدة تركز على تحليل التأخير والضياح وتوضيح كيفية استخدام سلاسل ماركوف لاستنتاج الحالة المستقرة لنماذج الترتيل الماركوفية الأساسية واستنتاج الصيغ الرياضية لمقاييس الأداء المختلفة في هذه النماذج وإجراء المقارنة باستخدام مخططات انتقال الحالة والصيغ الرياضية المختلفة.

التأخير والضياح في شبكات البيانات:

تتميز شبكات البيانات بمشاركة الموارد المتاحة، كسرعة المعالجة والتخزين المؤقت وعرض الحزمة، ويؤدي زيادة عدد الرزم المرسله عبر الشبكة عن السعة المتاحة إلى نشوء الازدحام في الشبكة الذي يؤدي بدوره إلى حدوث التأخير كما يؤدي نقص الموارد المتاحة في الشبكة إلى حدوث الضياح في الرزم المرسله عبر الشبكة. يبين الشكل (1) نموذجاً أساسياً لنظام التأخير والضياح في شبكات البيانات.



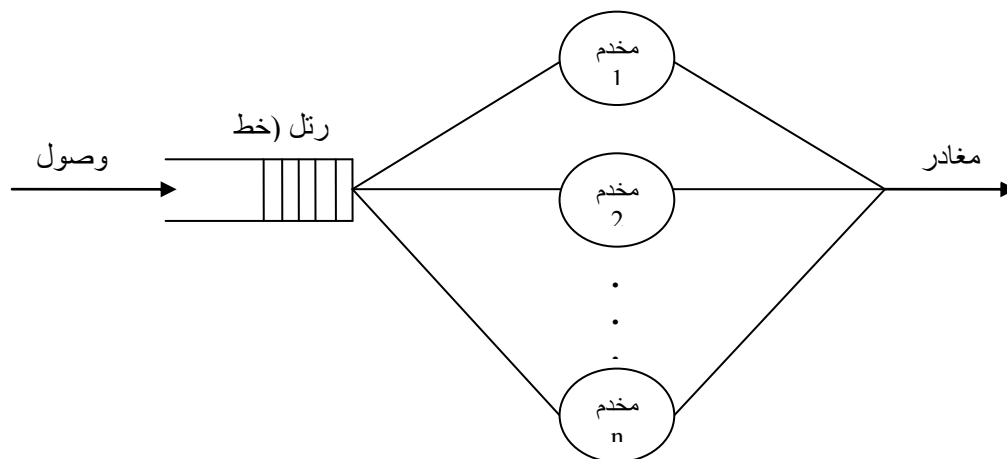
الشكل (1) يبين نموذجاً أساسياً لنظام التأخير والضياح في شبكات البيانات

- تخضع رزمة مرسله عبر شبكة بيانات إلى أنواع مختلفة من التأخير نوجزها كما يلي:
- **تأخير المعالجة (Processing Delay):** هو التأخير الحاصل بين زمن استلام رزمة من أجل إرسالها حتى لحظة وضعها على رتل الإرسال، وفي طرف الاستلام هو التأخير الحاصل بين زمن استلام رزمة في رتل استلام حتى لحظة المعالجة الفعلية للرسالة، ويعتمد هذا التأخير على وحدة المعالجة المركزية (CPU) في النظام.
- **تأخير الترتيل (Queuing Delay):** هو التأخير الحاصل بين لحظة دخول رزمة إلى رتل إرسال ولحظة الإرسال الفعلية لها، وهو يعتمد على الحمل الموجود على وصلة الاتصالات.

- **تأخير الإرسال (Transmission Delay):** هو التأخير الحاصل بين إرسال البت الأول للرسالة حتى إرسال البت الأخير لهذه الرسالة، وهو يعتمد على سرعة وصلة الاتصالات.
- **تأخير الانتشار (Propagation Delay):** هو التأخير الحاصل بين لحظة إرسال البت الأخير للرسالة حتى لحظة استلام البت الأخير للرسالة في الطرف الآخر، ويعتمد هذا التأخير على الخصائص الفيزيائية لوصلة الاتصالات.
- **تأخير إعادة الإرسال (Retransmission Delay):** هو التأخير الحاصل بسبب ضياع رسالة وهو يستمر حتى استكمال إعادة إرسالها من جديد، ويعتمد هذا التأخير على معدل الخطأ للوصلة وعلى البروتوكول المستخدم للإرسال.
- يركز هذا البحث بشكل أساسي على تأخير الترتيل وتأخير الإرسال.
- تعتبر نظرية الترتيل إطار العمل الأساس لتحليل التأخير والضياع في شبكات البيانات.

نظرية الترتيل (Queuing Theory):

يهدف تطبيق نظرية الترتيل في شبكات البيانات إلى إنشاء نماذج تحليلية يمكن باستخدامها تقييم مقاييس أداء هامة للشبكة كالتأخير واحتمالات الضياع والتوقيف [1].
يبين الشكل (2) نموذجاً أساسياً لنظام الترتيل.



الشكل (2) يبين نموذجاً أساسياً لنظام الترتيل

سنقوم في هذا البحث باستخدام مصطلح الزبائن في سياق الحديث عن شبكة البيانات للإشارة إلى الرزم المرسلة عبر وصلة اتصالات معينة، وباستخدام مصطلح زمن الخدمة للإشارة إلى زمن إرسال الرسالة.
يستخدم نظام الترتيل لتقييم مقاييس أداء مختلفة كالعدد الوسطي للزبائن (N) في النظام الذي يمكننا من تقييم التأخير الوسطي (T) (يشمل الزمن الذي يقضيه الزبون منتظراً في الرتل وزمن الخدمة).
يتم تقييم العدد الوسطي للزبائن في النظام والتأخير الوسطي للزبون بدلالة المعلومات المتوفرة حول معدل وصول الزبائن (λ) إلى النظام (عدد الزبائن الداخلة إلى النظام خلال واحدة الزمن)، والمعلومات المتوفرة حول معدل خدمة الزبائن (μ) في النظام (عدد الزبائن التي يخدمها النظام خلال واحدة الزمن).

تصنيف نظم الترتيل (Classification of Queuing theory):

يتم بشكل عام تصنيف نظم الترتيل بملاحظة نمط وصول الزبائن، توزيع زمن الخدمة، عدد المخدّمات، سعة النظام التي تمثل العدد الأعظمي للزبائن في النظام، تعداد المصدر (هل هو منته أو لانهائي)، ونظام الخدمة. يبين الجدول (1) بعض أنظمة الخدمة (service disciplines) المستخدمة في نظم الترتيل.

الجدول (1) يبين بعض أنظمة الخدمة المستخدمة في نظم الترتيل

نظام الخدمة (Service discipline)	التوضيح (Explanation)
(First-In-First-Out) FIFO	الزبون الذي يدخل أولاً يتم تخديمه ويخرج أولاً.
(Last-In-First-Out) LIFO	الزبون الذي يدخل أخيراً يتم تخديمه ويخرج أولاً.
الطريقة الدائرية (Round Robin)	يحصل فيه كل زبون على شريحة زمنية معينة خلال دورة كاملة.
نظام الأولوية (Priority Discipline)	توجد أولوية معينة لكل زبون ودائماً يختار المخدّم الزبائن ذات الأولوية الأعلى.

نماذج الترتيل ورموز كيندال (Queuing Models and Kendall's Notation):

تم تطوير رموز موحدة لتمثيل نماذج الترتيل المختلفة تدعى رموز كيندال (Kendall's Notation)، وتكمن الفكرة في وصف نموذج الترتيل بواسطة ستة حدود كما يلي [1]، و[2]:

يمثل الحد الأول حرفاً أبجدياً يدل على نوع عملية الوصول، ويمثل الحد الثاني حرفاً أبجدياً أيضاً يدل على نوع عملية الخدمة المفترضة، وغالباً ما يستخدم لهاتين العمليتين أحد الحروف التالية:

- **M (Memoryless):** يشير إلى أن عملية الوصول بواسونية وهذا يعني أن الأزمنة الفاصلة بين وصول الزبائن موزعة توزيعاً أسياً سالباً (negative exponential distribution)، وهو يشير أيضاً إلى توزيع أسي سالب لأزمنة الخدمة.
- **D (Deterministic):** يشير إلى أزمنة محددة للوصول أو الخدمة.
- **G (General):** يشير إلى أزمنة عامة ومستقلة للوصول أو الخدمة.

يمثل الحد الثالث والرابع والخامس أرقاماً أو متغيرات تدل على عدد المخدّمات، وسعة النظام، وتعداد المصدر هل هو لا نهائي أو منته (infinite or finite source) على الترتيب، بينما يمثل الحد السادس مجموعة حروف أبجدية تدل على نظام الخدمة (service discipline) في الرتل.

الجدول (2) يبين بعض نماذج الترتيل الأساسية

نموذج الترتيل (Queuing model)	عملية الوصول (Arrival process)	أزمنة الخدمة (Service times)	عدد المخدّمات (Number of Servers)
M/M/1	بواسونية	أسية	1
M/M/1/K	بواسونية	أسية	1 (سعة النظام محددة بالرمز K)
M/M/m	بواسونية	أسية	m
M/M/m/m	بواسونية	أسية	m (سعة النظام محددة بالرمز m الأخير)
M/M/∞	بواسونية	أسية	غير محدود
M/D/1	بواسونية	محددة	1
M/G/1	بواسونية	عامة	1
M/G/m	بواسونية	عامة	m
M/D/n	بواسونية	محددة	n
G/G/n	عامة	عامة	n

يمكن في هذا الترميز الاستغناء عن الحدود الثلاثة الأخيرة أو عن الحدين الأخيرين عندما تكون سعة النظام لانهائية وتعداد المصدر لا نهائي أيضاً ونظام الخدمة يقوم على قاعدة القادم أولاً يتم تخديمه أولاً (FIFO)، بينما يجب دائماً تعيين الحدود الثلاثة الأولى. يبين الجدول (2) بعض نماذج الترتيل الأساسية.

عملية بواسون (The Poisson process):

تستخدم عملية بواسون بشكل عام في نمذجة المسائل التي تحتاج إلى معرفة عدد الحوادث الظاهرة خلال زمن معين وبشكل خاص في نمذجة أرتال الانتظار لتمثيل عدد الزبائن الواصلة إلى مخدّم ما خلال فترة زمنية معينة.

• تعريف عملية بواسون (Definition of the Poisson process):

يقال عن العملية العشوائية $\{A(t) | t \geq 0\}$ التي تأخذ قيماً صحيحة غير سالبة بأنها عملية بواسونية بالمعدل λ إذا تحققت الشروط التالية [2]:

1. $A(t)$ عملية تمثل العدد الكلي للزبائن الواصلة في المجال الزمني من 0 إلى t $[A(0) = 0]$
2. ويكون الفرق $A(t) - A(s)$ من أجل كل $t < s$ مساوياً لعدد الزبائن الواصلة في المجال $[s, t]$.
3. أعداد الزبائن الواصلة في مجالات زمنية منفصلة تكون مستقلة.
4. عدد الزبائن الواصلة في أي مجال زمني طوله τ يكون موزعاً بواسونياً بالوسيط $(\lambda\tau)$ (parameter)، بحيث يكون من أجل كل $t, \tau > 0$:

$$P\{A(t + \tau) - A(t) = n\} = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau}, \quad n \geq 0 = 0, 1, 2, \dots$$

بالاعتماد على متوسط توزيع بواسون يكون العدد الوسطي للزبائن الواصلة داخل مجال زمني طوله τ هو $\lambda\tau$ وهذا ما يفسر مفهوم λ على أنه معدل الوصول (العدد الوسطي للزبائن الواصلة خلال واحدة الزمن).

• خواص عملية بواسون (Properties of the Poisson process):

- تتميز عملية بواسون بخصائص هامة تكمن وراء فرض نماذج الترتيل لهذه العملية نذكر منها ما يلي [2]:
- الأزمنة الفاصلة بين الزبائن الواصلة تكون مستقلة وموزعة أسياً بوسيط λ وهذا يعني إذا كان t_n يشير إلى زمن الوصول n فإن المجالات الزمنية $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ يكون لها التوزيع الاحتمالي التالي: $P\{\tau_n \leq s\} = 1 - e^{-\lambda s}$, $s \geq 0$.
 - إذا تم دمج (merged) عمليتين بواسونيتين مستقلتين أو أكثر A_1, \dots, A_k في عملية واحدة
 - كما يلي: $A = A_1 + A_2, \dots, A_k$ فإن العملية A هي عملية بواسونية بمعدل يساوي مجموع المعدلات للعمليات المكونة لهذه العملية.
 - إذا تم تقسيم (split) عملية بواسونية إلى عمليتين بإسناد كل وصول بشكل مستقل إلى إحدى العمليتين الأولى أو الثانية من هاتين العمليتين باحتمال P و $(1 - P)$ على الترتيب، فإن عمليتي الوصول الحاصلتين هما عمليتان بواسونيتان.

توجد خاصية مهمة للتوزيع الأسي وهي خاصية عدم التذكر (memoryless) التي يعبر عنها كما يلي:

$$\begin{aligned} P\{\tau_n > r + t | \tau_n > t\} &= P\{\tau_n > r\}, & \text{for } r, t \geq 0 \\ P\{s_n > r + t | s_n > t\} &= P\{s_n > r\}, & \text{for } r, t \geq 0 \end{aligned}$$

وذلك من أجل الأزمنة الفاصلة بين الزبائن الواصلة τ_n وأزمنة الخدمة s_n على الترتيب.

توجد استنتاجات مهمة لخاصية عدم التذكر نذكر منها ما يلي:

1. يمكن اختصار حالة النظام في متحول واحد هو عدد الزبائن في النظام.
2. يمكن تحديد سلاسل ماركوف المستمرة الزمن للنظم الماركوفية وحل هذه السلاسل بالطرق المعروفة.

صيغة ليتل (Little's Formula):

تقيم صيغة ليتل في الحالة المستقرة للنظام علاقة بين المقادير الكمية التالية [1]، و[2]:

1. العدد الوسطي للزبائن في النظام (N) (يتضمن الزبائن المنتظرة والزبائن التي هي قيد الخدمة).
2. معدل الوصول (λ) (العدد الوسطي للزبائن الواصلة خلال واحدة الزمن).
3. الزمن الوسطي الذي يقضيه الزبون في النظام (T) (يتضمن زمن الانتظار وزمن الخدمة).

للوصول إلى صيغة ليتل نفرض بأننا نراقب النظام من اللحظة $t = 0$ ولتكن لدينا الرموز التالية:

$N(t)$: يشير إلى عدد الزبائن في النظام في اللحظة t

$A(t)$: يشير إلى عدد الزبائن الواصلة إلى النظام في المجال $[0, t]$

$D(t)$: يشير إلى عدد الزبائن المغادرة للنظام في المجال $[0, t]$

و T_i : يشير إلى الزمن الذي يقضيه الزبون i^{th} في النظام (الزمن بين دخول الزبون إلى النظام حتى مغادرته له بعد حصوله على الخدمة) وهو يمثل تأخير الزبون i^{th} (تأخير الترتيل + تأخير الإرسال).

من الواضح لدينا عندما يكون النظام فارغا في اللحظة $t = 0$ يكون:

$N(t) = A(t) - D(t)$
بفرض أن λ_t يشير إلى العدد الوسطي للزبائن الواصلة إلى النظام في المجال $[0, t]$ أي أن: $\lambda_t = \frac{A(t)}{t}$
تدعى λ التي تعرف كما يلي: $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$ معدل الوصول في الحالة المستقرة (خلال زمن طويل).

يمثل العدد النموذجي للزبائن في النظام حتى الزمن t وسطي زمن عدد الزبائن في النظام $N(\tau)$ حتى الزمن t

الذي يعطى بالعلاقة: $N_t = \bar{N}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t N(\tau) d\tau$

تدعى N التي تعرف كما يلي: $N = \lim_{t \rightarrow \infty} N_t$ وسطي زمن عدد الزبائن في النظام في الحالة المستقرة

الذي يمثل العدد الوسطي للزبائن في النظام في الحالة المستقرة.

من جهة أخرى يمثل وسطي زمن تأخير الزبون حتى الزمن t وسطي الزمن الذي يقضيه زبون في النظام

حتى الزمن t وهو يعطى بالعلاقة: $T_t = \bar{T}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{A(t)} T_i}{A(t)}$

تدعى T التي تعرف كما يلي: $T = \lim_{t \rightarrow \infty} T_t$ التأخير الوسطي للزبون في الحالة المستقرة.

بدورها ترتبط الكميات N ، λ ، و T الواردة أعلاه مع بعضها البعض بعلاقة بسيطة تجعل من الممكن تحديد

إحدى هذه الكميات بمعرفة الأخرى وهي: $N = \lambda T$

تدعى هذه العلاقة ($N = \lambda T$) قانون ليتل (Little's law) أو صيغة ليتل (Little's formula)، وهي تعبر

بشكل طبيعي عن حقيقة أن التأخير T يزداد بزيادة عدد الزبائن N في النظام.

توجد صيغة مشابهة للصيغة السابقة تتعلق بالانتظار في الرتل وهي: $N_Q = \lambda W$ حيث N_Q : العدد الوسطي

للزبائن المنتظرة في الرتل (غير الخاضعة للإرسال)، W : الزمن الوسطي المستهلك في الرتل من قبل زبون، λ : معدل

الوصول إلى خط الإرسال.

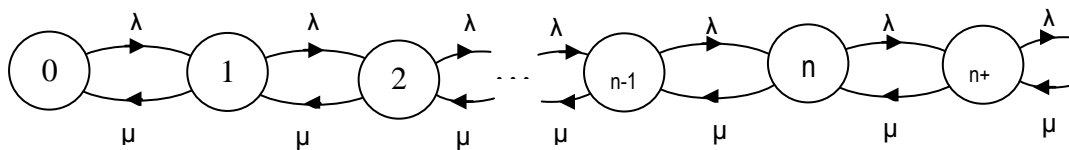
نماذج التأخير والضياح الماركوفية (Markovian Delay and Loss Models):

يعتمد تحليل النظم الماركوفية على نظرية سلاسل ماركوف التي تعرف بأنها عمليات عشوائية متقطعة الزمن يتميز فيها كل متغير عشوائي بارتباطه بالمتغير السابق له مباشرة وبتأثيره على المتغير اللاحق فقط. يمكن في النظم الماركوفية وضع جملة معادلات خطية وحلها للحصول على توزيع الحالة المستقرة لعدد الزبائن في النظام ومنه يمكن حساب مقاييس الأداء الأخرى لنظام الترتيل. يتم وضع مخطط الانتقال للنظام بعد تقصي الحالات الممكنة والانتقالات المنطلقة من هذه الحالة بالإضافة إلى تعيين معدلات الانتقال المرافقة لكل انتقال ومن مخطط الانتقال يمكن وضع معادلات الحالة المستقرة وحل هذه المعادلات مع معادلة التطبيع ($\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$) للحصول على حل وحيد يدل على قيم توزيع احتمالي.

• النموذج M/M/1 (The M/M/1-model):

في النموذج M/M/1 تكون الأزمنة الفاصلة بين الزبائن الواصلة (interarrival times) موزعة توزيعاً أسياً سالبا بالوسيط λ وأزمنة الخدمة أيضاً موزعة توزيعاً أسياً سالبا بالوسيط μ . يتألف هذا النظام من مخدم واحد وفيه السعة (خط الانتظار) وتعداد المصدر لا نهائين وهو يستخدم في الرتل نظام الخدمة FIFO.

يبين الشكل (3) مخطط الانتقال للنموذج M/M/1.



الشكل (3) يبين مخطط الانتقال للنموذج M/M/1

1. احتمالات الحالة المستقرة (Steady-State Probability):

تدل خاصية عدم التذكر إلى جانب فرضيات استقلالية الأزمنة الفاصلة بين الزبائن الواصلة وأزمنة الخدمة على أنه عند معرفة عدد الزبائن في النظام $N(t)$ في الزمن t ، فإن أزمنة وصول زبائن جديدة واكتمال خدمتها لاحقاً تكون مستقلة عن أزمنة وصول الزبائن السابقة الموجودة حالياً في النظام وعن اكتمال خدمتها، وهذا يعني أن العدد اللاحق (المستقبلي) للزبائن يعتمد على العدد السابق (الماضي) فقط من خلال العدد الحالي، وهذا بدوره يعني أن $\{N(t)|t \geq 0\}$ هي سلسلة ماركوف مستمرة الزمن (continuous-time).

من جهة أخرى، يكفي لتحليل سلسلة ماركوف المستمرة الزمن أن نستخدم النظرية البسيطة لسلسلة ماركوف المتقطعة الزمن (discrete-time Markov chain) وذلك بتركيز الاهتمام على اللحظات الزمنية: $0, \delta, 2\delta, \dots, k\delta, \dots$ حيث δ عدد صغير موجب.

نشير إلى عدد الزبائن في النظام بالرمز N_k في اللحظة الزمنية $t = k\delta$ فيكون: $N_k = N(k\delta)$. ولدينا من جهة أخرى أن $N(t)$ هي سلسلة ماركوف مستمرة الزمن، وبالتالي يكون $\{N_k|k = 0, 1, \dots\}$ عبارة عن سلسلة ماركوف متقطعة الزمن باحتمالات انشغال الحالة المستقرة تساوي احتمالات انشغال الحالة المستقرة للسلسلة المستمرة.

نشير بالرمز P_{ij} إلى احتمالات الانتقالات الموافقة كما يلي: $P_{ij} = P\{N_{k+1} = j | N_k = i\}$ وهي تتعلق بقيمة العدد الصغير الموجب δ الذي يمكن إهماله.

نفرض الآن أن احتمالات الحالة المستقرة هي: $p_n = \lim_{k \rightarrow \infty} p\{N_k = n\} = \lim_{t \rightarrow \infty} p\{N(t) = n\}$ يشير الاحتمال p_n ($n \in N$) إلى احتمال الحالة المستقرة التي يكون فيها النظام في الحالة n ، والذي يعرف

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) \quad \text{كما يلي:}$$

حيث: $p_n(t)$ هو الاحتمال (المتعلق بالزمن) الذي يوجد فيه n زبون في النظام في الزمن t .
نقوم الآن بالتركيز على حالة معينة n (الشكل 3) ونراقب التدفقات الداخلة إلى هذه الحالة والخارجة منها فنجد ما يلي: يمكن الوصول إلى الحالة n من الحالة $n-1$ بالمعدلات $\lambda p_{n-1}(t)$ ، وهذا يعني أن النظام يكون باحتمال $p_{n-1}(t)$ في الحالة $n-1$ في الزمن t ويذهب بالمعدل λ من الحالة السابقة $n-1$ إلى الحالة n . كما يمكن الوصول إلى الحالة n من الحالة $n+1$ بالمعدلات $\mu p_{n+1}(t)$ ، وبالتالي يكون التدفق الكلي الداخل إلى الحالة n

$$\lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) \quad \text{كما يلي:}$$

من جهة أخرى، تغادر الحالة n بالمعدل $\lambda p_n(t)$ إلى الحالة $n+1$ وبالمعدل $\mu p_n(t)$ إلى الحالة $n-1$ ، وبالتالي يكون التدفق الكلي الخارج من هذه الحالة n كما يلي: $\lambda p_n(t) + \mu p_n(t)$ ، وعندئذ يكون المعدل الكلي لتغير التدفق الداخل إلى الحالة n مساوياً للفرق بين التدفق الداخل إلى هذه الحالة والتدفق الخارج منها كما يلي:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = (\lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t)) - (\lambda p_n(t) + \mu p_n(t))$$

نفرض أن: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dp_n(t)}{dt} = 0$ فنصل إلى معادلات تدفق الحالة المستقرة التالية:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu p_1 - \lambda p_0 \\ 0 &= \lambda p_0 + \mu p_2 - \lambda p_1 - \mu p_1 \\ 0 &= \dots \\ 0 &= \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} - \lambda p_n - \mu p_n \\ 0 &= \dots \end{aligned}$$

تدعى هذه المعادلات معادلات التوازن الشاملة (global balance equations) التي يمكن حلها وكتابتها

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \quad \text{بدلالة } p_0 \text{ كما يلي:}$$

كما يمكن الوصول إلى نفس النتيجة السابقة بتطبيق مبدأ توازن التدفق (flow balance) الذي ينص على أن التدفق الكلي في دخل الحلة عند بلوغ النظام الحالة المستقرة يساوي تدفق الخرج.

ما دامت p_n هي احتمالات (في الحالة المستقرة) فإن شرط التطبيق $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ يكون محققاً، وبالتالي:

$$1 = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = p_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right) = p_0 \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

ومن هنا يكون: $p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ ، وبالتالي تعطى احتمالات الحالة المستقرة كما يلي:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

نشير لحاصل قسمة معدل الوصول على معدل الخدمة $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ بالرمز ρ ونكتب:

عندما يكون $\rho < 1$ (شرط توازن النظام) يسمى ρ شدة حركة السير (traffic intensity).

كما يمكن فهم المعامل ρ بعدة طرق: فهو يمثل نسبة الزمن الوسطي للخدمة إلى الزمن الوسطي الفاصل بين الزبائن الواصلة ويكتب عندها كما يلي: $\rho = \frac{1/\mu}{1/\lambda}$ ؛ ويمثل ρ أيضاً جداء معدل الوصول (λ) بزمن الخدمة الوسطي $(1/\mu)$ أي أنه يمثل العدد الوسطي للزبائن الواصلة في مجال زمني قدره زمن الخدمة الوسطي.

2. بعض مقاييس الأداء (Some Performance Measures):

الاستخدام أو الانتفاع (Utilization):

عند بلوغ النظام الحالة المستقرة يمثل المعامل ρ ما يعرف بالاستخدام أو الانتفاع والذي يعرف بأنه النسبة الزمنية لانشغال المخدم ويعطى بالعلاقة:

$$Utilization\ factor = \rho = 1 - p_0$$

وذلك لأن الحد p_0 يمثل احتمال أن يكون النظام خالياً من الزبائن عند بلوغ النظام الحالة المستقرة، وهو يمثل أيضاً النسبة الزمنية لتعطل المخدم عن العمل بعد مرور زمن طويل، وبالتالي فإن الاستخدام أو الانتفاع يبدو كاحتمال أن يكون النظام غير فارغ في الحالة المستقرة.

يمكن كتابة الاحتمالات p_n بدلالة ρ كما يلي:

$$p_n = \rho^n (1 - \rho), \quad n = 1, 2, \dots$$

العدد الوسطي للزبائن في النظام (Average number of customers in the system):

يمكن حساب العدد الوسطي للزبائن في النظام في الحالة المستقرة كما يلي [1] و [2]:

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n (1 - \rho) = \rho (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} =$$

$$\rho (1 - \rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) = \rho (1 - \rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{1 - \rho} \right) = \rho (1 - \rho) \frac{1}{(1 - \rho)^2}$$

$$N = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

وباستخدام العلاقة $\rho = \lambda/\mu$ يكون لدينا أخيراً ما يلي:

التأخير الوسطي لكل زبون (Average delay per customer):

نحسب التأخير الوسطي للزبون (زمن الانتظار في الرتل + زمن الخدمة) باستخدام نظرية ليتل كما يلي:

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)}$$

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

وباستخدام العلاقة $\rho = \lambda/\mu$ نحصل على ما يلي:

زمن الانتظار الوسطي في الرتل W:

نحسب زمن الانتظار الوسطي في الرتل (التأخير الوسطي - زمن الخدمة الوسطي) كما يلي:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

العدد الوسطي للزبائن في الرتل:

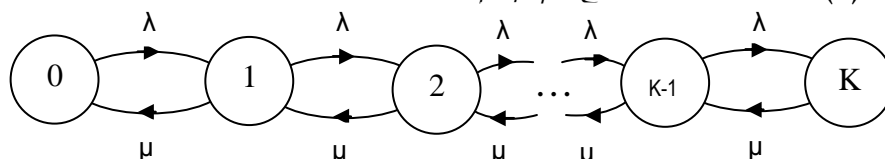
$$N_Q = \lambda W = \frac{\rho^2}{\mu - \lambda}$$

نحسب العدد الوسطي للزبائن في الرتل باستخدام نظرية ليتل كما يلي:

النموذج M/M/1/K (The M/M/1/K-model):

يختلف النموذج M/M/1/K عن النموذج M/M/1 بالسعة المحدودة فقط وهو يعتبر أفضل ملائمة لمقاربة النظم الحقيقية لأن سعة المخازن المؤقتة (buffers) في النظم الحقيقية تكون دوماً محدودة وعند وجود K زبون في النظام يتم توقيف ورمي (drop) أي زبون جديد ولا يعود ثانية إلى النظام ولذلك فهو يعتبر ضائعاً (lost).

يبين الشكل (4) مخطط الانتقال للنموذج M/M/1/K.



الشكل (4) يبين مخطط الانتقال للنموذج M/M/1/K

• احتمالات الحالة المستقرة (Steady-State Probability):

يمكن باستخدام نفس الطريقة المذكورة في حالة النموذج السابق الوصول إلى احتمالات الحالة المستقرة p_n . ما دام عدد الزبائن في النظام محدودا فإن عملية الوصول تعتمد على الحالة أي إذا كان العدد الموجود في النظام أقل من K فإن معدل الوصول هو λ وإلا فهو يساوي الصفر في الحالات الأخرى. تعطى احتمالات الحالة المستقرة لهذا النموذج بالعلاقة [1]، و [2]:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

$$p_n = \rho^n p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho^n; n = 0, 1, \dots, K$$

نلاحظ بأن هذا النظام يكون مستقرا حتى من أجل $\rho > 1$.

• بعض مقاييس الأداء (Some Performance Measures):

العدد الوسطي للزبائن في النظام (Average number of customers in the system):

يعطى عدد الزبائن الوسطي في النظام كما يلي [1]، و [2]:

$$N = \sum_{n=0}^m n p_n = \dots = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{K+1}{1-\rho^{K+1}} \rho^{K+1}; & \rho \neq 1 \\ \frac{K}{2} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

إذا كانت شدة حركة السير ρ منخفضة و K كبيرا فإن N سيكون قريبا من $\frac{\rho}{(1-\rho)}$ ، وإذا كانت ρ أكبر بكثير من الواحد فعندئذ يقترب N من K ، وأما في النظم المزدحمة بشكل كبير فإنه سيتم ضياع معظم الزبائن الواصلة. يعتبر احتمال الضياع (التوقيف) بسبب وجود K زبون في النظام من أهم مقاييس الأداء في النظام $M/M/1/K$.

• احتمال الضياع (Loss Probability):

يتم حساب احتمال الضياع (التوقيف) في النظام $M/M/1/K$ كما يلي [1]، و [2]:

$$P_{Loss}(P_{Blocking}) = P_K = \begin{cases} \frac{\rho^K - \rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}; & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{K+1}; & \rho = 1 \end{cases}$$

$$P_{Loss}(P_{Blocking}) = P_K = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho^K$$

يمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل العام كما يلي:

من أجل $\mu < \lambda \Rightarrow \rho < 1$ تنخفض الاحتمالات بشكل أسي عندما يزداد n ويميل N للتجمع حول $n = 0$ ويكون من المفيد إضافة مخزن مؤقت أكبر (K) لظالما أن النتيجة هي انخفاض في احتمال الضياع.

من أجل $\mu = \lambda \Rightarrow \rho = 1$ تكون جميع الحالات متساوية الاحتمال ويكون:

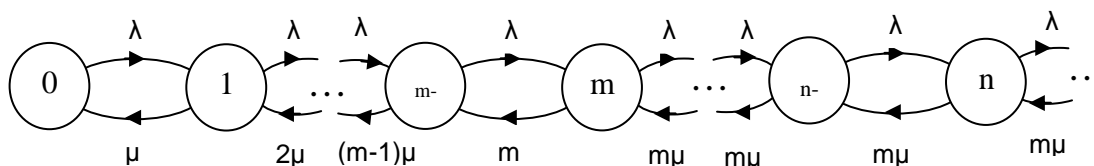
$$P_K = \frac{1}{K+1}$$

من أجل $\mu > \lambda \Rightarrow \rho > 1$ تزداد الاحتمالات P_n مع n وتميل P_n للتجمع قرب K ($n = K$) وهذا يدل على أن النظام ممتلئ وأن إضافة مخازن مؤقتة تكون غير مفيدة.

3. النموذج $M/M/m$ (The M/M/m-model):

في النظام $M/M/m$ يوجد m مخدم ويتم فيه توجيه الزبون الموجود في مقدمة الرتل إلى أي مخدم متاح.

يبين الشكل (5) مخطط الانتقال للنموذج $M/M/m$.



الشكل (5) يبين مخطط الانتقال للنموذج M/M/m

• احتمالات الحالة المستقرة (Steady-State Probability):

نحصل من معادلات التوازن الشاملة على احتمالات الحالة المستقرة التالية:

$$p_n = \begin{cases} p_0 \frac{(m\rho)^n}{n!}; & n \leq m \\ p_0 \frac{m^m \rho^n}{m!}; & n > m \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$$

حيث ρ تعطى بالعلاقة:

يمكننا حساب p_0 باستخدام شرط التطبيع $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ فنحصل على ما يلي:

$$p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(m\rho)^n}{m!} \frac{1}{m^{n-m}} \right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} \right]^{-1}$$

• بعض مقاييس الأداء (Some Performance Measures):

احتمال الترتيل (Queuing Probability):

يتم حساب احتمال انشغال جميع المخدمات m وإجبار أي زبون جديد على الانتظار في الرتل والذي يسمى

احتمال الترتيل أو احتمال التوقيف كما يلي:

$$P_{blocking} = P\{Queuing\} = \sum_{n=m}^{\infty} p_n = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{p_0 m^m \rho^n}{m!} = \frac{p_0 (m\rho)^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \rho^{n-m}$$

$$P_Q(P_{blocking}) = P\{Queuing\} = \frac{p_0 (m\rho)^m}{m!(1-\rho)} = \frac{P_m}{1-\rho}$$

ويكون لدينا أخيرا ما يلي:

تعرف هذه العلاقة بما يسمى صيغة إرلانغ C (Erlang C formula) وهي تستخدم في شبكات الاتصالات

الهاتفية وبشكل خاص في نظم تبديل الدارات لتقييم احتمال انشغال كل الدارات m لخط إرسال.

العدد الوسطي للزبائن في الرتل (Average number of customers in the queue):

يمكن حساب العدد الوسطي للزبائن المنتظرة في الرتل (ليست في الخدمة) كما يلي: $N_Q = \sum_{n=0}^{\infty} n p_{n+m}$

نحصل باستخدام علاقة احتمالات الحالة المستقرة السابقة عندما يكون $n > m$ على ما يلي:

$$N_Q = \sum_{n=0}^{\infty} n p_0 \frac{m^m \rho^{n+m}}{m!} = \frac{p_0 (m\rho)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n$$

وباستخدام صيغة إرلانغ C السابقة للتعبير عن p_0 بمفهوم P_Q والمعادلة $(1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)}$

$$N_Q = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$$

المقابلة في النظام M/M/1 نحصل أخيرا على ما يلي:

يمثل المقدار $\frac{N_Q}{P_Q} = \frac{\rho}{1-\rho}$ العدد المتوقع وجوده في الرتل من قبل أي وصول جديد بشرط إجباره على الانتظار

في الرتل، وهذا العدد مستقل عن عدد المخدمات m وهذا يدل على أنه مهما كان عدد الزبائن المنتظرة في الرتل فإن

حجم رتل النظام M/M/m يسلك سلوكا مماثلا للنظام M/M/1 ولكن بمعدل خدمة يساوي المعدل الإجمالي

(aggregate rate) لجميع لمخدمات m وهو $m\mu$.

التأخير الوسطي لكل زبون (Average delay per customer):

يمكن حساب الزمن الوسطي W لانتظار الزبون في الرتل بتطبيق نظرية ليتل على العلاقة السابقة

$$W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{\rho P_Q}{\lambda(1-\rho)} \quad \text{وذلك كما يلي: } N_Q = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$$

التأخير الوسطي لكل زبون في النظام:

$$T = \frac{1}{\mu} + W = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho P_Q}{\lambda(1-\rho)}$$

يمكن حساب التأخير الوسطي لكل زبون في النظام (T) كما يلي:

$$T = \frac{1}{\mu} + W = \frac{1}{\mu} + \frac{P_Q}{m\mu - \lambda}$$

وباستخدام العلاقة: $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$ نحصل أخيرا على ما يلي:

العدد الوسطي للزبائن في النظام (Average number of customers in the system):

يمكن حساب العدد الوسطي للزبائن في النظام بتطبيق نظرية ليتل على علاقة التأخير الوسطي السابقة كما يلي:

$$N = \lambda T = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda P_Q}{m\mu - \lambda}$$

$$N = m\rho + \frac{\rho P_Q}{1-\rho}$$

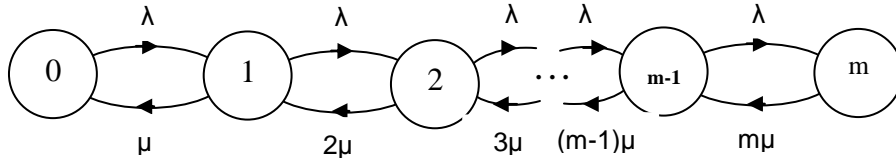
وباستخدام العلاقة $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$ نحصل أخيرا على ما يلي:

4. النموذج M/M/m/m (the M/M/m/m-model):

يتميز النموذج M/M/m/m عن النموذج M/M/m بالسعة المحدودة (الرمز m الأخير الذي يمثل تحديداً

لعدد الزبائن في النظام) وبعدم وجود انتظار في الرتل.

يبين الشكل (6) مخطط الانتقال للنموذج M/M/m/m.



الشكل (6) يبين مخطط الانتقال للنموذج M/M/m/m

يتم التركيز في هذا النظام على احتمال التوقيف (blocking probability) في الحالة المستقرة التي تكون فيها

جميع الدارات مشغولة وبالتالي يتم رفض ضياح أي وصول جديد.

• **احتمال الحالة المستقرة (steady-state probability):**

يمكن كتابة معادلات التوازن الشاملة في هذا المخطط كما يلي: $\lambda p_{n-1} = n\mu p_n$; $n = 1, 2, 3, \dots, m$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} p_0 = p_0 \frac{\rho^n}{n!}; \quad n = 1, 2, \dots, m$$

وبالتالي يكون:

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \right]^{-1} = \frac{1}{\sum_{n=0}^m \frac{\rho^n}{n!}}$$

نحصل باستخدام معادلة التطبيع $\sum_{n=0}^m p_n = 1$ على ما يلي:

يعتبر احتمال الضياح (التوقيف) بسبب انشغال جميع المخدمات من أهم مقاييس الأداء في هذا النظام.

• **احتمال الضياح (Loss Probability):**

يمكن حساب احتمال ضياح أي وصول جديد p_m بسبب انشغال جميع المخدمات m من العلاقة التالية:

$$P_{lost} = P_m = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m / m!}{\sum_{n=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n / n!} = \frac{\frac{\rho^m}{m!}}{\sum_{n=0}^m \frac{\rho^n}{n!}}$$

تعرف هذه المعادلة بما يسمى صيغة إرلانغ B (Erlang B formula) وهي تستخدم بشكل واسع لتقييم

احتمال التوقيف في النظم الهاتفية.

5. النموذج $M/M/\infty$ (The $M/M/\infty$ -model):

نحصل من معادلات التوازن الشاملة عندما يكون عدد المخدمات $m = \infty$ في النظام $M/M/m$ على ما يلي:

$$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} p_0; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

وبالتالي يكون:

$$p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right]^{-1} = e^{-\lambda/\mu} = e^{-\rho}$$

نحصل من شرط التطبيع $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ على ما يلي:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{e^{-\lambda/\mu}}{n!} = p_0 \frac{\rho^n}{n!} = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!} \Rightarrow \text{poisson}; \quad n = 0, 1, \dots$$

تدل العلاقة السابقة على أن عدد الزبائن في النظام في الحالة المستقرة يكون موزعا أسيا بالوسيط $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

العدد الوسطي للزبائن في النظام:

من خواص التوزيع الأسي لعدد الزبائن في النظام يكون العدد الوسطي للزبائن مساويا للوسيط كما يلي:

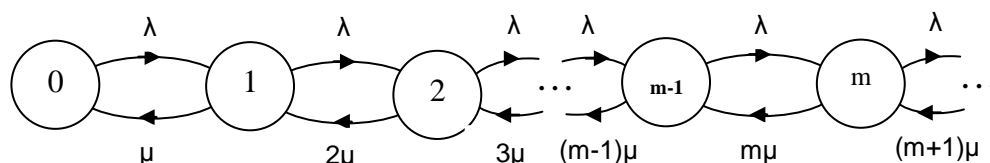
$$N = \frac{\lambda}{\mu}$$

التأخير الوسطي لكل زبون:

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

يتم حساب التأخير الوسطي لكل زبون بتطبيق نظرية ليتل على العلاقة السابقة كما يلي:

يبين الشكل (7) مخطط الانتقال للنموذج $M/M/\infty$.



الشكل (7) يبين مخطط الانتقال للنموذج $M/M/\infty$

سلاسل ماركوف متعددة الأبعاد (Multidimensional Markov Chains):

بالرغم من أن تحليل سلاسل ماركوف المتعددة الأبعاد واستنتاج الحالة المستقرة والتوزيع المستقر

$P(n_1, \dots, n_k)$ هو خارج نطاق هذا البحث إلا أننا سنقوم بإيجاز بتوضيح فكرة تعدد الأبعاد لسلاسل ماركوف وذلك

بهدف تقديم تصور عام حول كيفية توسيع هذا البحث لاحقا لإنشاء نماذج ترتيب لتحويل الشبكات المعاصرة التي تقوم

بتقديم أكثر من نوع من الزبائن.

لقد تم في هذا البحث فرض وجود نوع واحد من الزبائن بحيث يمكن وصف الحالة بواسطة عدد الزبائن في

النظام غير أنه في شبكات البيانات المعاصرة توجد أنواع مختلفة من الزبائن لكل نوع خصائصه الإحصائية لعمليات

الوصول والخدمة.

فإذا فرضنا وجود خط إرسال يتألف من m دارة مستقلة لها ساعات متساوية ووجود نوعين من عمليات الوصول

(جلسات في نظام تبديل الدارات) بمعدلين λ_1 و λ_2 بحيث يتم توقيف الجلسة (session) وضياها إذا كانت كل

الدارات مشغولة حين الوصول وإلا يتم توجيهها إلى أية دارة حرة وبحيث تكون أزمدة الخدمة (أزمدة الحجز) لكل نوع

من الجلسات موزعة أسيا بمتوسطين $\frac{1}{\mu_1}$ و $\frac{1}{\mu_2}$ على الترتيب.

نلاحظ أولاً أنه إذا كانت $\mu_1 = \mu_2$ فإنه يتعذر تمييز نوعي الجلسات ويمكن في هذه الحالة نمذجة النظام بواسطة الرتل $M/M/m/m$ بمعدل وصول $\lambda_1 + \lambda_2$ وتكون الحالة مساوية للعدد الكلي للدارات المشغولة ويعطى عندئذ احتمال التوقيف P_m بواسطة صيغة إيرلانغ B الموضحة سابقاً في هذا البحث.

من جهة أخرى إذا كانت $\mu_1 \neq \mu_2$ فإن العدد الكلي للدارات المشغولة عندئذ لا يحدد السلوك الإحصائي المستقبلي للرتل.

ومن المهم في هذه الحالة معرفة عدد كل نوع من الجلسات لطالما أن مدة الجلسة (زمن الحجز) تعتمد بشكل إحصائي على نوعها، وبالتالي فإننا بحاجة إلى نموذج سلسلة ماركوف ثنائية البعد (n_1, n_2) حيث n_i يمثل عدد الدارات المشغولة من قبل الجلسة من النوع i من أجل $i = 1, 2$.

يمكن بشكل عام كتابة معادلات التوازن الشاملة للتوزيع المستقر من أجل السلاسل المتعددة الأبعاد كما يلي:

$$P(n_1, n_2), \quad n_1 \geq 0, \quad n_2 \geq 0, \quad n_1 + n_2 \leq m$$

تكون عادة هذه السلاسل أصعب للتحليل من السلاسل الوحيدة البعد المستخدمة في هذا البحث.

النتائج والمناقشة:

عرض فيما يلي بهدف توضيح النتائج والمقارنة جدولين يتضمن الأول (الجدول (3)) الصيغ المستنتجة لحساب مقاييس الأداء المختلفة للنماذج $M/M/1$ ، $M/M/m$ ، و $M/M/\infty$ ويتضمن الثاني (الجدول (4)) صيغة احتمال الضياح المستنتجة لكل من النموذجين $M/M/1/K$ و $M/M/m/m$.

الجدول (3) يبين الصيغ المستنتجة لحساب مقاييس الأداء المختلفة لنماذج التأخير الماركوفية الأساسية

النموذج $M/M/\infty$	النموذج $M/M/m$	النموذج $M/M/1$	البيان
$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$	$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1 - p_0$	ρ
$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!}}$	$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} \right]^{-1}$	$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$	p_0
$p_n = p_0 \frac{\rho^n}{n!}$	$p_n = \begin{cases} \frac{(m\rho)^n}{n!} p_0; & 0 \leq n \leq m \\ \frac{m^m \rho^n}{m!} p_0; & n > m \end{cases}$	$p_n = \rho^n (1 - \rho); \quad n = 0, 1, \dots$	p_n
$N = \frac{\lambda}{\mu}$	$N = m\rho + \frac{\rho P_Q}{1-\rho}$	$N = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	N
0	$N_Q = \frac{\rho P_Q}{1-\rho}$	$N_Q = \lambda W = \frac{\rho^2}{\mu - \lambda}$	N_Q
0	$W = \frac{\rho P_Q}{\lambda(1-\rho)}$	$W = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$	W
$T = \frac{1}{\mu}$	$T = \frac{1}{\mu} + W = \frac{1}{\mu} + \frac{P_Q}{m\mu - \lambda}$	$T = \frac{1}{\mu - \lambda}$	T

الجدول (4) يبين صيغة الضياع (التوقيف) المستنتجة لكل من نمودي الضياع الماركوفيين M/M/m/m و M/M/1K

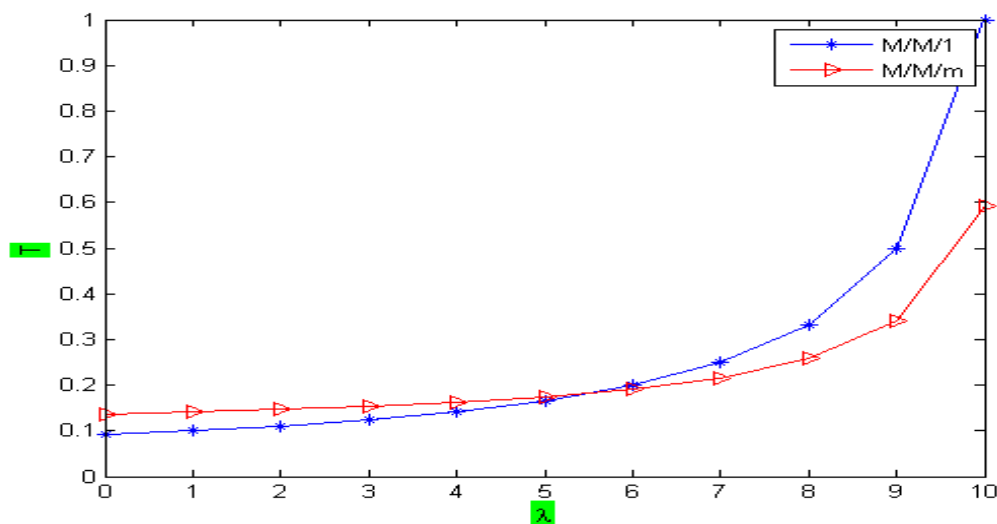
النموذج M/M/m/m	النموذج M/M/1/K	البيان
$P_{Loss}(P_{Blocking}) = P_m = \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^m \frac{\rho^n}{n!}$	$P_{Loss}(P_{Blocking}) = P_K = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \rho^K$	$P_{Loss} (P_{Blocking})$

كما أننا نعرض باستخدام برمجيات الماتلاب (MATLAB) نتائج اختبار التأخير الوسطي (T) مقابل (λ) لكل من النموذجين M/M/1 و M/M/m باختيار مجموعة البارامترات التالية:

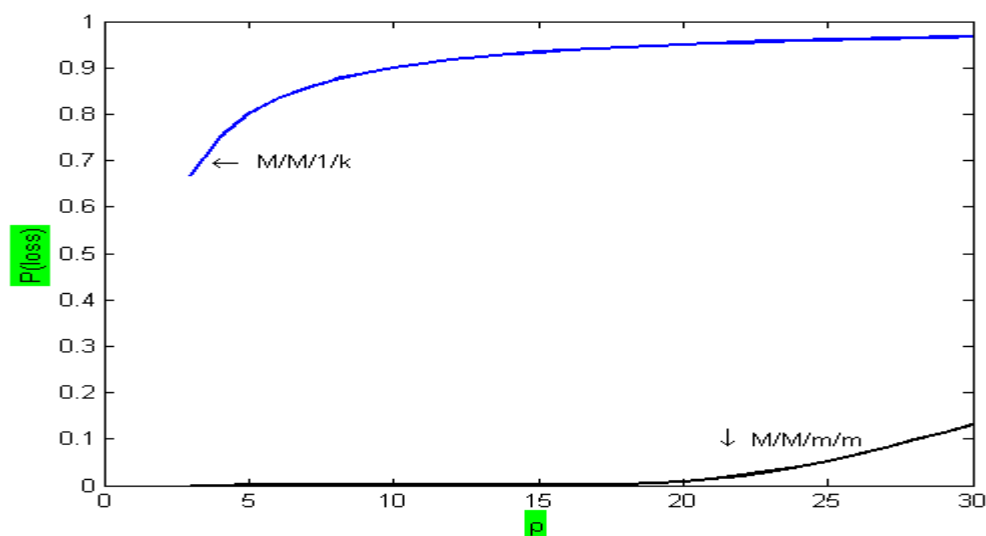
μ = 11 ، m = 15 ، P_Q = 0.5 ، وتغير λ من 0 إلى 10 (الشكل (8))، بالإضافة إلى نتائج اختبار

(P_{Loss}) مقابل (ρ) لكل من النموذجين M/M/1/K و M/M/m/m باختيار مجموعة البارامترات التالية:

μ = 3 ، m = K = 30 ، وتغير ρ من 0 إلى 30 (الشكل (9)).



الشكل (8) يبين التأخير (T) مقابل معدل الوصول (λ) لكل من النموذجين M/M/1 و M/M/m



الشكل (9) يبين احتمالات الضياع لكل من النموذجين M/M/1/K و M/M/m/m مقابل الحمل

يبين الشكل (8) أن أداء النموذج $M/M/1$ يكون أفضل من النموذج $M/M/m$ عند القيم الصغيرة لمعدل الوصول وحتى قيم محددة حيث يتم عندها تقديم أداء متماثل من قبل كل من النموذجين وبعدها يبدأ النموذج $M/M/m$ بتقديم أداء أفضل بمفهوم التأخير الوسطي لكل زبون.

كما يبين الشكل (9) الأداء الأفضل للنموذج $M/M/m/m$ على النموذج $M/M/1/K$ بمفهوم احتمال الضياع. ونلاحظ من الجدول (3) بأنه في النموذج $M/M/1$ يزداد N بزيادة ρ ، وعندما ينتهي ρ إلى الواحد ($\rho \rightarrow 1$) ينتهي N إلى اللانهاية ($N \rightarrow \infty$) ويكون النظام في هذه الحالة غير مستقر، وعندما يكون $\rho > 1$ لا يمكن للمخدم أن يلبي معدل الوصول وعندها يزداد طول الرتل بدون حدود.

في النظام $M/M/m$ يوجد m مخدم ويتم فيه توجيه الزبون الموجود في مقدمة الرتل إلى أي مخدم متاح وعند انشغال جميع المخدمات m يتم إجبار أي وصول جديد على الانتظار في الرتل محاولاً باستمرار إيجاد دارة حرة ولذلك يعتبر احتمال انشغال جميع المخدمات m مقياساً مهماً من مقاييس الأداء في هذا النظام.

يتميز النموذج $M/M/m/m$ عن النموذج $M/M/m$ بالسعة المحدودة (الرمز m الأخير الذي يمثل تحديداً لعدد الزبائن في النظام) وعدم وجود انتظار في الرتل، فعند انشغال جميع المخدمات m فإن الزبون الجديد لا يدخل النظام بل إنه يضيع ولا يعيد المحاولة من جديد، بينما يكون الفرض في النموذج $M/M/m$ أن المكالمات المتوقفة تعيد المحاولة باستمرار لإيجاد دارة حرة وقبول الخدمة.

نناقش الآن التأخير الوسطي (T) باستخدام النموذج $M/M/1$ في حالتين:

الحالة الأولى: وجود m نظام منفصل من الأرتال $M/M/1$ لكل رتل معدل وصول λ ومعدل خدمة μ وعندها من الجدول (3) نجد بأن التأخير الوسطي لكل زبون يعطى بالعلاقة التالية:

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

والتي يمكن كتابتها بعد تقسيم الصورة والمخرج على μ كما يلي:

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1/\mu}{1 - \rho}$$

الحالة الثانية: دمج هذه النظم (دمج m نظام من النموذج $M/M/1$) بنظام واحد مركب بحيث يكون معدل

$$\rho' = \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{m\lambda}{m\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho \quad \text{و} \quad \mu' = m\mu \quad \text{وعندها يكون لدينا ما يلي:}$$

$$T' = \frac{1/\mu'}{1 - \rho'} = \frac{1/m\mu}{1 - \rho} = \frac{1}{m} T$$

ويكون في هذه الحالة التأخير الوسطي لكل زبون كما يلي: أي أن التأخير أقل من الحالة الأولى بمقدار m مرة، وينشأ هذا الأداء المحسّن للنظام المركب من الاستخدام الشامل المحسّن للمخدمات، ففي النظم المنفصلة يمكن أن تكون بعض الأرتال فارغة والبعض الآخر غير فارغة، وبالتالي يمكن أن تكون بعض المعالجات (المخدمات) متوقفة عن العمل بالرغم من وجود أعمال في النظام يجب إنجازها، أما في النظام المركب فإن المعالج سيبقى مشغولاً ما دامت الزبائن موجودة بانتظار التخدم.

الاستنتاجات والتوصيات:

تم التوصل في هذا البحث إلى عدة استنتاجات أساسية يمكن إيجازها كما يلي:

1. يكون أداء النموذج $M/M/1$ أفضل بقليل من النموذج $M/M/m$ عند القيم الصغيرة لمعدل الوصول بينما يقدم النموذج $M/M/m$ الأداء الأفضل بعد القيمة $\lambda = 6$ وبين القيمتين $\lambda = 5$ و $\lambda = 6$ يكون الأداء متماثلاً تقريباً.

2. يمكن دمج عدة نظم من النموذج $M/M/1$ بنظام واحد مركب لتحسين الأداء وتقليل التأخير.

3. في النموذج $M/M/\infty$ لا يوجد انتظار في الرتل لوجود عدد لا نهائي من المخدمات، وبالتالي فإن التأخير الوسطي (T) يساوي زمن الخدمة الوسطي ($\frac{1}{\mu}$).
 4. تدل مخططات انتقال الحالة دلالة واضحة على بنية نظام الترتيل من حيث الحالات والانتقالات .
 5. يتم استخدام سلاسل ماركوف لتحليل سلوك نماذج الترتيل في الحالة المستقرة وذلك لأن استخدام هذه السلاسل يغني عن معرفة التوزيع الاحتمالي المشترك لكل المتغيرات في آن واحد ويكفي لتوصيفها معرفة التوزيع الاحتمالي المشروط أو المشترك لمتغيرين عشوائيين متعاقبين.
 6. يتم استخدام نظرية الاحتمالات لاستنتاج احتمالات الحالة المستقرة وحساب مقاييس الأداء المختلفة لنماذج الترتيل.
 7. يتطلب إنشاء نماذج ترتيب القيام بالعديد من الفرضيات المبسطة لمقاربة النظام وما يؤخذ على نظرية الترتيل كثرة هذه الفرضيات أحيانا.
 8. تسمح نماذج الترتيل الماركوفية بحساب العدد المثالي لقنوات الشبكة (المخدمات) من أجل قيم معينة للتأخير والضياح كما تسمح بتقييم الأداء وضمان جودة الخدمة المطلوبة من قبل الشبكة.
- وإننا بهدف التوسع في تحليل التأخير والضياح في شبكات البيانات المعاصرة نقترح التوصيات التالية:**
1. توسيع هذا البحث ليشمل نماذج ترتيب أخرى تعتمد على سلاسل ماركوف متعددة الأبعاد لمقابلة تعدد أنواع المستخدمين للتطبيقات المختلفة في شبكات البيانات.
 2. توسيع هذا البحث من أجل تصميم نماذج ترتيب أخرى مناسبة لتقييم الأداء وضمان جودة الخدمة لتطبيقات الزمن الحقيقي في شبكات البيانات التي فيها أنواع مختلفة من حركات السير.

المراجع

1. WILLING, A. A Short Introduction to Queuing Theory, Technical University Berlin, Telecommunication Networks Group, July 21, 1999, 1-41.
2. ADAN, I; RESING, J. Queuing Theory, Department of Mathematics and Science, Eindhoven University of Technology, February 28, 2002, 11-48.
3. KAMOUN, F. Performance analysis of a non-preemptive priority queuing system subjected to a correlated Markovian interruption process, College of Information Technology, University of Dubai, Computer and Operating Research 35, 2008, 3969-3988.
4. Alberto ,L,G; Indra, W, Communication Networks- Fundamental Concepts and Key Architectures, University of Toronto, printed in the USA, 2000, 815-835.
5. PAUL, K. Analysis of Complex Queuing Networks by Decomposition, University of Stuttgart, Federal Republic of Germany, ITC8, 236/1-236/8.
6. KAUR, P. Markovian Queuing Model for Dynamic Spectrum Allocation in Centralized Architecture for Cognitive Radios, IACSIT International journal of Engineering and Technology, Vol.3, No.1, February 2011, 96-101.
7. LEIZAROWITZ, A; STANOJEVIC, R; SHORTEN, R. Tools for the analysis and design of communication network with Markovian Dynamics, Downloaded from IEEE Xplore, January 12, 2010, 506- 519.
8. Striegel, A; Manimaran, G. Packet scheduling with delay and loss differentiation,

- Dependable Computing and Networking Laboratory, Department of Electrical and Computer Engineering, Iowa State University, Ames, IA 50011, USA, 2001, 21-31.
9. Hisashi, K; Brian, L. Generalized Loss models and Queuing-Loss Networks, Department of Electrical Engineering, school of Engineering and Applied Science, Princeton University, Princeton, USA, 2002, 97-112.
 10. THOMAS, A; BARBARA, J; VERENA, W. Formalisms for Specifying Markovian Population Models, Saarland University, Germany, 2009, 3-23.
 11. LEE, H; CHO, D. Multi-User Queuing Analysis Considering AMC for Wireless VoIP Services, IEEE, 2009, 1-5.
 12. Rindzevicius, R; Tervydis, P. Performance Analysis of an Unreliable Queuing System with Buffer Threshold Control and a Reserved Channel, Department of Telecommunications, Kaunas University of Technology, Lithuania, 2009, 15-20.