مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (39) العدد (4) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Engineering Sciences Series Vol. (39) No. (4) 2017

Polygonal Complexity Counting Classes

Dr. Nasser A. Nasser*

(Received 27 / 4 / 2017. Accepted 22 / 8 / 2017)

□ ABSTRACT □

In this work we introduce new counting classes defined by special sets of natural number like Triangular, Perfect Square, Pentagonal and generally K-gonal numbers. We shall see that NP is a subclass of all complements of K-gonal classes and all K-gonal classes are subclasses of a class defined by only perfect square numbers.

Keywords: Complexity Classes, Counting Classes, Accept, Nondeterministic Turing Machine , Polygonal Number

***Assistant Professor- Department of Software and Information Systems – Faculty of information engineering Tishreen University- Lattakia- Syria.**

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (39) العدد (4) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Engineering Sciences Series Vol. (39) No. (4) 2017

صفوف التعقيد العدّية المضلعة

د.ناصر علي ناصر *

(تاريخ الإيداع 27 / 4 / 2017. قُبِل للنشر في 22 / 8 / 2017)

□ ملخّص □

في هذا العمل تمّ تعريف صفوف تعقيد عدّية جديدة اعتمادا على مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية كالأعداد المثلثية *3-gonal* والمربعة *4-gonal* والمخمسة*5-gonal* وعموما الأعداد المضلعة *K-gonal numbers* وسنبين أنّ الصف *NP* هو صف جزئي من مجموعة متممات الصف المولد بالمجموعة*K-gonal* وأنّ الصفوف التي تعرفها المجموعات *K-gonal* هي صفوف جزئية من الصف الذي تعرفه مجموعة الأعداد المربعة فقط

الكلمات المفتاحية: صفوف التعقيد، الصفوف العدّية، قبول، حاسبة تورينك اللاحتمية، الأعداد المضلعة

* مدرس – قسم البرمجيات ونظم المعلومات – كلية الهندسة المعلوماتية – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية

مقدمة:

الصفوف العدّية (*Counting Classes*) هي صفوف تعقيد لحاسبة تورينك اللاحتمية يتبع القبول فيها لعدد الطرق الناجحة في شجرة الحساب لحاسبة تورينك لاحتمية تعمل بزمن كثيرة حدود $[1,2,3,4]$:

أول وأشهرصفوف التعقيد الصف *NP[5]* و *coNP* (الصف المكون من متممات مجموعات الصف NP) ومعه ظهرت مسألة($P-NP$)،بعدئذ ظهرت صفوف أخرى مثل *PP*[6] ، *C₌P[7]* و $\oplus P$[8]،ثمّ ظهرت الصفوف العدّية كتعميم لصفوف التعقيد التي يتبع القبول فيها لعدد الطرق الناجحة في شجرة الحساب وظهر مايسمى بنظام القبول:

لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية $A \subseteq IN$ ، نسمي A نظام قبول ونرمز بـ AP لصف التعقيد الذي تحدده A ونعرفه بالعلاقة:

$$L \in AP \leftrightarrow \underset{M}{\vee} L = \{w : accept(M,w) \in A\}$$

حيث M حاسبة تورينك لاحتمية و $accept(M,w)$ ترمز لعدد الطرق الناجحة في شجرة حساب الحاسبة M على كلمة الدخل w

في [3] تمّ تعريف الصفوف العدّية التي يمكن تعريف نظام قبولها باستخدام علاقات الترتيب $=,\geq,>,\neq$ وتبين أنّ الصفوف السابقة يمكن تعريفها بهذه الطريقة:

$$NP = \{x : x > 0\}P$$

$$coNP = \{0\}P$$

$$\oplus P = \{x : x \bmod 2 = 0\}P$$

$$PP = \{(x,y) : x \geq y\}P$$

$$C_{=}P = \{(x,y) : x = y\}P$$

وتم البرهان على أنّ $C_{=}P$ مغلقة بالنسبة لـ $\wedge,\vee$ حيث:

$$A \wedge B = \{a \cap b : a \in A, b \in B\}$$

و $$A \vee B = \{a \cup b : a \in A, b \in B\}$$

إضافة للبرهان على أنّ : $coNP, NP \subseteq PP$ و $coNP \subseteq C_{=}P$

في عام 1990 ظهرت الصفوف $Mod_k P$ *[9,10]* كتعميم لـ $\oplus P$ حيث:

$$Mod_k P = \{x : x \bmod k = 0\}P$$

في[1] تمّ تعريف الصفوف المعرفة باستخدام مجموعة الأعداد الأولية:

$$PrimeP = \{x : x \in prime\}P$$

$$Cmpst_k = \{x : \underset{x_1,..,x_k \in prime}{\vee} x = x_1 x_2 .. x_k\};\ k=1,2,..$$

وتم البرهان على أنّ:

$$NP \subseteq coPrimeP \text{ و } NP \subseteq coCmpst_k P;\ k = 2,3..$$

وكذلك:

$$Cmpst_i P \subseteq Cmpst_{i+1} P$$

أهمية البحث وأهدافه:

نعرف هنا صفوف تعقيد جديدة اعتمادا على الأعداد المضلعة وسندرس العلاقة بينها وبينها وبين الصف NP حيث انّ أهمية البحث تكمنفي علاقة الصفوف المعرّفة مع الصف NP

طرائق البحث ومواده:

نستخدم هنا علاقة الاختصار $\leq_{pol}$ *[3]* لدراسة العلاقة بين الصفوف:

لتكن M_1 ، M_2 حاسبتي تورينك لاحتميتين نعرّف بدايةً جمع حاسبتين M_1+M_2 ومضروب حاسبتين $M_1\times M_2$ كما يلي:

الحاسبة M_1+M_2 تعمل لاحتميا مثل M_1 أو M_2 أما الحاسبة $M_1\times M_2$ تعمل في البداية مثل M_1 فإذا وصلت إلى حالة قبول (نهائية) تعمل من جديد مثل M_2 على نفس الدخل

ومن أجل ثابت $b\in IN$ نعرف الحاسبة $[b]$ حيث أن هذه الحاسبة تعطي لاحتميا b من طرق القبول عند أي كلمة دخل.

وبذلك أصبح بإمكاننا الآن تعريف كثيرة حدود لحاسبة تورينك كما يوضح المثال التالي:

من أجل حاسبة لاحتمية M وكثيرة حدود $p(x)=ax^3+b$ مثلا، نكوّن الحاسبة $p(M)$ كما يلي:

$$p(M)=[a]\times M\times M\times M+[b]$$

1 علاقة الاختصار $\leq_{pol}$:

لتكن $A,B\subseteq IN$ ، نقول عن A أنها قابلة للاختصار على B ونكتب $A\leq_{Pol} B$ إذا وجدت كثيرة حدود $p\in IN[x]$ بحيث يكون $x\in A\leftrightarrow p(x)\in B$

2- مبرهنة:

إذا كان $A\leq_{Pol} B$ عندئذ يكون $AP\subseteq BP$ *[3]*

البرهان:

من أجل الحاسبة M_A نكوّن الحاسبة $M_B=p(M_A)$ عندها يكون:

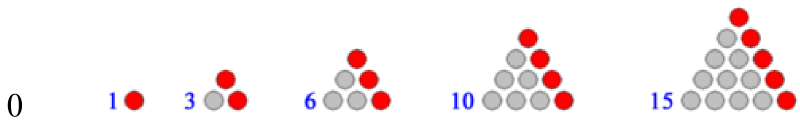
$$accept(M_A,w)\in A\leftrightarrow accept(M_B,w)\in B\leftrightarrow AP\subseteq BP$$

3- الأعداد المضلعة (*Polygonal number*):

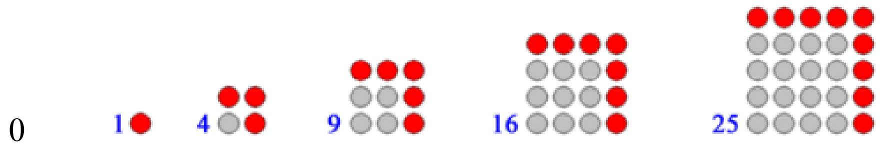
تم تعريف الأعداد المضلعة من قبل العالم الرياضي فرما في القرن السابع عشر:

العدد المضلع من المرتبة k هو عدد يمكن تمثيله كنقاط مرتبة في المستوي على شكل مضلع منتظم عدد أضلاعه k، كما توضح الأمثلة التالية *[11]*:

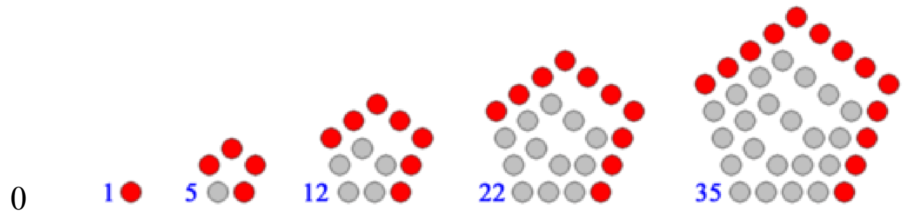
3-1- الأعداد المثلثية *Triangular numbers (3-gonal number)*



3-2- الأعداد المربعة *Square numbers (4-gonal number)*



3-3- الأعداد المخمسة *Pentagonal numbers* (5-gonal number)



3-4- الصيغة العامة للأعداد المضلعة: *[11]*

ليكن k عدد أضلاع الشكل الهندسي للعدد المضلع عندئذ يعطى العدد المضلع من المرتبة k ذو الرقم n بالعلاقة:

$$p_k(n) = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2}; k = 3,4,..; n = 0,1,2..$$

صفوف التعقيد العدّية المضلعة:

نعرف صفوف التعقيد العدّية المضلعة $K-gonalP$ بالشكل:

$$K-gonalP = \{m : \bigvee_{n \in N} m = p_k(n)\}P;\ k = 3,4,..$$

وفي الحالة الخاصة $k = 4$ نطلق على الصف المضلع $K-gonalP$ اسم $SquareP$

سوف نجد أن الصف NP محتوى في الصفوف $coK-gonalP$ وأنّ الصفوف $K-gonalP$ هي صفوف جزئية من الصف $SquareP$

قبل ذلك نقدم المبرهنات المساعدة التالية:

1- مبرهنة مساعدة:

من أجل $x,n \in N$ يكون:

$$2x^2 = \frac{n^2+n}{2} \leftrightarrow x = 0$$

البرهان:

$$2x^2 = \frac{n^2+n}{2} \leftrightarrow$$
$$n^2 + n - 4x^2 = 0$$

ويكون ذلك محققاً إذا وفقط إذا كان المميز $\Delta = 1 + 16x^2$ مربعاً كاملاً وهذا يتحقق تماما عندما $x = 0$

2- مبرهنة مساعدة:

من أجل: $x,n \in N$ يكون:

$$x^2+1=n^2 \leftrightarrow x=0$$

لا تحتاج إلى برهان.

3- مبرهنة مساعدة:

من أجل $k,n,x \;\; N; k>4$ يكون:

$$2(K-2)^3x^2=\frac{(K-2)n^2-(K-4)n}{2} \leftrightarrow x=0$$

البرهان:

$$2(K-2)^3x^2=\frac{(K-2)n^2-(K-4)n}{2} \leftrightarrow$$

$$(K-2)n^2-(K-4)n-4(K-2)^3x^2=0 \leftrightarrow$$

مربع كامل $((2(K-2))^2x)^2+(K-4)^2$

$$\leftrightarrow x=0$$

لأنّ $0<(K-4)^2<2(2(K-2))^2x+1$ عندما $x \in N \setminus \{0\}$ و $k>4$

4- مبرهنة مساعدة*[12]*

من أجل $x,n,s \in N$ يكون:

$$8(k-2)x+(K-4)^2=s^2 \leftrightarrow x=\frac{(k-2)n^2-(K-4)n}{2}$$

البرهان:

$\leftarrow$:

من أجل $x=\dfrac{(K-2)n^2-(K-4)n}{2}$ نجد:

$$8(k-2)x+(K-4)^2=8(k-2)\frac{(k-2)n^2-(K-4)n}{2}+(K-4)^2$$

$$=(2(k-2)n)^2-4(k-2)(K-4)n+(k-4)^2$$

$$=(2(k-2)n-(k-4))^2$$

وهو عبارة عن مربع كامل

$\rightarrow$:

$$8(k-2)x+(K-4)^2=s^2 \rightarrow$$

$$s=2(k-2)n-(K-4) \rightarrow$$

$$8(k-2)x+(K-4)^2=(2(k-2)n-(K-4))^2 \rightarrow$$

$$x=\frac{(k-2)n^2-(K-4)n}{2}$$

5- مبرهنة مساعدة

$$coNP \subseteq K-gonalP;\ \mathrm{k}=3,4,..$$

البرهان:

- من أجل $k=3$ نأخذ كثيرة الحدود $p(x)=2x^2$ عندئذ يكون $x=0 \leftrightarrow 2x^2$ عدداً مثلثياً وفق المبرهنة المساعدة 4-1وبالاعتماد على المبرهنة المساعدة 3-2نجد:

$$coNP \subseteq 3-gonalP$$

- من أجل $k=4$ نأخذ كثيرة الحدود $p(x)=x^2+1$ عندئذ يكون $x=0 \leftrightarrow x^2+1$مربعاً كاملاً وفق المبرهنة المساعدة 4-2 وبالاعتماد على المبرهنة المساعدة 3-2 نجد:

$$coNP \subseteq SquareP$$

- من أجل $k>4$ نأخذ كثيرة الحدود $p(x)=2(K-2)^3x^2$ عندئذ يكون $x=0 \leftrightarrow 2(K-2)^3x^2$ عدد مضلعمن المرتبة kوفق المبرهنة المساعدة 4-3 وبالاعتماد على المبرهنة المساعدة 3-2 نجد:

$$coNP \subseteq k-gonalP;\ k=5,6,..$$

6-مبرهنة:

$$1-\ \ NP \subseteq coK-gonalP;\ \mathrm{k}=3,4,..$$

$$2-\ \ K-gonalP \subseteq SquareP;\ \mathrm{k}=3,4,..$$

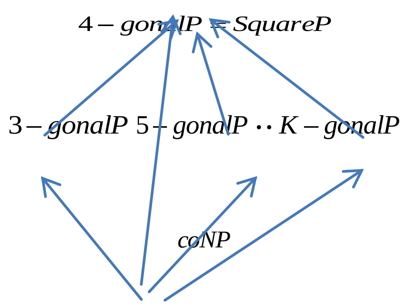
البرهان:

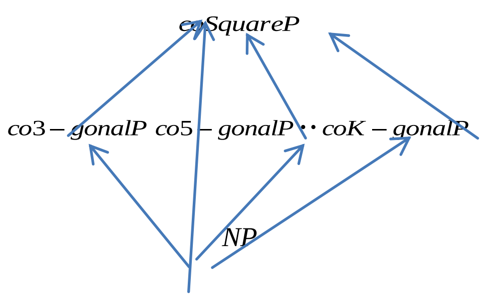
1- ينتج من المبرهنة المساعدة 4-5

2- نأخذ $p(x)=8(k-2)x+(K-4)^2$ عندئذ وبالاعتماد على المبرهنة المساعدة 4-4 نجد أنّ $p(x)$ مربع كامل $x \leftrightarrow$ عدد مضلع من الرتبة k وبالاعتماد على المبرهنة المساعدة 3-2 نجد المطلوب.

الاستنتاجات والتوصيات:

تتلخص النتائج في المخططين التاليين:





وتأتي أهمية هذه النتائج من خلال علاقتها بالصف *NP* وندرة العلاقات المعروفة بين صفوف التعقيد الشهيرة.

نوصي بدراسة العلاقات بين الصفوف $k-gonalP$ والعلاقة بينها وبين صفوف التعقيد الشهيرة باستخدام الاوراكل(Oracle)

المراجع:

[1] NASSER N. A. " *Counting Classes Defined by Prime Numbers*" Tishreenuniversity journal for research and scientific ISSN:2079-3057 Volume 39 Issue 3 2017

[2] BÜRGISSER P. ; CUCKER F. "*Counting complexity classes for numeric computations II: Algebraic and semialgebraic sets*", 22, Issue 2, April 2006, 147–191

[3] GUNDERMANN T.; NASSER N. A., WECHSUNG G.; "*A survey on counting classes";* In Proceedings, Fifth Annual Structure in Complexity Theory Conference, pages 140-153, Barcelona, Spain, 8-11 July 1990. IEEE Computer Society Press

[4] ARVIND V., VIJAYARAGHAVAN T. C. "*Classifying Problems on Linear Congruences and Abelian Permutation Groups Using Logspace Counting Classes*", computational complexity March 2010, Volume 19, Issue 1, 57–98

[5] COOK *S. A. "The complexity of theorem-proving procedures", in Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, STOC '71, ACM, New York, NY, USA, 1971, pp. 151–158.*

[6] KOBLER J., SCHONING U., TORAN J.AND TODA S., "*Turing Machines with few accepting computations and low sets for PP*"; In Proceedings of the 4th Structure in Complexity Theory Conference 1989, 208-216.

[7] FORTNOW L.AND REINGOLD N., "*PP is closed under truth-table reductions*"; Proceedings of the 6th Annual Conference on Structure in Complexity Theory 1991,13-15.

[8] PAPADIMITRIOU C. AND ZACHOS S. "*Two remarks on the power of counting*" In Proceedings of the 6th GI-Conference on Theoretical Computer Science, volume 145 ofLNCS, Springer, 1983, 269–276.

[9] BEIGEL R., GILL J., HERTRAMPF U., "*Counting classes Thresholds, parity, mods, and fewness*". In Proceedings 7th Symposium on Theoretical Aspects of ComputerScience, Lecture Notes in Computer Science 415 (1990), 49-57.

[10] HERTRAMPF U. *"Relations among MOD-classes*". In Theoretical Computer Science74 , 1990, 325-328.

[11]ttp://mathworld.wolfram.com/FermatsPolygonalNumberTheorem.html

[12]http://mathworld.wolfram.com/PolygonalNumber.html