УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Иван З. Лазаревић

УОПШТЕЊА ШАТЕНОВИХ НОРМИ ГРАФОВА И КОМБИНАТОРНЕ ПРИМЕНЕ

докторска дисертација

Београд, 2022.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Ivan Z. Lazarević

EXTENDED SCHATTEN NORMS OF GRAPHS AND COMBINATORIAL APPLICATIONS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2022.

Ментор:

др Владимир Божин, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

академик Миодраг Матељевић, редовни професор у пензији
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Данко Јоцић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Зоран Станић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Александра Ерић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Грађевински факултет

Датум одбране:

Посвећено породици

Наслов дисертације: Уопштења Шатенових норми графова и комбинаторне примене

Сажетак: У овој докторској дисертацији добијени су неки резултати у области теорије графова и њених примена. У првој глави тезе је дат преглед основних појмова и теорема из комбинаторне теорије графова, спектралне теорије графова, и о случајним графовима и расподели њихових сопствених вредности. Највише је разматрана матрица суседства графа и одређене особине њеног спектра. Енергија графа је збир апсолутних вредности сопствених вредности графа.

Шатенове $p-$ норме представљају збир $p-$тих степена сингуларних вредности графа степенован са $\frac{1}{p}$, специјалан случај Шатенове норме за $p = 1$ је баш енергија графа. У трећој глави ове дисертације има највише оригиналних научних доприноса. Доказана је хипотеза Никифорова везана за Шатенове норме графа када је $p > 2$. Прво је показано да хипотеза важи за одређене класе графова (стабла и јако регуларне графове код којих се достиже максимална енергија графа). Потом је хипотеза доказана и у општем случају. Помоћна теорема у доказу ове хипотезе је такође оригиналан резултат, а даје горње ограничење за збир квадрата највећих k сингуларних вредности графа. Може од користи у даљим истраживањима бити и последица ове теореме која даје горње ограничење збира квадрата две највеће сингуларне вредности. У одељку 3.3 наведена је оригинална теорема која приказује асимптотско понашање спектра а самим тим и енергије комплементног графа за велике вредности n. У одељку 3.4 је израчуната средња вредност $p-$тих степена сингуларних вредности случајног графа и добијено горње ограничење за геометријску средину сингуларних вредности случајног графа.

Последња глава приказује везу комбинаторне теорије графова са универзалном алгебром и математичком логиком. Централни део ове главе је оригиналан и краћи доказ познате теореме која решава хипотезу дихотомије за CSP проблем на неоријентисаним графовима.

Кључне речи: Енергија графа, сопствене вредности, сингуларне вредности, Шатенове норме, случајан граф, CSP проблем.

Научна област: математика

Ужа научна област: примењена математика

УДК број:

Dissertation title: Extended Schatten norms of graphs and combinatorial applications

Abstract: In this doctoral thesis we obtained some results in graph theory and its applications. In the first chapter, we give the review of basic notions and theorems of combinatorial theory of graphs, spectral theory of graphs, random graphs and distribution of their eigenvalues. The most detailed consideration is given to adjacency matrix and properties of its spectrum. In particular, in this dissertation we study Energy of graphs and generalizations of it. Energy of graph is the sum of absolute values of eigenvalues of a graph.

Schatten norms of graphs represent p-th degree norm of singular values of graph, and the special cases of this norm for $p = 1$ corresponds to the Energy of graph. In chapter three of this dissertation we are given the most original scientific contribution. We prove the conjecture of Nikiforov about Schatten norms of graphs when $p > 2$. First we prove that conjecture is true for some special classes of graph (for trees and strongly regular graph with maximal energy). After that, we prove the conjecture in the general case. Auxiliary theorem obtained in the proof of this conjecture is also an original result which gives a sharp upper bound of sum of quadratic of the largest k singular values of graph. A corollary of this theorem which gives an upper bound for sum of squares of the biggest two singular values of graph can be useful in further research. In the subsection 3.3 we give an original theorem about asymptotic properties of spectrum and thus energy of complement graph for a large values of n. In the subsection 3.4 we calculate a mean of p-th degree of singular values and upper bound of geometric mean of almost all graphs.

The last chapter shows relation between combinatorial theory of graphs with universal universal algebra and mathematical logic. The central part of this chapter is original and shorter proof of an important theorem which solves a dichotomy conjecture for CSP problem on undirected graphs.

Keywords: Energy of graph, eigenvalues, singular values, Schatten norms, random graph, CSP problem.

Research area: mathematics

Research sub-area: applied mathematics

UDC number:

Садржај:

Увод

Предмет ове докторске дисертације је теорија графова и њене примене и везе са другим гранама математике. Посебна пажња је посвећена својствима спектра матрице суседства графа.

Прва глава је подељена на три дела. У првом делу дате су дефиниције основних појмова из комбинаторне теорије графова као и неке најважније теореме. У другом делу је дат увод у спектралну теорију графова, грану математике која повезује структуру графа са одређеним својствима њему придружене матрице. На почетку су набројане матрице које се могу придружити графу, а онда посебно место заузима матрица суседства графа и својства њеног спектра. Наведени су познати спектри за неке графове. На крају поглавља је дата теорема која је позната као мин-макс карактеризација сопствених вредности матрице и њене последице које имају значајну примену у овом раду, то су Кошијева interlacing теорема, Вејлова теорема, и новији резултат до ког су дошли Ван Ву и Теренс Тао. Наведене су две теореме Перон- Фробенијуса које дају занимљива својства спектра неких матрица које имају примену у теорији графова. Трећи део је посвећен случајним графовима и случајним матрицама. Уведен је појам случајне матрице и расподеле њених сопствених вредности. На почетку поглавља дате су неке дефиниције из теорије вероватноће да би се лакше читао даљи текст. Затим је уведена Вигнерова расподела сопствених вредности случајне матрице и дат је доказ Вигнерове теореме методом момената. За тај доказ је потребан низ помоћних тврђења, већина је дата са доказима. Затим је објашњено како се та теорема може односити на случајну матрицу која је матрица суседства неког случајног графа. У последњем делу поглавља наведени су резултати који унапређују овај Вигнеров резултат тј. теореме које доказују конвергенцију у вероватноћи и скоро сигурну конвергенцију.

Друга глава се састоји из два одељка, први је посвећен Адамаровим матрицама, а други теорији оптималних дизајна. Обе ове теме тичу се достизања максималних вредности детерминанте. У одељку 2.1 је дат преглед основних појмова и теорема о Адамаровим матрицама које ће касније имати везу са проблемом израчунавања максималне енергије графа. Наведена је и чувена Адамарова хипотеза која још увек није решена. Један део одељка посвећен је и одређивању максималне детреминанте. Један од доприноса овог рада је и оригиналан резултат у коме је израчуната горња оцена геометријске средине сингуларних вредности случајног графа, то је теорема из самосталног рада аутора [41]. У овом одељку је формулисана теорема која даје горње оцену детерминанте матрице случајног графа, која је директна последица поменутог резултата. У одељку 2.2 о оптималним дизајнима дат је опис линеарног регресионог модела и теорема Гаус-Маркова. Касније су уведени појмови дизајна, дате су неке помоћне леме из линеарне алгебре, а централно место поглавља је теорема еквиваленције која је дата са доказом. На крају је наведен пример који показује везу између оптималних дизајна и Адамарових матрица.

Трећа глава садржи највише оригиналних резултата и научних доприноса ове тезе. Поменути оригинални резултати су из радова [41], [9], [42], при чему је први рад самосталан рад аутора ове дисертације, а на друга два је коаутор са ментором. Први део треће главе посвећен је проблему енергије графа. Енергија графа представља збир апсолутних вредности сопствених вредности графа. Дата је веза са Хукеловом теоријом у хемији. Ова област се убрзано развија, објављен је велики број радова на ову тему у последњих двадесетак година. Интересантно је да је појам енергије графа увео српски научник, Иван Гутман. Наведени су неки резултати који представљају доња и горња ограничења за енергију графа. Најзначајнији и најцитиранији резултат је горње ограничење Кулена и Мултона које износи $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$. Ова вредност се достиже за јако регуларне графове са параметрима $\left(n, \dfrac{n+\sqrt{n}}{2}, \dfrac{n+2\sqrt{n}}{4}, \dfrac{n+2\sqrt{n}}{4}\right)$. Такође је дата веза између матрице суседства графа који има максималну енергију и Адамарове матрице. Изведена је и објашњена и Кулсонова интегрална формула за израчунавање енергије графа.

Одељак посвећен нормама матрице, а посебно Шатеновим нормама је 3.2. На почетку је дат преглед основних појмова и набројана су најважнија својства матричних норми. Затим су наведени познати резултати о својствима Шатенових норми графа, нејвећи део тих резултата су тврђења Владимира Никифорова. Посебно бих истакао теорему која је уопштење важног резултата Кулена и Мултона и теорему која даје вредности Шатенових норми случајног графа.

Шатенове норме представљају уопштење енергије графа. Наведена је и хипотеза коју је поставио Никифоров за Шатенове норме када је $p > 2$, та хипотеза је овде решена и то је један од највећих доприноса ове тезе. Ова хипотеза каже да од свих неоријентисаних графова без петљи, са n чворова највећу вредност Шатенове норме за $p > 2$ има комплетан граф. Пошто је познат спектар комплетног графа та хипотеза се претвара у доказивање одређене неједнакости.

Пре него што је доказана у општем случају показано је да важи у три специјална случаја и то: за графове код којих је p паран број, за поменуте јако регуларне графове код којих се постиже максимална енергија и за стабла. Све три наведене теореме су оригинални резултати аутра тезе у раду [41].

Потом је доказано да хипотеза важи и у општем случају. Она је последица једне леме из математичке анализе која је у вези са достизањем условног максимума једне реалне функције са n промењливих и још две оригиналне теореме. Прва теорема даје горње ограничење збира квадрата k највећих сингуларних вредности графа (наведена је и њена последица горње ограничење за збир квадрата две највеће сингуларне вредности), ова теорема је такође оригиналан резултат. Друга теорема је једно уопштење Шатенових p-норми и из ње се директно изводи решење поменуте хипотезе. Ове две теореме и лема су оригинално формулисане и доказане и раду [9].

У одељку 3.3 дата је једна оригиналана теорема, из рада аутора ове тезе са ментором [42], која приказује асимптотско понашање енергије комплементног графа за велике вредности n, у чијем се доказу користи већ споменута Вејлова теорема.

У одељку 3.4 наведени су оригинални резултати о особинама случајних графова, а то су израчуната вредност средина p-тих степена сингуларних вредности случајног графа за $p \in (0,1)$ и дата горња оцена вредности геометријске средине сингуларних вредности случајног графа. Приликом рачунања ових резултата користи се једна теорема Никифорова која говори о Шатеновим нормама случајног графа. Обе ове теореме су у оригиналу формулисане и доказане у самосталном раду аутора, [41].

У четвртој глави су дате неке комбинаторне примене теорије графова. Ова глава се састоји од два одељка. У првом одељку приказан је увод у проблем задовољења услова (Constraint Satisfaction Problem), скраћено CSP, дате су све три дефиниције овог проблема. Затим је наведена хипотеза дихотомије која је више од 20 година била предмет пажње великог броја математичара а која је решена 2017. године.

Посебно је занимљив приступ проблему задовољења услова преко неоријентисаних графова, који су главна тема ове дисертације, тако да је томе посвећена посебна пажња у другом делу четврте главе.

У одељку 4.1 дефинисано је H-бојење неоријентисаног графа G и објашњено да је то еквивалент CSP проблема. Наведено је решење хипотезе дихотомије за неоријентисане графове, то је познат резултат чешких математичара Хела и Нешетрила из 1990. године. Поменута теорема каже да је проблем H-бојења за бипартитне графове решив у полиномијалном времену, а за небипартитне NP-комплетан. Наведен је један једноставнији доказ од оригиналног. Поменути доказ је из рада [8], где је аутор ове тезе коаутор са ментором. У доказу се користе неке конструкције из оригиналног рада Хела и Нешетрила али има мање различитих случајева и графови имају мањи број темена. Поента је да се небипартитни граф који је улаз индикаторским конструкцијама сведе на граф који је 3-обојив (познато је да је проблем 3-бојења NP-комплетан). На крају су дата два примера, који служе да илуструју шта је рађено у доказу, први граф има 19, а други 27 темена. Оба графа из примера имају четири битна својства која се постижу у једном помоћном тврђењу пре саме теореме, а нису 3-обојиви.

Глава 1

Основи теорије графова

1.1 Основи комбинаторне теорије графова

Теоја графова је једна од највише примењиваних области математике у другим дисциплинама науке. Термин граф први је употребио француски математичар Силвестер у 19. веку, али овај термин улази у општу употребу тек 1936. године када је објављена монографија Конинга, професора на Великој техничкој школи у Будимпешти. Пре тога су се графови примењивали у неким проблемима али није развијена права математичка теорија. Међу најстаријим проблемима који се тичу графова је проблем кенинсбершких мостова који је постављен још давне 1736. године. Питање је било да ли се може прећи преко свих 7 мостова а да се сваки пређе тачно једном. Слично питање друштву постављају деца у нижим разредима основне школе, а то је да ли неку фигуру могу да нацртају једним потезом оловке. Проблем кенинсбрешких мостова решио је чувени швајцарски математичар Леонард Ојлер. Биће касније речи о томе шта је Ојлеров пут у графу. На почетку овог поглавља дефинисаћемо основне појмове из теорије графова. Постоји много дефиниција графа које су међусобно еквивалентне.

Дефиниција 1.1.1. *Нека је V непразан скуп и E бинарна релација у V. Уређен пар $G = (V, E)$ се назива граф. Елементи скупа V називају се чворови (понекад врхови, темена) графа, а елементи скупа E гране (ивице) графа.*

Уколико је релација E симетрична граф је неоријентисан, а уколико је релација E антисиметрична ради се о оријентисаном графу.

Према дефиницији је јасно да граф можемо лако нацртати, чворове графа представљамо тачкама а гране графа непрекидним линијама. Уколико се ради о оријентисаном графу стављамо стрелице усмерене на одговарајућу страну, у зависности који чвор је са којим у релацији, или некад у оба смера. Код неоријентисаних графова би те стрелице биле на свакој грани окренуте у оба смера па се у општем случају изостављају. Грана која повезује чвор са самим собом зове се **петља**. Некада између два чвора постоји више грана (код оријентисаних графова чак више са стрелицом у истом смеру), овакви графови се зову мултиграфови. Такође, граф је коначан уколико је скуп V коначан, а граф је бесконачан уколико је скуп V бесконачан. За чворове графа који су спојени граном кажемо да су **суседни чворови**, они су за ту грану крајеви. Уколико је чвор један од крајева гране каже се да су тај чвор и та грана инцидентни.

Граф $H(U, S)$ је подграф графа $G(V, E)$ уколико је $U \subset V$ и $S = E \cap U \times U$. То јест подграф графа се добија када се разматра неки подскуп његових чворова и гране међу њима, а из графа се уклоне сви остали чворови и гране инцидентне са уклоњеним чворовима. Делимични или парцијални граф графа $G(V, E)$ назива се сваки граф $H(V, T)$ при чему је $T \subset E$. Делимични граф подграфа назива се **делимични подграф** датог графа.

Графови имају велику примену у електроници (струјна кола), саобраћају, хемији, програмирању, биологији и другим дисциплинама науке.

Степен чвора је број суседа тог чвора. Код оријентисаних графова се дефинишу такозвани улазни (број грана које улазе у тај чвор) и излазни (број грана које се стичу у том чвору) степен чвора. Грана која садржи чвор степена један зове се **висећа грана**, а чвор степена један се зове **висећи чвор**. У овом раду су главна тема коначни неоријентисани графови без петљи и вишеструких грана, који се понекад зову и прости графови. Тако да се наредни термини уводе само за овакве графове.

Шетња у графу G је низ $W = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, ..., e_n, v_n$, чији су чланови наизменично чворови v_i и гране e_i графа G. Каже се да је v_0 почетак а v_n крај шетње. Ако су гране $e_1, ..., e_n$ у шетњи W међусобно различите, кажемо да је W **стаза**. Ако су на стази сви чворови међусобно различити она се назива **пут**. Пут који почиње и завршава се у истом чвору назива се кружни пут или **цикл**.

За граф кажемо да је **повезан** уколико између свака два његова чвора постоји пут. Ако граф није повезан можемо говорити о његовим компонентама повезаности тј. о његовим подграфовима који су повезани. Грану графа чијим уклањањем би граф изгубио својство повезаности називамо **мост** графа. Чвор графа чијим би уклањањем била нарушена повезаност зове са **артикулациони чвор** графа.
Граф чији сви чворови имају исти степен назива се **регуларан** граф, касније у овом раду посебно место ће заузимати неке врсте регуларних графова. Коначан, повезан, регуларан граф степена два зовемо **контура**.

Повезан граф са n, $(n > 1)$ чворова и $n - 1$ граном зове се **стабло** или дрво. Граф чије су све компоненте повезаности стабла назива се **шума**. Следећа теорема детаљно описује својства стабала.

Теорема 1.1.1. *Нека је G граф са $n, (n > 1)$ чворова. Следећи искази су еквивалентни:*

1. *G је повезан и не садржи контуре;*
2. *G не садржи контуре и има $n - 1$ грану;*
3. *G је повезан и има $n - 1$ грану;*
4. *G не садржи контуре, али додавањем нове гране између произвољна два чвора образује се тачно једна контура;*
5. *G је повезан, али губи то својство ако се удаљи једна његова произвољна невисећа грана;*
6. *свака два чвора у G су спојена тачно једним путем.*

Пут који пролази тачно једанпут кроз сваку грану графа назива се **Ојлеров пут**. Питање да ли се сваки мост може прећи тачно једном или да ли се нека фигура може нацртати једним потезом оловке је питање да ли одговарајући граф поседује Ојлеров пут. Одговор на ово питање даје следећа теорема која је позната као Ојлерова теорема.

Теорема 1.1.2. *Повезан граф са бар једном граном садржи Ојлеров пут ако и само ако садржи 0 или 2 чвора непарног степена.*

Растојање између два чвора у повезаном графу је дужина најкраћег пута између та два чвора. Јасно је да је растојање суседних чворова једнако 1. Растојање између чворова v_i и v_j се означава са $d = d(v_i, v_j)$, $v_i, v_j \in V$. Овом функцијом d је дефинисана метрика на скупу чворова V јер важе следећа својства:

1. једнозначност $d(v_i, v_j) = 0 \Leftrightarrow v_i = v_j$;
2. симеричност $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$;
3. неједнакост троугла $d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j) \geq d(v_i, v_j)$.

У овом случају скуп V на коме је дефинисана метрика је метрички простор. Ако чворови v_i и v_j припадају различитим компонентама повезаности неког неповезаног графа кажемо да је растојање између њих $+\infty$. У повезаном графу највеће растојање између нека два чвора назива се **дијаметар графа**.

Пут који кроз сваки чвор графа пролази тачно једном зове се **Хамилтонов**[1] **пут**. Хамилтонов пут који почиње и завршава се у истом чвору неоријентисаног графа назива се **Хамилтонова контура**. Проблем трговачког путника је проблем одређивања Хамилтоновог пута у графу и спада у групу NP-комплетних проблема о којима ће бити више детаља у 4. глави ове дисертације.

За граф кажемо да је **бипартитан** уколико се његови чворови могу поделити у два скупа тако да свака грана графа има по један крај у сваком од та два скупа. Међу чворовима та два скупа нема суседних. Ако је сваки чвор из једног скупа повезан са сваким чвором из другог скупа, кажемо да је граф **комплетан бипартитан**.

За граф кажемо да је k-**партитан** ако се скуп његових чворова може поделити у k дисјунктних скупова тако да не постоје два чвора једног скупа да су међусобно повезана тј. гране овог графа повезују једино чворове из различитих скупова. Ако су свака два чвора из различитих скупова повезана граном кажемо да се ради о комплетном k-партитном графу.

Важна релација између два графа је изоморфизам. За два графа кажемо да су **изоморфни** ако постоји обострано једнозначно пресликавање скупова њихових чворова из једног у други, које чува суседност чворова.
Ова релација је:

1. рефлексивна - јасно је да је граф изоморфан самом себи;
2. симетрична - ако је G изоморфно са H јасно је и да је H изоморфно са G;
3. транзитивна - ако је G изоморфно са H, а H изоморфно са K према дефиницији јасно је да је и G изоморфно са K.

Према томе ради се о релацији еквиваленције, врло често се каже да су графови једнаки ако и само ако су изоморфни. Некада је провера да ли су два графа изоморфна веома тежак проблем. На ову тему позната је Уламова хипотеза која још увек није решена.

[1]Вилијам Роуан Хамилтон (1805-1865) ирски физичар, математичар и астроном, који је дао значајан допринос у све три научне области.

Та хипотеза гласи: ако разматрамо графове G са скупом чворова $g_1, g_2, ..., g_n$ и H са скупом чворова $h_1, h_2, ..., h_n$ уз услов $(n > 2)$, уколико из оба графа уклонимо по један произвољан чвор на пример g_i и h_i овако добијамо графове G_i и H_i. Ако су графови G_i и H_i изоморфни за свако i, онда су такође и G и H изоморфни графови.

За граф кажемо да је **потпун** или **комплетан** уколико су свака његова два чвора повезана граном. Комплетан граф са n чворова је регуларан степена $n-1$. Потпун подграф неког графа се често у литератури назива и клика.

Граф $\overline{G}$ је комплемент графа G ако има исти скуп чворова као G, али сада су суседни чворови они који нису били суседни у G и обрнуто. Комплемент потпуног графа је граф без грана.

Граф је самокомплемантаран ако је изоморфан свом комплементу. Следећа теорема говори о броју чворова самокомплементарног графа.

Теорема 1.1.3. *Број чворова сваког самокомплементарног графа је или $4n$ или $4n + 1$, где је n природан број.*

Дефиниција 1.1.2. *Пресликавање између два графа које чворове једног графа пресликава у чворове другог графа али тако да чува суседност чворова (тј. слике суседних чворова су увек суседни чворови) назива се хомоморфизам графова.*

Граф $L(G)$ је граф грана или **линијски граф** графа G уколико су гране графа G представљене као чворови графа $L(G)$ и у графу $L(G)$ чворови су суседни уколико су одговарајуће гране суседне у G.

За граф кажемо да је **планаран** уколико се може представити у равни тако да су му чворови једини пресеци грана, тј. да се гране не секу. Велика је примена планарних графова у саобраћајној инфраструктури, у теорији интегрисаних кола, али и у географији. Наравно највећа примена је у електроници јер уколико би дошло до укрштања одређених каблова настао би кратак спој. У вези са планарним графовима је следећа Ојлерова теорема.

Теорема 1.1.4. *Повезан, планаран граф који је представљен тако да му се гране не секу са n чворова и m грана дели раван на $f = m - n + 2$ области.*

Из ове теореме се изводи следећа последица.

Последица 1.1.1. *У сваком планарном графу постоји бар један чвор степена мањег од 6.*

Најједноставнији примери графа који није планаран је потпун пентаграф (комплетан граф са 5 темена) и потпун битриграф (комплетан бипартитан граф са 6 темена, која су подељена у два скупа од по три темена, у вези са овим графом је проблем са три куће и три бунара, који се поставља ђацима у школи). Користећи Ојлерову теорему лако се долази до контрадикције ако се претпостави да је неки од ових графова планаран.

Важна теорема која класификује све планарне графове је доказана око 1930. године и позната је под називом Понтрјагина-Куратовског. За ову теорему нам је потребно да знамо шта значи термин потподела графа. Граф који настаје операцијом којом се на гранама већ постојећег графа уводе нови чворови зове се потподела полазног графа. Ову теорему наводимо без доказа, а доказ се може видети у књизи [61].

Теорема 1.1.5 (Понтрјагин-Куратовски)**.** *Граф је планаран уколико не садржи као делимични подграф ни потпун пентаграф, ни потпун битриграф ни неку њихову потподелу.*

Постоје многе примене у којима се користи бојење графова. Граф се боји тако што се сваком чвору графа придружује нека боја. Каже се да је граф правилно обојен ако су му свака два суседна чвора обојена различитим бојама. Ако се граф може обојити правилно са m боја каже се да је граф m-обојив. Хроматски број графа $\gamma(G)$ је једнак најмањем броју s тако да је граф s-обијив.

Један од најпознатијих математичких проблема је проблем четири боје. Тај проблем је поставио још 1852. године француски студент постдипломских студија, Франсис Гутрије. Он је покушавао да боји географске карте света тако да никоје две државе које се граниче нису обојене истом бојом. Питао се са колико најмање боја би се свака карта могла обојити. То питање је послао професору свог брата чувеном математичару Де Моргану.[2] Касније су многи били заокупљени решавањем овог проблема, било је чак и неких прихваћених решења која су се после показала као погрешна. Један од многобројних претеча развоја теорије графова је и овај проблем. Могу се државе представити као чворови графа, а оне државе које се граниче (одговарајући чворови) спајају се граном. Онда проблем четири боје постаје проблем обојивости неког планарног графа. Овај проблем је познат и као први математички проблем који је решен помоћу рачунара и то се десило тек 1976. године после много покушаја. Решење је плод труда групе научника са универзитета Илиноис. Следећа теорема решава проблем 4 боје и наводимо је без доказа.

Теорема 1.1.6. *Сваки планаран граф је 4-обојив.*

Постоји и бојење грана графа, гране које се стичу у истом чвору боје се различитим бојама. Јасно је да се бојење грана графа G своди на бојење чворова линијског графа $L(G)$. За више детаља о основама комбинаторне теорије графова и о разним применама видети књиге [19] и [61].

[2]Август Де Морган (1806-1871), познати британски математичар, увео Де Морганове законе у логици, први увео појам математичке индукције.

1.2 Основи спектралне теорије графова

Граф можемо представити и матрицом, поменућемо овде три најважније врсте матрица које могу бити придружене једном неоријентисаном графу. Најважнија је свакако матрица суседства графа и о њој ће бити највише говора у даљем тексту. Поред ње, ту су и матрица инциденције и матрица степена чворова графа.

Матрица инциденције чворова и грана графа G који има n чворова и m грана је матрица $R = [r_{ij}]_{n\times m}$, при чему важи:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако је чвор } v_i \text{ инцидентан са граном } e_j \\ 0, & \text{ако чвор и одговарајућа грана нису инцидентни} \end{cases}$$

Матрица степена чворова је дијагонална квадратна матрица $D = [d_{ij}]_{n\times n}$, при чему се на главној дијагонали налазе степени одговарајућих чворова.

Матрица $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ја матрица суседства графа G уколико важи:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако је чвор } v_i \text{ спојен граном са чвором } v_j \\ 0, & \text{ако ови чворови нису суседни} \end{cases}$$

Карактеристични полином $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ матрице A називамо карактеристични полином графа. Јасно је да је степен карактеристичног полинома једнак броју чворова графа. Нуле поменутог полинома тј. сопствене вредности матрице A зову се сопствене вредности графа G, а исто важи за одговарајуће сопствене векторе. Скуп свих сопствених вредности графа G зове се **спектар графа**. Сопствене вредности графа су реалне, јер је матрица суседства графа симетрична и обично се представљају у нерастућем поретку на следећи начин: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 ... \geq \lambda_n$.

Посебна грана теорије графова која се бави њиховим спектрима зове се спектрална теорија графова, у овој грани математике је велики допринос српских математичара. Спектрална теорија графова има велику примену у хемији и рачунарству. Примена у хемији је везана за структуру молекула. У рачунарству су бројне примене: брза претрага интернета, теорија кодирања, анализа слике, развојне мреже, антивирусна заштита и тако даље.

Важе и уопштења неких тврђења која ће бити наведена у овом поглављу, тако неке теореме важе и за Ермитске матрице, али овде се наводе само за реалне симетричне матрице јер су главна тема овог рада графови и њихове матрице суседства.

Неки од коефицијената карактеристичног полинома графа имају везе са структуром самог графа. Нека је

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + a_{n-3}\lambda^{n-3} + ... + a_1\lambda + a_0$$

карактеристични полином неоријентисаног графа G са n чворова, тада је: $a_n = (-1)^n$. За коефицијент a_{n-1} важи да је $-a_{n-1} = TrA$, наравно са TrA означава се траг матрице A тј. збир елемената на главној дијагонали. Коефицијент a_{n-2} једнак је збиру главних минора другог реда матрице суседства, што је уствари збир детерминанти матрица суседства свих подграфова графа G који имају само два чвора. Ако је G граф без петљи и вишеструких грана онда је $-a_{n-2}$ једнако броју грана графа.

Позната је Заксова теорема везана за познавање коефицијената карактеристичног полинома неоријентисаног графа на основу структуре самог графа. За разумевање ове теореме уводимо два нова појма, а то су елементарна фигура и основна фигура. Елементарне фигуре су граф са два чвора повезана граном и свака контура. Основна фигура O_i је сваки граф са тачно i чворова, чије су све компоненте повезаности елементарне фигуре. Нека су a_i коефицијенти карактеристичног полинома $P(G)$ графа G.

Теорема 1.2.1. *Нека је $n(O_i)$ број компонента фигуре O_i, а $c(O_i)$ број контура које се као компоненте садрже у O_i. Тада важи:*

$$a_i = \sum_{O_i \subset G} (-1)^{n(O_i)} 2^{c(O_i)}$$

где се сумирање врши по свим основним фигурама са тачно i чворова који се као делимични подграфови налазе у G.

Следећа теорема нам даје везу између карактеристичног полинома неповезаног графа и карактеристичних полинома његових компонената повезаности.

Теорема 1.2.2. *Нека је дат неповезан граф G и нека су $G_1, G_2, G_3, ..., G_k$ компоненте повезаности графа G. Нека су карактеристични полиноми компонената повезаности редом $P(G_1), P(G_2), P(G_3), ..., P(G_k)$ тада је карактеристични полином графа G:*

$$P(G) = P(G_1) \cdot P(G_2) \cdot P(G_3) \cdots P(G_k)$$

Из ове теореме јасно следи да се спектар графа добија обједињавањем спектара његових компонената повезаности.

Јасно је да изоморфни графови имају исте спектре јер спектар не зависи од начина нумерације чворова. Обрт овог тврђења не важи тј. постоје неизоморфни графови који имају исте карактеристичне полиноме односно исте спектре.

Став 1.2.1. *Нека је D максимални степен чвора неоријентисаног графа G, тада за сваку сопствену вредност овог графа важи $|\lambda| \leq D$.*

За неке једноставније класе графова познат је спектар. Спектар комплетног графа K_n се састоји од бројева $n-1$ и -1, прва сопствена вредност је једнострука, а друга је вишеструкости $n-1$. Обрт овог тврђења нам даје следећи став, који каже да је довољно знати да једна сопствена вредност графа који има n чворова $n-1$, и одмах се зна да се ради о комплетном графу.

Став 1.2.2. *Нека је G неоријентисан граф без петљи, са n чворова. Ако једна сопствена вредност графа G износи $n-1$, онда је тај граф комплетан.*

Доказ. Нека је $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ сопствени вектор који одговара датој сопственој вредности. Можемо претпоставити да је x_1 максимална вредност од свих координата и да је позитивна (то се може постићи евентуалним множењем пермутационом матрицом). Нека је $A = [a_{ij}]$ матрица суседства графа G. Према дефиницији важи следећа једнакост:

$$Ax = (n-1)x$$

Одавде следи једнакост за прву координату:

$$(n-1)x_1 = a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n$$

при чему су све вредности a_{ij} једнаке нула или један. Помножимо сада вектор одговарајућом константом да добијемо да је $x_1 = 1$. Из претходне једнакости следи да је $a_{1j} = 1$, за све $j = 2, 3, ..., n$ и $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$. Према томе сопствени вектор x који одговара сопственој вредности $\lambda = n - 1$ је: $x = (1, 1, 1..., 1)^T$

Онда важи:

$$A \cdot (1, 1, 1..., 1)^T = (n-1)(1, 1, 1..., 1)^T$$

Примећујемо да су степени свих чворова графа G једнаки $n - 1$, а то значи да је G комплетан граф.

□

Следећа теорема говори о сопственим вредностима бипартитног графа.

Теорема 1.2.3. *Спектар бипартитног графа се састоји од реалних бројева који су када се представе на реалној оси симетрични у односу на координатни почетак.*

Уколико имамо комплетан бипартитни граф чији је скуп чворова подељен у два скупа са l односно k елемената тада се његов спектар састоји од бројева $\sqrt{kl}, -\sqrt{kl}$ и 0, при чему је нула вишеструкости $k + l - 2$.

За граф кажемо да је **јако регуларан** ако има следеће параметре (n, k, λ, μ) при чему је n број чворова графа, k степен сваког чвора, λ број заједничких суседа суседних чворова, μ број заједничких суседа несуседних чворова. Јако регуларни графови су дефинисани тек 1963. године и имају велику примену у одређивању максималне енергије графа, о чему ће бити речи у наставку. Комплемент јако регуларног графа је такође јако регуларан граф са параметрима $(n, n - k - 1, n - 2 - 2k + \mu, n - 2k + \lambda)$.
За матрицу суседства јако регуларног графа важе следеће једнакости:

1. $AJ = JA = kJ$

2. $A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A)$

При чему је I јединична матрица (на главној дијагонали су јединице, остали елементи су нуле), а са J је означена матрица чији су сви елементи једнаки један. Најпознатији примери јако регуларних графова су цикл дужине 5 његови параметри су $(5, 2, 0, 1)$, Петерсонов граф $(10, 3, 0, 1)$, затим **конференцијски графови** реда q са параметрима $(q, \frac{q-1}{2}, \frac{q-5}{4}, \frac{q-1}{4})$, параметар q даје остатак један при дељењу са 4. **Пејлијев граф**[3] је специјалан случај конференцијског графа, који се добија када је q прост број. Наравно не постоји Пејлијев граф за свако q, најмањи је за $q = 5$, а то је управо контура дужне 5.

Следећа теорема даје потребан и довољан услов да је неки граф јако регуларан.

Теорема 1.2.4. *Граф G је јако регуларан ако и само ако је регуларан и има највише три различите сопствене вредности.*

Познат је и спектар јако регуларног графа са параметрима (n, k, λ, μ). Сопствене вредности овог графа су (према претходној теореми има их највише 3 различите):
$\lambda_1 = k$ вишструкости 1,

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}[(\lambda - \mu) + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}] \text{ вишеструкости } \frac{1}{2}\left[(n-1) - \frac{2k + (n-1)(\lambda - \mu)}{\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}}\right],$$

[3] Рејмонд Пејли (1907-1933), талентовани енглески математичар који је млад настрадо, али дао велики допринос математици.

$\lambda_3 = \frac{1}{2}[(\lambda-\mu)-\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}]$ вишеструкости $\frac{1}{2}\left[(n-1)+\frac{2k+(n-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}\right]$.

Ове формуле се могу применити на Пејлијеве графове реда q.

Према претходном спектар Пејлијевог графа реда q је:
$\lambda_1 = \frac{q-1}{2}$ вишеструкости 1,
$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{q})$ обе вишеструкости $\frac{q-1}{2}$.

Следећа теорема повезује елементе различитих степена матрице суседства са бројем путева одређене дужине у графу.

Теорема 1.2.5. *Нека је A матрица суседства графа G чији су чворови $v_1, v_2, ..., v_n$. Елемент a_{ij}^k матрице A^k је једнак броју путева дужине k између чворова v_i и v_j у графу G.*

Можемо знати карактеристични полином графа, који се добија од познатог графа уклањањем једне гране, ту везу даје следећа теорема.

Теорема 1.2.6. *Нека је uv једна грана графа G тада за карактеристични полином графа G важи:*

$$P(G) = P(G-uv) - P(G-u-v) - 2\sum_{C\in\Psi(uv)} P(G-C)$$

При чему се у последњој суми сумирање врши по свим цикловима који припадају скупу цилкова који садрже грану uv.

Уколико је uv висећа грана, са висећим чвором v онда важи:

$$P(G) = \lambda P(G-v) - P(G-u-v)$$

Прва једнакост у претходној теореми је позната као Швенкова формула, а друга као Хејлбронерова формула.

Неке теореме из ове области и њихове последице ће имате велику примену у наредном поглављу о случајним графовима али и у поглављу о енергији графа и Шатеновим нормама графа. Једна од таквих теорема, чије су последице веома битне је следећа Курант-Фишерова теорема.

Теорема 1.2.7 (Курант-Фишерова теорема)**.** *Нека је A реална симетрична квадратна матрица реда n са сопственим вредностима $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 ... \geq \lambda_n$ и нека је V потпростор од $\mathbb{R}^n$ и нека су са и означени јединични вектори из V тада важи:*

$$\lambda_i = \min_{V_{n+1-i}} \max_u u^T A u = \max_{V_i} \min_u u^T A u$$

При чему је димензија потпростора V означена у индексу.

Ова теорема је у литератури позната као мин-макс карактеризација сопствених вредности матрице. Следеће теореме су њене последице. Некада је добро знати највећу сопствену вредност, посебно у теорији графова и у налажењу горњих ограничења за неке графовске инваријанте.

Последица 1.2.1. *Нека је A реална симетрична квадратна матрица реда n са сопственим вредностима $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 ... \geq \lambda_n$ и нека су са и означени једнични вектори, тада важи:*

$$\lambda_1 = \max_{|u|=1} u^T A u$$

Ако разматрамо спектар подграфа (тј. спектар одговарајуће подматрице матрице суседства), велику примену у овом раду али и у многим научним радовима из ове области има следећа теорема позната као Кошијева теорема о преплитању сопствених вредности (interlacing).

Теорема 1.2.8 (Кошијева теорема о преплитању сопствених вредности)**.** *Нека је $[A]_{n\times n}$ симетрична матрица и нека су њене сопствене вредности $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 ... \geq \lambda_n$ и нека је $[B]_{m\times m}$ њена подматрица чије су сопствене вредности $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 ... \geq \mu_m$ тада важи следећа веза између њихових одговарајућих сопствених вредности:*

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}$$

Јасно је да ако би матрица B била добијена од матрице A уклањањем само једне врсте и колоне имали бисмо следећу неједнакост:

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$$

Може бити од користи и неједнакост која се добија из претходне теореме, код које се сопствена вредност графа који има више темена налази између две сопствене вредности мањег графа, а она гласи:

$$\mu_{i+m-n} \geq \lambda_i \geq \mu_i$$

при чему лева неједнакост важи за $n \geq i > n - m$, а десна за $m \geq i \geq 1$.

Са друге стране може се посматрати матрица суседства неког графа као збир матрица суседства нека друга два графа. Следећа Вејлова теорема нам даје везу између сопствених вредности та три графа тј. њихових матрица суседства. Оригинално она је формулисана за матрице.

Теорема 1.2.9 (Вејлова теорема)**.** *Нека су дате квадратне матрице A, B и C, истих димензија и нека су њихови спектри редом $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 ... \geq \mu_n$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 ... \geq \lambda_n$ и $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \rho_3 ... \geq \rho_n$, ако важи да је $A + B = C$ тада за њихове сопствене вредности важи следећа неједнакост:*

$$\lambda_i + \mu_n \leq \rho_i \leq \lambda_i + \mu_1$$

Некад се користи и Вејлова неједнакост у следећем облику.

Последица 1.2.2. *Нека су дате квадратне матрице A, B и C, истих димензија и нека су њихови спектри редом $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 ... \geq \mu_n$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 ... \geq \lambda_n$ и $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \rho_3 ... \geq \rho_n$, ако важи да је $A+B = C$ тада за њихове сопствене вредности важи следећа неједнакост:*

$$\lambda_i - \mu_1 \leq \rho_i \leq \lambda_i + \mu_1$$

Осим што је последица Вејлове теореме, претходна неједнакост следи и из чињенице да је $\lambda_n \geq -\lambda_1$ (једнакост важи за бипартитне графове). Ова неједнакост за највећу и најмању сопствену вредност директно следи из следеће две теореме које су познате као Перон[4]-Фробенијусове [5].

[4] Оскар Перон (1880-1975) познати немачки математичар.

[5] Фердинанд Георг Фробенијус (1849-1917), велики немачки математичар, дао је значајан допринос у теорији група и диференцијалним једначинама. Први је доказао Кејли-Хамилтонову теорему, био је ученик Вајерштраса, Кронекера и Кумера.

Теорема 1.2.10 (Перон-Фробенијус 1). *Нека је $A = [a_{ij}]$ квадратна, симетрична матрица димензије n којој су сви елементи позитивни ($a_{ij} > 0$, за све i и j). Ако је λ највећа сопствена вредност ове матрице, тада важи:*

1. *$\lambda > 0$;*
2. *постоји сопствени вектор x коме су све координате позитивне, а који одговара највећој сопственој вредности;*
3. *λ је једнострука нула карактеристичног полинома;*
4. *за све остале сопствене вредности λ' важи $\lambda > |\lambda'|$.*

Доказ.

1. Пошто је збир свих сопствених вредности једнак трагу матрице, који је код ове матрице јасно позитиван, лако следи да је $\lambda > 0$.

2. Нека је u нормиран сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ. Тада важи:

$$\lambda \cdot u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$$

Нека је сада $x_j = |u_j|$ у смислу координата, тада важи:

$$0 < \lambda = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Из последице 1.2.1 следи следећа неједнакост:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \leq \lambda$$

при чему једнакост важи ако је x сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ, онда посматрајмо једнакост:

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Ако би било $x_i = 0$ за неко i онда због $a_{ij} > 0$ за све i и j морало би да важи да је $x_j = 0$ а то је у супротности са дефиницијом, па је $x_j > 0$.

3. Пошто је A реална симетрична матрица, ако би λ била двострука нула карактеристичног полинома онда би постојала два међусобно ортогонална сопствена вектора v и w који одговарају поменутој сопственој вредности. Претпоставимо да за један од њих на пример v и за неко i важи $v_i < 0$, и нека је поново $|v_i| = x_i$.

Посматрајмо следеће две једнакости:

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$\lambda v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$$

Ако саберемо ове две једнакости добијамо:

$$0 = \lambda(|v_i| + v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(|v_j| + v_j)$$

одавде следи да важи $|v_j| + v_j = 0$, за све j. Према томе важи $|v_j| = v_j > 0$ за све j или је $-|v_j| = v_j < 0$ за све j.
Ако иста разматрања применимо на вектор w, а затим урадимо скаларни производ вектора v и w добијамо:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j w_j = \pm \sum_{j=1}^{n} |v_j w_j| \neq 0$$

према томе вектори v и w нису ортогонални, па је λ једнострука нула карактеристичног полинома.

4. Нека је u нормирани сопствени вектор који одговара некој сопственој вредности $\lambda' < \lambda$. Онда према дефиницији важи:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = \lambda' u_i$$

Искористимо сада исто као у 2. делу последицу 1.2.1, добијамо следећу неједнакост:

$$\lambda \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |u_i| |u_j| \geq \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j \right| = \lambda'$$

Ако је $\lambda' = \lambda$ тада претходна разматрања дају $|u_j| = x_j$ за свако j и постоји i за које је $u_i = x_i$.

Посматрајмо следеће две једнакости:

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$-\lambda u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$$

Ако саберемо ове две једнакости добијамо:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j + u_j) \geq a_{ii}(x_i + u_i)$$

Последња неједнакост је контрадикција са чињеницом да су сви елементи матрице позитивни то јест $a_{ii} > 0$ и једнакости $u_i = x_i > 0$ па из свега овога следи да је $\lambda' \neq -\lambda$.

□

За матрицу A кажемо да је разложива ако постоји пермутациона матрица P тако да је матрица $P^{-1}AP$ облика:

$$\begin{bmatrix} X & O \\ Y & Z \end{bmatrix}$$

при чему су X и Z квадратне матрице, а O нула матрица. Матрицу која није разложива зовемо неразложива матрица. Уколико је матрица суседства графа разложива, тј. ако се може написати у овом облику, онда је у питању неповезан граф. Следећа теорема је уопштење претходне.

Теорема 1.2.11 (Перон-Фробенијус 2). *Свака неразложива ненегативна матрица A има позитивну сопствену вредност r, која је једнострука нула карактеристичног полинома. Модули осталих сопствених вредности су мањи или једнаки од r. Највећој сопственој вредности одговара сопствени вектор са позитивним координатама. Ако матрица има h сопствених вредности које су по модулу једнаке r, ти бројеви су међусобно различити и задовољавају једначину $\lambda^h - r^h = 0$. А скуп свих сопствених вредности $\lambda_1 = r, \lambda_2, ..., \lambda_n$ посматран као скуп тачака у комплексној равни прелази у самог себе при ротацији за угао $\varphi = \dfrac{2\pi}{h}$. За $h > 1$ је могуће матрицу A пермутацијом врста и истом пермутацијом колона довести на циклички облик, тако да се по дијагонали налазе квадратне нула матрице.*

У спектралној теорији графова, али и уопштено у спектралној теорији матрица теореме Перон-Фробенијуса заузимају важно место и имају велику примену. Објављено је много научних радова где су дати разни докази и примене ове две теореме, видети [55], [7] и [34].

Лема 1.2.1. *Нека су A и B реалне, симетричне матрице истих димензија и нека је ранг матрице B једнак 1. Тада да за сваки интревал I важи:*

$$|N_I(A+B) - N_I(A)| \leq 1$$

где је $N_I(A)$ број сопствених вредности матрице A на интервалу I.

Ову лему су доказали Ван Ву и Теренс Тао у раду [57]. Касније ће се користити у овом раду код случајних графова, тако да може представљати увод у наредни одељак.

1.3 Случајне матрице и случајни графови

Теорија случајних матрица је грана математике која се у последњих 70 година врло брзо развија, она повезује линеарну алгебру, математичку анализу, теорију вероватноће и математичку статистику.

Случајна матрица је матрица чији елементи су случајне променљиве. У овом одељку ће се разматрати случајне матрице чији су елементи на главној дијагонали једнаки нула, а елементи ван главне дијагонале су независне дискретне случајне величине које узимају вредности 1 или 0. Ако узимају те вредности са истом вероватноћом онда је математичко очекивање $E(a_{ij}) = \frac{1}{2}$, а дисперзија $D(a_{ij}) = \frac{1}{4}$. Случајан граф је граф чија је матрица суседства случајна матрица. Сопствене вредности случајне матрице су случајне величине које имају **Вигнерову** полукружну расподелу. Ову расподелу је увео Еуген Вигнер[6] 1958. године у раду [62], а детаљан опис постоји и у раду [3]. Важност Вигнерове расподеле за теорију случајних матрица неки математичари пореде са централном граничном теоремом у општој теорији вероватноће. Прво ћемо дефинисати нешто што се у литератури често назива Вигнеров ансамбл.

Дефиниција 1.3.1. *Нека је $A(i,j)$ фамилија независних комплексних случајних величина (за $i > j$), таквих да је свака од њих ограничена по модулу неким бројем T, затим важи $A(i,j) = A(j,i)$ и да су $A(i,i)$ реалне. Нека је математичко очекивање ових случајних величина нула, а дисперзија једнака 1. Тада је A_n случајна матрица чије су одговарајуће вредности $A(i,j)$ при чему је $1 \leq i,j \leq n$ и она се назива Вигнеров ансамбл.*

За боље објашњење неких појмова на овом месту наводимо дефиниције конвергенција у расподели, вероватноћи и скоро сигурне конвергенције.

Дефиниција 1.3.2. *Низ случајних величина X_n конвергира у вероватноћи ка случајној величини X ако важи:*

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = 0$$

Дефиниција 1.3.3. *Нека је F_n функција расподеле низа случајних променљивих X_n и нека је F функција расподеле случајне променљиве X. Кажемо да низ случајних величина X_n конвергира у расподели ка случајној променљивој X ако важи:*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

за сваку реалну тачку x у којој је функција F непрекидна.

Јасно је да претходна дефиниција уствари говори о блискости расподела низа случајних променљивих X_n и расподеле неке случајне променљиве X када је n велико. Следећа дефиниција је еквивалентна претходној.

Дефиниција 1.3.4. *Низ случајних величина X_n конвергира у расподели ка случајној величини X ако за сваку ограничену и непрекидну функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ важи:*

$$\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) = E(f(X))$$

Дефиниција 1.3.5. *Низ случајних величина X_n конвергира скоро сигурно ка случајној величини X ако важи:*

$$P\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$$

[6]Еуген Вигнер(1902-1995), мађарски теоријски физичар и математичар.

Следећа теорема из опште теорије вероватноће ће имати велику примену у овом одељку позната је као Левијева[7] теорема, она повезује конвергенцију тачка-по-тачка карактеристичних функција неког низа случајних променљивих и конвергенцију у расподели.

Теорема 1.3.1 (Левијева теорема). *Нека је X_n низ случајних величина и $\varphi_n(t)$ низ карактеристичних функција тог низа, ако низ карактеристичних функција конвергира тачка-по-тачка ка функцији $\varphi(t)$ за свако $t \in \mathbb{R}$, онда су следећи услови еквивалентни:*

1. *Низ случајних величина X_n конвергира у расподели ка некој случајној променљивој X.*
2. *Функција $\varphi(t)$ је карактеристична функција случајне променљиве X.*
3. *$\varphi(t)$ је непрекидна функција.*
4. $$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_n P\{|X_n| > x\}\right) = 0$$
5. *$\varphi(t)$ је непрекидна функција у тачки $t = 0$.*

При чему се у 1. и 2. ради о истој случајној променљивој X.

У овом поглављу за доказ централног тврђења користиће се да су уз претпоставку под којим важи теорема услови 1. и 2. међусобно еквивалентни, тако да су нам та два услова најважнија.
Нека је $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ симетрична случајна матрица. Посматрајмо такозвану нормализовану матрицу $B = \dfrac{1}{2\sigma\sqrt{n}}A$, чије су сопствене вредности $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$. Овако дефинисана матрица B често се назива Вигнерова матрица.

Означимо функцију расподеле случајних променљивих a_{ij} са F. Нека је $N_n(x)$ број сопствених вредности квадратне матрице B, димензије n које су мање од неког реалног броја x, наравно сопствене вредности сада представљају случајне величине.
Број $N_n(x)$ може да се дефинише на следећи начин, нека је:

$$\delta_{\lambda_j} = \begin{cases} 1, & \lambda_j \le x \\ 0, & \lambda_j > x \end{cases}$$

па је

$$N_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j}$$

Дефинишимо затим функцију $W_n(x) = \dfrac{N_n(x)}{n}$ која представља емпиријску спектралну дистрибуциону функцију. Ова функција је неопадајућа и за њу важе следећи лимеси:

$$\lim_{x\to-\infty} W_n(x) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} W_n(x) = 1$$

Функција $W(x)$ је непрекидна функција и представља функцију расподеле за Вигнерову расподелу.
Следећа теорема је Вигнеров резултат из [62].

[7] Пјер Паул Леви (1886-1971) познати француски математичар.

Теорема 1.3.2 (Вигнерова теорема). *Низ случајних величина W_n конвергира у расподели ка случајној величини W (која представља функцију расподеле за Вигнерову расподелу), чија је густина дата следећом формулом*

$$w(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Претходна теорема је један од најважнијих резултата из области случајних матрица и у литератури доказана на више начина. Један од начина је такозвана метода момената.

Наредни став даје вредности момената вишег реда случајне промењиве W, која има Вигнерову полукружну расподелу.

Став 1.3.1. *Моменти вишег реда случајне промењиве која има Вигнерову расподелу и којој је густина*

$$w(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

износе:
$E(x^p) = 0$ *ако је p непаран број и* $E(x^p) = \dfrac{p!}{2^p(\frac{p}{2})!(\frac{p}{2}+1)!}$ *ако је p паран број.*

Бројеви C_n за које важи: $C_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ називају се Каталанови бројеви.

Доказ. Пошто је функција густине расподеле парна функција, за непарно p би функција $x^p\sqrt{1-x^2}$ била непарна. Одговарајући момент рачунали бисмо као интеграл непарне функције на симетричном интервалу, а то износи 0. Ако је p паран број нека је $p = 2k$, онда треба израчунати следећи интеграл:

$$E(x^{2k}) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x^{2k}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t \cos^2 t\, dt = \frac{2}{\pi} I_{2k}$$

Израчунајмо сада интеграл I_{2k}, применом парцијалне интеграције:
$u = \sin^{2k} t \cos t$; $v = \cos t\, dt$;
$du = 2k \sin^{2k-1} t \cos^2 t - \sin^{2k+1} t$; $v = \sin t$

$$I_{2k} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t \cos^2 t\, dt = -2k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t \cos^2 t\, dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} t\, dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2k+1)I_{2k} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t\, dt - I_{2k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_{2k} = \frac{1}{2k+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t\, dt$$

Ако последњу формулу и $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} t\, dt = (2k+1)I_{2k}$ примењујемо узастопно добијамо:

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot ... \cdot 3}{(2k+2)\cdot 2k\cdot(2k-2)\cdot .... \cdot 4} I_0$$

где је

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{2}$$

Ако претходни разломак проширимо са $(2k)!!$ добијамо:

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{4^k(k+1)! \cdot k!}\frac{\pi}{2}$$

Овим је тврђење доказано.

□

Касније у овом раду наводи се једно уопштење ових познатих резултата за случајеве када k није цео број.

Сада ћемо навести пар важних теорема из опште теорије случајних матрица које се могу применити у овом случају.

Следеће две теореме су познате као Bai-Yin теореме. Оне дају горњу и доњу границу за највећу сингуларну вредност случајне матрице. Пре него што наведемо те две теореме уводимо дефиницију сингуларних вредности матрице.

Дефиниција 1.3.6. *Сингуларне вредности матрице A су квадратни корени сопствених вредности матрице $A \cdot A^T$. Обично се означавају са σ и дате су у неопадајућем поретку $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_n$.*

Теорема 1.3.3. *Нека је A реална симетрична случајна матрица чији су елементи независне случајне променљиве, чије је очекивање 0, а дисперзија 1 и ограничених вредности са $O(1)$, тада је очекивана вредност највеће сингуларне вредности најмање $(2 - o(1))\sqrt{n}$.*

Теорема 1.3.4. *Нека је A реална симетрична случајна матрица чији су елементи независне случајне променљиве, које имају исту расподелу, чије је очекивање 0, а дисперзија 1 и четвртим моментима реда величине $O(1)$ тада за свако $\varepsilon > 0$ независно од n важи:*

$$\sigma_1 \leq (2 + o(1))\sqrt{n}$$

асимптотски скоро сигурно.

Из претходне две теореме о ограничењима за највећу сингуларну вредност случајне матрице и начина како смо ми дефинисали матрицу B можемо закључити да је њена највећа сингуларна вредност скоро сигурно $1 + o(1)$.

За доказ Вигнерове теореме је потребно доказати да је:

$$E\int_{\mathbb{R}} x^k \, dW_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\pi}x^k\sqrt{1-x^2} \, dx + o(1)$$

Да би се дошло до ове чињенице треба приметити да су моменти од W_n уствари одговарајући трагови матрице $\frac{1}{n}B$ тј да важи:

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \, dW_n = \frac{1}{n} \, trB^k$$

За доказ Вигнерове теореме преко методе момената може бити кључна следећа Карлеманова теорема. Пре исказа и доказа теореме наводимо дефиницију суб-гаусовске случајне величине која има важно место у овој теореми.

Дефиниција 1.3.7. *За случајну променљиву X кажемо да има суб-Гаусову расподелу ако постоје позитивне константе C и c тако да за свако $\lambda > 0$ важи:*

$$P\{|X| > \lambda\} \leq Ce^{-c\lambda^2}$$

Теорема 1.3.5 (Карлеманова теорема). *Ако је X_n низ реалних случајних променљивих које имају униформно суб-Гаусову расподелу и X друга суб-Гаусова случајна променљива, тада су следећа два услова еквивалентна.*

1. *X_n конвергира у расподели ка X;*

2. *$E(X_n^k)$ конвергира тачка-по-тачка ка EX^k за свако $k = 0, 1, 2..$*

Доказ. 1) $\Rightarrow$ 2)
Нека је $N > 0$ произвољно и нека је $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ глатка функција за коју важи:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

Тада из конвергенције у расподели следи да важи:

$$\lim_{n\to\infty} EX_n^k \varphi\left(\frac{X_n}{N}\right) = EX^k \varphi\left(\frac{X}{N}\right)$$

При чему ће n зависити од N.
С друге стране пошто су X_n и X униформно суб-гаусовске случајне променљиве могу се посматрати следећи изрази: $EX_n^k\left(1-\varphi\left(\frac{X_n}{N}\right)\right)$ и $EX^k\left(1-\varphi\left(\frac{X}{N}\right)\right)$.
Ови изрази се могу учинити произвољно малим за довољно велико N и фиксирано k. Ако бисмо онда посматрали разлику и пустили да $N \to \infty$ добија се:

$$\lim_{N\to\infty} EX_n^k\left(1-\varphi\left(\frac{X_n}{N}\right)\right) - EX^k\left(1-\varphi\left(\frac{X}{N}\right)\right) = 0$$

То значи да се за довољно велико N које не зависи од n израз:

$$\left|EX_n^k - EX^k + EX_n^k\varphi\left(\frac{X_n}{N}\right) - EX^k\varphi\left(\frac{X}{N}\right)\right|$$

може учинити мањи од неког унапред датог произвољно малог броја ε, а онда у зависности од тог фиксираног N може се изабрати n тако да је

$$|EX_n^k - EX^k| < \varepsilon$$

па је овај смер доказан.
2) $\Rightarrow$ 1)
За сваку суб-гаусовску случајну променљиву важи да има ограничене моменте тј. за свако $k \geq 1$ постоји константа C која не зависи од k тако да важи:

$$EX^k \leq (Ck)^{\frac{k}{2}}$$

Сада можемо посматрати карактеристичне функције $\varphi_{X_n} = Ee^{itX_n}$ низа случајних променљивих X_n. Ако применимо Тејлорову формулу за фиксирано t (можемо је применити јер је познато да је реална случајна променљива са ограниченим k-тим моментима k пута диференцијабилна), према томе важи:

$$\varphi_{X_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} EX_n^j$$

Ако искористимо да је случајна величина суб-Гаусова и применимо Стирлингову формулу добијамо:

$$\frac{(Ck)^{\frac{k}{2}}|t|^k}{k!} \sim \frac{(Ck)^{\frac{k}{2}}|t|^k}{k^k} \cdot \frac{e^k}{\sqrt{2k\pi}} = C_1 \left(\frac{t}{C_2\sqrt{k}} \right)^k$$

При чему C_1 и C_2 не зависе од n, k и t. Може се приметити да за фиксирано t постоји неко k_0 (које зависи од t) тако да за свако $k > k_0$ важи следећа неједнакост:

$$\frac{|t|}{C_2\sqrt{k}} \leq \frac{1}{2}$$

Одавде следи наредна неједнакост:

$$\left| \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} EX_n^j \right| \leq C_3 \left((Ck)^{-\frac{k}{2}} |t|^{k+1} \right)$$

Према томе важи:

$$\varphi_{X_n} = \sum_{j=0}^{k} \frac{(it)^j}{j!} EX_n^j + O((Ck)^{-\frac{k}{2}} |t|^{k+1})$$

Ако искористимо 2) и разматрамо лимес добијамо:

$$\limsup_{n\to\infty} |\varphi_{X_n} - \varphi_X| = O((Ck)^{-\frac{k}{2}} |t|^{k+1})$$

За фиксирано t и $k \to \infty$ може се закључити да φ_{X_n} конвергира тачка-по-тачка ка φ_X а онда из Левијеве теореме следи тврђење. $\square$

Последица 1.3.1. *За сваку суб-гаусовску случајну промењљиву важи да је њена расподела јединствено одређена њеним моментима.*

1.3.1 Доказ Вигнерове теореме

За доказ Вигнерове теореме користићемо такозвану методу момената. Доказаћемо да одговарајући моменти конвергирају за свако k то јест да за свако k важи:

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \; dW_n \to \int_{\mathbb{R}} x^k \; dW$$

а затим да одатле следи конвергенција у расподели низа случајних променљивих. У доказу Вигнерове теореме неће се користити Карлеманова теорема 1.3.5, него ће се случај 2) $\Rightarrow$ 1) ове теореме изводити директно али ће се користити чињеница да густина расподеле која одговара W има компактан носач. Наиме, у Карлемановој теореми уколико би случајна променљива X имала компактан носач и ако би важио услов 2) онда би 2) $\Rightarrow$ 1) могло да се докаже и да се не користи чињеница да случајне променљиве имају суб-Гаусову расподелу.

Главни део доказа је показати да моменти од W_n конвергиају ка моментима од W. Посматраћемо очекиване моменте. Приметимо да важи следећи низ једнакости.

$$E\int_R x^k \; dW_n = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k = E\frac{1}{n}Tr(B^k) = \frac{1}{n}E\; Tr(B^k) = \frac{1}{n}E\; Tr\left(\frac{A}{2\sqrt{n}}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2^k}\frac{1}{n^{\frac{k}{2}+1}}E\; TrA^k = \frac{1}{2^k}\frac{1}{n^{\frac{k}{2}+1}}\sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq \ldots \leq i_k\leq n} EA(i_1,i_2)A(i_2,i_3)\cdots A(i_k,i_1)$$

Траг матрице је збир дијагоналних елемената матрице. Елемент a_{ij} матрице A^k једнак је броју путева дужине k од чвора i до j, специјално пошто нама требају дијагонални елементи, a_{ii} је број циклова који почињу и завршавају се у i а дужина им је k.

Да бисмо лакше израчунали ову суму извршићемо класификацију свих циклова дужине k на n означених темена. Нека је $i = (i_1, i_2, ..., i_k) \in \{1, 2, 3, ..., n\}^k$ неки цикл дужине k , а допринос тог цикла у суми је

$$C(i) = EA(i_1,i_2)A(i_2,i_3)\cdots A(i_k,i_1)$$

Нека је $V(i) = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ скуп чворова који цикл посећује (њих је највише k, а биће их и мање ако има понављања). Нека је $E(i) = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_k, i_1)\}$ мултискуп оријентисаних грана које припадају циклу при чему се неке могу понављати, а $E'(i)$ скуп грана које су неусмерене и не рачунајући могућа понављања. Неоријентисан граф $G = (V(i), E'(i))$ зваћемо скелет датог цикла.

Пошто за независне случајне величине важи $E(XY) = EX \cdot EY$ и расподела елемената полазне матрице таква да им је очекивање једнако нула, онда је $C(i) = 0$, осим за оне гране $e \in E(i)$ које се у било ком смеру појављују најмање два пута у циклу. Према томе важи $|E'(i)| \leq \left[\dfrac{k}{2}\right]$.

Пошто је број чворова било ког неусмереног повезаног графа мањи или једнак од броја грана увећаног за један ($|V| \leq |E| + 1$), при чему једнакост важи за стабла, онда за наш скелет граф важи:

$$V(i) \leq \left[\frac{k}{2}\right] + 1$$

Два цикла су еквивалентна ако се један може добити од другог пермутацијом чворова. За еквивалентне циклове i и j пишемо $i \sim j$ ако постоји бијекција $\pi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ тако да важи $(j_1, j_1, ..., j_k) = (\pi(i_1), \pi(i_2), ..., \pi(i_k))$. Према томе два циклуса могу бити еквивалентна ако имају исти број корака на пример k и прођу кроз исти број различитих темена на пример t. Нека $C_{k,t}$ скуп свих класа еквиваленције циклова који имају k корака и прођу t различитих темена. Све чворове можемо означити бројевима од 1 до t тако што чвор у коме се цикл нашао први пут добије за један већу ознаку од оне која је претходно додељена, а почињемо од јединице. Циклус дужине k се јединствено одређује избором t уређених темена и класом еквиваленције $C_{k,t}$. Претходну суму можемо сада записати:

$$E\int_{\mathbb{R}} x^k \, dW_n = \frac{1}{2^k}\frac{1}{n^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{1\le i_1\le i_2\le \ldots\le i_k\le n} EA(i_1,i_2)A(i_2,i_3)\cdots A(i_k,i_1)$$

$$= \frac{1}{2^k}\frac{1}{n^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{t=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} \sum_{[i]\in C_{k,t}} \sum_{j\sim i} E \prod_{e\in E(j)} A(e)$$

Ознака $A(e)$ уствари представља један елемент полазне случајне матрице. Због ограничености елемената полазне матрице реалним бројем T (у случају матрице суседства графа $T=1$), важи:

$$|E\prod_{e\in E(j)} A(e)| \le T^k$$

За сваки цикл од t темена број еквивалентних циклова је број начина избора t од n темена. То јест број елемената једне класе еквиваленције је:

$$|[i]| = |j : j\sim i| = \frac{n!}{(n-t)!} \sim n^t$$

На основу тога може се ограничити t-ти сабирак у суми:

$$\frac{1}{2^k}\frac{1}{n^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{[i]\in C_{k,t}} \sum_{j\sim i} E \prod_{e\in E(j)} A(e) \le |C_{k,t}| T^k \frac{n^t}{n^{\frac{k}{2}+1}}$$

овај израз се понаша као $o_k(1)$ за све $t \le \left[\frac{k}{2}\right]$ када је k парно и све $t \le \left[\frac{k}{2}\right]+1$ када је k непарно. За непарно k се може закључити да када $n\to\infty$ важи:

$$E\int_{\mathbb{R}} x^k \, dW_n \to 0$$

Могло би се онда уочити да за парно k важи следећа једнакост:

$$E\int_{\mathbb{R}} x^k \, dW_n = \frac{1}{2^k}\frac{1}{n^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{[i]\in C_{k,\frac{k}{2}+1}} \sum_{j\sim i} E \prod_{e\in E(j)} A(e) + o(1)$$

Циклови из ове суме имају k корака и пролазе кроз $\frac{k}{2}+1$ чворова, сваком граном у такозваном скелет графу пролазе бар два пута (у неком од смерова). Граф који има $\frac{k}{2}+1$ темена и $\frac{k}{2}$ ивица је стабло, па је јасно да је скелет граф стабло. Стабло не може садржти циклове, онда цикл пролази сваком граном тачно два пута, по једном у сваком смеру. У супротном појавио би се цикл у скелет графу што је контрадикција са претпоставком.
За очекивање производа одговарајућих места полазне матрице важи следеће:

$$E\prod_{e\in E(j)} A(e) = E\prod_{e\in E'(j)} A(e)A^T(e) = \prod_{e\in E'(j)} E(A(e))^2 = 1$$

Искористили смо да је полазна случајна матрица симетрична и да су ван главне дијагонале

независне случајне величине којима је дисперзија једнака један.
Из свега овога следи:

$$E\int_{\mathbb{R}} x^k\ dW_n = \frac{1}{2^k}\frac{1}{n^{\frac{k}{2}+1}}|C_{k,\frac{k}{2}+1}|\frac{n!}{(n-(\frac{k}{2}+1))!} + o(1) = \frac{1}{2^k}|C_{k,\frac{k}{2}+1}| + o(1)$$

Следећи део овог доказа је да се према претходно добијеном резултату за моменте вишег реда за Вигнерову полукружну расподелу покаже да овако описаних циклова има $C_{\frac{k}{2}}$. Ово може да се уради ако се искористе такозвани Дикови путеви.
Диков пут је целобројна путања у координатном систему (или графу чија темена су означена) састоји се од корака напред (горе) или назад (доле) али тако да никад не узима негативне вредности тј. да не иде испод x-осе. Наредне две леме нас доводе до резултата.

Лема 1.3.1. *Постоји бијекција класа еквиваленције које представљају путеве дужине $2k$ на $k+1$ чвору и Дикових путева.*

Доказ. У сваком кораку једног од представника класе еквиваленције постоје две опције:
1) Да циклус иде у следеће теме у којем није био (то теме је одређено одговарајућом класом еквиваленције).
2) Да се врати у теме у којем је већ био, за то у сваком тренутку постоји тачно један избор.
Ове две опције би могле да се означе са 1 и -1 у сваком кораку, а почиње се од нуле. Цикл се завршава у истом чвору у ком је почео и стално иде за по један корак (јасно је да је број корака цео број).
Ако бисмо од нуле кренули кораком -1, значило би да постоји ивица која води до нултог чвора а већ је пређена, то би значило да пошто се увек полази од нуле постоји циклус у скелет графу, а то је контрадикција јер је скелет граф стабло. Сада смо описали како се у некој класи еквиваленције црта одговарајући Диков пут. Обрнуто, ако нам је дат Диков пут, започињемо циклус из темена 1, кад год Диков пут иде напред у циклусу се иде до непосећеног темена а када Диков пут иде уназад у циклусу се враћамо у теме у ком смо већ били. Овим је лема доказана.

□

Следећа лема говори да је број Дикових путева једнак Каталановом броју.

Лема 1.3.2. *Број Дикових путева дужине $2k$ једнак је C_k.*

Доказ. Број Дикових путева дужине $2k$ је уствари број целобројних путева у координатном систему између тачака $M(0,0)$ и $N(2k,0)$, таквих да не иду испод x-осе. Свих целобројних путева између ове две тачке има $\binom{2k}{k}$ од овог броја треба одузети све путеве који нису Дикови тј. оне који иду испод x-осе. Путеви које треба одузети су путеви који секу праву $y=-1$. Да би се пребројали ови путеви могу се посматрати и путеви из симетричне тачке M' тачки M у односу на праву $y=-1$. Означимо са T_1 скуп свих путева од M до N који секу праву $y=-1$, а са T_2 скуп свих путева од $M'(-2,0)$ до N који секу праву $y=-1$. Нека је S пресечна тачка неке целобројне путање од M до N са правом $y=-1$, али таква да јој је апсциса најмања. Нека је сада t_1 пут од $M(0,0)$ до S, а t_2 пут од S до $N(2k,0)$. Нека је t_s симетричан пут путу t_1 у односу на праву $y=-1$. Сада се може дефинисати функција $g: T_1 \to T_2$ на скупу свих путева од M до N, тако да за неки пут t важи да је $g(t) = t_s \cup t_2$. Овако дефинисана функција је бијекција па је јасно да је број путева од $M(0,0)$ до $N(2k,0)$ који секу праву $y=-1$ исти као број путева од $M'(-2,0)$ до N који секу праву $y=-1$. А сваки од ових путева од M' до N има $k+1$ корак на горе и $k-1$ корак на доле па ових путева има укупно $\binom{2k}{k+1}$. Према томе укупан број Дикових путева дужине $2k$ је:

$$\binom{2k}{k} - \binom{2k}{k+1} = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} = C_k$$

□

Из последње две леме може се закључити да је број класа еквиваленције $C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}+1}$ једнак Каталановом броју $C_{\frac{k}{2}}$. Према ставу 1.3.1, у ком су дате вредности момената вишег реда Вигнерове полукружне расподеле, може се закључити да очекивани моменти емпиријске спектралне расподеле W_n конвергирају ка моментима Вигнерове полукружне расподеле W то јест важи:

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \, dW_n \to \int_{\mathbb{R}} x^k \, dW$$

Сада ћемо користећи ову претпоставку, чињеницу да густина расподеле за W има компактан носач и Левијеву теорему покушати да докажемо конвергенцију у расподели.

Нека је $[-M, M]$ интервал који је надскуп од $[-1, 1]$, $\delta > 0$ и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна и ограничена функција. Према Вајерштрасовој теореми о апроксимацији функције полиномом за ограничену и непрекидну функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ постоји полином P_δ тако да важи:

$$\sup_{[-M,M]} |f(x) - P_\delta(x)| < \delta$$

Посматрајмо следећи израз:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f \, dW_n - \int_{\mathbb{R}} f \, dW\right| \le \left|\int_{\mathbb{R}} P_\delta(x) \, d(W_n - W)\right| + 2\delta + \left|\int_{[-M,M]^c} (f(x) - P_\delta(x)) \, dW_n\right| +$$

$$+ \left|\int_{[-M,M]^c} (f(x) - P_\delta(x)) \, dW\right|$$

Према претпоставци о конвергенцији момената први сабирак тежи нули, а трећи сабирак се може ограничити на следећи начин:

$$\left|\int_{[-M,M]^c} (f(x) - P_\delta(x)) \, dW_n\right| \le C \int_{[-M,M]^c} |x|^p \, dW_n \le C \cdot M^{-q} \int_{\mathbb{R}} |x|^{(p+q)} \, dW_n$$

При чему је p степен полинома P_δ, $q \in \mathbb{N}$ и C реалан број.
Даље важи:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_{[-M,M]^c} (f(x) - P_\delta(x)) \, dW_n\right| \le C \cdot M^{-q} \int_{\mathbb{R}} |x|^{(p+q)} \, dW \le C \cdot M^{-q}$$

У последње две неједнакости прво је искоришћено да одговарајући моменти расподеле W_n конвергирају ка моментима расподеле W, а затим да је носач густине расподеле која одговара W интервал $[-1, 1]$. Аналогно трећем може се ограничити и четврти сабирак посматраног израза.

Кад $q \to \infty$ а $\delta \to 0$ добијамо за сваку ограничену, непрекидну функцију f следећу конвергенцију интеграла:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dW_n \to \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dW$$

Сад можемо искористити Левијеву теорему, ако низ карактеристичних функција низа случајних промењљивих конвергира ка карактеристичној функцији друге случајне промењљиве важи да тај низ конвергира у расподели ка тој случајној промењљивој, то јест у нашем случају ако важи:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itW_n}\ dW_n \to \int_{\mathbb{R}} e^{itW}\ dW$$

онда низ случајних промењљивих W_n конвергира у расподели ка случајној промењљивој W. Претходно разматрање нам показује да то важи за ограничену и непрекидну функцију али овај израз је еквивалентан следећим изразима:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itW_n}\ dW_n \to \int_{\mathbb{R}} e^{itW}\ dW \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \cos(tW_n)\ dW_n \to \int_{\mathbb{R}} \cos(tW)\ dW \wedge \int_{\mathbb{R}} \sin(tW_n)\ dW_n \to \int_{\mathbb{R}} \sin(tW)\ dW$$

А познато је да су синус и косинус непрекидне и ограничене функције па се могу применити претходна разматрања.

Добили смо да низ случајних промењљивих W_n конвергира у расподели ка W, која има Вигнерову расподелу.

Овим је завршен доказ једне од најбитнијих теорема из области случајних матрица. Прво ћемо разјаснити како се она може примењивати на случајне графове, а затим у наредном пододељку навести нека њена унапређења.

Објашњење: Нека је дата матрица $A(G)$ која представља матрицу суседства неког графа. На почетку овог поглавља смо видели да су њени елементи случајне промењљиве које узимају вредности нула или један и којима је очекивање $\frac{1}{2}$ а дисперзија $\frac{1}{4}$. Од ове матрице се може добити матрица A која задовољава дефиницију Вигнеровог ансамбла и на коју се може применити овде доказана Вигнерова теорема на следећи начин:

$$A = 2A(G) - J$$

Елементи ван главне дијагонале ће имати очекивање 0 и дисперзију 1. На дијагонали су све -1, али и то такође не ремети дефиницију и примену теореме. Према томе од Вигнерове случајне матрице може се добити случајна матрица која је матрица суседства неког графа на следећи начин:

$$A(G) = \frac{1}{2}(A + J)$$

Сва досадашња разматрања везана за расподеле сопствених вредности се могу применити на матрицу $A(G)$ зато што сада можемо применити лему 1.2.1 на матрицу $A + J$, јер је матрица J ранга један.

Пошто горе дефинисано N_n представља број сопствених вредности случајне матрице на неком интервалу лема се може директно применити. Добија се да је разлика броја сопствених вредности матрице $\frac{1}{2}(A + J)$ и матрице A по апсолутној вредности мања или једнака од један на сваком интервалу. Емпиријску спектралну дистрибуцију добијамо као $\frac{N_n}{n}$ па кад n тежи бесконачноси може се закључити да сопствене вредности матрица $\frac{A}{\sqrt{n}}$ и $B = \frac{1}{\sqrt{n}}A(G)$ имају исту дистрибуцију. Постоје и друге методе доказивања овог Вигнеровог резултата (видети [56] и [14]).

1.3.2 Напреднији резултати о случајним матрицама

Сада ћемо навести неке најзначајније резултате из ове области који су добијени после Вигнерове теореме.
У. Гренандер[8] је у раду [25] доказао да при условима Вигнерове теореме важи да $W_n(x)$ конвергира у вероватноћи ка $W(x)$.
Л. Арнолд[9] у [3] је доказао следећу теорему.

Теорема 1.3.6. *Нека је дата случајна симетрична матрица, чији елементи ван главне дијагонале имају исту функцију расподеле F, а на главној дијагонали случајне променљиве које имају функцију расподеле G.*

1. *Ако важи $\int_{\mathbb{R}} x^2\, dG < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} x^4\, dF < \infty$ и $\int_{\mathbb{R}} x\, dF = 0$, тада емпиријска дистрибуциона функција расподеле $W_n(x)$ конвергира у вероватноћи ка $W(x)$.*
2. *Ако још важи $\int_{\mathbb{R}} x^4\, dG < \infty$ и $\int_{\mathbb{R}} x^6 dF < \infty$ тада $W_n(x)$ конвергира скоро сигурно ка $W(x)$.*

Наредна два резултата из рада [24] говоре нам о понашању највеће сопствене вредности али и друге сингуларне вредности случајне матрице.

Теорема 1.3.7. *Нека је дата случајна квадратна матрица димензије n тако да су за $i > j$ случајне величине a_{ij} независне (није неопходно да имају исту расподелу) и $a_{ji} = a_{ij}$ и нека су сви елементи матрице ограничени неким реалним бројем T. Даље, нека елементи ван главне дијагонале имају исто математичко очекивање μ и дисперзију σ^2, а за елементе на главној дијагонали $Ea_{ii} = v$, при чему су T, μ, σ^2 и v фиксирани реални бројеви. Ако је $\mu > 0$, дистрибуција највеће сопствене вредности се може апроксимирати нормалном расподелом са очекивањем $(n-1)\mu + v + \frac{\sigma^2}{\mu}$ и дисперзијом $2\sigma^2$.*
За остале сопствене вредности, са вероватноћом која тежи 1 важи:

$$\max_{i \geq 2} |\lambda_i| < 2\sigma\sqrt{n} + O(n^{\frac{1}{3}} \ln n)$$

Ово на крају је добро ограничење одозго за другу сингуларну вредност случајне матрице. Аутори такође наводе да та вредност не може бити много мања од ове са десне стране неједнакости.

Теорема 1.3.8. *Под условима претходне теореме у случају када је $\mu = 0$, са вероватноћом која тежи један важи:*

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| = 2\sigma\sqrt{n} + O(n^{\frac{1}{3}} \ln n)$$

Ови наведени резултати су касније пуно пута цитирани.

[8] Улф Гренандер (1923-2016), шведски математичар који се бавио највише теоријом вероватноће и математичком статистиком.
[9] Лудвиг Арнолд (1937), немачки професор вероватноће и статистике.

Глава 2

Максимална детерминанта и оптимални дизајни

2.1 Адамарове матрице

Дефиниција 2.1.1. *За квадратну матрицу H, димензије n, чији су сви елементи 1 или -1 кажемо да је* ***Адамарова матрица*** *ако важи $H \cdot H^T = nI$.*

Множењем неке врсте или колоне Адамарове матрице са -1 добија се такође Адамарова матрица. Добиле су име по чувеном француском математичару Жаку Саломону Адамару (1865-1963) који је оставио дубок траг осим у матричнном рачуну (где је познат по хипотези о којој ће бити речи касније) и у диференцијалној геометрији, теорији бројева, теорији комплексних функција, парцијалним диференцијалним једначинама.

Дефиниција 2.1.2. *Адамарова матрица је* ***графичка*** *ако је симетрична и са константном дијагоналом. За Адамарову матрицу кажемо да је* ***регуларна*** *ако јој врсте и колоне имају једнаке суме.*

За Адамарову матрицу кажемо да је **нормализована** ако јој прва врста и прва колона садрже све јединице.

Став 2.1.1. *Свака нормализована Адамарова матрица реда $4n$ у свакој врсти (колони) осим првој садржи тачно $2n$ јединица и $2n$ минус јединица. Такође, n минус јединица у свакој врсти (колони) се поклапају у смислу позиција са n минус јединица у свакој другој врсти (колони).*

Чувена Адамарова хипотеза која је постављена крајем 19. века гласи: **за сваки природан број n постоји Адамарова матрица реда $4n$.**
Многи математичари су покушавали да потврде ову хипотезу или да је оборе али још увек никоме то није пошло за руком. Рејмонд Пејли, познати енглески математичар је 1933. године открио методу која конструише Адамарове матрице реда $p+1$ где је p прост број који при дељењу са 4 даје остатак три. Такође је осмислио метод конструкције Адамарове матрице реда $2(p+1)$, где је p прост број који даје остатак 1 при дељењу са 4. У новије време 2005. године два иранска математичара су у раду [35] конструисали Адамарову матрицу реда 428. И поред тога што се проблемом конструкције Адамарових матрица различитог реда бавило много математичара, још увек нису конструсине Адамарове матрице реда:

668, 716, 892, 1004, 1132, 1244... и тако даље. Такође веома комплексно питање представља и колико има различитих Адамарових матрица неког реда.

Дефиниција 2.1.3. *Нека је H регуларна графичка Адамарова матрица са сумом у врстама l и сумом на дијагонали m кажемо да је она позитивног типа ако је $ml > 0$, а негативног типа ако је $ml < 0$.*

Теорема 2.1.1. *Ако постоји регуларна графичка Адамарова матрица реда n позитивног или негативног типа тада постоји Адамарова матрица реда $4n$ оба типа.*

Математичари су налазили разне начине да конструишу Адамарове матрице одређеног реда. Један од начина да се конструише Адамарова матрица вишег реда је Кронекерова[1] конструкција.

Теорема 2.1.2. *Ако имамо две Адамарове матрице H_1 реда m и H_2 реда n онда је и њихов директни (Кронекеров) производ такође Адамарова матрица, а њена димензија је $m \cdot n$.*

Кронекеров или директни производ матрица $H_1 \otimes H_2$ је матрица која се добија кад се сваки елемент матрице H_1 помножи матрицом H_2.

Дефиниција 2.1.4. *За регуларну Адамарову матрицу кажемо да је Бушовог типа ако је $n = l^2$ и подељена је у l^2 блокова димензије $l \times l$. Дијагонални блокови су матрице J, а они који нису на дијагонали имају збир врста и колона једнак нули.*

Значајан је Адамаров резултат везан за максималне вредности које могу да достигну детерминанте матрице.

Теорема 2.1.3. *Нека је A квадратна матрица и нека су сви елементи ограничени тј. $|a_{ij}| \leq b$ тада је*

$$\det(A) \leq b^n n^{\frac{n}{2}}$$

Применом ове теореме на матрице које садржи само -1 и 1 добија се наредна последица.

Последица 2.1.1. *Нека је A квадратна матрица реда n чији су сви елементи -1 или 1, тада важи:*

$$\det(A) \leq n^{\frac{n}{2}}$$

Следећа теорема даје горње ограничење за вредности детерминанте матрице суседства случајног графа, то јест израчуната је конкретна вредност параметра b за ове матрице.

Теорема 2.1.4. *Нека је A матрица суседства случајног графа са n темена и ε произвољан реалан позитиван број, тада скоро сигурно важи следећа неједнакост:*

$$\det(A) \leq \left(\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{4e}}\right)^n n^{\frac{n}{2}}$$

Претходна теорема је директна последица теореме 3.4.1 која је формулисана и доказана у одељку 3.4, а резултат је из рада [41].

[1] Леополд Кронекер (1823-1891), немачки математичар, ученик Дирихлеа и Кумера.

Теорема 2.1.5. *Вредност детерминанте Адамарове матрице реда n je:* $\det H = n^{\frac{n}{2}}$ *и то je највећа вредност детерминанте матрице чији су елементи из скупа* $[-1, 1]$.

За две матрице кажемо да су H еквивалентне ако се једна од друге може добити заменом врста или колона или множењем врсте или колоне са -1.

2.2 Елементи теорије оптималних дизајна

Развој науке, посебно природних наука-физике, биологије и хемије, захтева извођење много експеримената. За такав вид научног истраживања понекад су потребна велика финансијска средства, али и много времена због великог броја понављања. Математичка статистика овде служи да се са што мањим бројем мерења добије резултат који се може сматрати валидним. Крајњи циљ је извршити експеримент што оптималније и што се тиче времена и финансијских средстава, а да буду прихватљиви резултати. У овом поглављу ћемо се бавити математичким апаратом који је од користи у оваквим ситуацијама.

Експеримантални регресиони дизајн је једна од новијих грана математичке статистике која се убрзано развија и чије су примене све веће. Први резултати из ове области објављени су крајем педесетих година прошлог века.

Треба креирати математички модел који помоћу симбола најбоље описује својства и зависност одређених појава у стварним условима експеримента. Веома често се ту појављује зависност неких величина посебно приликом појединих хемијских реакција, кад крајњи продукт зависи од почетних реагенаса али и од температуре, притиска и других физичких величина. Те физичке величине су неке променљиве и у општем случају њих има n па се могу описати вектором са n кордината и тако за свако мерење. N-димензиони простор у коме је овакав вектор дефинисан зове се простор контролних променљивих. Скуп свих тачака овог простора у којима су могућа мерења приликом неког експеримента зове се експериментални домен и означава се са X.

За моделирање оваквих експеримената најбољи је вишедимензиони регресиони модел са m непознатих параметара о коме ће бити више речи касније. Често је задатак да се оцени један или више непознатих параметара из неке популације. То се ради тако што се из те велике популације на случајан начин бира узорак од m променљивих. Скуп од m независних случајних променљивих са истом расподелом назива се прост случајан узорак обима m из те расподеле. Важно је да тај узорак буде тако одабран да се на основу њега могу доносити закључци о целој популацији, такозвани репрезентативни узорак.

Приликом оцене параметара случајног узорка у математичкој статистици важни су следећи појмови које уводимо дефиницијама. Пожељно је да наша оцена има та својства како би случајни узорак био репрезентативан.

Дефиниција 2.2.1. *Оцена $\theta^{'}$ неког непознатог параметра θ је непристрасна или центрирана ако је $E(\theta^{'}) = \theta$.*
Оцена $\theta^{'}$ неког непознатог параметра θ је асимптотски центрирана ако $E(\theta^{'}) \to \theta, n \to \infty$.

За оцену θ' која није непристрасна кажемо да је пристрасна, величина која мери пристрасност је $E(\theta') - \theta$.

Пошто оцењујемо неке случајне величине важно је да се са повећањем обима узорка смањује одступање измерене вредности те случајне величине од очекиване. За ово нам служи постојаност или стабилност оцене.

Дефиниција 2.2.2. *Непристрасна оцена θ' неког непознатог параметра θ је стабилна или постојана ако конвергира у вероватноћи ка θ тј. ако важи:*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta' - \theta| > \varepsilon) = 0$$

Посматрајмо вишедимензиони линеарни регресиони модел дат следећом формулом

$$Y = X\Theta + \varepsilon_n$$

при чему је Θ непознати параметар који треба да се оцени. Али у овом случају то је вектор са m координата. Матрица X је у општем случају матрица са n врста и m колона за коју се претпоставља да је ненегативно дефинитна, ε_n је n-димензиони вектор колона који представља случајну грешку. Квадратна матрица $[A]_{n\times n}$ је ненегативно дефинитна ако за сваки вектор колона x важи да је $x^T Ax \geq 0$.

У датом вишедимензионом регресионом моделу се претпоставља да су очекивања $E\varepsilon_i = 0$ и $E\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$ за $i, j = 1, 2, 3, ..., n$, осим тога претпоставља се и да важи својство хомоскедастичност тј. једнакост дисперзија $D\varepsilon_i = \sigma^2$ за $i = 1, 2, 3..., n$. Када се оцењује параметар Θ циљ је да случајна грешка буде што мања тј. да $\varepsilon_n = Y - X\Theta$ буде минимално. Оценимо непознати параметар Θ методом најмањих квадрата. Метод најмањих квадрата у општем случају подразумева да је разлика између стварних вредности и измерених вредности што мања. Приметимо да пошто је ε вектор колона важи:

$$\varepsilon^T \cdot \varepsilon = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2$$

Према томе треба оценити параметар Θ тако да је $(Y - X\Theta)^T \cdot (Y - X\Theta)$ минимално.
За овакву оцену потребни су нам основни ставови из дифренцирања матрица. На овом месту наводимо неколико тих ставова без доказа.

Став 2.2.1. *Нека је A матрица димензије $m \times n$ тада важи:*

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial t}; \quad i = 1, ..., m; \quad k = 1, ...n.$$

Став 2.2.2. *Нека је α n-димензиони вектор колона и A матрица димензије $m \times n$ тада важи:*

$$\frac{\partial A\alpha}{\partial \alpha} = A$$

Став 2.2.3. *Нека је A матрица димензије $n \times n$ која има позитивну детерминанту, тада важи:*

$$\frac{\partial(\ln \det A)}{\partial t} = TrA^{-1}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)$$

Став 2.2.4. *Нека је α n-димензиони вектор колона и A матрица димензије $n \times n$ тада важи:*

$$\frac{\partial \alpha^T A\alpha}{\partial \alpha} = \alpha^T(A + A^T)$$

Из овог става јасно следи наредна последица.

Последица 2.2.1. *Нека је α n-димензиони вектор колона и A симетрична матрица димензије $n \times n$ тада важи:*

$$\frac{\partial \alpha^T A\alpha}{\partial \alpha} = 2\alpha^T A$$

Означимо са S функционал чији минимум ће бити оцена нашег параметра Θ.

$$S = (Y - X\Theta)^T \cdot (Y - X\Theta) = (Y^T - \Theta^T X^T) \cdot (Y - X\Theta)$$
$$= Y^T Y - Y^T X\Theta - \Theta^T X^T Y + \Theta^T X^T X\Theta$$

Приметимо да је трећи сабирак уствари реалан број:

$$\Theta^T_{1\times m} \cdot X^T_{m\times n} \cdot Y_{n\times 1}$$

Пошто је реалан број, операција транспоновања га не мења:

$$(\Theta^T X^T Y)^T = Y^T X\Theta$$

Матрица $X^T X$ је симетрична па према томе важи:

$$\frac{\partial S}{\partial \Theta} = -Y^T X - Y^T X + 2\Theta^T X^T X$$

Изједначимо сада извод са нулом:

$$-2Y^T X + 2\Theta^T X^T X = 0$$

$$2Y^T X = 2\Theta^T X^T X$$
$$\Theta^T = Y^T X (XX^T)^{-1}$$
$$\Theta = ((X^T X)^T)^{-1} X^T Y$$
$$\Theta' = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Проверимо сада да је ова оцена непристрасна:

$$E(\Theta') = E((X^T X)^{-1} X^T Y) = E(X^{-1}(X^T)^{-1} X^T (X\Theta + \varepsilon))$$
$$= X^{-1} X E(\Theta) + X^{-1} E(\varepsilon) = E(\Theta)$$

Овим је показано да је добијена оцена непристрасна. Следећа теорема се сматра веома важним резултатом у математичкој статистици и позната је као теорема Гаус-Маркова. Резултат ове теореме има велику примену у теорији оптималних дизајна, о којој ће бити речи касније.

Теорема 2.2.1 (Теорема Гаус-Маркова)**.** *Од свих линеарних непристрасних оцена за параметар Θ у линеарном регресионом моделу, најмању дисперзију има оцена добијена методом најмањих квадрата.*

Доказ. Израчунајмо прво дисперзију за добијену оцену Θ', коју смо добили методом најмањих квадрата, а затим покажимо да ни једна друга линеарна непристрасна оцена нема мању дисперзију.

$$D(\Theta') = D((X^T X)^{-1} X^T Y) = (X^T X)^{-1} X^T D(Y)((X^T X)^{-1} X^T)^T$$

$$= X^{-1}(X^T)^{-1} X^T \sigma^2 E X((X^T X)^{-1} X^T)^T = \sigma^2 (X^{-1} X((X^T X)^T)^{-1})$$
$$\Rightarrow D(\Theta') = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

При чему смо искористили чињеницу да је:

$$D(Y) = D(X\Theta + \varepsilon_n) = D(X\Theta) + D(\varepsilon_n) = \sigma^2 EX$$

Нека је сада $\Theta_1 = G^T X + \Theta'$ нека друга линеарна непристрасна оцена параметра Θ, при чему је $G^T X = 0$ и G ненегативно дефинитна матрица.
Израчунајмо сада дисперзију ове оцене:

$$D(\Theta_1) = D(G^T Y + \Theta') = D(G^T Y + (X^T X)^{-1} X^T Y)$$

$$= D((G^T + (X^T X)^{-1} X^T)Y)$$
$$= (G^T + (X^T X)^{-1} X^T) cov(Y) (G^T + (X^T X)^{-1} X^T)^T$$
$$= (G^T + (X^T X)^{-1} X^T) \sigma^2 EX (G + X(X^T X)^{-1})$$
$$= \sigma^2 (G^T G + G^T X (X^T X)^{-1} + (X^T X)^{-1} X^T G + X^{-1} (X^T)^{-1} X^T X X^{-1} (X^T)^{-1})$$
$$= \sigma^2 G^T G + \sigma^2 (X^T X)^{-1} = \sigma^2 G^T G + \Theta'$$

Пошто је G ненегативно дефинитна онда је и $G^T G$ ненегативно дефинитна матрица па према томе дисперзија за оцену Θ_1 је већа него дисперзија за оцену Θ, што је и требало доказати.

□

Питање од интереса је одредити и доњу границу дисперзије свих непристрасних оцена. Одговор на ово питање даје следећа теорема Рао-Крамера. Нека је $f(x, \theta)$ функција веродостојности, означимо са $l(x, \theta)$ њен природни логаритам тј. $l(x, \theta) = \ln(f(x, \theta))$.

Теорема 2.2.2. *Нека је функција $l(x, \theta)$ два пута диференцијабилна и нека је θ' непристрасна оцена непознатог параметра θ, за њену дисперзију важи следећа неједнакост:*

$$D(\theta') \geq \frac{1}{E\left[\left(\dfrac{\partial l(x, \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

Посматрајмо сада поново вишедимензиони регресиони модел:

$$Y = X\Theta + \varepsilon_n$$

Означимо векторе колона матрице X на следећи начин:

$$f^T(x_i) = (f_1(x_i), f_2(x_i), f_3(x_i), ..., f_m(x_i))$$

На овом месту уводимо појам дизајна ξ, који је први увео Киефер у раду [36] из 1959. године. Ако је ξ непрекидни или апроксимативни дизајн за вишедимензиони регресиони модел, дефинисан у коначно много тачака $x_1, x_2, ...x_n$, из експериманталног домена X, за сваку тачку x_i важи:

$$\xi(x_i) = p_i, p_i \geq 0, i = 1, 2, .., n$$

при чему је:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Апроксимативни дизајн можемо посматрати као расподелу вероватноћа на коначном простору вероватноћа. Матрицу корелације за случајне величине Y_i зовемо дисперзиона матрица. Следећа матрица M се зове информациона матрица за дизајн ξ:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) f^T(x_i)$$

Матрице овог облика се често у литератури зову и Фишерове информационе матрице. Њене димензије су $m \times m$ и она је инверз дисперзионе матрице тј. важи $D = M^{-1}$. Матрица M је такође ненегативно дефинитна. Сви оптимални дизајни су уствари функције које зависе од информационе и дисперзионе матрице. Следећа теорема нам даје основна својства информационе матрице.

Теорема 2.2.3. *Информациона матрица за неки дизајн ξ је матрица облика:*

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) f^T(x_i)$$

где је

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

и $n \leq \left[\dfrac{m(m+1)}{2}\right] + 1$ *и за њу важе следећа својства:*

1. *Она је позитивно дефинитна.*

2. *Уколико спектар дизајна ξ садржи мање од m тачака (при чему је m број непознатих параметара) детерминанта ове матрице је једнака нули.*

3. *Скуп свих информационих матрица је конвексан скуп.*

Следећа величина је дисперзија једне линеарне комбинације у вишедимензионом регресионом моделу:

$$d(x, \xi) = f^T(x) M^{-1}(\xi) f(x)$$

Постоји више врста оптималних дизајна и сви су нека функција информационе матрице. Овом приликом их наводимо:

1. D-оптимални дизајн минимизује детерминанту матрице M^{-1}.

2. A-оптимални дизајн минимизује траг матрице M^{-1}.

3. G-оптимални дизајн минимизује максимум $d(x, \xi)$, овај дизајн је у литератури познат и као мин-макс дизајн.

4. E-оптимални дизајн максимизује минималну сопствену вредност информационе матрице.

5. T-оптимални дизајн минимизује траг информационе матрице.

За доказ неког од идућих тврђења биће нам потребна следећа лема из линеарне алгебре коју наводимо са доказом.

Лема 2.2.1. *Нека су A и B квадратне матрице које су позитивно дефинитне и нека је α реалан број такав да $\alpha \in (0,1)$ тада важи:*

$$\det(\alpha A + (1-\alpha)B) \geq (\det A)^{\alpha}(\det B)^{1-\alpha}$$

Доказ. Све сопствене вредности матрица A и B су позитивне. Такође, и детерминанте су позитивне. Трансформишимо изразе на левој и десној страни користећи Бине-Кошијеву теорему, према којој важи: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

$$\det(\alpha A + (1-\alpha)B) \geq (\det A)^{\alpha}(\det B)^{1-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\det(A(\alpha E + (1-\alpha)A^{-1}B)) \geq \det A(\det A)^{\alpha-1}(\det B)^{1-\alpha} \Leftrightarrow$$
$$\det A \cdot \det(\alpha E + (1-\alpha)A^{-1}B) \geq \det A((\det A)^{-1})^{1-\alpha}(\det B)^{1-\alpha} \Leftrightarrow$$
$$\det(\alpha E + (1-\alpha)A^{-1}B) \geq (\det A^{-1}\det B)^{1-\alpha} \Leftrightarrow$$
$$\det(\alpha E + (1-\alpha)A^{-1}B) \geq (\det A^{-1}B)^{1-\alpha}$$

Посматрајмо сада матрицу $A^{-1}B$:

$$A^{-1}B = A^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$$

Пошто су A и B симетричне матрице сличне дијагоналној, онда је то и матрица $A^{-1}B$, нека је ради лакшег записа сада $A^{-1}B = C$. Матрица C је слична дијагоналној и позитивно дефинитна. Нека су λ_i њене сопствене вредности, које су позитивне. Сада треба показати да важи следећа неједнакост:

$$\det(\alpha E + (1-\alpha)C) \geq (\det C)^{1-\alpha}$$

$$\det(\alpha E + (1-\alpha)C) = \prod_i(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i)$$

Посматрајмо сада следећу неједнакост:

$$\alpha + (1-\alpha)\lambda_i \geq \lambda_i^{1-\alpha}$$

Показаћемо да она важи тако што је логаритмујемо и искористимо да је логаритамска функција конкавна.

$$\ln(\alpha \cdot 1 + (1-\alpha)\lambda_i) \geq \alpha \ln 1 + (1-\alpha)\ln\lambda_i = \ln(\lambda_i)^{1-\alpha}$$

Према томе важи:

$$\prod_i(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) \geq \prod_i(\lambda_i^{1-\alpha}) = \left(\prod_i \lambda_i\right)^{1-\alpha} = (\det C)^{1-\alpha}$$

Ово је и требало доказати.

□

Да бисмо извели доказ најважније теореме ове области потребно нам је пар лема од којих неке наводимо са доказом, а неке без доказа.
Наредна лема има примену и у другим гранама математике па је наводимо са доказом.

Лема 2.2.2. *Функција* $\ln(\det M)$ *је строго конкавна.*

Доказ. Скуп информационих матрица $M(\xi)$ је конвексан скуп, треба још показати да важи:

$$\ln(\det M) \geq (1-\alpha)\ln\det(M_1) + \alpha \ln\det(M_2)$$

При чему су M_1 и M_2 различите информационе матрице и важи $M = (1-\alpha)M_1 + \alpha M_2$, а α је ралан број и $\alpha \in (0,1)$.
Приметимо да важи:

$$\ln(\det M) = \ln(\det(1-\alpha)M_1 + \alpha M_2)$$

Применимо сада на детерминанту која је нумерус логаритма лему 2.2.1.

$$\begin{aligned}\ln(\det M) &= \ln(\det(1-\alpha)M_1 + \alpha M_2) \geq \ln((\det M_1)^{1-\alpha} \cdot (\det M_2)^{\alpha}) \\ &= \ln(\det M_1)^{1-\alpha} + \ln(\det M_2)^{\alpha} = (1-\alpha)\ln(\det M_1) + \alpha \ln(\det M_2)\end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

Лема 2.2.3. *Нека су* ξ_1 *и* ξ_2 *два дизајна са информационим матрицама* $M(\xi_1)$ *и* $M(\xi_2)$ *и нека је* $M(\xi)$ *информациона матрица дизајна* $\xi = (1-\alpha)\xi_1 + \alpha\xi_2$ *и* $\alpha \in (0,1)$. *Тада важи:*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln\det(M(\xi)) = TrM^{-1}(\xi)(M(\xi_2) - M(\xi_1))$$

Доказ. Информациона матрица дизајна ξ је:

$$M(\xi) = (1-\alpha)M(\xi_1) + \alpha M(\xi_2)$$

Диференцирајмо сада логаритам детерминанте користећи претходне ставове:

$$\ln\det(M(\xi)) = \ln\det((1-\alpha)M(\xi_1) + \alpha M(\xi_2))$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln\det(M(\xi)) &= TrM^{-1}(\xi)\frac{\partial M(\xi)}{\partial \alpha} \\ &= TrM^{-1}(\xi)(M(\xi_2) - M(\xi_1))\end{aligned}$$

□

Лема 2.2.4. *У већ описаном моделу важе следеће две једнакости:*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i d(x,\xi) = m$$

$$\max_x d(x,\xi) \geq m$$

Наредна теорема је централно тврђење и позната је у литератури као теорема еквиваленције.

Теорема 2.2.4. *Следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *Дизајн* ξ^* *минимизује* $\det(M(\xi))$.

2. *Дизајн* ξ^* *минимизује* $\max_x d(x, \xi)$.

3. $\max_x d(x, \xi) = m$.

Свака линеарна комбинација дизајна који задовољавају ова три тврђења такође задовољава ова три тврђења и информационе матрице дизајна који задовољавају ова три тврђења су међусобно једнаке.

Другим речима D-оптимални дизајн и G-оптимални дизајн су међусобно еквивалентни.

Доказ. 1) $\Rightarrow$ 2)
Нека ξ^* максимизује $\det(M(\xi))$. Посматрајмо линеарну комбинацију ξ^* и неког произвољног дизајна ξ:

$$\xi^{'} = (1-\alpha)\xi^* + \alpha\xi$$

Информациона матрица дизајна $\xi^{'}$ је:

$$M(\xi^{'}) = (1-\alpha)M(\xi^*) + \alpha M(\xi)$$

Урадимо извод логаритма детерминанте као у леми 2.2.3:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\det(M(\xi^{'})) = TrM^{-1}(\xi^{'})(M(\xi) - M(\xi^*))$$

Убацимо у ову једнакост $\alpha = 0$ приметимо да тада важи да је $\xi^{'} = \xi^*$ и да је $TrM^{-1}(\xi^*)M(\xi^*) = m$ добијамо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\det(M(\xi^{'})) &= TrM^{-1}(\xi^{'})(M(\xi) - M(\xi^*))\\ &= TrM^{-1}(\xi^*)M(\xi) - m\end{aligned}$$

Последњи израз је према дефиницији ξ^* мањи или једнак од нуле.

Посматрајмо сада израз:

$$TrM^{-1}(\xi^*)M(\xi) - m$$

Без умањења општости се може узети да се дизајн ξ састоји само од једне тачке $x \in X$ онда важи:

$$TrM^{-1}(\xi^*)M(\xi) - m = TrM^{-1}(\xi^*)f(x)f^T(x) - m = d(x, \xi^*) - m \leq 0$$

Из ове неједнакости и леме 2.2.4 дела 1) јасно се види да ξ^* минимизује $\max_x d(x, \xi^*)$.
2) $\Rightarrow$ 1)
Нека ξ^* минимизује максимум $\max_x d(x, \xi^*)$ а није D-оптимални дизајн. По леми 2.2.2 важи да је $\ln\det(M)$ конкавна функција. Урадимо извод линеарне комбинације и опет изједначимо α са нулом. Имаћемо:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\det((1-\alpha)M(\xi^*) - \alpha M(\xi)) = TrM^{-1}(\xi^*)M(\xi) - m > 0 \tag{2.1}$$

Сваки дизајн ξ се може представити као линеарна комбинација коначног броја дизајна па према томе важи:

$$TrM^{-1}(\xi^*)M(\xi) - m = \sum_{i=1}^{n} p_i d(x_i, \xi^*) - m$$

Пошто је ξ^* максималан тада је

$$d(x_i, \xi^*) \leqslant m$$

одавде следи:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i d(x_i, \xi^*) - m \leqslant m \sum_{i=1}^{n} p_i - m = 0$$

Из ове неједнакости и неједнакости 2.1 следи да је у питању D-оптимални дизајн 1) $\Leftrightarrow$ 3) и 2) $\Leftrightarrow$ 3) следи из 1) $\Leftrightarrow$ 2) и леме 2.2.4.

Нека су даље ξ_1 и ξ_2 дизајни са информационим матрицама $M(\xi_1)$ и $M(\xi_2)$ D-оптимални и нека је $M(\xi_1) \neq M(\xi_2)$. Посматрајмо информациону матрицу дизајна ξ који је конвексна комбинација дизајна ξ_1 и ξ_2

$$M(\xi) = (1-\alpha)M(\xi_1) + \alpha M(\xi_2)$$

Логаритам детерминанте ове матрице је конкавна функција па важи:

$$\ln\det(M(\xi)) \geq (1-\alpha)\log\det(M(\xi_1)) + \alpha\log\det(M(\xi_2))$$

Пошто су дизајни ξ_1 и ξ_2 D-оптимални јасно је да мора да важи:

$$\det(M(\xi_1)) = \det(M(\xi_2)) \geq \det(M(\xi))$$

Претходна неједнакост онда постаје:

$$\ln\det(M(\xi)) \geq \ln\det(M(\xi_1))$$

Ове последње две нејднакости могу да важе без контрадикције само ако је:

$$M(\xi_1) = M(\xi_2) = M(\xi)$$

Овим је доказана теорема.

□

Ова теорема је доказана 1959. године у раду [37].

Последица 2.2.2. *У тачкама D-оптималног дизајна ξ^* дисперзија $d(x, \xi^*)$ достиже своју максималну вредност m.*

Теорема 2.2.5. *Ако су ξ_1 и ξ_2 дизајни са различитим информационим матрицама $M(\xi_1)$ и $M(\xi_2)$ тако да је $\det(M(\xi_1)) = \det(M(\xi_2))$ тада за информациону матрицу дизајна:*

$$\xi = (1-\alpha)\xi_1 + \alpha\xi_2, \alpha \in (0,1)$$

важи:

$$\det(M(\xi)) > \det(M(\xi_1))$$

Пример 2.2.1. *Посматрајмо неких m објеката које треба измерити на ваги са два таса. Узмимо ситуацију да имамо укупно n мерења која извршавамо. Меримо тако што стављамо по један објекат са обе стране и вага покаже који је тежи тј. леви или десни тас се спусти ниже. Дефинишимо сада величину x_{ij} на следећи начин:*

1. *$x_{ij} = 1$ ако се објекат j налази на левом тасу при мерењу i.*
2. *$x_{ij} = -1$ ако се објекат j налази на десном тасу при мерењу i.*
3. *$x_{ij} = 0$ ако је објекат j изостављен при мерењу i.*

Нека су даље $\theta_1, \theta_2, \theta_3, ..., \theta_m$ редом стварне тежине датих m објеката и $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ резултати добијени у n мерења на ваги. Означимо вектор колоне чије су димензије m и координате редом $\theta_1, \theta_2, \theta_3, ..., \theta_m$ са Θ, а вектор колоне димензије n чије су координате редом $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ са Y. Тада овакво мерење може да се представи вишедимензионим регресионим моделом о коме је већ било речи, а који гласи:

$$Y = X\Theta + \varepsilon$$

Сада је ε n-димензиони вектор колона при чему свака координата ε_i представља грешку приликом i-тог мерења. Затим се, као у полазном моделу претпоставља да је $E\varepsilon_i = 0$; $E(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = 0$; $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$, према томе коваријациона матрица је $\sigma^2 I$. Према већ наведеној теореми Гаус-Маркова најмању дисперзију има оцена:

$$\Theta' = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

добијена методом најмањих квадрата. Та дисперзија износи $\sigma^2 (X^T X)^{-1}$. Хотелинг је 1944. године показао да дисперзија једне појединачне врсте не може бити мања од $\dfrac{\sigma^2}{n}$. У радовима Киефера је показано да се оптимални дизајни (који су еквивалентни) увек достижу када је $X \cdot X^T = nI$.

Овде се може видети веза између оптималних дизајна и Адамарових матрица. Дизајн одређен матрицом X је оптималан уколико постоји матрица реда $n \times m$ која садржи ± 1 и којој су колоне ортогоналне. Другим речима за свако m мање или једнако од n колоне одговарајуће Адамарове матрице реда n одређују оптимални тежински дизајн. Разни аутори су повезивали Адамарове матрице са оптималним дизајнима (видети радове [54], [46], и [31]).
У наредним поглављима ће бити поново помињане Адамарове матрице, а у вези других екстремалних проблема. Прво ће бити споменуте као матрице са којих се лако прелази на матрицу суседства графа који има максималну енергију. Биће описано и како се са те екстремалне Адамарове матрице која садржи -1 и 1 прелази на матрицу суседства графа (која садржи само нуле и јединице), који за одређену димензију достиже максималну енергију.

Такође у поглављу о Шатеновим p-нормама биће дато неколико теорема које дају ограничења Шатенове норме r-партитне матрице, која се може добити од Адамарових и конференционих матрица. Једно уопштење Шатенових норми је и детерминанта, добија се за $p = 0$. Одређивање максималне Шатенове p-норме за $p = 0$ могло би да се сведе на налажење максималне детерминанте. Биће оцењена и геометријска средина сингуларних вредности случајног графа, која се лако може повезати са апсолутним вредностима детерминанте матрице суседства графа. Познато је да је производ свих сопствених вредности матрице једнак детерминанти те матрице.

Глава 3

Енергија графа и њена уопштења

3.1 Енергија графа

Посебан проблем који ће бити заступљен у овој дисертацији је **енергија графа**. Овај појам је увео Иван Гутман 1978. године у раду [26] као важан појам за хемијску структуру молекула. Јасно је да молекул може да се представи графом, атоми би били чворови, хемијске везе гране, а валенца атома би био степен одговарајућег чвора и многи други појмови из хемије се могу повезати са појмовима из спектралне теорије графова, али о томе више у наставку. Јасно је да проблем енергије графа повезује хемију са спектралном теоријиом графова. На пример уколико се нула налази међу сопственим вредностима графа ради се о нестабилном молекулу који је кратког века, а с друге стране некада се на основу структуре графа може утврдити да ли му је нула једна од сопствених вредности па самим тим и да ли је молекул стабилан.

Дефиниција 3.1.1. *Енергија графа G са n чворова, у ознаци $E(G)$ је сума апсолутних вредности сопствених вредности графа тј.*

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

Када је хемичар Хукел почетком 20. века испитивао стабилност молекула бензена, применио је квантну теорију. Показало се да је таква теорија примењива и на друге π-молекулске орбиталне системе, па је развијена читава теорија која је позната као Хукелова молекулско-орбитална теорија. Да би се добро описао неки проблем из квантне механике потребно је да се реши такозвана Шредингерова једначина, која описује како се квантно стање неког физичког система мења са временом, она гласи:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \hat{H}\Psi(x,t)$$

Општи облик временски независне, стационарне Шредингерове једначине је:

$$\hat{H}\Psi = \Psi E$$

где је $\hat{H}$ Хамилтонов оператор који карактерише тоталну енергију таласне функције и представља познату величину за сваки молекул, $\hbar$ редукована Планкова константа (негде је зову и Диракова константа), а Ψ је таласна функција. Планкова и редукована Планкова константа фигуришу, између осталог, у изразу за описивање најмање могуће вредности енергије електромагнетног зрачења, једног кванта. Таласна функција описује стање

физичког система. Опште стање система је линеарна комбинација стационарних стања система. Циљ је израчунати E тј. енергију система у зависности од стационарне таласне функције. Хукелова теорија је најбоља за описивање атома и молекула коњугованих угљо-водоника. Сваки атом угљеника даје по један π-електрон. У Хукеловој молекулско-орбиталној теорији се користи упрошћен Хамилтонов оператор који је
представљен квадратном матрицом $\hat{H} = [h_{ij}]$ реда n, уколико молекул угљеника има n атома. При чему је:

$$h_{ij} = \begin{cases} a, & \text{ако је } i = j \\ b, & \text{ако је } i \neq j \text{ и ако постоји хемијска веза између њих} \\ 0, & \text{ако је } i \neq j \text{ и ако не постоји хемијска веза између њих} \end{cases}$$

Према томе матрица $\hat{H}$ се може записати на следећи начин:

$$\hat{H} = aI_n + bA(G)$$

где је $A(G)$ матрица суседства графа молекула. Даље је циљ решити такозвану секуларну једначину која гласи

$$\det(EI_n - \hat{H}) = 0$$

Ову једначину треба решити по E при чему се добија n решења $E_1, E_2, .., E_n$ која су уствари енергије молекулских орбитала. Поменута једначина се може трансформисати на следећи начин:

$$\begin{aligned} \det(EI_n - \hat{H}) &= \det((E-a)I_n - bA(G) \\ &= b^n \det\left(\frac{E-a}{b} I_n - A(G)\right) \end{aligned}$$

ако бисмо сад увели смену $\lambda = \dfrac{E-a}{b}$ добијамо следеће:

$$b^n \det(\lambda I_n - A(G)) = 0$$

Из овога следи да је прва једначина еквивалентна последњој тј. да је довољно израчунати сопствене вредности одговарајућег графа молекула. Између енергије електрона и спостевних вредности одговарајућег графа постоји следећа веза:

$$E_i = a + \lambda_i b$$

Укупна енергија у Хукеловој молекулско-орбиталној теорији добија се сабирањем свих енергија орбитала, наравно води се рачуна о броју електрона у свакој орбитали. Нека је o_i број електрона у π-орбитали i. Одређене орбитале имају по 2 π-електрона (такозване везивне), а одређене орбитале које се зову антивезивне су празне па важи:

$$o_i = \begin{cases} 0, & \text{ако је } \lambda_i < 0 \\ 2, & \text{ако је } \lambda_i > 0 \end{cases}$$

Према томе укупна енергија система који има n $\pi-$електрона се може записати:

$$E_\pi = \sum_{k=1}^{n} o_k(a + \lambda_k b)$$

то јест

$$E_\pi = an + b\sum_{k=1}^{n} o_k\lambda_k$$

Пошто су у питању константе главни део је израчунати суму:

$$\sum_{k=1}^{n} o_k\lambda_k$$

али према дефиницији o_i јасно је да важи:

$$\sum_{k=1}^{n} o_k\lambda_k = 2\sum_{k=+}\lambda_k$$

последња сума је само за позитивне λ уколико је $\lambda = 0$ тај сабирак је нула. Рачунање енергије молекуларних орбитала се овим своди на рачунање збира позитивних сопствених вредности одговарајућег графа. Из овог се може закључити колико је енергија графа важна за Хукелову молекулско-орбиталну теорију и одакле мотив за увођење овог појма у хемији.
Тек крајем деведесетих година су математичари почели да се више баве енергијом графа и од тада је ова област у експанзији, објављено је више стотина научних радова у престижним часописима.

Оно што највише изазива пажњу математичара је како одредити граф одређених димензија који има највећу енергију. И како за одређене класе графова одредити што бољу горњу и доњу оцену за енергију графа.

Један од најважнијих резултата везан за достизање максималне енергије графа доказан је у раду Кулена и Мултона [39] и исказује га следећа теорема.

Теорема 3.1.1. *Нека је G граф са n чворова и без петљи тада за његову енергију важи следећа неједнакост:*

$$E(G) \leq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$$

при чему једнакост важи ако је G јако регуларан граф са параметрима

$$\left(n, \frac{n+\sqrt{n}}{2}, \frac{n+2\sqrt{n}}{4}, \frac{n+2\sqrt{n}}{4}\right)$$

Многи каснији резултати су изведени из ове неједнакости. Први аутор овог рада у свом самосталном раду [44] даје горње ограничење за енергију графа, које осим од броја чворова зависи и од броја грана тог графа.

Теорема 3.1.2. *За граф G са n чворова и m грана важи:*

$$E(G) \leq \sqrt{2mn}$$

У истом раду аутор даје и доње ограничење за енергију графа, које осим од броја чворова и грана зависи и од детерминанте матрице суседства.

Теорема 3.1.3. *Нека је G граф са n чворова, m грана и матрицом суседства A тада за његову енергију важи следећа неједнакост:*

$$E(G) \geq \sqrt{2m + n(n-1)|\det A|^{\frac{2}{n}}}$$

Побољшање овог ограничења дају аутори Гутман и Дас у раду [21], оно је исказано наредном теоремом.

Теорема 3.1.4. *Нека је G граф са n чворова, m грана и матрицом суседства A тада за његову енергију важи следећа неједнакост:*

$$E(G) \geq \sqrt{2m + n(n-1)|\det A|^{\frac{2}{n}} + \frac{4}{(n+1)(n-2)}\left(\left(\frac{2m}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2m}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right)}$$

Група аутора је у раду [13] ограничила одоздо енергију графа само у зависности од тога колико граф има грана.

Теорема 3.1.5. *Нека је дат граф G са m грана тада за његову енергију важи:*

$$E(G) \geq 2\sqrt{m}$$

при чему једнакост важи ако и само ако G садржи комплетан бипартитни граф $K_{a,b}$ при чему је $a \cdot b = m$ и произвољно много изолованих чворова.

За граф кажемо да је несингуларан ако му је матрица суседства несингуларна. У раду [20] дато је следеће доње ограничење за енергију графа.

Теорема 3.1.6. *Нека је дат повезан несингуларан граф са n чворова m грана и матрицом суседства A тада важи:*

$$E(G) \geq \frac{2m}{n} + n - 1 + \ln|\det A| - \ln\frac{2m}{n}$$

при чему важи једнакост ако и само ако је G изоморфан комплетном графу K_n.

У неким радовима је посматрана енергија специјалних класа графова и неких графова који имају специфичне матрице суседства.
Тако на пример у раду [1] аутори дају доње ограничење за енергију бипартирног графа у зависности од тога каква му је највећа сопствена вредност.

Теорема 3.1.7. *Нека је G бипартитни граф реда $n > 2$, са m ивица за који важи да је $2m \geq n$, ако је највећа сопствена вредност ограничена одоздо $\lambda_1 \geq \xi \geq \dfrac{2m}{n}$ тада важи:*

$$E(G) \geq 2\xi + (n-2)\left(\frac{|\det A|}{\xi^2}\right)^{\frac{1}{n-2}}$$

при чему једнакост важи ако је $\lambda_1 = -\lambda_n = \xi$ и $|\lambda_2| = |\lambda_3| = ... = |\lambda_{n-1}| = \frac{E(G)-2\xi}{n-2}$.

Пошто су за овај рад занимљивије горње границе тј. максимална енергија графа у наставку наводимо још неколико резултата везаних за горње ограничење за енергију графа. У раду [39] даје се горње ограничење за енергију графа које зависи од броја чворова и броја грана.

Теорема 3.1.8. *Нека је G граф са n чворова и m грана. Тада за његову енергију важи:*

$$E(G) \leq \frac{2m}{n} + \sqrt{(n-1)\left(2m - \left(\frac{2m}{n}\right)^2\right)}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је G или $\frac{n}{2}K_2$ или K_n или некомплетан повезан јако регуларан граф који има две нетривијалне сопствене вредности чија је апсолутна вредност $\sqrt{\dfrac{2m - \left(\frac{2m}{n}\right)^2}{n-1}}$.

Исти аутори дају у раду [40] горње ограничење за бипартитне графове, исказано следећом теоремом.

Теорема 3.1.9. *Нека је G бипартитни граф са n чворова m грана, и $2m > n$ тада за његову енергију важи:*

$$E(G) \leq 2\frac{2m}{n} + \sqrt{(n-2)\left(2m - 2\left(\frac{2m}{n}\right)^2\right)}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је G $\frac{n}{2}K_2$ или комплетан бипартитни граф.

У раду [63] аутор даје горње ограничење за енергију графа које зависи од броја чворова и степена чворова.

Теорема 3.1.10. *Нека је дат граф G са n чворова чији су степени редом $d_1, d_2, ..., d_n$ тада важи:*

$$E(G) \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2} + \sqrt{(n-1)\cdot\left(2m - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right)}$$

при чему једнакост важи ако је G или $\dfrac{n}{2}K_2$ или комплетан бипартитни граф, или јако регуларан граф са две нетривијалне сопствене вредности које су обе по апсолутној вредности једнаке $\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\cdot\left(2m - \left(\frac{2m}{n}\right)^2\right)}$.

Дефиниција 3.1.2. *За квадратну матрицу реда n кажемо да је ортогонална уколико њене колоне представљају ортонормирану базу у $\mathbb{R}^n$. За њу важи $A^T = A^{-1}$.*

Дефиниција 3.1.3. *Квадратну матрицу C реда n чији су сви елементи 1 и -1, а на дијагонали се налазе нуле зовемо конференциона матрица уколико важи следећа једнакост:*

$$C \cdot C^T = (n-1)I$$

За конференциону матрицу кажемо да је нормализована уколико јој прва врста и прва колона садрже само јединице, а елемент $a_{11} = 0$.
Следећи резултати из рада [10] су везани за енергију графа уколико је матрица суседства ортогонална матрица.

Теорема 3.1.11. *Нека је G граф без петљи са n чворова и нека је $O^s(n)$ фамилија свих ортогоналних матрица реда n тада важи:*

$$E(G) \leq \frac{n}{2} + max_O \frac{1}{2}|O|_1 \leq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$$

где је максимум узет по свим ортогоналним матрицама.

Ознака $|O|_1$ представља норму одговарајуће ортогоналне матрице која је дата следећом дефиницијом.

Дефиниција 3.1.4. *За матрицу $A = [a_{ij}]$ дефинишемо норму у ознаци $|A|_1$ на следећи начин:*

$$|A|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

Више детаља о разним нормама матрице биће у посебном поглављу овог рада.
Нека је $E_n = \max_G E(G)$, где је максимум узет по свим графовима са n чворова.
Кажемо да је ортогонална симетрична матрица $O = [o_{ij}]$ екстремална ако је

$$E_n = \sum_{i \neq j} o_{ij}^{+}$$

и за G са n чворова је то екстремална енергија графа ако је $E_n = E(G)$.

Став 3.1.1. *Нека је $O = [o_{ij}]$ симетрична, ортогонална екстремална матрица тада је $E_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$ ако и само ако важе следећи услови:*

1. $\sum_j o_{ij} = 1$;
2. $|o_{ij}| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;
3. $o_{ii} \leq 0$.

Следеће две теореме из рада [30] повезују максималну енергију графа са Адамаровим матрицама.

Теорема 3.1.12. *За све $k, m \in \mathbb{N}$ постоји регуларна графичка Адамарова матрица негативног типа реда n, при чему је $n = 4^{k+1}m^4$, таква да јој одговара граф који има максималну енергију.*

Теорема 3.1.13. *Ако је n ред Адамарове матрице, тада постоји регуларна графичка Адамарова матрица реда n^2 негативног типа и максималне енергије одговарајућег графа чија је она матрица суседства.*

Пошто је Адамарова матрица H по дефиницији $(-1, 1)$-матрица, а матрица суседства графа $(0, 1)$-матрица овде се подразумева прелазак са прве на другу матрицу. Пошто је наглашено да се ради о графичкој Адамаровој матрици тј. оној код које је константна дијагонала значи да су на дијагонали сви елементи -1 или све јединице. У првом случају се од Адамарове матрице H прелази на матрицу суседства графа A на следећи начин:

$$A = \frac{1}{2}(H + J)$$

У другом случају када су све јединице матрица суседства графа се добија формулом:

$$A = \frac{1}{2}(J - H)$$

Претходне две теореме говоре о овако добијеним матрицама тј. графовима којима су оне матрице суседства. Значајан проблем из ове области је проблем достизања максималне енергије графа са одређеним бројем чворова. Поставља се питање колико износи максимална енергија графа са n чворова и који граф има највећу енергију. Познати радови који се баве овим проблемом су [48] и [39]. Следећа теорема из рада [48] даје доње ограничење за енергију графа.

Теорема 3.1.14. *За свако довољно велико n постоји граф G са n чворова такав да за његову енергију важи:*

$$E(G) \geq \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{11}{10}}$$

Дефинисаћемо сада појмове хипо-енергетских и хипер-енергетских графова. Познато је да је енергија комплетног графа са n чворова једнака $2n-2$ и да је то највећа енергија графа за графове са малим бројем чворова (мање од 9).

Дефиниција 3.1.5. *За граф кажемо да је хипо-енергетски уколико му је енергија мања од n.*

Дефиниција 3.1.6. *За граф кажемо да је хипер-енергетски уколико му је енергија већа од $2n-2$.*

Сада ћемо видети важну теорему из [47] чија је последица да су скоро сви графови хипер-енергетски. Касније у неком од наредних поглавља видећемо да је ова теорема само специјални случај једног општијег резултата.

Владимир Никифоров је у [47] оценио енергију за скоро све случајне графове користећи већ познате резултате Арнолда и Вигнера из поменутих радова. Следећа теорема је његов резлутат.

Теорема 3.1.15. *За скоро све случајне графове важи:*

$$E(G) = \left(\frac{4}{3\pi} + o(1)\right) n^{\frac{3}{2}}$$

Исти математичар је у раду [51] израчунао енергију за скоро све k-регуларне графове.

Теорема 3.1.16. *Нека је $k \geq 2$ фиксиран природни број. Енергија скоро сваког k-регуларног графа G са n чворова износи:*

$$E(G) = \frac{n}{\pi}\left(2k\sqrt{k-1} - k(k-2)\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{k-1}}{k-2}\right) + o(n)$$

За рачунање енергије графа значајна је и следећа Кулсонова [1] интегрална формула која је доказана у раду [16] још 1940. године. Ако са $P(x)$ означимо карактеристични полином графа онда та формула гласи:

$$E(G) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(n - \frac{ixP'(ix)}{P(ix)}\right)\,dx$$

Размотримо сада како се може доћи до ове формуле.
Нека је $P(z)$ полином степена n који зависи од комплексне променљиве z и нека су $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ корени тог полинома. Полином $P(z)$ се онда може представити на следећи начин:

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-\lambda_k)$$

Ако урадимо први извод добијамо:

$$P'(z) = (z-\lambda_2)(z-\lambda_3)\cdots(z-\lambda_n) + (z-\lambda_1)(z-\lambda_3)\cdots(z-\lambda_n) + ... + (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_{n-1})$$

[1] Чарлс Алфред Кулсон (1910-1974), британски математичар и хемичар.

За количник полинома $P'(z)$ и $P(z)$ важи:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-\lambda_k}$$

Одавде се може добити:

$$\frac{zP'(z)}{P(z)} - n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z-\lambda_k}$$

Приметиомо да важи и следећа једнакост:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z-\lambda_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z(z-\lambda_k)}$$

Следећи лимес важи за свако $k = 1, 2, ..., n$:

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\lambda_k}{z-\lambda_k} = 0$$

Због претходних једнакости и чињенице да је збир сопствених вредности графа једнак нули, добија се:

$$\lim_{|z|\to\infty} z \cdot \left(\frac{zP'(z)}{P(z)} - n\right) = \lim_{|z|\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z-\lambda_k}\right) = 0$$

Корени полинома $P(z)$ не морају бити различити. Пошто се рачуна енергија графа зна се да су $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ реални бројеви чији је збир једнак нули (формула важи и у општијим случајевима). Сума свих сопствених вредности може да се представи као збир суме свих позитивних и суме свих негативних сопствених вредности. У овом случају последње две суме су једнаке по апсолутној вредности, јер је збир сопствених вредности једнак трагу матрице суседства (овај услов је битан за валидност Кулсонове формуле у општем случају, видети објашњења у [28]). Према томе важи:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{+} \lambda_k + \sum_{-} \lambda_k$$

Посматрајмо сада затворену, позитивно оријентисану контуру Γ у комплексној равни и нека је z_0 комплексан број. Према Кошијевој интегралној формули важи:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \begin{cases} 0, & \text{ако } z_0 \in \ ext(\Gamma) \\ 1, & \text{ако } z_0 \in \ int(\Gamma) \end{cases}$$

Нека је контура Γ полукруг у десној полуравни са центром у нули полупречника R. Може се учинити да се сви позитивни корени полинома $P(z)$ налазе унутар контуре Γ^+, тако што се повећа полупречник ($R \to \infty$).

Према претходним разматрањима важи:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \left(\frac{zP'(z)}{P(z)} - n\right) \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z-\lambda_k} \, dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{dz}{z-\lambda_k} = \sum_{+} \lambda_k$$

Ако искористимо чињеницу да су све позитивне вредности λ унутар контуре Γ^+ онда интеграл:

$$\int_{\Gamma+}\left(\frac{zP'(z)}{P(z)}-n\right)\,dz$$

не зависи од форме контуре. У граничном случају када контура Г постаје бесконачно велика на интеграл утиче једино њен део који лежи дуж y-осе. За део контуре који не лежи на y-оси када $|z|\to\infty$ подинтегрална функција помножена са $|z|$ тежи нули, па интеграл по том делу контуре такође тежи нули.

Добија се:

$$\sum_{+}\lambda_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+}\left(\frac{zP'(z)}{P(z)}-n\right)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{+\infty}^{-\infty}\left(\frac{iyP'(iy)}{P(iy)}-n\right)\,d(iy)$$

Одавде је јасно да је:

$$\sum_{+}\lambda_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(n-\frac{ixP'(ix)}{P(ix)}\right)\,dx$$

Према томе важи формула за енергију графа:

$$E(G)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(n-\frac{ixP'(ix)}{P(ix)}\right)\,dx$$

За нека унапређења, модификације и уопштења овде изведене Кулсонове формуле видети [17], [18] и [43].
Енергија графа је област која се убрзано развија у математици и хемији. Због тога сада постоји много врста енергије графа, наводимо овде неке најпознатије: енергија растојања, енергија спаривања, Лапласова енергија графа, Рандићева енергија (видети [65], [27], [29]). У овом поглављу је описана основна енергија графа, како се добија и дата су нека горња и доња ограничења. Касније ћемо видети њена уопштења као и екстремалне проблеме везане за та уопштења, то су Шатенове p-норме и достизање њихових максималних вредности.

3.2 Шатенове норме

Норма матрице је величина која не зависи од броја врста или колона матрице и представља уопштење норме вектора. Нека је $M_{m,n}$ простор комплексних матрица димензије $m \times n$.

Дефиниција 3.2.1. *Норма матрице је ненегативна функција* $\| \cdot \|$, $\| \cdot \|$: $M_{m,n} \to \mathbb{R}$ *за коју важи следеће:*

1. $\| A \|= 0 \Leftrightarrow A = 0$;

2. $\| \alpha A \|=| \alpha | \| A \|$ *за сваки комплексан број* α;

3. $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$ *за свако* $A, B \in M_{m,n}$.

Најједноставнији пример норме матрице $[A]$ је такозвана макс-норма, дефинише се као максимална апсолутна вредност елемента матрице:

$$\| A \|_{max}= \max_{i,j} |a_{ij}|$$

Јасно је да се може говорити и о норми графа али подразумева се да се тада мисли на неку норму одговарајуће матрице суседства тог графа. При томе треба водити рачуна да су матрице суседства увек квадратне матрице са елементима нула или један. Ако још разматрамо и неусмерене графове без петљи, што се у овом раду и јесте случај, онда је нула на дијагонали и матрица је симетрична.

Главна тема овог рада су Шатенове норме графа. Пре него што уведемо дефиницију Шатенових и Ки Фан норми наводимо нека основна својства матричних норми.

Пошто у овом раду разматрамо искључиво симетричне матрице као матрице суседства неког неоријентисаног графа, може се приметити да су сингуларне вредности уствари апсолутне вредности сопствених вредности оваквих матрица.
Такође за матрице можемо дефинисати разне типове норми које могу бити од значаја приликом оцењивања максималне енергије графа.

Дефиниција 3.2.2. *За матрицу* $A = [a_{ij}]$ *дефинишемо норму у ознаци* $\| A \|_1$ *на следећи начин:*

$$\| A \|_1= \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

Дефиниција 3.2.3. *Фробенијусова норма матрице је:*

$$\| A \|_f= \sqrt{\sum_{i,j} (a_{ij})^2}$$

Понекад се у литератури ова норма зове и Хилберт-Шмитова норма.

Дефиниција 3.2.4. *За симетричну матрицу* $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ *дефинишемо норму у ознаци* $\| A \|_2$ *на следећи начин:*

$$\| A \|_2= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} = \sqrt{Tr(A \cdot A^T)}$$

Дефинише се и норма која је збир сингуларних вредности.

Дефиниција 3.2.5. *За матрицу* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *дефинишемо норму у означи* $\parallel A \parallel_*$ *на следећи начин:*

$$\parallel A \parallel_* = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$$

Где су са σ *означене сингуларне вредности матрице.*

Јасно је да ако је A матрица суседства неког графа, ова норма у ствари представља енергију тог графа.
Од великог значаја у математици је и операторска норма матрице.

Дефиниција 3.2.6. *За матрицу* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *дефинишемо операторску норму у означи* $\parallel A \parallel_{op}$ *на следећи начин:*

$$\parallel A \parallel_{op} = \sup_{|x|=1} |Ax|$$

Напомена: овде је важно нагласити да је операторска норма једнака највећој сингуларној вредности матрице, $\parallel A \parallel_{op} = \sigma_1$.

Дефиниција 3.2.7. *За две матричне норме* $\parallel \cdot \parallel$ *и* $\parallel \cdot \parallel'$ *кажемо да су еквивалентне ако постоје константе* $m > 0$ *и* $M > 0$ *тако да важи*

$$m \parallel A \parallel \leq \parallel A \parallel' \leq M \parallel A \parallel$$

за сваку матрицу $A \in M_{n,n}$.

Некада је важно знати како се односе норме једне исте матрице, тако нам следећи став даје неједнакост између операторске и Фробенијусове норме.

Став 3.2.1. *Ако је дата матрица* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *онда важи следећа неједнакост за њену операторску и Фробенијусову норму:*

$$\parallel A \parallel_{op} \leq \parallel A \parallel_f$$

Доказ. Нека су дати вектори $v = (v_1, v_2, ..., v_n)^T$ и e_k, где је e_k вектор из стандардне базе векторског простора (на k-том месту је јединица а остало нуле), онда важи:

$$|Av| = \left| A \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} v_i A e_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |v_i||Ae_i|$$

Ако на последњу суму применимо Коши-Шварцову неједнакост добијамо:

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i||Ae_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (Ae_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |v| \parallel A \parallel_f$$

Чиме је полазна неједнакост доказана. □

Дефиниција 3.2.8. *Матрична норма* $\parallel \cdot \parallel$ *се назива конзистентна ако за сваке две матрице* $A, B \in M_{n,n}$ *важи:*

$$\parallel A \cdot B \parallel \leq \parallel A \parallel \parallel B \parallel$$

Наредних неколико теорема повезују норме матрице са њиховом структуром па ћемо видети сада колико износи норма за Адамарове и конференционе матрице.

Теорема 3.2.1. *Ако је $H = [h_{ij}]$ квадратна матрица реда n чији су сви елементи по апсолутној вредности једнаки 1, тада су следећи услови еквивалентни:*

1. *за матрицу H важи $H \cdot H^T = nI_n$;*
2. *све сингуларне вредности матрице H су једнаке $\sqrt{n}$;*
3. *$\| H \|_* = n\sqrt{n}$;*
4. *највећа сингуларна вредност матрице H је $\sqrt{n}$;*
5. *најмања сингуларна вредност матрице је $\sqrt{n}$.*

У доказу претходне теореме примењује се Кошијева теорема о преплитању сопствених вредности, која је већ наведена у овом раду.

Следећи став даје максималну вредност норме матрице чији су елементи реални бројеви из интервала $[-1, 1]$.

Став 3.2.2. *Ако је A квадратна матрица реда n таква да је $\| A \|_{max} \leq 1$, тада важи:*

$$\| A \|_* \leq n\sqrt{n}$$

Једнакост важи ако и само ако су све сингуларне вредности матрице A једнаке $\sqrt{n}$ тј. еквивалентно томе једнакост важи ако и само ако је A Адамарова матрица.

Слична два тврђења важе и за конференционе матрице.

Теорема 3.2.2. *Ако је C квадратна матрица реда n са нулама на главној дијагонали и осталим вредностима једнаким -1 или 1 следећи услови су еквивалентни:*

1. *за матрицу C важи $C \cdot C^T = (n-1)I_n$;*
2. *све сингуларне вредности матрице C су једнаке $\sqrt{n-1}$;*
3. *$\| C \|_* = n\sqrt{n-1}$;*
4. *највећа сингуларна вредност матрице C је $\sqrt{n-1}$;*
5. *најмања сингуларна вредност матрице је $\sqrt{n-1}$.*

Став 3.2.3. *Ако је A квадратна матрица реда n са нулама на главној дијагонали и $\| A \|_{max} \leq 1$ тада важи:*

$$\| A \|_* \leq n\sqrt{n-1}$$

Једнакост важи ако и само ако су све сингуларне вредности матрице A једнаке $\sqrt{n-1}$ или еквивалентно томе једнакост важи ако и само ако је A конференциона матрица.

Сада ћемо увести дефиниције две врсте норми које ћемо детаљније обрадити у наставку.

Дефиниција 3.2.9. *Ако је $[A]_{n \times n}$ квадратна матрица реда n, њена Шатенова p-норма је дата следећим изразом:*

$$\| A \|_p = (\sigma_1^p + \sigma_2^p + ... + \sigma_n^p)^{\frac{1}{p}}$$

Наравно, Шатенова p-норма графа је уствари Шатенова p-норма његове матрице суседства, па у том смислу можемо користити и ознаку

$$\parallel G \parallel_p = (\sigma_1^p + \sigma_2^p + ... + \sigma_n^p)^{\frac{1}{p}}$$

Приметимо да је специјалан случај Шатенове норме за $p = 1$ баш енергија тог графа. Такође, Шатенова 2-норма је уствари Фробенијусова норма матрице.

Дефиниција 3.2.10. *Ки Фан k-норма матрице је збир њених k највећих сингуларних вредности:*

$$\parallel A \parallel_{[k]} = \sigma_1 + \sigma_2 + ... + \sigma_k$$

У литератури се овде дефинисана норма често назива k модификација Ки Фан норме. Поново је енергија графа и специјалан случај Ки Фан норме за $k = n$.
Следеће теореме приказују својства матричних норми.

Теорема 3.2.3. *Ако је $\parallel \cdot \parallel$ нека матрична норма, тада за сваке две матрице A и B из $M_{m,n}$ важи:*

$$| \parallel A \parallel - \parallel B \parallel | \leq \parallel A - B \parallel$$

Теорема 3.2.4. *Свака матрична норма $\parallel A \parallel$ је непрекидна функција по елементима матрице A.*

За многе математичаре је изазов био да ограниче одозго суму одређеног броја највећих сопствених вредности графа. Ако би те сопствене вредности биле позитивне онда је то тражење горње границе за неку Ки Фан k-норму.
Словеначки математичар Бојан Мохар је у раду [45] доказао да горње ограничење суме k највећих сопствених вредности износи:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{k} + 1)n$$

Исти математичар је у раду [22] са групом аутора нашао горње ограничење за збир две највеће сопствене вредности матрице суседства регуларног графа. Тај резултат је исказан следећим ставом.

Став 3.2.4. *Ако је G регуларан граф са n темена, тада сума две његове највеће сопствене вредности не може бити већа од $n-2$. Та највећа вредност ($\lambda_1 + \lambda_2 = n-2$) се достиже ако и само ако комплемент графа G садржи бипартитни подграф.*

Владимир Никифоров је у раду [52] ограничио одозго Ки Фан k-норму матрице тј. израчунао је горње ограничење за збир највећих k сингуларних вредности матрице. Његов резултат за квадратне матрице реда n износи:

$$\frac{n}{2}(1 + \sqrt{k})$$

Може се приметити да када бисмо рачунали Ки Фан n-норму, која у суштини представља енергију графа добили бисмо већ познат и наведен резултат Кулена и Мултона. Такође се овај резултат поклапа и са резултатом Бојана Мохара за збир највећих k сопствених вредности. При чему је Никифоров рачунао општији случај, максималну Ки Фан k-норму за правоугаоне матрице у раду [52], овде је тај резултат наведен само за квадратне матрице.
Један од доприноса ове тезе је што садржи и оригиналан резултат из рада [9], у коме

је дато горње ограничење за збир квадрата k највећих сингуларних вредности графа из кога је изведена последица за збир квадрата две највеће сингуларне вредности ($k = 2$), и наведено за који граф се достиже та највећа могућа вредност.

Приметимо сада да је збир квадрата сингуларних вредности графа једнак двоструком броју грана тог графа тј. да важи следећа једнакост:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2 = 2m$$

Јер је $A \cdot A^T = A^2$, а за елементе a_{ij} матрице A^2 важи да представљају број путева дужине два између одговарајућа два чвора графа.

Никифоров је такође нашао доње и горње ограничење за p-ти степен Шатенових норми графа за разне вредности p. Следећи ставови су његови резултати.

Став 3.2.5. *Нека је дат граф G са n чворова и нека му је λ највећа сопствена вредност, ако је $q > p \geq 1$ тада важи:*

$$\parallel G \parallel_p^p \leq \lambda^p + (n-1)^{1-\frac{p}{q}} (\parallel G \parallel_q^q - \lambda^q)^{\frac{p}{q}}$$

Једнакост важи ако и само ако је $\sigma_2(G) = \sigma_3(G) = ... = \sigma_n(G)$.

Став 3.2.6. *Нека је дат граф G са n чворова и нека му је λ највећа сопствена вредност, ако је $p > q \geq 1$ тада важи:*

$$\parallel G \parallel_p^p \geq \lambda^p + (n-1)^{1-\frac{p}{q}} (\parallel G \parallel_q^q - \lambda^q)^{\frac{p}{q}}$$

Једнакост важи ако и само ако је $\sigma_2(G) = \sigma_3(G) = ... = \sigma_n(G)$.

Посебно је занимљив случај ако је у овим ставовима $q = 2$ тј. ако је $p \in [1, 2)$ јер се тад може искористити да је збир квадрата сопствених вредности једнак двоструком броју грана тј. $\parallel G \parallel_2^2 = 2m$. Онда важе следеће две последице тј. доње и горње ограничење.

Последица 3.2.1. *Нека је $p > 2$. Ако је G граф са n чворова и m грана и λ његова највећа сопствена вредност, тада за p-ти степен његове Шатенове p-норме важи следећа неједнакост:*

$$\parallel G \parallel_p^p \geq \lambda^p + (n-1)^{1-\frac{p}{2}} (2m - \lambda^2)^{\frac{p}{2}}$$

Једнакост важи ако и само ако је $\sigma_2(G) = \sigma_3(G) = ... = \sigma_n(G)$.

Последица 3.2.2. *Нека је $p \in [1, 2)$. Ако је G граф са n чворова и m грана и ако му је λ највећа сопствена вредност, тада за p-ти степен његове Шатенове норме важи следећа неједнакост:*

$$\parallel G \parallel_p^p \leq \lambda^p + (n-1)^{1-\frac{p}{2}} (2m - \lambda^2)^{\frac{p}{2}}$$

Једнакост важи ако и само ако је $\sigma_2(G) = \sigma_3(G) = ... = \sigma_n(G)$.

Користећи ово тврђење и чињеницу да је $\lambda_1 \geq \dfrac{2m}{n}$ аутор је у раду [49] дошао до следеће теореме, која представља уопштење неједнакости Кулена и Мултона за максималну енергију графа.

Теорема 3.2.5. *Ако је G граф са n чворова и $p \in [1,2)$ тада за Шатенову p-норму тог графа важи:*

$$\| G \|_p \leq \frac{n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{n}{2}$$

Ако је још G граф са максималном енергијом важи:

$$\| G \|_p > \frac{n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}}{2}$$

Јасно је да је прва неједнакост у теореми за $p = 1$ познати резултат Кулена и Мултона који је већ наведен. Сада ћемо навести теорему из теорије матрица из које се изводи једно доње ограничење за Шатенову норму графа.

Теорема 3.2.6. *Ако је ранг матрице $A = [a_{ij}]$ бар два и њене сингуларне вредности $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_n$, тада важи следећа неједнакост:*

$$\| A \|_* \geq \sigma_1(A) + \frac{1}{\sigma_2(A)} \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 - \sigma_1^2(A) \right)$$

једнакост важи уколико су све ненула сопствене вредности матрице A осим највеће, једнаке по апсолутној вредности.

Следећа последица ове теореме нам даје доње ограничење за Шатенову p-норму када $p \in [1,2)$.

Последица 3.2.3. *Ако је $p \in [1,2)$ и G граф са m грана, чија је највећа сопствена вредност λ онда важи:*

$$\| G \|_p^p \geq \lambda^p + \frac{2m - \lambda^2}{\sigma_2^{2-p}(G)}$$

једнакост важи уколико су све ненула сопствене вредности графа G осим највеће, једнаке по апсолутној вредности.

Могло би се рачунање Шатенових p-норми графа поделити у три случаја према вредности p и то на следећи начин: први случај за $p \in [1,2)$, други случај за $p = 2$ и трећи случај $p > 2$. Последњи случај ће у овој тези бити посебно обрађен.
За сва три случаја, Владимир Никифоров је израчунао вредности Шатенових p-норми за случајне графове у раду [50]. Тај резултат је приказан следећом теоремом.

Теорема 3.2.7. *Ако је G случајни граф са n чворова тада са вероватноћом која тежи један за његову Шатенову норму важи:*

$$\| G \|_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{p}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2}+2)} + o(1) \right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}, & \text{за } p \in [1,2) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + o(1) \right) n, & \text{ако је } p = 2 \\ \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) n, & \text{ако је } p > 2 \end{cases}$$

Теорема која је већ наведена у којој је аутор израчунао енергију случајног графа је само специјалан случај ове теореме.
Оно што је посебно занимљиво код овог резултата да Шатенова норма посматрана као

функција од p ($p > 0$) за случајне графове није непрекидна функција у тачки $p = 2$. У посебним случајевима, када узмемо неко конкретно p, свака Шатенова p-норма је непрекидна функција. Такође и за $p = 2$ и неки конкретан граф Шатенова норма је непрекидна функција.

Кључни делови доказа ове теореме су примена резултата Вигнера и Арнлода који су наведени у овом раду и теореме 1.3.7.

Следећа два тврђења из рада [49] дају нам горње и доње ограничење за Шатенову p-норму графа када је $p > 2$.

Став 3.2.7. *Ако је $p > 2$ и G граф са m грана онда за његову Шатенову p-норму важи следећа неједнакост:*

$$\| G \|_p^p < 2m \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}} \right)^{p-2}$$

Да је ово добра горња оцена говори нам следећа неједнакост.

Став 3.2.8. *За свако m постоји граф G са m грана чија Шатенова p-норма задовољава следећу неједнакост:*

$$\| G \|_p > -\frac{3}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

Посебно су добијени резултати за норме k-партитних графова. Наравно могло би се рећи да су матрице суседства таквих графова k-партитне матрице. За њихове матричне норме важе следећа тврђења. Али пре тих тврђења наводимо формалну дефиницију r-партитне матрице.
Нека је $A = [a_{ij}]$, дата квадратна матрица реда n и нека су $I \subset [n]$ и $J \subset [n]$ непразни подскупови њених индекса, означимо са $A[I, J]$ подматрицу матрице A која се састоји од a_{ij} тако да је $i \in I$ и $j \in J$.

Дефиниција 3.2.11. *Квадратна матрица A се назива r-партитна ако се скуп њених индекса може поделити на партиције на следећи начин $[n] = N_1 \cup N_2 \cup ... \cup N_r$ тако да за свако i важи $A[N_i, N_i] = 0$.*

Теорема 3.2.8. *Нека је $n \geq r \geq 2$ и нека је A квадратна матрица реда n за коју важи $\| A \|_{max} \leq 1$. Ако је A r-партитна матрица онда важи:*

$$\| A \|_* \leq n^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{r}}$$

Једнакост важи ако и само ако су све сингуларне вредности матрице A једнаке

$$\sqrt{\left(1 - \frac{1}{r}\right) n}$$

Матрица A за коју важи једнакост у претходној теореми задовољава читав низ занимљивих својстава, а то су:

1. r дели n;
2. сваки елемент a_{ij} који није на дијагоналном блоку има апсолутну вредност једнаку 1;
3. таква матрица задовољава следећу једнакост:

$$A \cdot A^T = \left(1 - \frac{1}{r}\right) n I_n$$

4. врсте ове матрице су међусобно ортогоналне;

5. колоне овакве матрице су међусобно ортогоналне.

Теорема 3.2.9. *Нека је r ред конференционе матрице и нека је k ред Адамарове матрице тада постоји r-партитна матрица A реда $n = rk$ таква да је $\| A \|_{max}= 1$ и важи:*

$$\| A \|_{*}= n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{r}}$$

Наредна два тврђења дају горње и доње ограничење за норму $\| A \|_{*}$ где је A матрица суседства неког r-партитног графа, наравно ово би биле горња и доња граница за енергију r-партитног графа. Горња граница је директна последица следеће теореме.

Теорема 3.2.10. *Нека је $n \geq r \geq 2$ и нека је A ненегативна квадратна матрица реда n за коју важи $\| A \|_{max}\leq 1$. Ако је A r-партитна матрица онда важи:*

$$\| A \|_{*}\leq \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{r}}+\left(1-\frac{1}{r}\right)n$$

Последица 3.2.4. *Нека је $n \geq r \geq 2$ и нека је G r-партитан граф са n чворова. Ако је A његова матрица суседства онда важи:*

$$\| A \|_{*}\leq \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{r}}+\left(1-\frac{1}{r}\right)n$$

Теорема 3.2.11. *Нека је r ред реалне симетричне конференционе матрице и нека је k ред реалне симетричне Адамарове матрице тада постоји r-партитни граф G са $n = rk$ чворова и матрицом суседства A за коју важи:*

$$\| A \|_{*}\geq \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{r}}-\left(1-\frac{1}{r}\right)n$$

Пошто је енергија графа само један специјалан случај Шатенове p-норме који се добија за $p = 1$ ова теорема је само специјални случај следеће теореме која нам даје горње ограничење за Шатенове p-норме када је $p \in [1, 2)$.

Теорема 3.2.12. *Нека је $p \in [1, 2)$ и r ред реалне симетричне конференционе матрице и нека је k ред реалне симетричне Адамарове матрице тада постоји r-партитни граф G са $n = rk$ чворова за који важи:*

$$\| G \|_{p}\geq \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\sqrt{1-\frac{1}{r}}-\left(1-\frac{1}{r}\right)n$$

Наравно постоје уопштења и за горња ограничења енергије графа тј. норме $\| A \|_{*}$ па следећа теорема и њена последица дају горње ограничење за одговарајуће Шатенове p-норме када је $p \in [1, 2)$.

Теорема 3.2.13. *Нека је $n \geq r \geq 2$ и $p \in [1, 2)$ и нека је A ненегативна квадратна матрица реда n за коју важи $\| A \|_{max}\leq 1$. Ако је A r-партитна матрица онда важи:*

$$\| A \|_{p}\leq \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\sqrt{1-\frac{1}{r}}+\left(1-\frac{1}{r}\right)n$$

Последица 3.2.5. *Нека је $n \geq r \geq 2$ и $p \in [1, 2)$ ако је G r-партитан граф са n чворова онда важи:*

$$\| G \|_p \leq \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \sqrt{1-\frac{1}{r}} + \left(1-\frac{1}{r}\right) n$$

Следећа теорема је уопштење претходне, а даје горње ограничење за све r-партитне матрице. А касније ћемо видети и када се достиже та горња граница.

Теорема 3.2.14. *Нека је $n \geq r \geq 2$ и $p \in [1, 2)$ и нека је A квадратна матрица реда n за коју важи $\| A \|_{max} \leq 1$. Ако је A r-партитна матрица онда важи:*

$$\| A \|_p \leq \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \sqrt{1-\frac{1}{r}}$$

Једнакост важи ако и само ако су све сингуларне вредности матрице A једнаке:

$$\sqrt{\left(1-\frac{1}{r}\right) n}$$

Следећа теорема нам даје у овом смислу максималну матрицу тј. ону чија је Шатенова норма баш једнака овом горњем ограничењу.

Теорема 3.2.15. *Нека је r димензија конференционе матрице и нека је k ред Адамарове матрице ако је $p \geq 1$ тада постоји r-партитна матрица A димензије $n = rk$ са $\| A \|_{max} = 1$ за коју важи:*

$$\| A \|_p = \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \sqrt{1-\frac{1}{r}}$$

Аутор је такође у раду [53] дао и горње ограничење за Шатенову норму за комплетан r-партитни граф.

Теорема 3.2.16. *Ако је $p \geq 1$ и K комплетан r-партитни граф реда n тада за његову Шатенову p-норму важи:*

$$\| K \|_p \leq 2 \left(1-\frac{1}{r}\right) n$$

У доказу ове теореме аутор користи вредност горњег ограничења за највећу сопствену вредност оваквог графа, која износи $\left(1-\frac{1}{r}\right) n$. Дато ограничење је резултат Драгоша Цветковића.

Такође је у раду [49] постављена хипотеза за Шатенове норме графа када је $p > 2$, а која је решена у овој тези. Та хипотеза каже да се максимална Шатенова p-норма када је $p > 2$ достиже када је посматрани граф комплетан и важи неједнакост:

$$\| G \|_p < \| K \|_p$$

при чему је G било који неусмерен некомплетан граф а K комплетан граф који има исти број чворова као G. Следећи пододељак даје детаљно решење ове хипотезе.

3.2.1 Хипотеза Никифорова

Владимир Никифоров је у раду [50] израчунао Шатенове норме за случајне графове у случајевима када је $1 \leq p < 2$, $p = 2$ и $p > 2$.
А у раду [49] поставио је **хипотезу** (4.28) која каже да када се посматрају p-ти степени Шатенових p-норми, за $p > 2$ било ког графа важи следећа неједнакост:

$$\| G \|_p^p < \| K \|_p^p$$

Са десне стране је p-ти степен Шатенове норме комплетног графа и једнакост би важила ако и само ако би и G био комплетан граф.
Пошто је познат спектар комплетног графа онда знамо да важи:

$$\| K \|_p^p = (n-1)^p + n - 1$$

Ова хипотеза се може формулисати и као следеће тврђење:
За сваки граф G са n чворова и свако $p > 2$ важи следећа неједнакост:

$$\sigma_1^p + \sigma_2^p + ... + \sigma_n^p \leq (n-1)^p + n - 1$$

Највећи допринос овог рада је што је ова хипотеза доказана прво за неке појединачне случајеве графова а затим и у општем случају. Доказивање ове хипотезе своди се на доказивање неједнакости да за сваки граф тј. за његове сингуларне вредности важи:

$$\sigma_1^p + \sigma_2^p + ... + \sigma_n^p \leq (n-1)^p + n - 1$$

Прво је показано да хипотеза важи за p које је паран број, за јако регуларне графове са параметрима $\left(n, \dfrac{n+\sqrt{n}}{2}, \dfrac{n+2\sqrt{n}}{4}, \dfrac{n+2\sqrt{n}}{4}\right)$ и за стабла.

Следећа теорема даје позитиван одговор на поменуту хипотезу Никифорова уколико је p паран број.

Теорема 3.2.17. *Нека је G неоријентисан граф без петљи са n чворова, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq .... \geq \sigma_n$ његове сингуларне вредности и $p > 2$ паран број, тада важи:*

$$\sigma_1^p + \sigma_2^p + ... + \sigma_n^p \leq (n-1)^p + n - 1$$

Доказ. Нека је A матрица суседства графа G и $p > 2$ паран број. Елементи a_{ij} матрице A^p представљају број путева дужине p између чворова i и j по већ наведеној познатој теореми из теорије графова. Ако λ сопствена вредност матрице A тада λ^p сопствена вредност матрице A^p. Јасно је да ако из графа уклонимо једну или више грана смањује се број путева било које дужине између било која два чвора. Према томе максимум се достиже за комплетан граф.

□

За $p = 1$ Шатенова норма је енергија графа, максимална енергија графа као што је већ напоменуто према значајном раду Кулена и Мултона достиже се за јако регуларан граф са параметрима $\left(n, \dfrac{n+\sqrt{n}}{2}, \dfrac{n+2\sqrt{n}}{4}, \dfrac{n+2\sqrt{n}}{4}\right)$ и износи $\dfrac{n+n^{\frac{3}{2}}}{2}$.
Пошто је енергија графа специјалан случај Шатенове норме било је занимљиво израчунати Шатенову норму за овакав јако регуларан граф где је $n = 4^k$, и видети да ли за њега важи неједнакост из поменуте хипотезе Никифорова за $p > 2$. Енергија комплетног графа је $2n - 2$. Следећа теорема даје позитиван одговор тј. потврђује хипотезу Никифорова када $p > 2$ за јако регуларан граф, који има максималну енергију.

Теорема 3.2.18. *Нека је* G *јако регуларан граф са параметрима* $\left(n, \dfrac{n+\sqrt{n}}{2}, \dfrac{n+2\sqrt{n}}{4}, \dfrac{n+2\sqrt{n}}{4}\right)$ *и сингуларним вредностима* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_n$*, при чему је* $n = 4^k$*,* $k \in N$ *тада важи следећа неједнакост:*

$$\sigma_1^p + \sigma_2^p + ... + \sigma_n^p \leq (n-1)^p + n - 1$$

Доказ. Доказаћемо теорему користећи методу математичке индукције. Нека је $n = 4^k$. Познат је и већ наведен у овом раду спектар јако регуларног графа са параметрима (n, k, λ, μ) па према томе за овај граф су сингуларне вредности: $\sigma_1 = \dfrac{2^k + 4^k}{2}$; $\sigma_2 = \sigma_3 = ... = \sigma_n = \dfrac{2^k}{2}$
При уведеним ознакама полазна неједнакост постаје:

$$2^{kp}((2^k+1)^{p-1} + 2^k - 1) \leq 2^p(2^k-1)((4^k-1)^{p-1}+1)$$

Када је $k = 1$ тј. за $n = 4$, ради се о комплетном графу K_4 па тада баш важи једнакост. Претпоставимо да неједнакост важи за k и докажимо да важи за $k+1$.

Требало би доказати:

$$2^{(k+1)p}((2\cdot 2^k+1)^{p-1} + 2\cdot 2^k - 1) \leq 2^p(2^{k+1}-1)((4^{k+1}-1)^{p-1}+1)$$

Посматрајмо сада леву страну неједнакости:

$$2^{kp}\cdot 2^p((2\cdot 2^k+1)^{p-1} + 2\cdot 2^k - 1) = 2^{kp}\cdot 2^p\left(2^{p-1}\left(2^k+\frac{1}{2}\right)^{p-1} + 2\cdot\left(2^k - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{kp}\cdot 2^{p+1}\left(2^{p-2}\left(2^k+\frac{1}{2}\right)^{p-1} + 2^k - \frac{1}{2}\right)\\
&\leq 2^{kp}\cdot 2^{p+1}\cdot 2^{p-2}\left(\left(2^k+\frac{1}{2}\right)^{p-1} + 2^k - \frac{1}{2}\right)\\
&\leq 2^{kp}\cdot 2^{p+1}\cdot 2^{p-2}\left((2^k+1)^{p-1} + 2^k - 1\right)
\end{aligned}$$

У последњем кораку се користи чињеница да је функција $y = a^x - b^x$ по промењивој x растућа када је $a > b$.
Ако бисмо сада применили индукцијску хипотезу:

$$\begin{aligned}
&2^{kp}\cdot 2^{p+1}\cdot 2^{p-2}\left((2^k+1)^{p-1} + 2^k - 1\right)\\
&\leq 2^p\cdot 2^{p+1}\cdot 2^{p-2}(2^k-1)\left((4^k-1)^{p-1}+1\right)\\
&= 2^p\cdot 4^{p-1}(2^{k+1}-2)\left((4^k-1)^{p-1}+1\right)\\
&= 2^p\cdot(2^{k+1}-2)\left((4^{k+1}-4)^{p-1}+4^{p-1}\right)\\
&\leq 2^p\cdot(2^{k+1}-1)\left((4^{k+1}-1)^{p-1}+1\right)
\end{aligned}$$

На овом месту ћемо објаснити неједнакост која је примењена у претходном кораку:

$$\left((4^{k+1}-4)^{p-1}+4^{p-1}\right) \leq \left((4^{k+1}-1)^{p-1}+1\right)$$

Посматрајмо следећи израз:

$$\left((4^{k+1}-1)^{p-1}+1\right)-\left((4^{k+1}-4)^{p-1}+4^{p-1}\right)$$

Ако је $4^{k+1}-1=a$ и $p-1=x$ тада важи $a>63$ и $x>1$, претходно записан израз при овим ознакама постаје:

$$a^x+1-(a-3)^x-4^x=a^x-(a-3)^x-(4^x-(4-3)^x)$$

Последњи израз је разлика две вредности функције $a^x-(a-3)^x$ у тачкама a и 4, а функција је растућа по a па је самим тим дати израз позитиван јер је $a>63$.

Овим је теорема доказана.

□

Следећа теорема нам даје позитиван одговор на питање да ли поменута хипотеза из рада [49] важи за стабла.

Теорема 3.2.19. *Нека је граф G стабло и $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq .... \geq \sigma_n$ сингуларне вредности од G тада важи:*

$$\sigma_1^p+\sigma_2^p+....+\sigma_n^p \leq (n-1)^p+n-1$$

Доказ. Познати резултат је горње ограничење за највећу сопствену вредност стабла:

$$\lambda_1 \leq \sqrt{n-1}$$

$$\sigma_1^p+\sigma_2^p+....+\sigma_n^p \leq (n-1)^{\frac{p}{2}}+\sigma_2^p+\sigma_3^p+...\sigma_n^p \leq n(n-1)^{\frac{p}{2}}$$

За $n>2, n\in N$ и $p>2$ важи следећа неједнакост:

$$n \leq (n-1)^{\frac{p}{2}}+(n-1)^{1-\frac{p}{2}}$$

$$\Rightarrow n(n-1)^{\frac{p}{2}} \leq (n-1)^p+n-1$$

Овим доказ теореме завршен. □

Наредна лема ће имати значајно место у доказивању поменуте хипотезе.

Лема 3.2.1. *Нека је дато следећих n бројева $x_1, x_2, ..., x_n$ таквих да $x_1, x_2, ..., x_n \in [1, c]$, где је $c \geq n$. Ако важи:*

$$x_1+x_2+...+x_n=c$$

и $q>1$ тада израз

$$x_1^q+x_2^q+...+x_n^q$$

достиже максимум ако је једна од променљивих (на пример x_i) једнака $c-n+1$, а осталих $n-1$ променљивих једнаке 1.

Доказ. Посматрајмо израз $x_1^q+x_2^q+...+x_n^q$ као функцију n променљивих. Јасно је да се ради о непрекидној функцији по свакој променљивој која је дефинисана на затвореном интервалу. Вајерштрасова теорема каже да је непрекидна функција на затвореном интервалу ограничена и да постоје тачке тог интервала у којима она достиже максималну и минималну вредност.

Применимо сада на дату функцију познати поступак за налажење условних екстремума функције (локални екстремуми при услову).

Нека је $F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)$ Лагранжова функција.

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = x_1^q + x_2^q + ... + x_n^q + \lambda(x_1 + x_2 + ... + x_n - c)$$

Нађимо прво прве парцијалне изводе (јасно је да ће због симетричности они бити једнаки):
$\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = q x_i^{q-1} + \lambda$ за $i = 1, 2, 3.., n$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow x_i = \sqrt[q-1]{\frac{-\lambda}{q}}$$

Због услова имамо да је: $x_i = \dfrac{c}{n}$ тада је стационарна тачка: $S\left(\frac{c}{n}, \frac{c}{n}, \frac{c}{n}, ..., \frac{c}{n}\right)$.
Сада треба израчунати друге парцијалне изводе и применити Силвестеров критеријум:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i \partial x_i} = q(q-1)x_i^{q-2}, i = 1, 2, 3, ..., n$$

$$q(q-1)x_i^{q-2} > 0, q > 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

Према Силвестеровом критеријуму у стационарној тачки S функција достиже минимум. Јасно је да се онда максимум достиже на граници. Нека је једна променљива на пример $x_1 = 1$ (еквивалентно је да је било која друга променљива од x_2 до x_n једнака један). Уколико применимо објашњени поступак на добијену функцију која има $n-1$ променљиву добићемо стационарну тачку $S_1\left(1, \frac{c-1}{n-1}, \frac{c-1}{n-1}, \frac{c-1}{n-1}, ..., \frac{c-1}{n-1}\right)$ поново ћемо закључити да се и у овој стационарној тачки достиже локални минимум. Применимо сада математичку индукцију још $n-2$ пута. У сваком кораку по једна нова променљива је једнака један, самим тим ћемо у сваком кораку имати по једну непознату променљиву мање. Одавде следи полазно тврђење.

□

Следећа теорема даје горње ограничење за збир квадрата k највећих сингуларних вредности неоријентисаног графа без петљи.

Теорема 3.2.20. *Сума квадрата k највећих сингуларних вредности неоријентисаног графа G, без петљи, са n чворова и m грана чије су сингуларне вредности:*
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq .... \geq \sigma_n$, је мања или једнака од $(n-1)^2 + k - 1$ тј. важи следећа неједнакост:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_k^2 \leq (n-1)^2 + k - 1$$

Једнакост важи ако и само ако је G комплетан граф.

Доказ. Познато је да је збир квадрата сопствених вредности једнак двоструком броју грана графа, тј. да важи следећа једнакост:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2 = 2m$$

Број ивица комплетног графа износи: $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
Нека је d разлика броја ивица комплетног графа са n чворова и посматраног графа G тј. имамо да важи:

$$d = \frac{n(n-1)}{2} - m$$

Посматраћемо два случаја:
1) Ако је: $d > \frac{n}{2} - 1$
Тада имамо следеће неједнакости:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_k^2 \leq n^2 - n - 2d < n^2 - n - n + 2 = (n-1)^2 + 1$$

Лако смо добили полазно тврђење.
2) Нека је: $d \leq \frac{n}{2} - 1$
Ако бисмо уклонили сада $2d$ чворова из посматраног графа G добили бисмо комплетан граф (наравно чворове тако можемо одабрати да се добије комплетан граф), означимо га са H.
У раду [2] аутори су доказали да ако је N_{-1} број сопствених вредности графа које су мање или једнаке од -1 и ω број грана највећег комплетног подграфа датог графа (највеће клике) важи:

$$\omega \leq N_{-1} + 1$$

На основу овог резултата можемо закључити да граф G има $n - 2d - 1$ сопствених вредности које су мање или једнаке од -1. Из теореме 1.2.10 следи чињеница да за сопствене вредности графа важи неједнакост $|\lambda_1| \geq |\lambda_n|$, тј. највећа сингуларна вредност одговара највећој сопственој вредности матрице. Сада ћемо искористити ову чињеницу и видети да важи следећа неједнакост. Пре тога поделимо све сингуларне вредности у три групе на следећи начин: нека су у првој групу првих k највећих сингуланих вредности, у другој групи оне које одговарају сопственим вредностима које су мање од -1 а да нису у првој групи и у трећој групи су оне које нису ни у првој ни у другој групи. Лева страна наредне неједнакости представља збир квадрата сингуларних вредности прве две групе (трећа група у неким случајевима и не постоји) тај збир квадрата је сигурно мањи или једнак од двоструког броја грана графа.

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_k^2 + n - 2d - 1 - (k-1) \leq n^2 - n - 2d$$
$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_k^2 \leq (n-1)^2 + k - 1$$

□

Сматрамо да овај резултат може користити у неким специјалним случајевима, то јест за разне вредности k. Наредно тврђење је директна последица ове теореме, оно нам даје ограничење одозго за збир квадрата две највеће сингуларне вредности неоријентисаног графа без петљи. Наравно, познато је да је највећа сопствена вредност графа са n темена ограничена одозго са $n-1$. Већ је наведен став 1.2.2 који каже да ако је највећа сопствена вредност графа баш $n-1$, тај граф је комплетан.

Последица 3.2.6. *За сваки неоријентисан граф G без петљи, са n чворова, чије су сингуларне вредности: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq .... \geq \sigma_n$ важи следећа неједнакост:*

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \leq (n-1)^2 + 1$$

Једнакост важи ако и само ако је G комплетан граф.

Наредна теорема је једно уопштење Шатенових норми и уопштење хипотезе Никифорова.

Теорема 3.2.21. *Нека је* $p \geq 2$ *и* $k \leq n$ *тада за сваки неоријентисан граф* G *без петљи, са* n *чворова и сингуларним вредностима* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq .... \geq \sigma_n$ *важи следећа неједнакост:*

$$\sigma_1^p + \sigma_2^p + ... + \sigma_k^p \leq (n-1)^p + k - 1$$

Једнакост важи ако и само ако је G *комплетан граф.*

Доказ. Нека је $l \leq k$ број сингуларних вредности које су веће или једнаке од један. Сада по теореми 3.2.20 важи:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_l^2 \leq (n-1)^2 + l - 1$$

Нека је сада $x_i = \sigma_i^2$ за $1 \leq i \leq l$ и применимо лему 3.2.1 где је $q = \frac{p}{2}$, добијамо следећу неједнакост:

$$\sigma_1^p + \sigma_2^p + ... + \sigma_l^p \leq (n-1)^p + l - 1$$

Ако је $i > l$ онда према претпоставци $\sigma_i < 1$, ако уопште постоје такве сингуларне вредности. У случају да овакве сингуларне вредности постоје, оне припадају трећој групи из претходног доказа. Овим је теорема доказана. □

Ако би у последњој теореми претпоставили $k = n$ добили би смо тачно хипотезу Никифорова из рада [49]. Овде ћемо је формулисати као последицу претходне теореме.

Последица 3.2.7. *Ако је* $p > 2$ *и* G *неоријентисан граф без петљи са* n *чворова и сингуларним вредностима* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq .... \geq \sigma_n$ *тада важи следећа неједнакост:*

$$\sigma_1^p + \sigma_2^p + ... + \sigma_n^p \leq (n-1)^p + (n-1)$$

Једнакост важи ако и само ако је G *комплетан граф.*

Овим је решена поменута хипотеза Никифорова везана за Шатенове норме графа када је $p > 2$ у општем случају. А и дато је једно занимљиво уопштење. Могло би се грубо рећи да су у последњој теореми искомбиноване Шатенове p-норме и Ки Фан k-норме, и дата њихова оштра оцена, која се остварује само за комплетне графове.

3.3 Енергија комплементног графа

Занимљив проблем код рачунања енергије неких графова може бити шта знамо о енергији комплементног графа графу G или уопштеније шта знамо о његовом спектру. Наравно кад је познат спектар графа позната су му и разна друга својства па тако и енергија.

Такође може се поставити питање да ли некад уклањањем неких чворова и грана графа (то јест ако уклонимо неки граф коме знамо спектар) можемо побољшати његову енергију.

У књизи [6] су изведене вредности спектра за комплемент регуларног графа.

Теорема 3.3.1. *Нека је дат k-регуларни граф G са n чворова чији је спектар: $(k, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n)$. Онда је његов комплемент $(n-1-k)$-регуларан граф чији је спектар: $(n-k-1, 1, -\lambda_3 - 1, ..., -\lambda_n - 1)$.*

Из ове теореме јасно следи да нам је увек позната енергија за комплемент регуларног графа уколико нам је познат спектар тог регуларног графа.

Размотримо сада нека својства матрица и изведимо једну теорему о асимптотском понашању енергије комплементног графа, у општем случају. Нека је дат граф са k чворова и нека је G_k његова матрица суседства, наравно њена димензија је $k \times k$. Проширимо ову матрицу нулама тако да буде димензије $n \times n$ и тако добијену матрицу означимо са G. $P_n = I - \frac{1}{n}J$ је пројектор на ортогонални комплемент вектора $(1, 1, 1..., 1)$.

$$P_n = \left[\begin{array}{c|c} I_k - \frac{1}{n}J_k & -\frac{1}{n}J \\ \hline -\frac{1}{n}J & I - \frac{1}{n}J \end{array}\right]$$

$$P_nG = \left[\begin{array}{c|c} \left(I_k - \frac{1}{n}J_k\right)G_k & 0 \\ \hline -\frac{1}{n}JG_k & 0 \end{array}\right]$$

$$P_nGP_n = \left[\begin{array}{c|c} \left(I_k - \frac{1}{n}J_k\right)G_k\left(I_k - \frac{1}{n}J_k\right) & -\left(I - \frac{1}{n}J\right)G_k\frac{1}{n}J \\ \hline -\frac{1}{n}JG_k\left(I - \frac{1}{n}J\right) & \frac{1}{n^2}JG_kJ \end{array}\right]$$

Напомена: Овакво множење блок матрица је у складу са димензијама сваке од њих. Нека је $G^* = P_nGP_n - G$ (ову матрицу бисмо могли звати и мала матрица, јер су њене сопствене вредности мали бројеви; означимо их са $\lambda_1^* \geq \lambda_2^* \geq ... \geq \lambda_n^*$), проценимо збир квадрата свих елемената матрице G^*. Процену вршимо по одређеним блоковима блок-матрице $P_nGP_n - G$ које ћемо означити на следећи начин:

$$G^* = P_nGP_n - G = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

$A_{11} = -\frac{1}{n}G_kJ - \frac{1}{n}JG_k + \frac{1}{n^2}JG_kJ$
и има k^2 елемената. Прва два сабирка имају све елементе мање или једнаке од нуле и ограничене по модулу са $\frac{(k-1)}{n}$, а елементи трећег сабирка су ненегативни и ограничени по модулу са са $\frac{1}{n^2}k(k-1)$.

Према томе, један елемент можемо по модулу ограничити одозго са $\frac{2(k-1)}{n}$.
A_{12}: Димензија је $k \times (n-k)$ па има $k \cdot (n-k)$ елемената.

$A_{12} = -\frac{1}{n}G_kJ + \frac{1}{n^2}JG_kJ$
Елементи првог сабирка су мањи или једнаки од нуле и могу се ограничити одозго по модулу са $\frac{1}{n}(k-1)$, а елементи другог сабирка су ненегативни и могу се ограничити одозго са $\frac{1}{n^2}k(k-1)$.
Један елемент можемо по модулу ограничити одозго са: $\frac{1}{n}(k-1)$.

A_{21}: Има $(n-k) \cdot k$ елемената

$A_{21} = -\frac{1}{n}JG_k + \frac{1}{n^2}JG_kJ$
Елементи првог сабирка су мањи или једнаки од нуле и могу се по модулу ограничити одозго са $\frac{1}{n}(k-1)$, а елементи другог сабирка су ненегативни и могу се ограничити одозго са $\frac{1}{n^2}k(k-1)$.
Један елемент можемо по модулу ограничити одозго са: $\frac{1}{n}(k-1)$.
A_{22}: Овај део има $(n-k)^2$ елемената.
$A_{22} = \frac{1}{n^2}JG_kJ$

Сви елементи ове матрице су ненегативни. Један елемент се може ограничити одозго са:$\frac{k(k-1)}{n^2}$.

Проценимо сад збир квадрата свих елемената блок матрице, то јест оцењујемо квадрат Фробенијусове норме:

$$\begin{aligned}||A||_f^2 &= 4\frac{k^2 \cdot (k-1)^2}{n^2} + k(n-k)\frac{(k-1)^2}{n^2} + k(n-k)\frac{(k-1)^2}{n^2} + (n-k)^2\frac{k^2(k-1)^2}{n^4} \\ &= \frac{k(k-1)^2}{n^2} \cdot \left(4k + n - k + n - k + \frac{k(n-k)^2}{n^2}\right) \le \frac{k(k-1)^2}{n^2}(2n+3k) \le \frac{5k^3}{n}\end{aligned}$$

Одавде добијамо:

$$||A||_f \le \frac{\sqrt{5} \cdot k^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{3.1}$$

У доказу следеће теореме ће се користити ова досадашња разматрања и једна од последица мин-макс теореме о карактеризацији сопствених вредности, Вејлова теорема 1.2.9.

Теорема 3.3.2. *Посматрајмо комплетан граф без петљи са n чворова и уклонимо из њега гране графа G који има k чворова и чији је спектар $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k$. Спектар тако добијеног графа тј. комплеманта графа G ће тежити (за велике вредности n) следећим вредностима*

$$(n-1+O(n^{-\frac{1}{2}}), -1-\lambda_1+O(n^{-\frac{1}{2}}), -1-\lambda_2+O(n^{-\frac{1}{2}}), .., -1-\lambda_k+O(n^{-\frac{1}{2}}), -1+O(n^{-\frac{1}{2}}), .., -1+O(n^{-\frac{1}{2}}))$$

па је енергија добијеног графа

$$E = n - 1 + \sum_{i=1}^{n-1} |1 + \lambda_i| + O(\sqrt{n})$$

Доказ. Матрица комплементног графа графу G је $J - I - G$. Важи једнакост:

$$J - G - I = J + P_n - I - P_n(G + I)P_n + G^*.$$

По неједнакости између операторске и Фробенијусове норме, став 3.2.1 и формули 3.1 све сопствене вредности од G^* су по модулу мање од $\dfrac{\sqrt{5} \cdot k^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}}$. По Вејловој теореми 1.2.9 следиће да су сопствене вредности матрице комплементног графа највише $\dfrac{\sqrt{5} \cdot k^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}}$ удаљене од сопствених вредности матрице $J+P_n-I-P_n(G+I)P_n$. Сопствена вредност ове матрице је $n-1$ за сопствени вектор $(1, 1, ...1)$, а остали сопствени вектори су ортогонални на њега и одговарају сопственим вредностима матрице $P_n(G + I)P_n$ из одговарајућег потпростора. Спектар матрице P_nGP_n се због $G^* = P_nGP_n - G$ разликује од спектра матрице G по аналогним разматрањима за највише $\dfrac{\sqrt{5} \cdot k^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}}$, па ће за матрицу $P_n(G+I)P_n$ спектар бити:

$$\Big(0, 1 + \lambda_1 + O(n^{-\frac{1}{2}}), 1 + \lambda_2 + O(n^{-\frac{1}{2}}), ..., 1 + \lambda_k + O(n^{-\frac{1}{2}}), 1 + O(n^{-\frac{1}{2}}), ..., 1 + O(n^{-\frac{1}{2}})\Big)$$

где нула одговара сопственом вектору $(1, 1, ..., 1)$, па следи да је спектар матрице комплементног графа:

$$\Big(n - 1 + O(n^{-\frac{1}{2}}), -1 - \lambda_1 + O(n^{-\frac{1}{2}}), .., -1 - \lambda_k + O(n^{-\frac{1}{2}}), -1 + O(n^{-\frac{1}{2}}), .., -1 + O(n^{-\frac{1}{2}})\Big)$$

□

Нека је спектар комплементног графа $\mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_n$ по Кошијевој теореми о преплитању (теорема 1.2.8) и коментарима иза ње можмо закључити да су неке сопствене вредности тачно -1, то јест да важи: $\mu_{k+2} = ... = \mu_{n-k} = -1$. Одавде можмо добити да за енергију комплементног графа (када n тежи бесконачности) важи:

$$E_k = \sum_{i=1}^{k} |1 + \lambda_i| + 2n - k - 2 + O(\sqrt{n})$$

Видели смо да можемо асимптотски одредити спектар, а самим тим и енергију комплементног графа за неки познат граф.

3.4 Средине сингуларних вредности случајних графова

У овом поглављу ће бити израчунате средине p-тих степена сингуларних вредности и оцењена геометријска средина сингуларних вредности случајног графа.

Теорема 3.4.1. *Геометријска средина сингуларних вредности случајног граф са n чворова је мања или једнака од:*

$$\sqrt{\frac{n}{4e}}(1+o(1))$$

Доказ. Приметимо да важе следеће једнакости:

$$\sqrt[n]{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n} = e^{\frac{1}{n}\ln(\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n)} = e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln \sigma_k}$$

Из теореме 1.3.6 о скоро сигурној конвергенцији функција расподеле, следи да ће функција расподеле W_n скоро сигурно да тежи ка функцији расподеле W тј. са вероватноћом 1 имамо конвергенцију одговарајућих вероватносних мера. Пошто је логаритамска функција непрекидна и ограничена одозго, неједнакост очекивања емпиријске спектрална функције расподеле W_n и Вигнерове полукружне расподеле W даје:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{\sigma_k}{\sqrt{n}} \leq \frac{4}{\pi}\int_0^1 \ln x\sqrt{1-x^2}\,dx + o(1)$$

Израчунајмо сада следећи интеграл:

$$I = \int_0^1 \ln x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Приметимо да важи:

$$\int_0^1 \ln x\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 (1+\ln x)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Последњи интеграл се може рачунати методом парцијалне интеграције:

$$\int_0^1 (1+\ln x)\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_0^1 \frac{-x^2\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Означимо последњи интеграл са I_1 и израчунајмо га:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt$$

Употребимо сада следећу формулу:

$$\int_0^a f(a-x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

$$2I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin u du - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt - \frac{\pi}{2} \ln 2 \Rightarrow I_1 = -\frac{\pi}{2} \ln 2 \Rightarrow I = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} \ln 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{\sigma_k}{\sqrt{n}} \leq -\frac{1}{2} - \ln 2 + o(1)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \sigma_k \leq \ln \sqrt{n} - \frac{1}{2} - \ln 2 + o(1)$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{n} \ln(\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n)} \leq \sqrt{n} e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} e^{o(1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n} \leq \sqrt{\frac{n}{4e}} (1 + o(1))$$

Овим је теорема доказана.

□

Овде би се могло говорити и о вредности детерминанте случајне матрице. Следећа последица даје нам горње ограничење за вредности детерминанте случајне матрице.

Последица 3.4.1. *Нека је A матрица суседства случајног графа и $\varepsilon > 0$ произвољно. За довољно велико n скоро сигурно важи следећа неједнакост:*

$$\det A \leq (1 + \varepsilon)^n \left(\frac{n}{4e} \right)^{\frac{n}{2}}$$

На тему сингуларних случајних матрица има много радова, видети [58], [59], [38] и [60]. Рачуната је вероватноћа догађаја да је случајна матрица сингуларна тј. да јој је вредност детерминанте нула. Често је посматрана такозвана Бернулијева случајна матрица, то је матрица чији елементи су случајне величине које узимају вредности 1 или -1 са вероватноћама $\frac{1}{2}$. Означимо Бернулијеве случајне матрице са M_n. Са p_n се означава вероватноћа да је детерминанта случајне матрице нула тј. $p_n = P\{\det M_n = 0\}$.
Први значајнији рад из ове облаети је [38] из 1967. године, где је израчунато да је $p_n = o(1)$. У раду [59] аутори су дали горње ограничење за вероватноћу p_n и оно износи $\left(\frac{3}{4} + o(1)\right)^n$. Многи математичари су постављали хипотезу да за вероватноћу p_n важи следећа једнакост

$$p_n = \left(\frac{1}{2} + o(1) \right)^n$$

Ова једнакост је доказана 2020. године у раду [60].

У неким радовима су посматране и случајне симетричне матрице код којих су изнад главне дијагонале Бернулијеве случајне променљиве. За ове случајне матрице је у раду [15] показано да су скоро сигурно несингуларне. Штавише аутори су у овом раду доказали следећу неједнакост:

$$p_n \leq n^{-\frac{1}{8} + o(1)}$$

Пошто је ова неједнакост доказана за симетричне случајне матрице којима су елементи Бернулијеве случајне променљиве које узимају вредности 0 или 1, јасно је да овај резултат важи и за матрице суседства случајног графа.

Следећа теорема је доказана користећи се истим кључним аргументом као В. Никифоров у раду [47], али овде се ради уопштење за $0 < p < 1$ јер се не посматра један случај норме већ средина p-тих степена сингуларних вредности случајног графа.

Теорема 3.4.2. *Средња вредност p-тих степена сингуларних вредности случајних графова скоро сигурно износи:*

$$M_\sigma = \left(\frac{2}{\pi}\left(B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{3}{2}\right) + o(1)\right)\right)^{\frac{1}{p}} \sqrt{n}$$

При чему је $B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ *бета функција са параметрима* $\dfrac{p+1}{2}$ *и* $\dfrac{3}{2}$.

Доказ. Сума p-тих степена апсолутних вредности сопствених вредности случајног графа је p-ти момент одговарајуће случајне промењиве, па према томе треба израчунати следећи интеграл:

$$\int_0^1 x^p\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-t}\cdot t^{\frac{p-1}{2}}\, dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Све се множи са $\sqrt{n}$ зато што су $\lambda_1, ..., \lambda_n$ сопствене вредности матрице $B = \frac{1}{\sqrt{n}}A$, дефинисане у поглављу 1.3.

□

Овде је дат резултат за $p \in (0,1)$ за случајеве $p \in [1,2)$, $p = 2$ и $p > 2$ лако следи из теореме 3.2.7 која је наведена у претходном поглављу.

Глава 4

Неке комбинаторне примене

4.1 Проблем задовољења услова, CSP

Често је у комбинаторним проблемима циљ наћи пресликавање из скупа променљивих у дати скуп тако да одређени услови буду задовољени. Због тога се многи комбинаторни проблеми могу изразити помоћу проблема задовољења услова (Constraint Satisfaction Problem), скраћено CSP. Постоје три различита приступа овом проблему, нама ће бити један посебно занимљив јер се у том приступу често користе графови. Пре него што уведемо проблем CSP наводимо дефиниције неких појмова из математичке логике.

Дефиниција 4.1.1. *Операцијско-релацијски језик (на даље само језик) састоји се од: операцијских симбола са одговарајућим дужинама (арностима), симбола константи и релацијских симбола одговарајуће арности.*

Дефиниција 4.1.2. *Операцијско-релацијска структура или модел $\mathbb{M}$ на операцијско релацијском језику L је задата:*

1. *непразним скупом M, који се назива носач модела;*
2. *n-арном операцијом $o_n : M^n \to M$ за сваки операцијски симбол o арности n из језика L;*
3. *истакнутим елементом $c_M \in M$ за сваки симбол константе из језика L;*
4. *n-арном релацијом $\rho_M \subseteq M^n$ за сваки релацијски симбол арности n из језика L.*

Наводимо сада три дефиниције проблема задовољења услова.

Дефиниција 4.1.3. *Инстанцу проблема задовољења услова CSP чине:*

1. *коначан скуп променљивих $V = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$;*
2. *коначан домен вредности D;*
3. *коначан скуп услова $C = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$, при чему је сваки услов $c_i = (s_i, R_i)$, где је s_i k_i-торка променљивих из V, која се зове и поље услова, а R_i k_i-арна релација над D која се зове и релација услова.*

Инстанца се прихвата ако постоји функција $f : V \to D$, таква да за све i важи да је $f(s_i) \in R_i$.

Пре него што наведемо следећу дефиницију проблема CSP наводимо дефиницију хомоморфизма релацијских структура.

Дефиниција 4.1.4. *Нека су* $\mathbb{A}(A, R_1, ..., R_n)$ *и* $\mathbb{B}(A, S_1, ..., S_n)$ *две релацијске структуре, пресликавање* $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *се назива хомоморфизам ако за све* $(a_1, a_2, ..., a_n) \in R_k$ *следи да је* $(h(a_1), h(a_2), ..., h(a_n)) \in S_k$.

Следећа дефиниција ће имати највећу примену у даљем тексту и базираћемо се на тај приступ.

Дефиниција 4.1.5. *Нека је* H *коначна релацијска структура на коначном језику. Проблем одлучивања* $CSP(H)$ *као улаз има коначну релацијску структуру* G *на истом језику као* H. *Та релацијска структура* G *се прихвата ако и само ако постоји хомоморфизам са* G *у* H.

Јасно је да структуре G и H могу бити графови. Могло би се рећи да ова дефиниција повезује универзалну алгебру, математичку логику и комбинаторну теорију графова.
Централна теорема овог поглавља се односи на H-бојење графова. Претходна дефиниција би могла да гласи да се решавање CSP(H) проблема своди на одређивање хомоморфизма из графа G (који је улаз) у фиксирани граф H. Дефиниција хомоморфизма графова дата је у поглављу 1.1 овог рада.
Хомоморфизам графа на самог себе назива се **ендоморфизам** графа.

Дефиниција 4.1.6. *Кажемо да се граф* $G = (V, E)$ *ретрактује на подграф* $H = (W, F)$ *ако постоји ендоморфизам* $e : V \to V$ *тако да важи* $e(V) = W$ *и* $e(A) = A$ *за све* $A \in W$. *Овако дефинисано пресликавање назива се* ***ретракција***.

Дефиниција 4.1.7. *Минимални подграф на који се неки граф ретрактује назива се језгро графа. За граф кажемо да је језгро-граф ако је једнак свом језгру.*

Сада ћемо навести формалну дефиницију H-бојења графа.

Дефиниција 4.1.8. *Нека су* G *и* H *два неоријентисана графа. Кажемо да је граф* G H*-обојив ако и само ако постоји хомоморфизам из графа* G *у граф* H.

Трећа дефиниција даје приступ преко примитивно-позитивних формула квантификаторског рачуна. Примитивно позитивне формуле су формуле облика $(\exists x_1)(\exists x_2)...(\exists x_n)(R_1(s_1) \wedge R_2(s_2) \wedge ... \wedge R_k(s_k))$, то јест под квантификаторима је само конјукција одређених релација, а све промењљиве су егзистенцијално квантификоване.

Дефиниција 4.1.9. *Проблем задовољења услова (CSP) представља проверу задовољивости улазних примитивно позитивних формула у датом коначном моделу.*

4.1.1 Хипотеза дихотомије

Проблеми одлучивања су питања у неком систему која имају за излаз две опције, потврдан или одричан одговор. Када се говори о неким проблемима важно је да се ти проблеми реше за што мањи временски период. Треба одредити алгоритам који проблем решава за најмање могуће време. За алгоритам кажемо да је *детерминистички* ако је у сваком кораку (тренутку) наредно стање једнозначно одређено. Супротно томе алгоритам је *недетерминистички* ако у сваком тренутку има више могућности избора за наредно стање.

Дефиниција 4.1.10. *За дати проблем чији су улазни подаци димензије n, кажемо да је одређени алгоритам временске сложености $O(g(n))$ ако време извршавања алгоритма у најгорем случају не прелази вредност $c \cdot g(n)$, где је c константа.*

Алгоритам је ***полиномске*** *сложености по времену извршавања, ако је временска сложеност највише $O(n^k)$, где је k константа.*

Дефиниција 4.1.11. *Кажемо да проблем припада класи сложености P ако се решава неким алгоритмом полиномске сложености.*

Пример проблема за чије решавање се користи алгоритам полиномске сложености је 2-бојење графа. Јасно је да се сваки бипартитни граф може обојити са две боје. Овај пример ће касније имати важну улогу у формулацији кључне теореме овог поглавља.

Дефиниција 4.1.12. *Проблем припада класи NP (недетерминистичка полиномска сложеност) ако се решење датог проблема може потврдити алгоритмом полиномске сложености то јест за унапред дато решење утврђује се да ли су испуњени сви услови проблема.*

Наредна дефиниција уводи једну класу проблема која привлачи велику пажњу математичара.

Дефиниција 4.1.13. *За проблем X кажемо да је NP-комплетан ако припада класи NP проблема и ако се сви остали NP проблеми алгоритмом полиномске сложености могу свести на X.*

Најпознатији NP-комплетни проблеми су:

1. **проблем клике**, то је питање да ли дати граф садржи као подграф клику од k чворова.

2. **3-САТ проблем**, први проблем за који је откривено да је NP-комплетан. Ако је исказна формула φ дата у конјуктивној нормалној форми, да ли постоји нека додела тачно нетачно промењљивима тако да је цела формула тачна. Исказна формула је у конјуктивној нормалној форми (КНФ) ако представља конјукцију подформула које су дисјункција литерала. Под литералом се подразумева исказно слово или његова негација.

3. **Проблем 3-бојења графа** (бојење графа је описано у првој глави).

4. **Проблем Хамилтоновог пута**, ту је питање да ли граф садржи Хамилтонов пут.

5. **Проблем изоморфизма подграфа**, овде је питање да ли граф G садржи подграф који је изоморфан датом графу H.

Теорема 4.1.1. *Проблем X је NP-комплетан ако припада класи NP и ако постоји NP-комплетан проблем Y који је полиномијално сводљив на X.*

Један од најпознатијих отворених проблема у математици је $P = NP$. Треба доказати да сигурно важи или да сигурно не важи ова једнакост. То је један од седам такозваних миленијумских проблема, за које је Клеј институт 2000. године расписао награду од милион долара.

Централни моменат у овој области је постављање познате хипотезе дихотомије, која каже да је CSP проблем или у класи P или NP-комплетан . Ова хипотеза је постављена у раду [23], Федера и Вардија из 1993. године.

Веома је занимљиво да је ову хипотезу изгледа 2017. године успео да реши руски математичар Андреј Булатов. До решења је исте године дошао и други математичар Димитри Жук, у раду [64], који је објављен 2020. године. Рад Булатова [11] се у тренутку писања овог поглавља тезе (јануар 2021. године) још увек налази на архиву, јер је на рецензији. Пошто је доказана, хипотезу дихотомије ћемо формулисати као теорему.

Теорема 4.1.2 (Булатов, Жук)**.** *Проблем задовољења услова (CSP) на коначном моделу је или у класи P или NP-комплетан.*

Теорема чешких математичара Хела и Нешетрила, формулисана у раду [32] из 1990. године потврђује хипотезу дихотомије за проблем задовољења услова код неоријентисаних графова без петљи.

Теорема 4.1.3. *Нека је дат неоријентисани граф H. Ако је H бипартитни граф онда је проблем H-бојења у P, а ако је H небипартитни граф онда је NP-комплетан.*

У наставку ће бити дат оригиналан и једноставнији доказ од доказа из рада [32]. Али примењиваће се такође неке идеје које у овом раду користе аутори. Следеће поглавље је посвећено CSP проблему на неоријентисаним графовима.

Пошто је проблем задовољења услова веома актуелан последњих тридесетак година за више детаља погледати радове [5], [4], [12] и [33].

4.2 Комбинаторни приступ преко графова

Разматрају се неоријентисани графови без петљи. Тема ове дисертација је првенствено теорија графова и неке њене примене, неће се пуно улазити у детаље око проблема задовољења услова. Акценат је на решеној хипотези дихотомије за неусмерене графове и једном новом доказу који је једноставнији јер се разматрају графови са мањим бројем темена и има мањи број случајева него у оригиналном доказу из [32]. Пре тог доказа наводе се три конструкције и неколико помоћних тврђења.

Индикаторска конструкција
Нека је I фиксиран граф за чија два чвора i и j важи да се при неком аутоморфизму i слика у j, а j у i. Ова конструкција трансформише граф H у граф H' тако што H' има исти скуп чворова као H, али гране се повлаче између оних чворова h и h' за које важи да постоји хомоморфизам који слика I у H, тако да се i слика у h, а j у h'.

Субиндикаторска конструкција
Нека је J фиксиран граф са специфицираним чворовима $j, h_1, h_2, ..., h_t$. Ова конструкција помоћу графа J трансформише дати језгро-граф $H(V, E)$, код кога су означени чворови $k_1, k_2, ..., k_t$ у граф чији је скуп чворова V', а гране међу њима су као у H. Граф W се добија као дисјунктна унија графова J и H при чему се одговарајући специфицирани чворови идентификују ("налепе"један на други h_i на k_i). Скуп чворова V' је онај скуп чворова који се добијају као слике чвора j приликом неке ретракције графа W на граф H.

Ивица-субиндикаторска конструкција
Нека је J фиксиран граф са специфицираним чворовима $h_1, h_2, ..., h_t$ и означеном ивицом jj', такав да неки аутоморфизам графа J чува све означене чворове $h_1, h_2, ..., h_t$ а темена j и j' мењају места при истом аутоморфизму. Овом конструкцијом се трансформише дати језгро граф H код кога су означени чворови $k_1, k_2, ..., k_t$ у граф H_e. Прво се оформи граф W као дисјунктна унија графова J и H при чему се одговарајући специфицирани чворови идентификују ("налепе"један на други h_i на k_i). Граф H_e је подграф графа H који се добија неком ретракцијом графа W на H. Гране у графу H_e су оне гране које су слике ивице jj' при поменутој ретракцији.

Ове конструкције као и наредне три леме су из рада [32], Хела и Нешетрила.

Лема 4.2.1. *Нека је H_1 граф добијен од графа H индикаторском конструкцијом. Ако је проблем H_1- бојења NP-комплетан тада је и проблем H-бојења NP-комплетан.*

Лема 4.2.2. *Нека је H^* граф добијен од графа H субиндикаторском конструкцијом. Ако је проблем H^*- бојења NP-комплетан тада је и проблем H-бојења NP-копмплетан.*

Лема 4.2.3. *Нека је H језгро-граф и H_e његов подграф добијен ивица-субиндикаторском конструкцијом. Ако је проблем H_e-бојења NP-комплетан онда је и проблем H-бојења NP-комплетан.*

Следећа лема је познато тврђење из теорије графова.

Лема 4.2.4. *Претпоставимо да постоји ендоморфизам са графа H на његов подграф H_1. Онда за сваки граф G хомоморфизам из G у H постоји ако и само ако постоји хомоморфизам из G у H_1.*

У даљем тексту са K_4 означавамо комплетан граф са 4 темена, а са K_4^- комплетан граф са 4 темена из кога је уклоњена једна ивица.

Став 4.2.1. *Коришћењем индикаторске и субиндикаторске конструкције и узимањем језгра од произвољног небипартитног графа може се добити језгро-граф H^* без петљи, за који важи следеће:*

1. *садржи троугао;*
2. *не садржи K_4;*
3. *Свака два чвора имају заједничког суседа (између свака два чвора постоји пут дужине два);*
4. *не садржи K_4^-.*

Доказ. Сада ћемо видети како помоћу прве две конструкције и правилним избором индикатора можемо добити граф који има ова четири својства.
Напомена: После сваког корака узимамо језгро графа, ова операција не ремети својства 1, 2, 3 и 4.

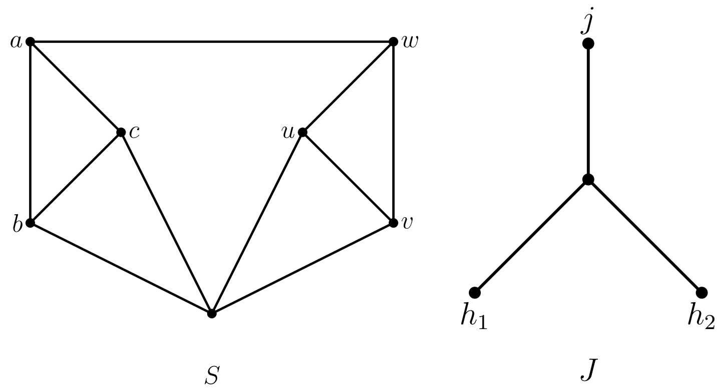
1. Пошто граф није бипартитан он садржи непарни цикл. Уколико најмањи непарни цикл има пет или више ивица можемо применити индикаторску конструкцију, где је индикатор задат графом I који представља пут дужине три са крајњим тачкама i и j. Јасно је да ће тада све ивице бити задржане и да ће се појавити бар још једна дуж која спаја темена овог непарног цикла. Може се понављати ова конструкција док се не појави троугао.

2. Нека граф садржи K_4. Применимо субиндикаторску конструкцију, код које је граф J задат као једна грана чији су крајњи чворови j и h_1 и нека је код K_4 једно специфицирано теме k_1. Овом субиндикаторском конструкцијом губи се теме k_1, а не губи се троугао. Понављамо овај поступак док год граф садржи K_4.

3. Покажимо прво да је сваки чвор графа теме неког троугла (то јест да се помоћу претходних конструкција може добити ово својство, а да се не наруше већ наведена својства). Применимо субиндикаторску конструкцију код које је индикатор граф који се састоји од K_3 и једног изолованог темена, које је једино означено. У датом графу H на који примењујемо ову конструкцију свеједно је које ће теме бити специфицирано. Оваквом конструкцијом се добија граф чији је сваки чвор теме неког троугла. Према делу 1 ове леме полазни граф садржи троугао, тако да је овај граф сигурно непразан и небипартитан.

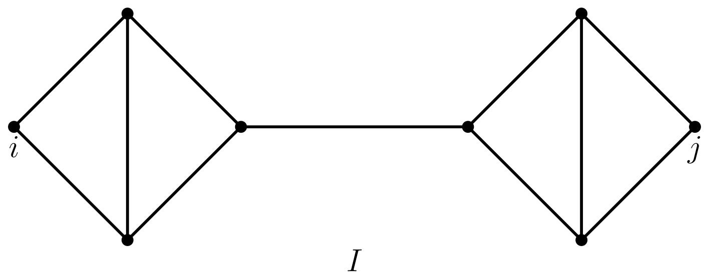
   Ако постоје два чвора која немају заједничког суседа, означимо их са u и v. Применимо субиндикаторску конструкцију код које је индикатор пут дужне два са крајњим тачкама j и h_1 и нека је $u = k_1$. Применом овакве конструкције добијамо граф који неће садржати чвор v. Применимо ову конструкцију на свака два чвора која немају заједничког суседа и добијамо граф код кога између свака два чвора постоји пут дужине два. Овом конструкцијом се не губи својство да граф садржи троугао.

4. Прво ћемо показати да се може учинити да не постоји хомоморфизам са графа S (слика 4.1) у наш граф. Ако такав хомоморфизам постоји онда се чворови $u, v, w, ...$, сликају у $u', v', w', ...$ Применимо онда субиндикаторску конструкцију код које је индикатор граф J са слике 4.1. Наиме, ако се примени таква конструкција код које би било $k_1 = u$, а $k_2 = v$, добио би се небипартитни граф који садржи троугао $a'b'c'$, али не садржи теме w'. Затим на тај граф са мањим бројем темена можемо применити описане поступке у 1, 2 и 3 и овај поступак примењивати док год поменути хомоморфизам постоји.



Слика 4.1: Граф S и индикатор J

Претпоставимо да је K_4^- код кога су u и v једина два несуседна чвора подграф графа H и да је граф H језгро-граф. Применимо на граф H индикаторску конструкцију код које је индикатор граф I, са слике 4.2. Свако 3-бојење графа I боји чворове i и j различитом бојом.



Слика 4.2

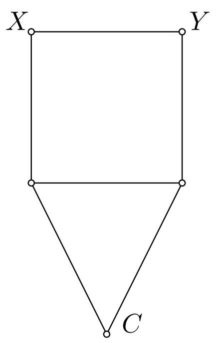
Применом овакве конструкције додаје се једна ивица, примењујмо ову конструкцију док граф не изгуби својство да је језгро-граф. Тако добијени граф пројектујемо на језгро и поново применимо својства 1, 2 и 3 на тај граф са мање темена. Примењујемо овај поступак док год граф садржи K_4^-. Ова конструкција трансформише полазни граф у граф који је такође неоријентисан (због симетричности индикатора) и садржи све гране полазног графа, јер свака два чвора имају заједничког суседа. Такође новодобијени граф не садржи ни петље јер не постоји хомоморфизам са графа S (слика 4.1) у граф H.

Овим је став доказан. $\square$

Централна теорема овог поглавља каже да је проблем H-бојења за небипартитне графове NP-комплетан.

Циљ доказа је свести граф H, помоћу наведених конструкција на граф који садржи троугао и за који се једноставно види да је 3-обојив. Овакав граф се може ретракцијом свести на троугао.

Доказ је дугачак, али краћи од оригиналног и у оквиру доказа биће доказана још једна помоћна лема.



Слика 4.3: Индикатор који се користи у кораку 1. леме 4.2.5

4.2.1 Теорема дихотомије за неоријентисане графове

Теорема 4.2.1. *Ако је H небипартитни граф онда је проблем H-бојења NP-комплетан.*

Доказ. На произвољан небипартитни граф применимо став 4.2.1. Применом овог става добићемо граф који има следећа својства: садржи троугао, не саржи K_4, свака два чвора овог графа имају заједничког суседа и не садржи K_4^-, означимо га са H_1. Узмимо једно произвољно теме овог графа и назовимо га централно теме (сваки чвор графа може се узети за централни). Формираћемо нивое темена у односу на ово теме. Кажемо да су сви суседи централног темена у другом нивоу у односу на ово централно теме. У трећем нивоу су сва темена која су на растојању два од централног темена. За неку грану кажемо да је у другом нивоу ако су њој инцидентни чворови у другом нивоу. Грана је у трећем нивоу ако су чворови које спаја у трећем нивоу. Уколико више троуглова имају једно заједничко теме назовимо их **латице**. Следећа лема нам обезбеђује још два важна својства графа.

Лема 4.2.5. *Применом индикаторских конструкција и узимањем језгра овако описани граф H_1 може се свести на језгро-граф који осим наведених својстава из става 4.2.1 има и следећа два својства:*

1. *у односу неко централно теме S постоји четвороугао коме су наспрамне ивице једна у другом, друга у трећем нивоу;*

2. *постоји теме X у трећем нивоу које има суседа у свим латицама из централног темена (то јест X је сусед са по једним крајем сваке ивице другог нивоа).*

Доказ. На неколико места у овом доказу примењиваће се кораци који доводе до смањења броја темена. После сваког смањења броја темена граф остаје небипартитан и поново се примењује став 4.2.1. Обзиром да се број темена смањује јасно је да ће се тај процес зауставити у једном тренутку.

1. Применимо ивица-субиндикаторску конструкцију код које је индикатор граф I са слике 4.3. Добијени граф садржи само оне гране AB за које постоји хомоморфизам h, $h : I \to H_1$, тако да се теме C слика у посматрано централно теме, а том приликом грана XY се слика у грану AB. Ова конструкција чува све гране из другог нивоа, све гране инцидентне са централним теменом али и оне гране које повезују један чвор из другог нивоа са једним чвором из трећег нивоа. Приликом ове конструкције бришу се једино гране из трећег нивоа за које не постоји ивица у другом нивоу таква да су оне наспрамне ивице четвороугла. Према томе ова конструкција нам осигурава да за

неко одабрано централно теме, за сваку ивицу у трећем нивоу постоји одговарајућа ивица у другом нивоу тако да су оне наспрамне ивице четвороугла. Уколико се овом конструкцијом добио граф који је изгубио својство да између свака два чвора постоји пут дужине два применимо поново део 3 става 4.2.1, овај корак ће смањити број темена. Означимо добијени граф са H_2.

2. Ово својство ћемо постићи у четири корака.

   Корак 1:

   Прво конструкцију из претходног корака применимо на сва темена (то јест као да је свако теме централно). Овом конструкцијом смо обезбедили да ако било које теме разматрамо као централно, свака ивица у трећем нивоу има одговарајућу ивицу у другом нивоу тако да су оне наспрамне странице четвороугла. Пошто посматрани граф не садржи K_4^-, то јест не постоји ивица која је страница више од једног троугла уклањањем неке ивице постоје два чвора која ће изгубити својство да имају зајденичког суседа (ако разматрамо један троугао из кога је уклоњена једна ивица поменутом конструкцијом, чворови који остају спојени више немају заједничког суседа). Уколико се то деси треба поново применити својство 3 из става 4.2.1, овим кораком смањује се број темена.

   Корак 2:

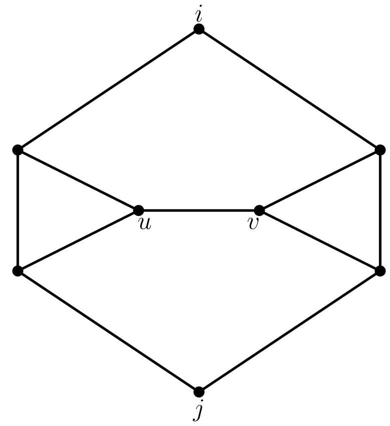
   Приметимо да се може учинити да при сваком хомоморфизму који слика граф U са слике 4.4 у граф H_2 слике чворова i и j буду суседни чворови.

   Применимо индикаторску конструкцију код које је индикатор граф U. Граф U се може ретраковати на троугао али тада се чворови i и j не могу сликати у исто теме. Ако добијени граф садржи петље онда постоји хомоморфизам са графа S са слике 4.1 у посматрани граф, у том случају поново применимо субиндикаторску конструкцију код које је индикатор граф J, а која је описана у доказу става 4.2.1. Поновна примена ове конструкције ће смањити број темена. Такође добијени граф ће садржати и све гране графа H_2. Примењујмо ову индикаторску конструкцију док год постоје два чвора у посматраном графу да су при поменутом хомоморфизму слике i и j, а да нису суседни. После овог корака се може десити да граф изгуби својства да не садржи K_4 или да не садржи K_4^-, уколико се деси да настане нека од ове две фигуре треба поново применити делове 2 и 4 из става 4.2.1, што ће смањити број темена. Ако се изгуби својство из корака 1, треба се поново вратити на тај корак при чему ће се такође смањити број темена.

   Корак 3:

   Посматрајмо сада теме X које има суседа у максималном броју латица. Претпоставимо да постоји нека латица у којој нема суседа (то јест ивица у другом нивоу таква да ни један њен крај није спојен са X), нека је то латица која садржи ивицу CD.

   Треба да важи својство 3 става 4.2.1 да постоји пут дужине два од X до C и D, при томе ни једно од ова два темена нема суседа у другом нивоу (ако би постојао чвор суседан једном од темена C или D из другог нивоа, онда би са ова два темена и централним заједно чинили K_4^-). Такође, C и D не могу имати заједничког суседа у трећем нивоу јер би онда то теме, C, D и централни чвор чинили K_4^-. Према томе, теме X може бити спојено са још два чвора из трећег нивоа, означимо их са A и B, ова два темена су заједнички суседи са C и D. Ако бисмо теме X посматрали као централно теме, ивица CD је у трећем нивоу, према кораку 1 има одговарајућу

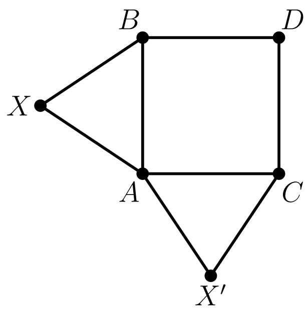


Слика 4.4: Граф U

ивицу у другом нивоу тако да су наспрамне странице четвороугла, па су темена A и B спојена граном (видети слику 4.5).

Корак 4:

Ако постоји теме X' коме је сусед C или D, према претходном кораку оно мора бити у трећем нивоу (слика 4.5).



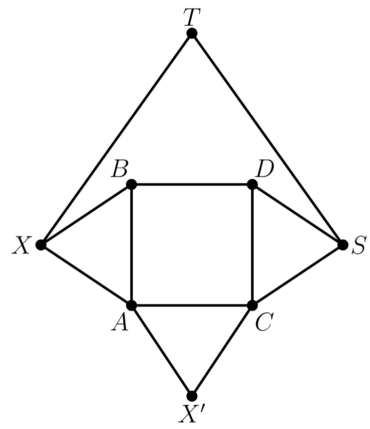
Слика 4.5

Претпоставимо да постоји неко теме T из другог нивоа које је спојено са X, а није спојено са X'. Наравно пошто је у другом нивоу теме T је спојено и са централним чвором који је сад означен са S (видети слику 4.6).

У кораку два смо обезбедили да су приликом сваког хомоморфизма са графа U у посматрани граф слике чворова i и j суседни чворови. Може се приметити да постоји хомоморфизам са графа U такав да се темена u и v сликају у B и D. При истом хомоморфизму чворови i и j се сликају у T и X', па су ова два чвора суседи. Према томе, ако теме X' постоји онда је оно сусед са свим латицама са којима је сусед и X, па самим тим постоји теме у трећем нивоу које има суседа у свакој ивици другог нивоа.

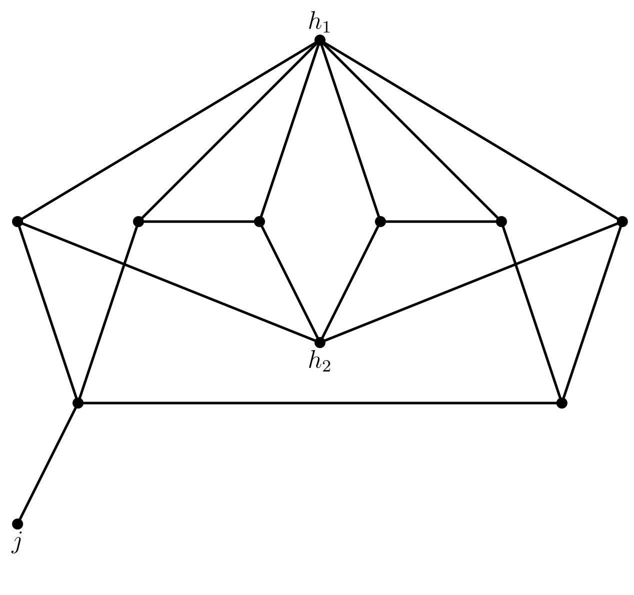
$\square$

Посматрајмо сада граф који има сва четири својства из става 4.2.1 и оба својства леме 4.2.5 означимо га са H_3. Може се дефинисати једно 3-бојење другог нивоа овог графа на следећи начин: темена из другог нивоа повезана са X боје се бојом 1, а темена другог нивоа која нису спојена са X бојом два. Ако проширимо ово бојење на цео граф онда је



Слика 4.6

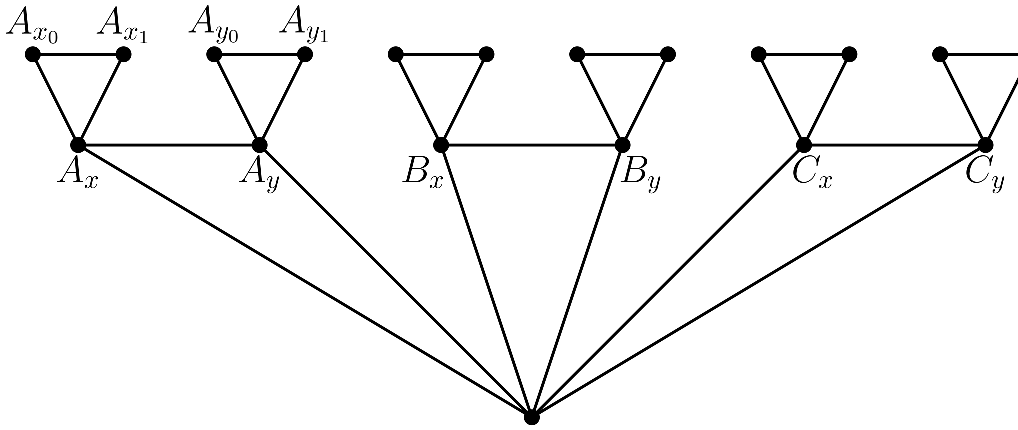
централно теме обојено бојим 3. Одавде је јасно да је подграф који чине први и други ниво 3-обојив. Лако се види да два чвора од којих је један из другог а један из трећег нивоа не могу бити спојени граном ако су обојени истом бојом. Такође, немогуће је да су два суседна чвора из трећег нивоа обојена оба бојом 1 или 2, јер свака ивица у трећем нивоу има себи одговарајућу ивицу у другом тако да су наспрамне странице четвороугла. Према томе или је граф H_3 3-обојив или постоје два чвора у трећем нивоу тако да су оба обојена бојом 3. Ако је граф H_3 3-обојив онда је доказ завршен. Ако ипак постоје два чвора у трећем нивоу која су обојена бојом 3 применимо на граф H_3 субиндикаторску конструкцију код које је индикатор граф са означеним теменима са слике 4.7.



Слика 4.7

При чему су у графу H_3 означена темена на следећи начин: централно теме је означено са k_1, а поменуто теме X које има суседа у свакој латици из централног темена са k_2. Применом поменуте субиндикаторске конструкције добија се повезан подграф графа H_3, означимо га са H_4. Овај подграф садржи троугао, али не садржи централно теме тј. први ниво, према томе на даље ћемо посматрати граф са мањим бројем темена. Овим је доказ теореме завршен.

□



Слика 4.8: Граф описан у примеру 4.2.1

4.2.2 Примери

Сада ћемо навести два примера да би се боље разумео овај доказ. Наредни примери приказују графове који имају сва четири својства из става 4.2.1, али нису 3-обојиви.

Пример 4.2.1. *Посматрајмо граф који има једно централно теме и из њега иду три латице, односно 6 темена у другом нивоу. Означимо сваку од тих латица са A, B и C, а одговарајућа два суседа централног цвора* A_x *и* A_y *у латици A, затим* B_x *и* B_y *у латици B и слично за C. И нека је у сваком од ових темена из другог нивоа формирана латица у трећем нивоу, а одговарајућа темена означена са 0 или 1 тј.* A_{x_0} *и* A_{x_1} *су суседи темена* A_x *(видети слику 4.8). Сваки чвор из другог нивоа са још два чвора из трећег нивоа чине троугао. Осим тога још неки чворови у трећем нивоу морају бити повезани да би било задовољено својство да свака два чвора имају заједничког суседа, тј. граф садржи и неке додатне гране које нису означене на слици. Сваки чвор који је у трећем нивоу а настаје из латице A мора бити повезан са тачно једним чвором из трећег нивоа из сваке латице над B и C. Исто важи и за чворове из трећег нивоа који настају на латицама B и C. На тај начин два чвора једне латице из трећег нивоа су повезана са два чвора из неке друге латице такође у трећем нивоу. Могу бити повезани исти (оба имају ознаку 0 или оба имају ознаку 1) или различити (чвор означен са 0 у једној латици са чвором означеним јединицом у другој латици). Може се рећи да је први случај без а други случај са уплитањем. Нека се латице из A повезују са латицама из B без уплитања, латице из B са теменима из C без уплитања ако и само ако су им секундарне ознаке исте то јест ако су обе означене са x или y. Латице из A се повезују са латицама из C са уплитањем када је у питању латица код* A_x*. Овако добијени граф задовољава сва четири својства става 4.2.1 а није 3-обојив.*

Претпоставимо да је граф могуће правилно обојити са 3 боје и нека су то боје 1, 2 и 3. Нека је централно теме обојено бојом 3, други ниво је обојен бојама 1 и 2. Можемо претпоставити да је теме A_x боје 1, A_y боје 2, размотрићемо четири могућа случаја бојења другог нивоа.

1. Нека су сва темена у другом нивоу која имају ознаку x боје 1 а сва темена која имају ознаку y боје 2 (можемо посматрати боје чворова са слике, с лева на десно су онда боје 1, 2, 1, 2, 1, 2 тим редом). Посматрајмо сада чворове из трећег нивоа у латицама над теменима боје 2 (то су A_y, B_y и C_y), та темена морају бити обојена бојама 1 и 3. Латице над поменутим теменима су спојене паралелно свака са сваком тако да ако би гледано са леве стране бојили 1, 3, 3, 1, неко од темена треће латице би било спојено са теменом исте боје или у првој или у другој латици.

2. Нека други ниво има бојење: A_x боје 1, A_y боје 2, B_x боје 2, B_y боје 1 и C_x боје 1 а C_y боје 2 (или скраћено с лева на десно 1, 2, 2, 1, 1, 2). Посматрајмо темена у трећем нивоу у латицама над A_x, B_y и C_x, сва та темена су обојена бојама 2 и 3. Прве две латице су спојене паралелно па се могу њихова темена обојити редом бојама 2, 3, 3, 2. Трећа латица је са обе ове спојена са уплитањем тако да њена темена како год обојимо биће спојена са теменима исте боје или у латици код A_x или B_y, опет нема правилног 3-бојења.

3. Нека су у овом случају редом с лева на десно чворови у другом нивоу обојени на следећи начин 1, 2, 1, 2, 2, 1. Размотримо темена трећег нивоа у латицама над теменима A_x, B_x и C_y, пошто су ова три темена обојена бојом 1 поменути чворови трећег нивоа се морају бојити са 2 и 3. Латице код A_x и B_x су спојене параленлно па гледано с лева њихова темена могу бити обојена супротном бојом, али обе ове латице су спојене са увијањем са сусдима темена C_y, па се морају појавити спојена темена обојена истом бојом како год бојили латицу код C_y.

4. Нека су у овом случају темена другог нивоа с лева на десно редом обојена бојама 1, 2, 2, 1, 2, 1. Темена A_y, B_x и C_x су боје 2, а њихови суседи из трећег нивоа морају бити обојени бојама 1 и 3. Пошто су латице над ова три темена спојене паралелно свака са сваком, јасно је да ће бити бар два темена исте боје спојена граном.

Из свих могућих бојења другог нивоа дошли смо до закључка да се граф не може правилно обојити са три боје.

Проверимо још да ли овај граф задовољава сва четири својства описана у ставу 4.2.1. Граф садржи троугао, то се лако види. Од централног до сваког другог чвора јасно постоји пут дужине два. Свака два чвора из другог нивоа имају заједничког суседа, то је централно теме. Ако теме из другог и трећег нивоа имају исту примарну ознаку, на пример B заједнички сусед им је или сусед у латици, или друго теме из другог нивоа са истом примарном ознаком. Свако теме из трећег нивоа са примарном ознаком A повезано је са сваком латицом која има теме у другом нивоу са ознаком B и C, а и исто важи за темена у латицама изнад B и C међусобно, па темена из трећег нивоа имају заједничког суседа са теменима из другог нивоа и ако им је различита примарна ознака.
Према томе закључујемо да свако теме из трећег нивоа са сваким теменом из другог нивоа има заједничког суседа. Уколико два темена из трећег нивоа са различитом примарном ознаком нису спојена онда је сусед од првог спојен са другим па имају заједничког суседа. Ако су два темена из трећег са различитом примарном ознаком (на пример A и B) спојена, онда постоји теме са трећом примарном ознаком (на пример C) са којим су оба спојена, то теме им је заједнички сусед (видети објашњење да граф није 3-обојив).

Посматрајмо сада два чвора из трећег нивоа који имају исту примарну, а различиту секундарну ознаку (такви су на пример A_{x_0} и A_{y_0}). Уколико им је трецијарна ознака иста заједнички сусед им је у оној латици, са различитим примарном ознаком, са којом су обе спојене паралелно. Ако им се терцијарне ознаке разликују онда им је заједнички сусед у оној латици са различитом примарном ознаком са којом је једна спојена паралелно, а друга са уплитањем.

Довољно је још показати да граф не садржи K_4^- то јест да је свака ивица овог графа страница само једног троугла. Са слике се јасно види да су ивице којима је један крај централно теме и ивице из другог нивоа странице само по једног троугла. Такође ово својство јасно са слике важи и за ивице чији су инцидентни чворови у другом и трећем нивоу. Затим, ни једно теме из трећег нивоа није спојено са оба краја неке ивице из трећег нивоа која је повучена на слици, тако да ни за ове ивице не постоји више од једног троугла коме су оне странице. Остаје да се размотре ивице које се додају. Свако теме из трећег нивоа је степена 6 и има још 4 суседа у трећем нивоу. Може се приметити да међу та четири суседа има по два која су спојена. Тако да би се могло рећи да у сваком темену из трећег нивоа има три латице (при чему за свако теме имамо по једну латицу већ на слици). Наравно, ако овако разматрамо за различита темена неке латице се поклапају, али не постоји ивица која је истовремено у две различите латице.

Пример 4.2.2. *Посматрајмо граф који има једно централно теме из кога иде пет латица (то јест у другом нивоу има 10 темена). Обележимо сва темена у другом нивоу бројевима 0 или 1, тако да свака латица има једно теме обележено са 0 и једно теме обележено са 1. У трећем нивоу овај граф има 16 темена. Свако теме из трећег нивоа биће повезано са по пет темена из другог нивоа, и то по једним из сваке латице. Обележимо сада свако теме из трећег нивоа са 5 бинарних цифара на следећи начин: свака од пет бинарних цифара одговара ознакама темена из другог нивоа са којима је теме из трећег нивоа спојено (то јест свако од пет места одговара по једној латици). У сваком означавању имамо паран број јединица. У трећем нивоу два чвора су спојена граном ако се њихове ознаке разликују на четири места. Овакав граф задовољава сва четири својства става 4.2.1, а није 3-обојив.*

Ако бисмо претпоставили да је дати граф могуће правилно обојити са три боје нека су то боје 0, 1 и 2. Нека је централно теме обојено бојом 2 а темена из другог нивоа обојена бојом која одговара њиховој ознаци. Ако би постојало три бојење онда би сваки чвор из трећег нивоа осим чвора означеног са пет нула морао бити обојен бојим 2 јер је спојен и са неким означеним са 1 и са неким означеним са 0, али пошто су и неки од тих чворова међусобно спојени граф није 3-обојив.

Јасно је да овај граф садржи троугао. Проверимо да ли свака два чвора имају заједничког суседа тј. да ли између свака два чвора постоји пут дужине два. Јасно је да централно теме са сваким другим има заједничког суседа. И свака два темена из другог нивоа имају заједничког суседа то је централно теме. Ако неко теме X из трећег нивоа није повезано са неким теменом Y из другог нивоа оно је повезано са његовим суседом из латице па имају заједничког суседа. Уколико је теме X из трећег нивоа повезано са теменом Y из другог нивоа онда постоји теме Z у трећем нивоу које је такође повезано са Y и чије се ознаке разликују од X на свим осталим позицијама. Али пошто се X и Z разликују на четири места онда су они повезани. Према томе Z је заједнички сусед од X и Y. Остаје да се провери да ли свака два чвора из трећег нивоа имају заједничког суседа. Посматрајмо два темена из трећег нивоа, број јединица којима су оба означена је паран, а укупан број ознака је 5. Према томе одговарајуће ознаке се морају бар на једном месту поклапати, то значи да постоји чвор у другом нивоу са којим су оба спојена.

Проверимо још само да ли овај граф садржи K_4^-. Ако ни једна ивица није истовремено ивица више од једног троугла граф не садржи K_4^-. Треба приметити прво да не постоји троугао коме су сва три темена у трећем нивоу. Пошто су два чвора у трећем нивоу спојена ако се на једном месту поклапају а на сва остала четири разликују не постоје три темена која су спојена свако са сваким. Јасно је да свака два чвора која чине ивицу из трећег нивоа имају тачно једно заједничко теме у другом нивоу. Ивица којој је једно теме у другом а једно у трећем нивоу је ивица само једног троугла. Ако таква ивица спаја теме A из другог са теменом B из трећег нивоа јасно је да је она само у једном троуглу јер ова два чвора имају једног заједничког суседа из трећег нивоа код кога је иста ознака на оном месту на ком је латица којој припада A а све остале ознаке су супротне од ознака за теме B. Јасно је да посматрани граф има сва четири својства из става 4.2.1.

Библиографија

[1] S.B.B. Altindag and D. Bozkurt, "Lower bounds for the energy of (bipartite) graphs."MATCH Commun. Math. Comput. Chem 77 (2017): 9-14.

[2] A. T. Amin and S. L. Hakimi, "Upper bounds on the order of a clique of a graph". SIAM Journal on Applied Mathematics 22.4 (1972): 569-573

[3] L. Arnold, "On the asymptotic distribution of the eigenvalues of random matrices". No. MRC-TSR-736. Wisconsin Univ Madison mathematics research center, 1967.

[4] J. Bang-Jensen, P. Hell and G. MacGillivray. "The complexity of colouring by semicomlete digraphs". SIAM J. Discrete Math, 1(3), (1988): 281-298.

[5] L. Barto, M. Kozik and T. Niven, "The CSP dichotomy holds for digraph with no sources and no sink (a positive answer to a conjecture of Bang-Jansen and Hell)", SIAM Journal om Computing 38/5 (2009): 1782-1802.

[6] N. Biggs, "Algebraic graph theory."Vol. 67. Cambridge university press, 1993.

[7] A. Borobia and U. R. Trias, "A geometric proof of the Perron-Frobenius theorem."Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 5.1 (1992): 57-63.

[8] V. Božin and I. Lazarević, "H-coloring revisited"(na recenziji).

[9] V. Božin and I. Lazarević,"Maximal Schatten p-norms for p>2"(na recenziji).

[10] V. Božin and M. Mateljević, "Energy of graphs and orthogonal matrices."Approximation and Computation. Springer, New York, NY, (2010): 87-96.

[11] A. Bulatov, "A dichotomy theorem for nonuniform CSPs."58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). IEEE, (2017).

[12] A. Bulatov, P. Jeavons and A. Krokhin, " Classifying the complexity of constraints using finite algebras. SIAM journal on computing", 34(3),(2005): 720-742.

[13] G. Caporossi et al. "Variable neighborhood search for extremal graphs. 2. Finding graphs with extremal energy." Journal of Chemical Information and Computer Sciences 39.6 (1999): 984-996.

[14] N. Cook, "Two proofs of Wigner semicircular law"(2012).

[15] K. P. Costello, T. Tao and V. Vu, "Random symmetric matrices are almost surely nonsingular". Duke Mathematical Journal , 135(2), (2006): 395-413.

[16] C. A. Coulson, "On the calculation of the energy in unsaturated hydrocarbon molecules." Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 36. No. 2. Cambridge University Press, (1940).

[17] C. A. Coulson and H. C. Longuet-Higgins, "The electronic structure of conjugated systems I. General theory." Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences 191.1024 (1947): 39-60.

[18] C. A. Coulson and H. C. Longuet-Higgins, "The electronic structure of conjugated systems II. Unsaturated hydrocarbons and their hetero-derivatives." Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences 192.1028 (1947): 16-32.

[19] D. Cvetković and M. Milić, "Teorija grafova i njene primene."(1971).

[20] K. Das, S. A. Mojallal and I. Gutman, "Improving McClellands lower bound for energy." MATCH Commun. Math. Comput. Chem 70.2 (2013): 663-668.

[21] K. Das and I. Gutman, "Bounds for the energy of graphs." Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 45.3 (2016): 695-703.

[22] J. Ebrahimi et al, "On the sum of two largest eigenvalues of a symmetric matrix." Linear algebra and its applications 429.11-12 (2008): 2781-2787.

[23] T. Feder and M. Y. Vardi, "Monotone monadic SNP and constraint satisfaction." Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing, (1993).

[24] Z. Furedi and J. Komlos, "The eigenvalues of random symmetric matrices." Combinatorica, 1(3), (1981): 233-241.

[25] U. Grenander, "Probabilities on algebraic structures." Courier Corporation, (2008).

[26] I. Gutman, "The energy of a graph." Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungszent (1978): 1-22.

[27] I. Gutman, "The energy of a graph: old and new results."Algebraic combinatorics and applications. Springer, Berlin, Heidelberg, (2001): 196-211.

[28] I. Gutman and M. Mateljević, "Note on the Coulson integral formula."Journal of mathematical chemistry 39.2 (2006): 259-266.

[29] I. Gutman, B. Zhou and B. Furtula, "The Laplacian-energy like invariant is an energy like invariant."MATCH Commun. Math. Comput. Chem 64.1 (2010): 85-96.

[30] W. H. Haemers, " Strongly regular graphs with maximal energy."Linear Algebra and its Applications 429.11-12 (2008): 2719-2723.

[31] A. Hedayat and W. D. Wallis, "Hadamard matrices and their applications."The Annals of Statistics 6.6 (1978): 1184-1238.

[32] P. Hell and J. Nesetril, "On the Complexity of H-coloring", J. Comb. Theory B 48 (1990): 92-110.

[33] P. G. Jeavons,"On the algebric structure of combinatorial problems", Theor. Comput.Sci, 200 (1998): 185-204.

[34] J. P. Keener, "The Perron Frobenius theorem and the ranking of football teams". SIAM review 35.1 (1993): 80-93.

[35] H. Kharaghani and B. T. Rezaie, "A Hadamard matrix of order 428"Journal of Combinatoria - Wiley Online Library, (2005).

[36] J. Kiefer, "Optimum experimental designs."Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological) 21.2 (1959): 272-304.

[37] J. Kiefer and J. Wolfowitz, "Optimum designs in regression problems."The Annals of Mathematical Statistics (1959): 271-294.

[38] J. Komlos, "On the determinant of (0, 1) matrices." Studia Sci. Math. Hungar, 2(1),(1967): 7-21.

[39] J. Koolen and V. Moulton, "Maximal energy graphs."Advances in Applied Mathematics 26.1 (2001): 47-52.

[40] J. Koolen and V. Moulton, "Maximal energy bipartite graphs."Graphs and Combinatorics 19.1 (2003): 131-135.

[41] I. Lazarević, "Extended Schatten norms of random graphs and Nikiforov conjecture." Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics (2022), doi.org/10.15672/hujms.914884.

[42] I. Lazarević and V. Božin, "Asymptotic energy of complement graph"(na recenziji).

[43] M. Mateljević, V. Božin and I. Gutman, "Energy of a polynomial and the Coulson integral formula."Journal of mathematical chemistry 48.4 (2010): 1062-1068.

[44] B. McClelland and J. Bernard, "Properties of the latent roots of a matrix: The estimation of π -electron energies."The Journal of Chemical Physics 54.2 (1971): 640-643.

[45] B. Mohar, "On the sum of k largest eigenvalues of graphs and symmetric matrices." Journal of Combinatorial Theory, Series B 99.2 (2009): 306-313.

[46] S. Neil and M. Harwit, "Masks for Hadamard transform optics, and weighing designs."Applied optics 15.1 (1976): 107-114.

[47] V. Nikiforov, " The energy of graphs and matrices", J.Math. Anal. Appl. 326 (2007): 1472-1475.

[48] V. Nikiforov, "Graphs and matrices with maximal energy." Journal of mathematical analysis and applications 327.1 (2007): 735-738.

[49] V. Nikiforov, "Beyond graph energy: Norms of graphs and matrices." Linear Algebra and its Applications 506 (2016): 82-138.

[50] V. Nikiforov, "Extremal norms of graphs and matrices." Journal of Mathematical Sciences 182.2 (2012): 164-174.

[51] V. Nikiforov, "Remarks on the energy of regular graphs."Linear Algebra and its Applications 508 (2016): 133-145.

[52] V. Nikiforov, "On the sum of k largest singular values of graphs and matrices." Linear algebra and its applications 435.10 (2011): 2394-2401.

[53] V. Nikiforov, "The trace norm of r-partite graphs and matrices". Comptes Rendus Mathematique 353.6 (2015): 471-475.

[54] F. Nikos and S. Kounias, "The excess of Hadamard matrices and optimal designs". Discrete mathematics 67.2 (1987): 165-176.

[55] F. Ninio, "A simple proof of the Perron-Frobenius theorem for positive symmetric matrices." Journal of Physics A: Mathematical and General 9.8 (1976): 1281.

[56] T. Tao, "Topics in random matrix theory". Vol. 132. American Mathematical Soc., (2012).

[57] T. Tao and V. Vu, "Random matrices: universality of local eigenvalue statistics."Acta mathematica 206.1 (2011): 127-204.

[58] T. Tao and V. Vu, "On random ± 1 matrices: singularity and determinant." Random Structures and Algorithms, 28(1), (2006): 1-23.

[59] T. Tao and V. Vu, "On the singularity probability of random Bernoulli matrices."Journal of the American Mathematical Society, 20(3), (2007): 603-628.

[60] K. Tikhomirov, "Singularity of random Bernoulli matrices", Ann. Math. , 191 (2020).

[61] D. Veljan and M. Mišetić, "Kombinatorika s teorijom grafova", Školska knjiga, (1989).

[62] E. Wigner, "On the distribution of the roots of certain symmetric matrices."Annals of Mathematics (1958): 325-327.

[63] B. Zhou, "Energy of a graph."MATCH Commun. Math. Comput. Chem 51 (2004): 111-118.

[64] D. Zhuk, "A Proof of the CSP Dichotomy Conjecture."Journal of the ACM (JACM) 67.5 (2020): 1-78.

[65] E. Zogić, "Neke osobine rezolventne i Randićeve energije grafa", Doktorska disertacija, (2018).

Биографија аутора

Иван Лазаревић је рођен 29. фебруара 1988. године у Београду. Основну школу и гимназију завршио је у Аранђеловцу са одличним успехом. Основне студије уписао је на Математичком факултету Универзитета у Београду 2007. године и дипломирао на смеру Статистика, актуарска и финансијска математика 2011. године. Мастер студије је завршио на студијском програму Математика 2012. године. Докторске студије Математичког факултета Универзитета у Београду је уписао 2012. године. Од 2011. до 2014. био је запослен у Земунској гимназији као професор математике и рачунарства и информатике. Од марта 2014. године је запослен као асистент – студент докторских студија на Грађевинском факултету Универзитета у Београду, Катедра за математику, физику и нацртну геометрију.

Списак научних радова:

- Иван Лазаревић *Extended Schatten norms of random graphs and Nikiforov conjecture,* прихваћен у часопису Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, DOI: 10.15672/hujms.914884.
- Иван Лазаревић , *Using the ELECTRE-MLO multi-criteria decision-making method in Stepwise Benchmarking – Application in Higher Education*, објављен у часопису Operational Research in Engineering Sciences: Theory and Applications.
- Владимир Божин, Иван Лазаревић, *Maximal Schatten p-norms for p>2*, на рецензији у часопису Linear Algebra and its applications.
- Владимир Божин, Иван Лазаревић, *H-coloring revisited*, на рецензији у часопису Filomat.
- Иван Лазаревић, Владимир Божин, *Asymptotic energy of complement graph*, на рецензији у часопису MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry.

Поглавља у збиркама:

- Зоран Пуцановић, Марко Пешовић, Матеја Кнежевић, Иван Лазаревић, *Збирка задатака из Математичке анализе 1*, Грађевински факултет, Универзитет у Београду, Академска мисао, 2019, ISBN $978-86-7466-789-7$.
- Александра Ерић, Зоран Пуцановић, Владимир Половина, Иван Лазаревић, *Збирка решених задатака из математике за припремање пријемног испита на Грађевинском факултету* , Грађевински факултет, Универзитет у Београду, Академска мисао, 2016, ISBN $978-86-7466-596-1$.

Списак саопштења на конференцијама:

- Иван Лазаревић, *H-coloring revisited*, XIV Српски математички конгрес, Крагујевац, Србија, 2018.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-~~а~~ Иван Лазаревић

број индекса 2025/2012

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Уопштења Шатенових норми графа и комбинаторне примене

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 19.04.2022.

И. Лазаревић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Иван Лазаревић

Број индекса 2025/2012

Студијски програм МАТЕМАТИКА

Наслов рада Уопштења Шатенових норми графа и комбинаторне примене

Ментор др Владимир Божин

Потписани/~~а~~ Иван Лазаревић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 19.04.2022.

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Уопштења Шатенових норми графа и комбинаторне примене

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 19.04.2022.

[signature]