



## METODOLOGIA PARA EL ANÁLISIS ECONÓMICO DE FUNCIONES DE PRODUCCIÓN EN CULTIVOS: CASO QUINUA

Sabino Edgar Mamani Choque \*

Julio Jesús Espinoza Calsin \*\*

### RESUMEN

Las funciones de producción, en sus diferentes formas, han sido discutidas ampliamente, pero tuvieron aplicación y difusión principalmente en economía agrícola, siendo particularmente importante para cuantificar la relación entre fuentes de fertilización y el rendimiento de cultivos. En este contexto, el propósito de este documento es mostrar la metodología de análisis económico de la producción, que utiliza el diseño de composición rotatable central para estimar la función de producción. Se aplican los principios microeconómicos relacionados con la producción a partir de un trabajo de investigación orientado a reducir la pobreza de comunidades campesinas del altiplano peruano-boliviano, donde la agricultura es una actividad económica importante pero se caracteriza por tener bajos índices de productividad, a ellos se suman otras limitantes como la variabilidad climática, la altitud y la fragmentación de las unidades productivas que condicionan una agricultura diversificada que procura minimizar el riesgo productivo para lograr cierta seguridad alimentaria.

**Palabras clave:** función de producción, metodología, microeconomía.

### ABSTRACT

Production functions in their different ways have been widely discussed but applied and diffused mainly in agricultural economics, being particularly important to quantify the relationship between fertilization sources and crop yields. In this context, the purpose of this paper is to show the methodology of economic analysis of production, which uses the central rotatable composition design to estimate the production function. Principles of the

---

\* *Magister Scientiae en Economía, mención en Proyectos de Inversión; profesor auxiliar del Departamento de Ingeniería Económica de la Universidad Nacional del Altiplano, Puno-Perú. [buffete79@gmail.com](mailto:buffete79@gmail.com).*

\*\* *Magister en Economía del Medio Ambiente; profesor auxiliar del Departamento de Ingeniería Económica de la Universidad Nacional del Altiplano, Puno-Perú. [julioespinozac@yahoo.com](mailto:julioespinozac@yahoo.com)*

**Este artículo fue recibido 21 de junio 2017, ajustado el 08 de julio de 2017 y su publicación aprobada el 27 de julio de 2017.**

Microeconomic production function are applied based on research aimed at reducing poverty in peasant communities in the Peruvian-Bolivian highlands where agriculture is an important economic activity but is characterized by low productivity rates. Other limitations such as: climatic variability, altitude and the fragmentation of productive units that condition an agriculture diversified that seeks to minimize the productive risk to achieve a certain food security.

**Keywords:** production function, methodology, microeconomics.

## **I. INTRODUCCIÓN**

El crecimiento del sector agrícola en la región de Puno desempeña un papel de gran importancia porque involucra a 215,170 productores y 405,726 ha de área agrícola (INEI, 2013b). Según el Valor Agregado Bruto del año 2013, los sectores económicos más importantes son Otros Servicios (22%), Agricultura, Caza y Silvicultura (15%) y Comercio (12%) (INEI, 2013a). La agricultura se caracteriza por el predominio de pequeños productores (75%) con unidades agropecuarias menores a 5.0 ha (INEI, 2013b), alta variabilidad climática, uso de tecnología tradicional y actividades diversificadas como condición de eficiencia económica. Entre las causas que limitan la rentabilidad y competitividad de la agricultura se señalan los bajos índices de productividad, baja calidad de la producción y débil articulación al mercado (Lakcy, 1996).

En este contexto, el objetivo de este documento es exponer una metodología de análisis económico que deriven en recomendaciones eficientes para los agricultores. Estos se obtienen a partir de funciones de producción que tienen sustento en la teoría neoclásica de la empresa (Dillon & Anderson, 2009) y se estiman a partir de información que provienen generalmente de experimentos diseñados con tal propósito (León-Velarde & Quiroz G., 1994). El método para estimar funciones de producción es a través de mínimos cuadrados ordinarios, posteriormente se aplica el análisis marginal para determinar el uso óptimo de los factores productivos, incluyendo restricciones como el presupuesto disponible.

## **II. MATERIALES Y MÉTODOS**

La información empírica proviene de una investigación previa desarrollada en el marco proyecto Agricultura Andina en el Altiplano cuyos objetivos fueron diseñar estrategias para reducir la pobreza y mejorar el manejo de los recursos naturales en diferentes comunidades campesinas del Altiplano peruano-boliviano. El experimento de quinua se llevó a cabo en el distrito de Cabanilla, provincia de Lampa del departamento de Puno.

### 2.1 *Diseño de composición rotatable central.*

Este diseño experimental tiene entre sus bondades menores sesgos y mínima varianza en la estimación de funciones de respuesta, optimiza el número de tratamientos en un experimento con un número máximo de tres factores y se expresa como:  $2^k + 2k + 1(n)$ , donde  $2^k$  es la parte factorial,  $2k$  la parte axial y  $1(n)$  es el punto central repetido  $n$  veces en función del número de factores y la variabilidad deseada. Para condicionar la rotabilidad de un diseño se escoge un valor  $\alpha$  en relación al número de tratamientos factoriales del diseño a la potencia  $1/4$  ( $\alpha=P^{1/4}$ ). Para dos factores ( $k=2$ ),  $P$  es igual a 4 ( $2^k=2^2$ ), luego  $4^{1/4}=1.414$  (León-Velarde & Quiroz G., 1994).

Para estimar una función de producción agrícola, se requiere un conjunto de valores de los factores productivos y su correspondiente nivel de producción, estos se obtienen con cierta precisión a través de un experimento previamente diseñado para este propósito. El planteamiento del diseño de composición rotatable central para dos factores, en términos de valores codificados, se muestra en el Tabla 1.

Tabla 1. Tratamientos para dos factores en estudio (valores codificados)

-1.414	-1.0	0.0	1.0	1.414
--------	------	-----	-----	-------

Fuente: León-Velarde C., Quiroz R. (1994)

Los valores reales se establecen fijando el valor superior e inferior, su valor central que es la media de ambos valores, y los valores restantes se obtienen mediante la siguiente ecuación:

$$X_r = \frac{X_c - V_{ic}}{I_c} * I_r + V_{ir}$$

donde  $X_r$  es el valor real,  $X_c$  es el valor codificado,  $V_{ic}$  es el valor mínimo codificado,  $V_{ir}$  valor mínimo real,  $I_r$  es el rango de los valores reales e,  $I_c$  es el rango de los valores codificados.

El espacio de exploración de los factores productivos en estudio fue: nitrógeno (N) de 45 a 135 kg.ha<sup>-1</sup>, fósforo (P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>) de 24 a 96 kg.ha<sup>-1</sup> (Callohuanca, 1990). Los tratamientos en términos codificados y valores reales se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Tratamientos para el cultivo de quinua convencional, Cabanilla – Puno

Número de parcela	Valores codificados		Valores Naturales	
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	k de N.ha <sup>-1</sup>	k de P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> .ha <sup>-1</sup>
1	-1	-1	58	35
2	-1	1	58	85
3	1	-1	122	35
4	1	1	122	85
5	-1.414	0	45	60
6	1.414	0	135	60
7	0	-1.414	90	24
8	0	1.414	90	96
9	0	0	90	60
10	0	0	90	60
11	0	0	90	60
12	0	0	90	60
13	0	0	90	60

## 2.2 Factores en estudio.

Las variables en estudio fueron nitrógeno (N) y fósforo (P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>). Las fuentes de fertilización utilizadas fueron Nitrato de amonio cuya composición fue de 32% de nitrógeno y 3% de fósforo; superfosfato triple de calcio con una composición de 46% de fósforo. El precio de los fertilizantes corresponden al inicio de la campaña agrícola 2016-17 fueron de S/5.00 por kg nitrógeno, S/3.87 por kg de fósforo y S/3.57 el precio de quinua (kg) correspondiente al periodo de cosecha (mayo de 2017). La accesión de quinua utilizada en el experimento fue Rosado Taraco.

El experimento estuvo conformado por 13 sub parcelas de 4x5 m, con un ancho de separación entre sub parcelas de 1 m.; los tratamientos se asignaron de manera aleatoria asumiendo homogeneidad en las características del suelo. La siembra y manejo del cultivo se llevó a cabo bajo las características de tecnología alta (INIA, 1996).

### 2.3 Función de producción y análisis.

La función de producción o superficie de repuesta se estimó como una función polinomial cuadrática (Chaquilla, 1978; León-Velarde & Quiroz G., 1994) porque se ajusta al supuesto de rendimientos decrecientes, y se expresa como:

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ij} X_i^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \beta_{ij} X_i X_j + \mu_i$$

donde  $Y_i$ , es la variable de respuesta (rendimiento,  $\text{kg}\cdot\text{ha}^{-1}$ );  $\beta_{ij}$ , coeficientes del modelo;  $X_i$ , variables independientes o insumos ( $\text{kg}\cdot\text{ha}^{-1}$ ),  $\mu_i$  es la perturbación aleatoria que se distribuye como  $\mu_i \sim N(0, \sigma^2)$ . El modelo se estimó mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios (Gujarati & Porter, 2009) con el software estadístico denominado SAS.

A partir de la función estimada, el nivel óptimo de los factores productivos se determinó mediante el procedimiento de optimización de funciones (Weber, 1999); el óptimo físico o biológico se define como el rendimiento máximo sin tomar en cuenta el precio de los factores productivos como:  $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = 0$ , donde  $x_1$  y  $x_2$  son los factores productivos. Para determinar si la función maximiza se define:

$$\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2) \right) - \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2) \right)^2; \quad \text{si } \Delta > 0 \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2) < 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2) < 0, \text{ la función maximiza (Weber, 1999).}$$

*El óptimo económico* se determinó en base al principio de optimización, el cual establece que para minimizar el costo de los factores productivos para cierto nivel de producción, se debe producir en un punto sobre una isocuanta en el que la tasa marginal de sustitución técnica (de  $x_1$  por  $x_2$ ) sea igual a la razón de precios de

los factores productivos  $\left(\frac{P_{x_1}}{P_{x_2}}\right)$  (Nicholson, 2008). En este caso, el óptimo económico se determina derivando parcialmente la función de producción e igualando a la relación de precios factor/producto:  $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = \frac{P_{x_1}}{P_Y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = \frac{P_{x_2}}{P_Y}$ .

*Rentabilidad.* Se evalúa la rentabilidad atribuible exclusivamente a los factores productivos en estudio calculando de la siguiente forma:

$$R = \frac{P_Y(\hat{Y} - Y_0) - \sum P_{X_i} X_i}{\sum P_{X_i} X_i}, \text{ donde: } R \text{ es la rentabilidad del capital invertido, } Y_0$$

es el rendimiento promedio de la zona (Cabanilla), y  $\hat{Y}$  es el rendimiento óptimo del experimento.

*Las isocuantas* muestran niveles de producción a partir de distintas combinaciones de factores en estudio, se estiman como  $x_2 = f(x_1, \hat{y})$ ; su pendiente muestra la relación a la que se pueden sustituir los factores productivos manteniendo constante el nivel de producción.

*La relación marginal de sustitución técnica (RST)*, evalúa la relación a la que se sustituyen los factores productivos, manteniendo constante la producción a lo largo de una isocuanta particular; cuantifica las unidades en que puede disminuirse un factor para utilizar una unidad adicional del otro y se calcula como:  $RST_{x_2, x_1} = \frac{PMg_{x_1}}{PMg_{x_2}}$ , donde PMg son las productividades marginales de los factores productivos. La RST relación es decreciente y convexa (Pindyck & Rubinfeld, 2016), disminuye en valor absoluto cuando el desplazamiento es hacia la derecha porque se incrementa la cantidad de  $x_1$  y aumenta cuando el desplazamiento es hacia la izquierda porque se incrementa la cantidad de  $x_2$ , lo que indica que la productividad de cualquier factor es limitada.

*La elasticidad de sustitución técnica (EST)*, mide la variación proporcional de los factores en relación con la variación proporcional de la RST dentro de una misma isocuanta; es una medida de la curvatura de la pendiente de la isocuanta

(Rosales, Apaza, & Bonilla, 2004). Se calcula como:  $EST_{x_2, x_1} = \frac{PMg_{x_1}(x_1)}{PMg_{x_2}(x_2)} = RST_{x_1, x_2} \left( \frac{x_1}{x_2} \right)$ .

*La senda de expansión económica*, es la función que muestra las combinaciones de factores productivos que maximizan la producción para diferentes valores de presupuesto disponible, si los costos de los factores permanecen constantes para todas las cantidades demandadas (Nicholson, 2008). En este conjunto de puntos factibles, la RST misma se expresa como una relación funcional entre los factores productivos, partiendo de la condición de condición de optimización (Cortez & Rosales, 2005):  $\frac{P_{x_1}}{P_{x_2}} = \frac{PMg_{x_1}}{PMg_{x_2}}$ , luego  $x_2 = f(x_1)$ .

*Líneas de frontera económica*, son funciones que delimitan las combinaciones racionales de la producción (II fase de la función de producción). Se obtiene igualando a cero las relaciones de sustitución técnica:  $RST_{x_2, x_1} = \frac{PMg_{x_1}}{PMg_{x_2}} = 0$  y  $RST_{x_1, x_2} = \frac{PMg_{x_2}}{PMg_{x_1}} = 0$ .

### III. RESULTADOS

Los resultados del experimento se muestran en el Tabla 3, donde se muestra la producción por sub-parcela y el rendimiento por hectárea.

La estimación econométrica muestra que el modelo en conjunto es altamente significativo (Pr > F 0.0021), la prueba t indica que los parámetros son estadísticamente significativos (p<0.05) individualmente, excepto el intercepto (p>0.05). El nivel de ajuste del modelo (R<sup>2</sup>=0.9) indica que las variaciones del rendimiento son explicadas por la fertilización nitrogenada y fosforada en 90%. Los signos de los parámetros estimados tienen sentido económico, poder explicativo y concordante con la teoría de la productividad marginal decreciente. El signo de la interacción nitrógeno-fósforo indica que esta interacción contribuye positivamente en el rendimiento del cultivo. Bajo el supuesto de *ceteris paribus*, la parte creciente de la función, indica que cada kg adicional de nitrógeno incrementa el rendimiento en 42.6 kg, mientras que cada kg adicional de fósforo incrementa en 29.2 kg el rendimiento. La parte cuadrática (rendimientos decrecientes), indica que los incrementos de cada factor hacen que la función estimada decline aproximadamente

en la misma cuantía, 0.33 y 0.38 kg, respectivamente. Finalmente, el rendimiento promedio de quinua sin uso de fertilizantes sería de 688 kg.ha<sup>-1</sup>. En general, los resultados son válidos para realizar análisis económico.

**Tabla 3. Resultados del experimento de quinua convencional**

Número de parcela	Valores Naturales		Producción por parcela (20 m <sup>2</sup> )	Rendimiento Y <sub>i</sub> (kg/ha)
	kg de N/ha	kg de P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> /ha		
1	58	35	6.00	3000
2	58	85	5.50	2750
3	122	35	4.80	2400
4	122	85	5.80	2900
5	45	60	6.10	3050
6	135	60	5.50	2750
7	90	24	5.70	2850
8	90	96	6.60	3300
9	90	60	7.10	3550
10	90	60	6.70	3350
11	90	60	7.10	3550
12	90	60	6.80	3400
13	90	60	6.90	3450

$$\hat{Y} = 688.4785 + 42.5900N + 29.1904P - 0.3338N^2 - 0.3823P^2 + 0.2344NP_t$$

0.91      3.67      2.14      -5.99      -4.34      2.51

$$R^2 = 93.08 \quad \bar{R}^2 = 82.99$$

$$F_c = 12.71 \text{ (Pr > F 0.0021)}$$

*Máximo físico.* Al resolver el sistema de ecuaciones de derivadas parciales, se obtiene los valores críticos que optimizan la función de producción, cuyos resultados son N=86.5 y P=64.7 kg.ha<sup>-1</sup>, respectivamente, con los que el rendimiento máximo sería de 3,475 kg.ha<sup>-1</sup>.

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial N} = 48.8429 - 0.4446N - 0.1250P = 0$$

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial P} = 25.1437 - 0.2316P - 0.1250N = 0$$



A partir de las segundas derivadas se verifica que  $\Delta$  es positivo, en consecuencia la función de producción maximiza en los valores críticos. Significa que un movimiento sobre la función de producción en cualquier dirección corresponde a un descenso de la función.

$$\frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial N^2} = -0.4446$$

$$\frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial P^2} = -0.2316$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial N \partial P} = \frac{\partial^2 Y}{\partial P \partial N} = 0.2344$$

$$\Delta = (-0.4446)(-0.2316) - (0.2344)^2 = 0.048$$

La segunda derivada parcial cruzada indica que el incremento en uno de los factores productivos provoca un cambio positivo en la productividad marginal del

otro factor ya que  $\frac{\partial^2 Y}{\partial N \partial P} = \frac{PMg_N}{\partial P}$  y  $\frac{\partial^2 Y}{\partial P \partial N} = \frac{PMg_P}{\partial N}$ . La función de producción o superficie de respuesta se muestra en la figura 1.

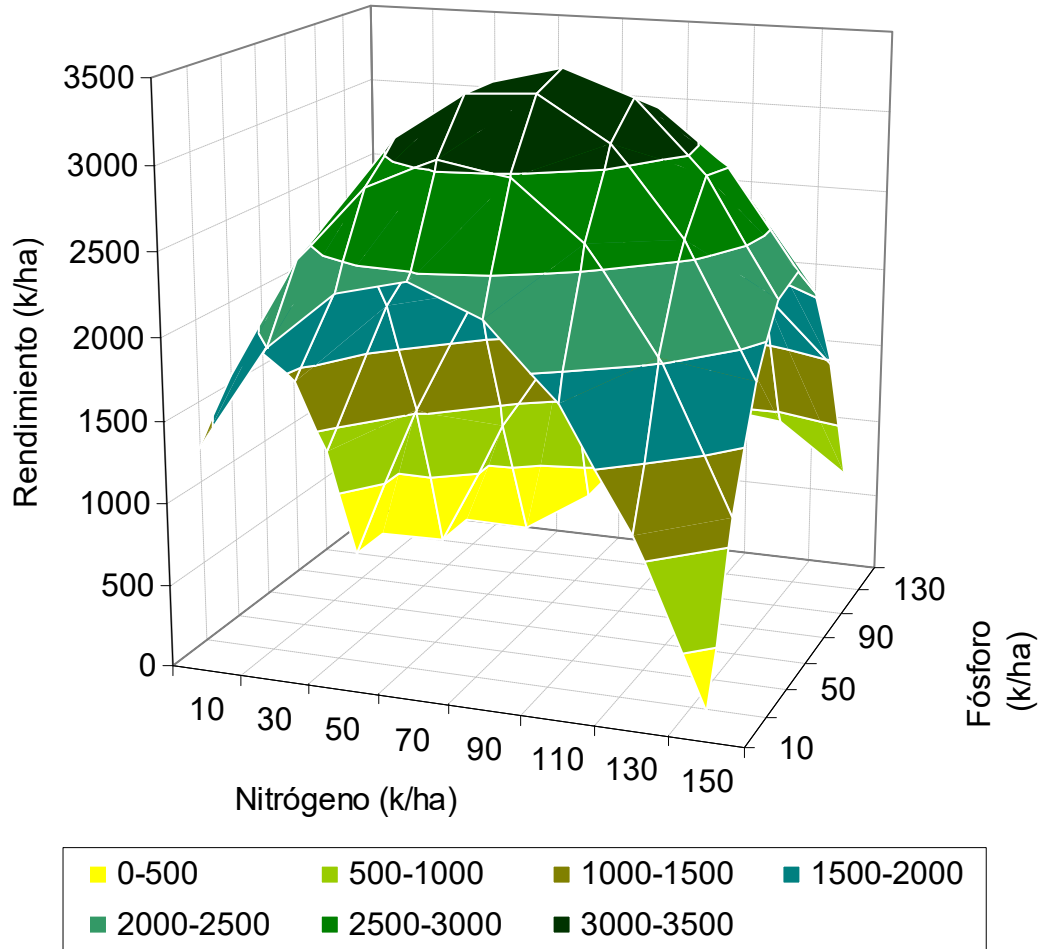
*Optimo económico.* Dado que el interés de los productores es la maximización del ingreso monetario para el sustento familiar, tiene mayor importancia determinar el óptimo económico que se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial N} = 48.8429 - 0.4446N - 0.1250P = \frac{5.00}{3.57}$$

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial P} = 25.1437 - 0.2316P - 0.1250N = \frac{3.87}{3.57}$$

Los valores críticos resultantes son  $N=91.4$  y  $P=54.6$   $\text{kg}\cdot\text{ha}^{-1}$ , respectivamente, con los que el rendimiento máximo sería de  $3416.5$   $\text{kg}\cdot\text{ha}^{-1}$ , que maximiza también la función de beneficio. Nótese que el rendimiento estimado es alto debido a que los experimentos se realizan en parcelas pequeñas, éstos al ser transformados en forma lineal a  $\text{kg}\cdot\text{ha}^{-1}$  tienden a sobre estimar los resultados, vale decir que los resultados experimentales no se observan en campos de cultivo de mayor extensión. Resultados diferentes de otros experimentos se supone son atribuibles a la variabilidad climática, características del suelo y manejo del cultivo (Callohuanca, 1990; McCarthy, 2012).

Figura 1. Superficie de respuesta de nitrógeno y fósforo sobre el rendimiento: quinua convencional, Cabanilla – Puno.



*Rentabilidad.* Fue calculado en base a los resultados del óptimo económico y  $Y_0 = 859 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ , que es el rendimiento promedio de la línea de base del proyecto Agricultura Andina en el Altiplano (ALTAGRO, 2008). La rentabilidad calculada indica que el uso de fertilizantes en cantidades óptimas es muy favorable para los productores porque se puede obtener hasta S/12.7 adicionales por cada sol invertido.

$$R = \frac{3.57(3416.5 - 859) - 5.00(91.4) - 3.87(54.6)}{5.00(91.4) + 3.87(54.6)} = 12.7$$

*Optimización sujeta a restricción.* De acuerdo a las características de los sistemas de producción familiar en el altiplano, se pueden observar diferentes factores que restringen la producción agrícola en general. Algunos de estos factores son el tamaño de las unidades productivas, disponibilidad de mano de obra y, principalmente disponibilidad de recursos económicos. Por ello, se debe optimizar la función objetivo sujeta a una restricción denominada isocosto. En este caso se considera como referencia, el gasto total en abonos orgánicos y convencionales de la Línea de Base del proyecto ALTAGRO cuya media por familia es de 250 soles.

A partir de la función estimada y el isocosto, la función lagrangiana queda definida como (Chiang A, 1967):

$$L = 688.4785 + 42.5900N + 29.1904P - 0.3338N^2 - 0.3823P^2 + 0.2344NP - \lambda(5.00N + 3.87P - 250)$$

Siguiendo el proceso de optimización se establece:

$$\frac{\partial L}{\partial N} = 42.5900 - 0.6676N + 0.2344P - 5.00\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial P} = 29.1904 - 0.7646P + 0.2344N - 3.87\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -5.00N - 3.87P + 250 = 0$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, los valores críticos son  $N=32.9$  y  $P=22.1$   $\text{kg}\cdot\text{ha}^{-1}$  que significaría un rendimiento máximo de  $2357.2$   $\text{kg}\cdot\text{ha}^{-1}$ , este valor representa el 69% del óptimo económico. El valor de lambda indica que por cada sol adicional de presupuesto, se puede obtener aproximadamente 5.2 kg adicionales de quinua.

Las cantidades óptimas de N y P también se pueden calcular optimizando la función de beneficio restringido, estableciendo la ecuación de la siguiente forma:

$$\pi_r = 3.57(688.48 + 42.59N + 29.19P - 0.33N^2 - 0.38P^2 + 0.23NP) - 5.00N - 3.87P - \lambda(5.00N + 3.87P - 250)$$

Mediante el proceso de optimización se obtiene:

$$\frac{\partial \pi_r}{\partial N} = 147.0463 - 2.3562N + 0.8211P - 5.00\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \pi_r}{\partial P} = 100.3383 - 2.7132P + 0.8211N - 3.87\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \pi_r}{\partial \lambda} = -5.00N - 3.87P + 250 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene las mismas cantidades de nitrógeno y fósforo (32.9 y 22.1 kg.ha<sup>-1</sup>) ya que al maximizar la función de producción, también se minimiza el costo de producción y se maximiza el beneficio. En este caso, el valor de lambda es 17.5 que indica un incremento aproximado del beneficio por cada sol adicional de presupuesto.

Con las segundas derivadas parciales directas y cruzadas  $\frac{\partial \pi_r^2}{\partial N^2} = -2.3562$ ,  $\frac{\partial \pi_r^2}{\partial P^2} = -2.7132$  y  $\frac{\partial \pi_r^2}{\partial N \partial P} = \frac{\partial \pi_r^2}{\partial P \partial N} = 0.8211$ , el valor de  $\Delta$  es positivo y se confirma que los valores críticos maximizan la función de beneficio.

*Isocuantas.* La función de isocuanta establecida a partir de la función de producción es:

$$P = \frac{-29.1904 - 0.2344N \pm \sqrt{1904.9008 + 78.8131N - 0.4555N^2 - 1.5292Y}}{-0.7646}$$

Esta ecuación permitió determinar un mapa de isocuantas (Figura 2); son convexas al origen concordante con las tasas decrecientes de sustitución marginal. Observe que se puede obtener 2000 kg.ha<sup>-1</sup> de quinua combinando 17 kg de nitrógeno y 33.7 de fósforo o 32 kg de nitrógeno y 8.7 kg de fósforo (Tabla 3). El resto de valores se interpretan de la misma forma.

*Relación de sustitución técnica (RST) y elasticidad de sustitución.* En la Tabla 4 se muestran algunos valores para tres isocuantas, cuyo rango para nitrógeno y fósforo incluye solo el espacio en el que es económicamente factible la sustitución de ambos factores, es decir, en el segmento de las isocuantas que tienen pendiente negativa, en caso contrario la productividad marginal del factor es negativa.

Observe que, para niveles bajos de producción, la RST tiene un rango más amplio de posibilidades de sustitución respecto a niveles más altos de producción. En el punto donde el rendimiento alcanza su valor máximo, no existe posibilidad de sustitución entre factores y la elasticidad de sustitución es igual a cero.

Los valores de RST<sub>P,N</sub> indican la sustitución de nitrógeno por fósforo y, RST<sub>N,P</sub> la sustitución de fósforo por nitrógeno. Los valores de RST<sub>P,N</sub> muestran que

se requiere cada vez menos nitrógeno para sustituir por fósforo. En el primer punto se debe disminuir 4.92 kg de nitrógeno para sustituir un kg de fósforo, en el segundo punto se puede disminuir solo 0.77 kg de nitrógeno para sustituir un kg de fósforo, de modo que se muestra una tendencia hacia cero, concordante con el supuesto de productividad marginal decreciente. En cambio  $RST_{N,P}$  muestra una tendencia contraria, ya que se puede sustituir cantidades cada vez mayores de fósforo por una unidad de nitrógeno. Los valores calculados expresan relaciones de sustitución mayor en los puntos extremos o líneas de frontera debidos a la pendiente de las isocuantas.

La RST decreciente expresa que la pendiente de una isocuanta disminuye en valor absoluto cuando el desplazamiento es hacia la derecha porque se incrementa la cantidad del factor nitrógeno y aumenta cuando el desplazamiento es a la izquierda porque se incrementa la cantidad de fósforo. De esta forma se demuestra que la productividad de los factores productivos es limitada.

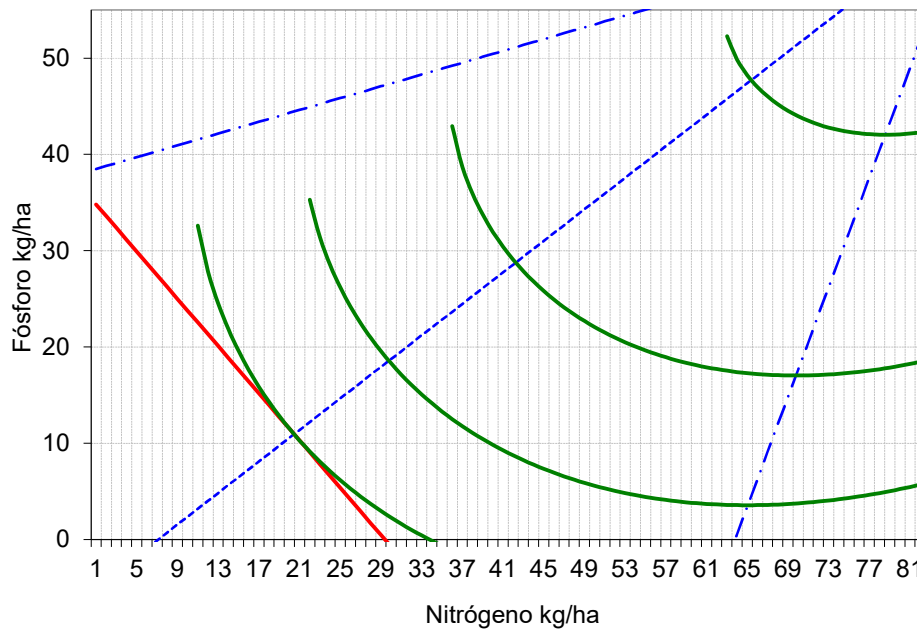
Tabla 4. Relación marginal de sustitución técnica y elasticidad de sustitución para tres niveles de producción, Cabanilla - Puno, 2009

Y (k.ha <sup>-1</sup> )	N (k.ha <sup>-1</sup> )	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> (k.ha <sup>-1</sup> )	RST <sub>P,N</sub>	RST <sub>N,P</sub>	ES <sub>P,N</sub>	ES <sub>N,P</sub>
2200	22.0	35.3	-4.92	-0.20	-3.07	-0.33
2200	36.0	12.5	-0.77	-1.31	-2.20	-0.45
2200	50.0	5.6	-0.29	-3.48	-2.57	-0.39
2200	64.0	3.6	-0.02	-59.15	-0.30	-3.30
2700	36.0	42.9	-5.97	-0.17	-5.00	-0.20
2700	47.0	24.1	-0.77	-1.29	-1.51	-0.66
2700	58.0	18.6	-0.29	-3.47	-0.90	-1.11
2700	69.0	17.0	-0.02	-62.19	-0.07	-15.36
3300	63.0	52.3	-3.21	-0.31	-3.87	-0.26
3300	68.0	45.2	-0.74	-1.36	-1.11	-0.90
3300	73.0	42.8	-0.29	-3.50	-0.49	-2.05
3300	78.0	42.1	-0.02	-40.92	-0.05	-22.06

La elasticidad de sustitución cuantifica el porcentaje de nitrógeno que se requiere para mantener la producción constante, ante un cambio de fósforo en 1%. Así la elasticidad de sustitución  $ES_{P,N}=-3.07$  indica que un cambio de 1% en fósforo

provoca un cambio de 3.07% en la cantidad utilizada de nitrógeno. En el punto extremo ( $ES_{P,N}=-0.30$ ), un cambio porcentual en fósforo provoca un cambio menor en nitrógeno (0.30%). Los valores de  $ES_{N,P}$  muestran una tendencia inversa porque se utiliza mayor cantidad de fósforo.

Figura 2. Optimización restringida, isocuantas, líneas de frontera económica y senda de expansión para quinua convencional, Cabanilla – Puno.



Fuente: Elaboración propia.

*Senda de expansión económica y líneas de frontera.* La senda de expansión económica une los puntos con las misma RST en las diferentes isocuantas mostrando las combinaciones óptimas de los factores productivos. Por tanto, los productores deberían usar las distintas combinaciones de factores a lo largo de esta función porque maximizan el rendimiento para distintos valores de presupuesto disponible, es decir se logra eficiencia económica; en otros puntos de la isocuanta se logra solo eficiencia técnica. La senda de expansión económica queda representada por:  $P = 0.8184N - 5.7992$ .

Las líneas de frontera económica delimitan las combinaciones racionales de la producción, es decir, la elección está restringida exclusivamente al segmento con pendiente negativa de las isocuantas. La intersección de ambas funciones y la senda de expansión económica representan el punto donde se logra el rendimiento máximo. A la izquierda de la ecuación (Tabla 3, Figura 2) se encuentra la fase III de la función de producción para el factor productivo fósforo, mientras que a la derecha de la ecuación (Figura 2) se encuentra la fase III para el factor productivo nitrógeno. Las ecuaciones que representan las líneas de frontera o isóclinas (Rosales et al., 2004) son:

$$P = 38.1773 + 0.3066N$$

$$P = 2.8481N - 181.6980$$

#### IV. DISCUSIÓN

El punto de interés está centrado en la eficiencia del uso de los fertilizantes, principalmente porque varios autores (Anderson, 1967; Martino, Polinori, Tei, Benincasa, & Turchetti, 2016; McCarthy, 2012; Wang, Dong, Wang, He, & Changqi, 2011) han discutido ampliamente los conceptos y desarrollo de las funciones de producción, resaltando los beneficios de la investigación interdisciplinaria.

Las ecuaciones polinomiales, por lo general incluyen términos lineales positivos que representan los incrementos del rendimiento causados por los factores productivos, y unos términos de orden superior con signo negativo que representa los rendimientos decrecientes. En general, para las formas polinomiales las isoclinas tienen intercepto en los ejes y convergen hacia el punto donde la combinación de los factores productivos permiten maximizar el producto total, por tanto, ya no es posible la sustitución entre factores productivos (McCarthy, 2012). En el punto de convergencia, las derivadas parciales respecto de los factores productivos es igual a cero, en adelante, cantidades mayores de cada factor productivo reducen la producción. A lo largo de las isoclinas, la tasa marginal de sustitución entre P y N es igual a infinito (isoclina superior), o cero (isoclina inferior), éstos definen los límites técnicos para reemplazar un factor productivo por otro para alcanzar una isocuanta particular (Rosales et al., 2004).

En contraste con otras formas funcionales, los modelos polinómicos son flexibles porque se pueden añadir o eliminar términos sin afectar su forma general. Además no hay supuestos a priori respecto a las elasticidades. Una de las críticas a estos modelos es que los términos lineales y las interacciones, positivas, tienen interpretación directa concordante con el crecimiento de los cultivos, pero no se puede afirmar lo mismo sobre los términos cuadráticos o cúbicos. Sin embargo, es posible encontrar algún tipo de inconsistencia cuando se busca cuantificar las relaciones entre factores productivos y el rendimiento. En lo que respecta a este documento se utilizó una función polinómica que se estimó a partir de un diseño de composición rotatable central, pero no se excluye el uso de otros diseños experimentales (Callohuanca, 1990; Kariuki, 2015; León-Velarde & Quiroz G., 1994).

## V. CONCLUSIONES

La metodología de superficie de respuesta es una conjunción de técnicas estadísticas y matemáticas útiles para desarrollar, mejorar y optimizar procesos productivos. Mediante una función de producción se cuantificó adecuadamente la relación entre la fertilización y el rendimiento de quinua, posteriormente se determinó los niveles óptimos de fertilización nitrogenada y fosforada.

La metodología es aplicable a los cultivos en general, pero se debe considerar que las características de suelo, condiciones climáticas, manejo de cultivo y particularidades del mercado hacen que los resultados sean válidos solo cuando tales condiciones son similares y no se pueden hacer predicciones para otros casos, ya que incluso las condiciones climáticas de una campaña agrícola pueden ser diferentes y los niveles óptimos de los fertilizantes podrían no maximizar el rendimiento, ello implica la necesidad de generar información para diversos tipos de suelo y diferentes condiciones climáticas.

Bajo las condiciones analizadas, el óptimo económico se alcanzaría con  $32.9 \text{ kg}\cdot\text{ha}^{-1}$  de nitrógeno y  $22.1 \text{ kg}\cdot\text{ha}^{-1}$  de fósforo, con los que se obtendría  $2,357.2 \text{ kg}\cdot\text{ha}^{-1}$  de quinua.



## VI. REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- ALTAGRO. (2008). *Informe Anual 2007. Proyecto Agricultura Andina en el Altiplano*. Lima - Perú: Centro Internacional de la Papa (CIP), Agencia Canadiense para el Desarrollo Internacional (ACDI).
- Anderson, J. (1967). Economic interpretation of fertilizer response data. <https://www.researchgate.net/publication/>
- Callohuanca, A. (1990). Análisis económico de la producción de quinua *Desarrollo Rural Andino*. Puno - Perú: Universidad Nacional del altiplano, Escuela de Post Grado.
- Cortez, R., & Rosales, L. (2005). *340 ejercicios de microeconomía*. Lima-Perú: Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico. .
- Chaquilla, O. (1978). *Matrices plan pueble en superficies de respuesta*. Puno - Perú: UNTA. Instituto Interamericano de Ciencias Agrícolas - Fondo Simón Bolívar.
- Dillon, J., & Anderson, J. (2009). The analysis of response in crop and livestock production. *The Journal of Agricultural Science*. doi:<https://doi.org/10.1017/S0021859600078266>
- Gujarati, D., & Porter, D. (2009). *Econometría* (5ta. Edición ed.). Colombia: McGraw Hill.
- INEI. (2013a). *Compendio Esatdístico Puno 2015*. Perú: Instituto Nacional de Estadística e Informática.
- INEI. (2013b). Resultados definitivos IV Censo Nacional Agropecuario 2012. <http://proyectos.inei.gob.pe/web/DocumentosPublicos/>
- INIA. (1996). *Compendio de alternativas tecnológicas Volumen I*. Puno - Perú: Instituto Nacional de Investigación Agraria - INIA.
- Kariuki, D. (2015). Application of response surface methodology for optimization of potato tuber yield. *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 4. doi: 10.11648/j.ajtas.20150404.20
- Lakcy, P. (1996). Rentabilidad de la agricultura: ¿con mas subsidios o con mas profesionalismo? (pp. 22). Santiago, Chile: Oficina regional de la FAO para América Latina y el Caribe.
- León-Velarde, C., & Quiroz G., R. (1994). *Análisis de Sistemas Agropecuarios: Uso de métodos bio-matemáticos*. Puno-Perú: CONDESAN (CIP-CIID-CIRNMA).

- Mamani, S. (2010). *Análisis económico y riesgo en la producción de papa, quinua y haba como cultivos orgánicos y convencionales*. (Magister Scientiae), Universidad Nacional del Altiplano, Puno - Perú.
- Martino, G., Polinori, P., Tei, F., Benincasa, P., & Turchetti, L. (2016). An Economic Analysis of the Efficiency and Sustainability of Fertilization Programs at Level of Operational Systems of Soft Wheat in Umbria. *Agriculture and Agricultural Science Procedia*, 8, 298-306. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aaspro.2016.02.024>
- McCarthy, W. (2012). Production function analysis of a fertilizer trial on Barley. *Australian Journal of Agricultural Economics*, 3(2). <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1467-8489.1959.tb00255.x/pdf>
- Nicholson, W. (2008). *Teoría microeconómica: Principios básicos y aplicaciones* (9na. ed.): CENGAGE Learning.
- Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (2016). *Microeconomía* (8va. ed.). España: Prentice Hall.
- Rosales, R., Apaza, E., & Bonilla, J. (2004). Economía de la producción de bienes agrícolas, teoría y aplicaciones. <https://www.researchgate.net/publication/4938898>
- Wang, J., Dong, J., Wang, Y., He, J., & Changqi, O. (2011). The design of an optimal decision-making algorithm for fertilization. *Mathematical and Computer Modelling*, 54(3), 1100-1106. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2010.11.041>
- Weber, J. E. (1999). *Matemáticas para administración y economía* (M. M. A. Chu P., Trans. 4ta. ed.). Mexico: Oxford University Press.

## ANEXOS

### Anexo 1. Estimación de la función de producción Sistema SAS

Procedimiento REG  
Modelo: MODEL1  
Variable dependiente: Rdto

Número de observaciones leídas 13  
Número de observaciones usadas 13

#### Análisis de la varianza

Fuente	Suma de DF	Cuadrado cuadrados	de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	5	1417509	283502	13.01	0.0020
Error	7	152491	21784		
Total corregido	12	1570000			

Raíz MSE 147.59539 R-cuadrado 0.9029  
Media dependiente 3100.00000 R-Sq Ajust 0.8335  
Coef Var 4.76114

Estimadores de parámetros

Variable	DF	Estimador del parámetro	Error estándar	Valor t	Pr >  t
Intercept	1	671.67738	750.43551	0.90	0.4005
N	1	42.63278	11.47022	3.72	0.0075
N2	1	-0.33247	0.05524	-6.02	0.0005
P	1	29.73225	13.46741	2.21	0.0630
P2	1	-0.38386	0.08653	-4.44	0.0030
NP	1	0.23004	0.09137	2.52	0.0399

Anexo 2. Rendimientos estimados para diferentes niveles de nitrógeno y fósforo.

		Nitrogeno (X <sub>1</sub> )							
		<b>10</b>	<b>30</b>	<b>50</b>	<b>70</b>	<b>90</b>	<b>110</b>	<b>130</b>	<b>150</b>
Fósforo (X <sub>2</sub> )	<b>10</b>	1358	1990	2354	2452	2282	1846	1142	172
	<b>30</b>	1683	2408	2867	3058	2982	2640	2030	1153
	<b>50</b>	1702	2521	3073	3358	3376	3127	2611	1828
	<b>70</b>	1415	2328	2974	3353	3465	3309	2887	2198
	<b>90</b>	822	1829	2569	3041	3247	3185	2857	2261
	<b>110</b>	-76	1024	1858	2424	2723	2756	2521	2019
	<b>130</b>	-1280	-86	841	1501	1894	2020	1879	1471
	<b>150</b>	-2791	-1503	-482	272	759	979	932	617