

Treball de Fi de Grau

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials (GETI)

Simulació de vehicles amb remolc

MEMÒRIA

12 de setembre de 2023

Autor: Carles Altisent Huguet

Directors: Ana Barjau Condomines

Convocatòria: Setembre 2023



ETSEIB
Escola Tècnica Superior
d'Enginyeria Industrial de Barcelona



ETSEIB

Resum

El treball final de grau se centra en l'estudi cinemàtic de vehicles articulats i la realització de simulacions utilitzant el programari MATLAB. S'analitza en profunditat el concepte d'off tracking i s'identifiquen els factors que influeixen en aquest fenomen, destacant i demostrant la influència de la longitud dels xassissos i el radi de gir. A més, es van explorar possibles solucions i mesures de mitigació per abordar els desafiaments associats a l'off tracking en la conducció de vehicles a remolc.

Resumen

El trabajo de final de grado se centra en el estudio cinemático de vehículos articulados y la realización de simulaciones utilizando el software MATLAB. Se analiza en profundidad el concepto de off tracking y se identifican los factores que influyen en este fenómeno, destacando y demostrando la influencia de la longitud de los chasis y el radio de giro. Además, se exploraron posibles soluciones y medidas de mitigación para abordar los desafíos asociados al off tracking en la conducción de vehículos a remolque.

Abstract

The final degree thesis focuses on the kinematic study of articulated vehicles and the performance of simulations using MATLAB software. The concept of off tracking is analysed in depth and the factors influencing this phenomenon are identified, highlighting and demonstrating the influence of chassis length and turning radius. In addition, possible solutions and mitigation measures to address the challenges associated with off tracking in towed vehicle driving are explored.

Glossari

- **OT:** Off tracking
- P_i : Punt mig de l'eix posterior del xassís i
- F_i : Punt mig de l'eix frontal del xassís i
- L_i : Longitud del xassís i
- ψ_i : Orientació del xassís i respecte l'horitzontal
- \mathfrak{R}'_i : Radi de gir del punt mig de l'eix frontal del xassís i
- \mathfrak{R}_i : Radi de gir del punt mig de l'eix posterior del xassís i
- δ : Angle de gir del xassís motriu respecte el seu eix longitudinal
- v : Velocitat del punt mig de l'eix frontal
- s_i : Desplaçament del mecanisme guia-botó del remolc i
- **CIR:** Centre instantani de rotació

Índex

1	Prefaci	9
1.1	Origen del projecte	9
1.2	Motivació del projecte	9
2	Introducció	11
2.1	Objectius del projecte	11
2.2	Abast del projecte	11
3	Estat de l'art	13
3.1	Off tracking	14
4	Modelització del vehicle	21
4.1	Equacions del vehicle tractor	23
4.1.1	Geometria d'Ackermann	26
4.2	Equacions dels remolcs amb unió simple	29
4.2.1	Generalització per a un sistema de n remolcs	31
4.3	Equacions dels remolcs amb unió amb desplaçament lateral	33
4.3.1	Generalització per a un sistema de n remolcs amb desplaçament lateral	37
4.4	Paràmetres s_i	39
4.4.1	Unió sense desplaçament	39
4.4.2	Unió amb controlador de desplaçament lineal	39
4.4.3	Articulació amb controlador de desplaçament no lineal	40
5	Solució numèrica	43
5.1	Mètode d'Euler	43
5.2	Algoritme	45
6	Simulacions	47
6.1	Simulació del xassís motriu	47
6.1.1	Canvi de direcció del xassís motriu	48
6.1.2	Canvi de sentit del xassís motriu	50
6.1.3	Gir de 360° del xassís motriu	52
6.2	Simulació del xassís motriu amb remolc	54
6.2.1	Canvi de direcció del xassís motriu i remolc	55
6.2.2	Canvi de sentit del xassís motriu i remolc	57
6.2.3	Gir de 360° del xassís motriu i remolc	59
6.3	Simulació del xassís motriu amb remolc unit mitjançant guia-botó	61
6.3.1	Canvi de direcció del xassís motriu i remolc amb guia-botó	62
6.3.2	Canvi de sentit del xassís motriu i remolc amb guia-botó	64
6.3.3	Gir de 360° del xassís motriu i remolc amb guia-botó	66
6.4	Simulació d'un remolc convencional i d'un remolc galera	68
6.4.1	Simulació d'un remolc convencional	70
6.4.2	Simulació d'un remolc galera	71
6.5	Simulacions en configuracions límit	74
6.5.1	Simulació d'un sol remolc amb configuració límit	75
6.5.2	Simulació de múltiples remolcs amb configuració límit	78
6.6	Gràfiques d'interés de l'off tracking	81
6.6.1	Valors d'off tracking en funció del radi de gir i longituds	81

6.6.2	Gir necessari per assolir l'off tracking màxim	82
7	Impacte ambiental	83
8	Estudi social i d'igualtat de gènere	85
9	Diagrama de Gantt	87
	Conclusions	89
	Agraïments	91
	Bibliografia	93

Índex de figures

1	Tipus de camions articulats en circulació per Europa [1]	13
2	Magnitud de l'off tracking en un punt de la trajectòria	15
3	Variació de l'off tracking al llarg del recorregut	15
4	Representació gràfica de l'off tracking màxim	16
5	Accident comú en vehicles articulats [4]	18
6	Comparativa de l'off-tracking en funció de la velocitat [5]	18
7	Forces d'interacció sobre la roda	19
8	Rotacions d'Euler a la roda	21
9	Tipus de contacte <i>terra – roda</i>	22
10	Trajectòria del punt <i>J</i> (Cicloide) [6]	22
11	Vehicle motriu	24
12	Descomposició del vector velocitat	24
13	Comparativa rodes paral·leles i Ackermann [8]	26
14	Direccions de gir de les rodes frontals	27
15	Angle de gir de les rodes direccionals	29
16	Vehicle motriu amb un remolc	30
17	Remolc $n - 1$ i n	31
18	Mecanisme guia-botó [10]	33
19	Comparativa de trajectòries per diferents valors de s	34
20	Vehicle motriu i remolc 1 amb l'articulació desplaçada	35
21	Remolcs $n - 1$ i n amb l'articulació desplaçada	38
22	Xassissos amb articulació amb controlador de desplaçament no lineal seguint una trajectòria comuna	40
23	Vehicle tractor i remolc amb el mateix CIR	41
24	Mètode d'Euler en un domini discretitzat on x_i és t_i [12]	43
25	Valor de ψ en funció de t i h	44
26	Simulació del xassís motriu en un canvi de direcció	48
27	Off tracking del xassís al llarg del canvi de direcció	49
28	Simulació del xassís motriu en un canvi de sentit	50
29	Off tracking del xassís al llarg del canvi de sentit	51
30	Simulació del xassís motriu en un gir de 360°	52
31	Off tracking del xassís al llarg del gir de 360°	53
32	Simulació del xassís motriu+remolc en un canvi de direcció	55

33	Off tracking dels xassissos al llarg del canvi de direcció	56
34	Angle relatiu entre ambdós xassissos al llarg del canvi de direcció	56
35	Simulació del xassís motriu+remolc en un canvi de sentit	57
36	Off tracking dels xassissos al llarg del canvi de sentit	58
37	Angle relatiu entre ambdós xassissos al llarg del canvi de sentit	58
38	Simulació del xassís motriu+remolc en un gir de 360°	59
39	Off tracking dels xassissos al llarg del gir de 360°	60
40	Angle relatiu entre ambdós xassissos al llarg del gir de 360°	60
41	Simulació del vehicle amb el mecanisme guia-botó en un canvi de direcció	62
42	Off tracking i desplaçament del mecanisme guia-botó en un canvi de direcció	63
43	Simulació del vehicle amb el mecanisme guia-botó en un canvi de sentit	64
44	Off tracking i desplaçament del mecanisme guia-botó en un canvi de sentit	65
45	Simulació del vehicle amb el mecanisme guia-botó en un gir de 360°	66
46	Off tracking i desplaçament del mecanisme guia-botó en un gir de 360°	67
47	Comparativa entre un remolc convencional i una galera [13]	68
48	Comparativa de l'off tracking màxim entre els dos tipus de remolc	69
49	Simulació del remolc de tipus convencional	70
50	Off tracking generat pel remolc convencional	71
51	Simulació del remolc de tipus galera	72
52	Off tracking generat pel remolc galera	73
53	Representació dels radis \mathcal{R}'_0 i \mathcal{R}_1 i el valor OT	74
54	Simulació del remolcs de longitud crítica	76
55	Distància recorreguda pels diferents punts del remolc i del xassís motriu	77
56	Simulació del remolc de longitud excessiva	77
57	Simulació dels 4 remolcs de longitud crítica	79
58	Distància recorreguda pels diferents punts dels remolcs i del xassís motriu	80
59	Simulació dels 4 remolcs de longitud excessiva	80
60	Valors de l'off tracking màxim en funció de l'angle de gir (δ) i la longitud del remolc	81
61	Variació mínima de ψ_0 per assolir l'off tracking màxim	82
62	Percentatge d'emissions de CO2 per sector [14]	83
63	CO2 alliberat en els diferents mitjans de transport [14]	83
64	Diagrama de Gantt	87

Índex de taules

1	Configuració i valors referents al xassís motriu	47
2	Configuració i valors referents al xassís motriu i remolc	54
3	Configuració i valors referents al xassís motriu i remolc amb el mecanisme guia-botó	61
4	Configuració i valors referents al xassís motriu i remolc convencional	70
5	Configuració i valors referents al xassís motriu i remolc galera	71
6	Configuració i valors referents al xassís motriu i remolc en situació límit	75
7	Configuració i valors referents al xassís motriu i els 4 remolcs en situació límit	78

1 Prefaci

1.1 Origen del projecte

Soc nascut a Tremp, capital del Pallars Jussà, territori on l'agricultura i la ramaderia són unes de les activitats econòmiques principals i, per tant, molts dels seus habitants ens hem trobat alguna vegada involucrats tant en la pagesia com amb la conducció de vehicles de grans dimensions com són els tractors, molt sovint acompanyats de remolcs o altres eines de treball.

Les primeres vegades que es condueix un vehicle amb remolc, sigui un tractor, un turisme o un camió, si bé la marxa endavant no sembla de primeres representar un gran canvi respecte de la conducció sense remolc, la conducció marxa enrere es pot convertir en una acció realment complicada, a la vegada que pot generar una gran confusió. Quan al segon any de carrera vaig cursar la part de cinemàtica de l'assignatura de Mecànica, recordo que a partir d'un estudi simple de cinemàtica d'un vehicle em vaig adonar que moltes de les dificultats que havia trobat en la conducció d'aquest tipus de vehicle tenien una explicació lògica i senzilla.

Paral·lelament a les dificultats que pot ocasionar la conducció marxa enrere, existeix també una altra dificultat afegida, sobretot si es tracta de remolcs de gran longitud, que és la d'evitar que el remolc o inclús el tren posterior del vehicle tractor surtin de la via en realitzar corbes tancades.

És d'aquesta experiència que surt la idea d'analitzar-ho en un treball de final de grau per mitjà de simulacions fetes amb Matlab, a la vegada que s'estudien també algunes de les solucions ja existents per mitigar-ho.

1.2 Motivació del projecte

En 2016, el primer tren de carretera (*megatruck* en anglès) feia el seu primer viatge per les carreteres de l'estat espanyol des de la fàbrica Seat de Martorell fins a la localitat de Palau-solita i Plegamans. La legalització d'aquests tipus de vehicle articulat naixia de la voluntat per reduir els costos per tona transportada, les emissions contaminants i la congestió a les carreteres. Les característiques principals d'aquest comboi són la seva gran longitud permesa (25,25m pel cas d'Espanya) i les seves múltiples articulacions. El seu transport està pràcticament permès, únicament, a autovies i a autopistes com a conseqüència, en major part, de la dificultat o impossibilitat d'efectuar corbes tancades amb articulacions convencionals.

En canvi, un tipus de transport on ja fa temps que s'implementen articulacions millors són els busos urbans articulats, els quals permeten la mobilitat interurbana per gairebé qualsevol classe de via, podent augmentar així el flux de passatgers sense augmentar en el nombre de busos i conductors.

2 Introducció

2.1 Objectius del projecte

L'objectiu principal del projecte és la simulació cinemàtica d'un sistema format per un vehicle tractor i els seus respectius remolcs a partir d'un moviment prescrit del vehicle motriu. Per fer-ho possible, s'han trobat les relacions cinemàtiques per a cada xassís i se n'ha fet un seguit de simulacions mitjançant el programari Matlab.

A més, s'ha estudiat un altre tipus d'unió, més enllà de la convencional, seguint el procediment especificat anteriorment i amb la intenció d'analitzar alternatives per evitar la sortida de la via o la invasió del carril contrari dels remolcs quan el vehicle motriu descriu trajectòries curvades.

La mitigació d'aquest efecte podria facilitar la conducció d'aquests vehicles, a la vegada que fer-la adaptable a un major tipus de vies on fins ara part d'aquests vehicles tenen la circulació restringida.

2.2 Abast del projecte

Es modelitzarà un conjunt format per diferents xassissos i els seus respectius moviments a partir d'un estudi cinemàtic restringit a 2D. Per simplificar els càlculs i evitar entrar en aspectes de dinàmica, s'han realitzat les següents simplificacions:

- Els remolcs disposen d'un sol eix mecànic.
- Es negligeix l'amplada de les rodes.
- Totes les articulacions entre remolcs o entre remolc i xassís motriu estan situades sobre l'eix del xassís que el precedeix.
- Es negligeix qualsevol sistema de suspensió entre el terra i els xassissos.
- El terra és considerat en tot moment com una superfície plana.

Un cop modelat el sistema i els enllaços entre els diversos xassissos, tant si consisteixen en simples articulacions com en unions més complexes, es procedirà a resoldre les relacions cinemàtiques que regeixen el seu moviment per mitjà del mètode d'Euler explícit per poder determinar les trajectòries de diferents punts dels remolcs, permetent doncs comparar el seu comportament en diferents moviments i diferents enllaços.

3 Estat de l'art

Un vehicle articulat és un tipus de vehicle compost per dos o més xassissos connectats entre ells mitjançant una articulació que permet el moviment relatiu entre ells. L'articulació es troba generalment situada en un punt al llarg de l'eix longitudinal del vehicle i que permet que les seccions girin respecte de les altres, donant lloc a una major maniobrabilitat en comparació amb els vehicles rígids convencionals.

Existeixen diversos tipus de vehicles articulats, cada un dissenyat per complir diferents propòsits i aplicacions. A continuació se n'esmenten alguns dels tipus més comuns:

- Camions articulats: Aquests vehicles consisteixen en una unitat tractora i un remolc o diversos remolcs connectats a través d'una articulació central. S'utilitzen principalment en el transport on es requereix una major capacitat de càrrega i maniobrabilitat en espais de superfície limitada. La definició és equivalent si la unitat tractora és un turisme o un tractor en lloc d'un camió.
- Busos articulats: Estan compostos per dues o més seccions unides mitjançant una articulació central flexible. Aquests vehicles s'empren en el transport públic urbà d'alta capacitat, especialment en àrees amb alta demanda de passatgers amb la finalitat de transportar més persones i ser més eficients en termes d'espai a la carretera.

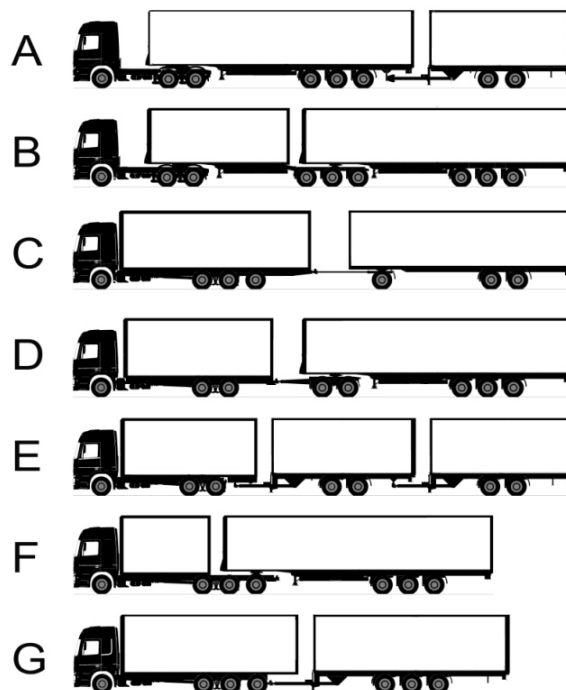


Figura 1: Tipus de camions articulats en circulació per Europa [1]

Els vehicles articulats ofereixen una sèrie de beneficis en comparació amb els vehicles rígids convencionals. A continuació s'esmenten alguns dels beneficis claus dels vehicles articulats:

- Major capacitat de càrrega: Els vehicles articulats, com els camions articulats, tenen la

capacitat de transportar una major quantitat de càrrega en comparació amb els vehicles rígids. L'articulació permet afegir remolcs addicionals, el que augmenta la capacitat de càrrega total. Això és especialment útil en aplicacions com el transport de mercaderies a llarga distància o en la indústria de la construcció i mineria.

- Major maniobrabilitat: L'articulació en els vehicles articulats permet una major capacitat de maniobra en comparació amb els vehicles rígids. Això és particularment beneficiós en aplicacions on els espais són reduïts o en entorns urbans congestionats, com en el cas del transport públic.
- Eficiència en l'ús de l'espai: Redueixen l'ús de l'espai a la carretera o vies de ferrocarrils. Permet transportar una major quantitat de càrrega o passatgers.
- Eficiència econòmica: En certs casos, poden ser més rentables en termes de transport de càrrega i passatgers. En permetre la circulació en àrees on els vehicles rígids no hi tenen accessibilitat, pot implicar una major eficiència en el consum del combustible i menors costos operatius.

Per altra banda, existeixen també alguns desavantatges que són importants de mencionar:

- Major complexitat d'operació: Els vehicles articulats són més complexos de controlar en comparació amb els vehicles rígids. L'articulació i la connexió entre les seccions requereixen una major atenció i habilitat per part del conductor.
- Major manteniment: Els vehicles articulats tenen més components mòbils i articulacions que els vehicles rígids, el que implica un major manteniment.
- Major longitud: Els vehicles articulats són més llargs que els vehicles rígids, fet que pot dificultar trobar espais d'estacionaments adequats. A més a més, la gran longitud que poden presentar alguns d'aquests vehicles fa que el fenomen conegut com a "off-tracking" prengui un paper important, el que requereix una major precaució i habilitat per part del conductor.

3.1 Off tracking

Quan un vehicle amb remolc descriu una trajectòria curvilínia, el remolc segueix una trajectòria diferent de la del vehicle tractor. Concretament, els punts de l'eix del darrere del vehicle tractor segueixen una trajectòria més curta que els punts de l'eix del darrere del remolc, cosa que resulta en una separació lateral entre tots dos i que pot implicar una sortida de la via. També passa de forma equivalent amb els vehicles rígids de grans dimensions, on els centres de les rodes del darrere segueixen un recorregut més proper al centre de la corba.

Aquest fenomen es coneix com a off-tracking i es pot definir com la diferència entre la trajectòria seguida pel punt mig de l'eix frontal del vehicle i la seguida pel punt mig de l'eix posterior [2].

De forma equivalent, es pot expressar com la longitud de la recta que va des d'un punt determinat de la trajectòria traçada pel punt mig de l'eix frontal fins al punt mig de l'eix posterior i que a la vegada és perpendicular a la trajectòria en aquest punt (Fig. 2).

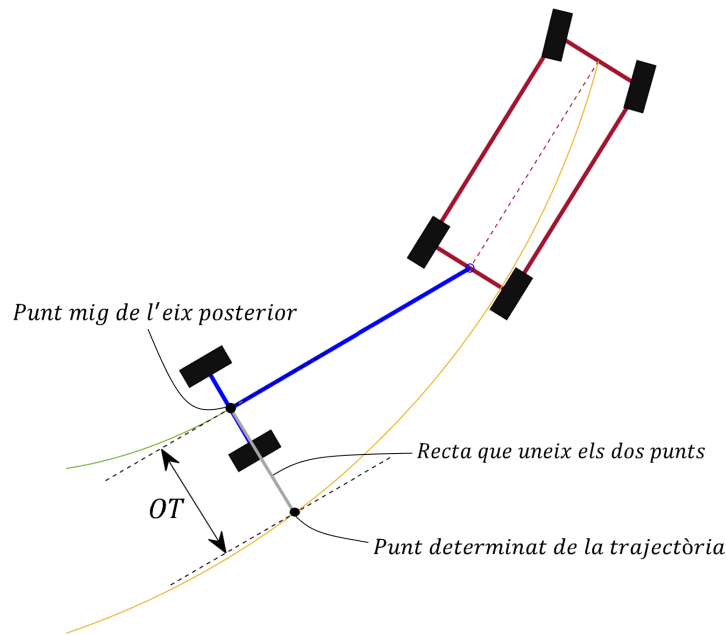


Figura 2: Magnitud de l'off tracking en un punt de la trajectòria

El valor que quantifica l'off tracking, sovint representat com el paràmetre OT , tendeix a augmentar fins a un valor màxim determinat quan el vehicle descriu trajectòries de radi constant. Aquest valor màxim es dona quan els centres instantanis de rotació de tots els xassissos acaben convergen a un mateix punt. A la figura 3 es pot observar l'augment que presenta el paràmetre OT fins a assolir pràcticament aquest valor determinat.

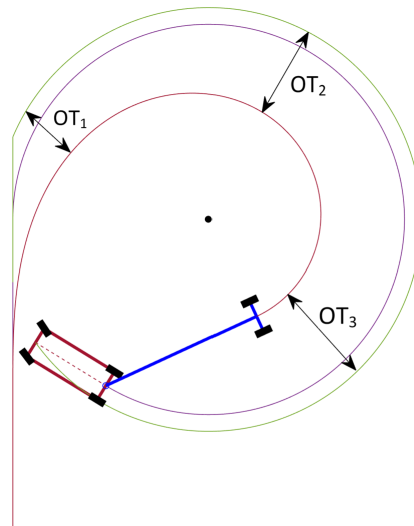


Figura 3: Variació de l'off tracking al llarg del recorregut

El valor d' OT màxim estarà condicionat pel radi de curvatura que segueix el punt mig de la part frontal del xassís motriu, \mathcal{R}'_0 , i la longitud de cada xassís del vehicle, L_i . A continuació es mostra una representació d'un vehicle amb 3 remolcs que giren al voltant del CIR:

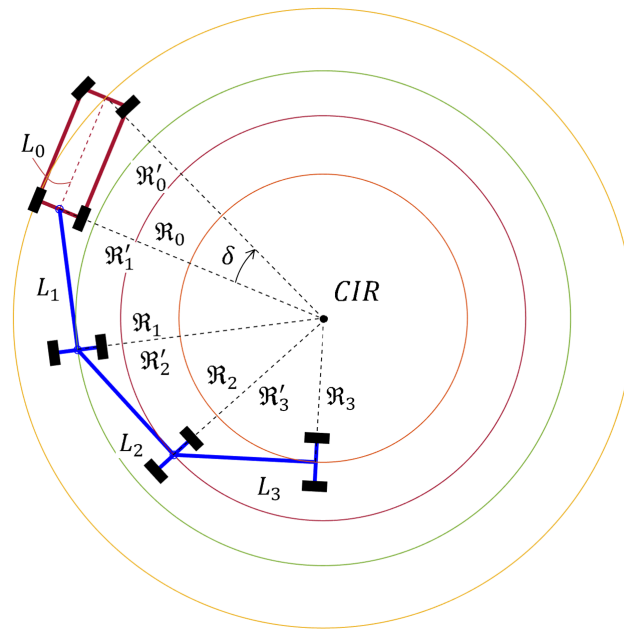


Figura 4: Representació gràfica de l'off tracking màxim

Observant la figura 4, es pot concloure que l' OT_{max} és el següent [3]:

$$OT_{max} = \mathfrak{R}'_0 - \mathfrak{R}_3 \quad (1)$$

Per expressar aquesta equació amb els paràmetres d'interès, cal fer un seguit d'operacions algebraiques:

$$\mathfrak{R}'_0 = \frac{L_0}{\sin(\delta)} \quad (2)$$

$$\mathfrak{R}'_1 = \mathfrak{R}_0 = \frac{L_0}{\tan(\delta)} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}'_2 = \mathfrak{R}_1 &= \sqrt{\mathfrak{R}'_1{}^2 - L_1^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{L_0}{\tan(\delta)}\right)^2 - L_1^2} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}'_3 = \mathfrak{R}_2 &= \sqrt{\mathfrak{R}'_2{}^2 - L_2^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{L_0}{\tan(\delta)}\right)^2 - L_1^2 - L_2^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_3 &= \sqrt{\mathfrak{R}_3'^2 - L_3^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{L_0}{\tan(\delta)}\right)^2 - L_1^2 - L_2^2 - L_3^2}\end{aligned}\quad (6)$$

$$OT_{max} = \frac{L_0}{\sin(\delta)} - \sqrt{\left(\frac{L_0}{\tan(\delta)}\right)^2 - L_1^2 - L_2^2 - L_3^2}\quad (7)$$

Si es generalitza l'equació 7 per a n remolcs, l'expressió resultant és la següent:

$$OT_{max} = \frac{L_0}{\sin(\delta)} - \sqrt{\left(\frac{L_0}{\tan(\delta)}\right)^2 - \sum_{i=1}^n L_i^2}\quad (8)$$

La velocitat en què l'off-tracking tendirà a OT_{max} dependrà del radi de la corba, de la quantitat de xassissos i de la longitud de cada un.

Si per vehicles d'una sola unitat i de distància entre eixos petita el desviament més gran es pot considerar com a assolit en haver recorregut un angle inferior a 90° , en vehicles amb diversos remolcs l'angle que recorrerà el vehicle per assolir OT_{max} pot ser superior a 270° .

Així mateix, l'augment de la llargària dels remolcs té com a conseqüència una disminució de la velocitat de convergència fins al valor màxim del desviament.

Les conseqüències de l'off tracking en un vehicle poden ser diverses i poden afectar tant la seguretat com la maniobrabilitat del vehicle. Algunes de les conseqüències més comunes són les següents:

- Major espai requerit: A causa de l'off tracking, el vehicle combinat necessita un espai addicional per completar la corba sense col·lisionar amb obstacles o envair carrils adjacents. Això és especialment rellevant en interseccions complicades o espais de maniobra limitats.
- Risc de col·lisió: Si el conductor no té en compte l'off tracking en girar, hi ha el risc que el remolc s'acosti massa a voreres, pals, vehicles estacionats o altres objectes al llarg del recorregut de la corba, cosa que podria resultar en col·lisions o danys.

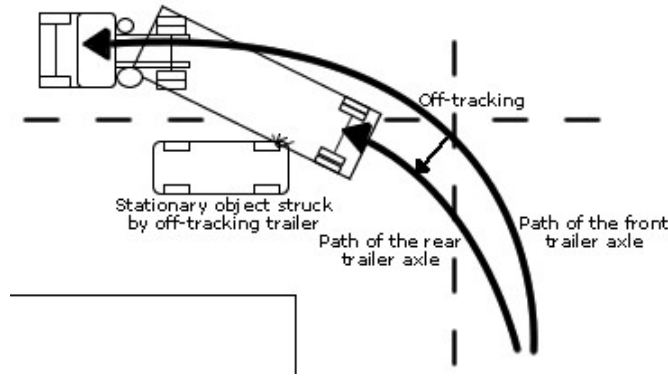
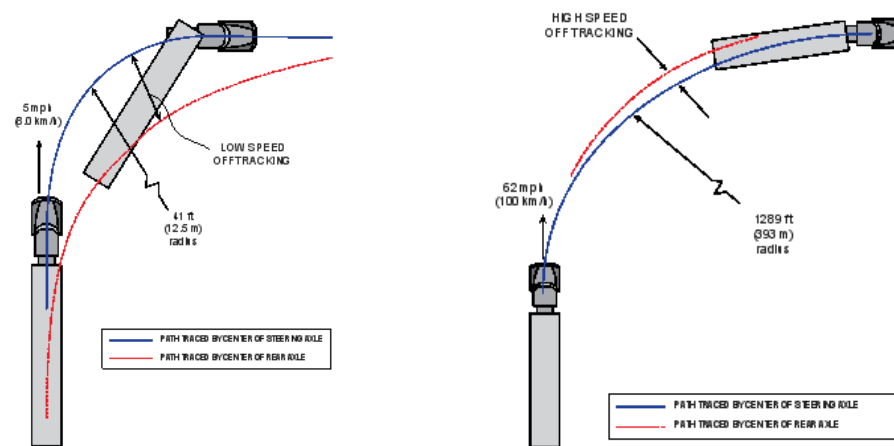


Figura 5: Accident comú en vehicles articulats [4]

Cal destacar que per a velocitats elevades, les trajectòries que seguiran els remolcs poden variar respecte de les trajectòries a baixa velocitat.



(a) Off-tracking a baixa velocitat

(b) Off-tracking a alta velocitat

Figura 6: Comparativa de l'off-tracking en funció de la velocitat [5]

Per entendre i descriure la trajectòria de l'off-tracking a alta velocitat, cal estudiar-ne la dinàmica. Tot i que la dinàmica del vehicle queda fora de l'abast d'aquest treball, es fa una breu explicació del lliscament que poden patir les rodes.

Considerem una roda el centre de la qual descriu una trajectòria circular en un pla a velocitat constant v i amb un radi de gir \mathcal{R} .

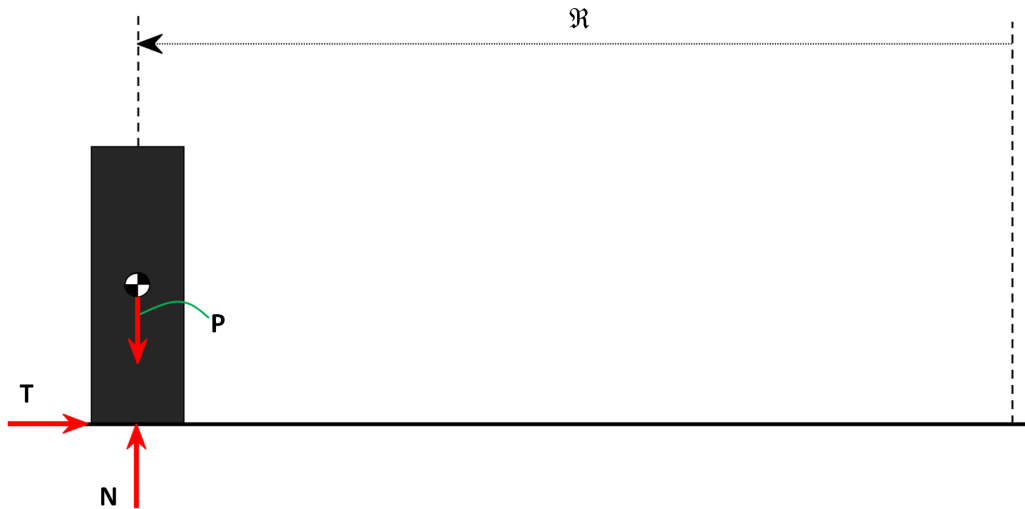


Figura 7: Forces d'interacció sobre la roda

Aplicant el teorema de la quantitat de moviment, tant en l'eix horitzontal com en el vertical, s'obtenen les dues següents relacions:

$$\begin{cases} P = N = mg \\ T = m \frac{v^2}{\mathfrak{R}} \end{cases} \quad (9)$$

La força T és una força d'interacció entre el terra i la roda responsable de l'acceleració normal del centre. Si la velocitat pren un valor molt elevat, es pot donar el cas que $T_{max} = \mu N$ sigui inferior a $m \frac{v^2}{\mathfrak{R}}$ i que la roda comenci a lliscar.

Per tant, és d'interès conèixer el valor màxim de T per poder calcular en quines condicions la roda tindrà lliscament. En tractar-se d'una força de fricció, el seu valor màxim serà l'imposat per la força normal i el coeficient de fricció, μ .

$$T_{max} = \mu N = \mu mg \quad (10)$$

Si s'igualava l'equació 10 amb la 9:

$$T_{max} = \mu mg = m \frac{v_{max}^2}{\mathfrak{R}} \quad (11)$$

Aïllant el valor de v_{max} , es troba el valor límit per al qual apareixerà lliscament entre la roda i el terra:

$$v_{max} = \sqrt{\mu \mathfrak{R} g} \quad (12)$$

Superant aquesta velocitat determinada, les rodes perden adherència amb el sòl i el xassís comença un desplaçament en sentit oposat a l'acceleració angular. Aquest desplaçament cap a l'exterior de la corba s'oposa a l'off-tracking, donant com a resultat una trajectòria dels trens posteriors amb un efecte de l'off-tracking esmorteït, tal com s'observa a la figura [6b](#).

4 Modelització del vehicle

Per a modelitzar el vehicle i desenvolupar les seves equacions cinemàtiques, s'han tingut en compte diverses simplificacions ja mencionades a l'apartat 2.2 amb la finalitat de facilitar els càlculs.

La major part de les simplificacions tenen una influència directa amb la cinemàtica de les rodes i, com a conseqüència, amb la resta del vehicle.

El fet d'estar considerant un sòlid rígid sense cap mena de sistema de suspensió entre el suport de les rodes i el xassís i en una superfície completament plana, restringeix de forma immediata un dels tres angles de gir que podria presentar la roda, tal com queda representat a la figura 8.

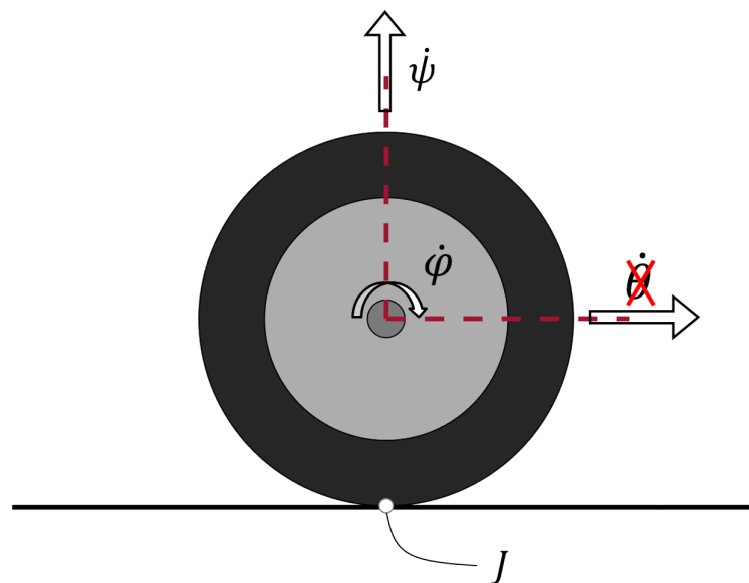


Figura 8: Rotacions d'Euler a la roda

La velocitat de rotació $\dot{\phi}$ és la que permetrà un desplaçament de la roda en cas que no hi hagi lliscament i, com a conseqüència, del xassís al qual és solidari l'eix de la roda.

La component vertical, $\dot{\psi}$, pot estar associada a dos tipus de moviment, depenent de si la roda és direccional o no. Si la roda no presenta rotació respecte del xassís, la rotació vertical serà igual a la rotació del xassís, que serà conseqüència d'estar descrivint una trajectòria curvilínia. Si, per contra, la roda és direccional i, per tant, presenta rotació respecte del xassís, la rotació vertical vindrà motivada per la rotació del xassís i la de la pròpia roda respecte del sòlid.

Així mateix, per assegurar que el pneumàtic no presenta cap mena de lliscament amb el terra i que la distribució del pes del vehicle no té cap influència sobre l'estudi, s'ha considerat que el contacte entre *terra – roda* és puntual i no es perd en cap moment.

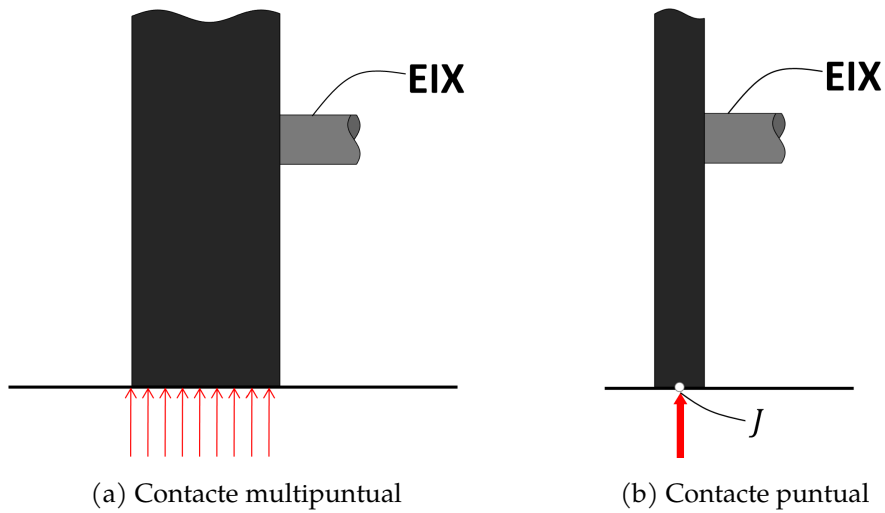


Figura 9: Tipus de contacte terra – roda

Per tant, havent considerat que la roda té un moviment de rodolament perfecte amb el terra, s’observa que el punt J de la roda està en contacte amb una superfície plana i, en no presentar lliscament, la velocitat relativa del punt J respecte del terra haurà de ser nul·la.

Aquest fet es pot entendre més fàcilment raonant la impossibilitat que $\vec{v}(J) \neq 0$ sense que el pneumàtic presenti cap mena de lliscament.

Cal remarcar que el punt J té velocitat 0 de forma instantània, únicament quan es troba en contacte amb el terra. En el cas concret en que $\dot{\psi} = 0$, el punt J descriurà una trajectòria coneguda com a cicloide (Fig. 10):

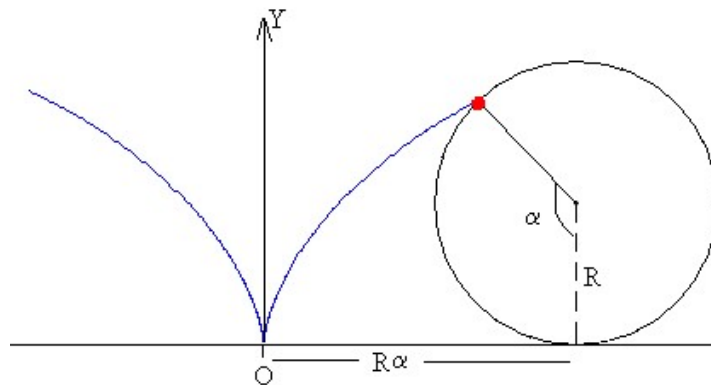


Figura 10: Trajectòria del punt J (Cicloide) [6]

Un cop detallat que $v(J) = 0$, es procedeix a calcular la velocitat del centre de la roda per mitjà de l’equació següent, que relaciona la velocitat de dos punts qualsevols, Q i P , d’un mateix sòlid rígid [7].

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(Q) + \vec{\Omega}^{Solid} \times \overrightarrow{QP} \tag{13}$$

Aplicant l'equació 13 per al cas de la roda i considerant com a eixos base l'eix longitudinal i vertical de la figura 8:

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(C) &= \vec{v}(J) + \vec{\Omega}_{Terra}^{Roda} \times \vec{JC} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ -\dot{\varphi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \cdot r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{14}$$

A partir d'aquesta expressió es demostra que la roda tindrà un desplaçament únicament en la direcció del diàmetre horitzontal i que la seva velocitat és proporcional a la velocitat de gir $\dot{\varphi}$ i al seu radi r .

Aquesta velocitat longitudinal serà a la vegada la mateixa que tindrà el punt de l'eix unit amb la roda i, com a conseqüència, la velocitat del xassís en aquell punt.

4.1 Equacions del vehicle tractor

En aquest apartat es busca estudiar la cinemàtica del vehicle motriu, el qual presenta un tren frontal amb rodes direccionals i un tren posterior amb rodes alineades permanentment amb l'eix transversal del xassís.

Els paràmetres d'aquest xassís seran escrits amb el subíndex 0, on P_0 i F_0 representen el punt posterior i frontal de l'eix longitudinal. Així mateix, ψ_0 és l'angle que presenta l'eix longitudinal respecte de l'eix d'abscisses, x , i δ serà l'angle entre el vector velocitat del punt frontal, $\vec{v}(F_0)$, i l'eix longitudinal.

Tots aquests paràmetres queden representats de forma il·lustrativa a la figura 11.

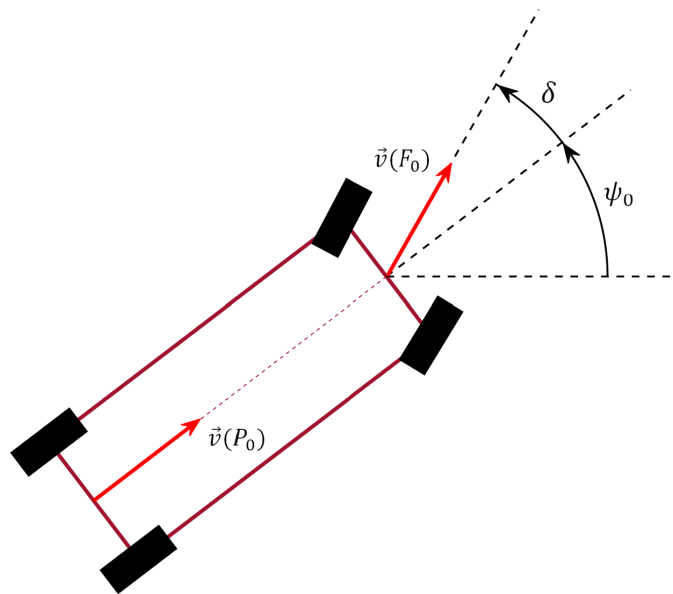


Figura 11: Vehicle motriu

Si es considera que la velocitat frontal, $v(F_0)$, és un valor fixat a v , la seva descomposició sobre la base vectorial xyz i $x'y'z'$ es pot representar com:

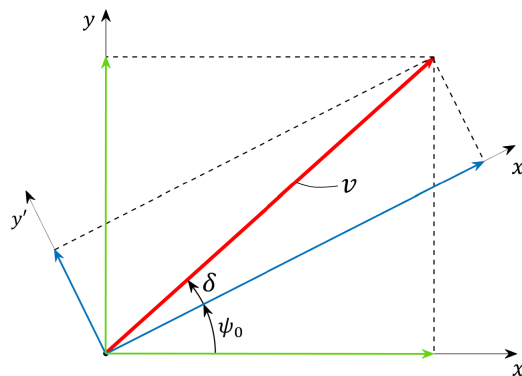


Figura 12: Descomposició del vector velocitat

Per tant, el seu vector serà el següent:

$$\vec{v}(F_0)|_{xyz} = v \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_0 + \delta) \\ \sin(\psi_0 + \delta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(F_0) \\ \dot{y}(F_0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Per relacionar la velocitat entre dos punts pertanyents a un mateix sòlid rígid, com és el cas del xassís, es pot utilitzar l'equació 13. Per mitjà d'aquesta equació es permet trobar el vector velocitat, $\vec{v}(P_0)$.

$$\vec{v}(P_0) = \vec{v}(F_0) + \vec{\Omega}^{X_{assis0}} \times \overrightarrow{F_0P_0} \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(P_0) \\ \dot{y}(P_0) \\ \dot{z}(P_0) \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_0 + \delta) \\ \sin(\psi_0 + \delta) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -L_0 \cdot \cos(\psi_0) \\ -L_0 \cdot \sin(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

El valor de $\dot{\psi}_0$ és la velocitat angular que presenta el xassís respecte del terra. Per calcular-lo, es pot descompondre $\vec{v}(F_0)$ en l'eix longitudinal del vehicle i en el seu perpendicular, tal com s'ha fet a la base $x'y'z'$ de la figura 12. En aquesta base, el vector pren la següent forma:

$$\vec{v}(F_0) \Big|_{B'} = v \cdot \begin{pmatrix} \cos(\delta) \\ \sin(\delta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

A partir de l'expressió anterior, es pot observar que el component de la primera direcció es tracta d'una velocitat longitudinal i que, per tant, no provocarà cap mena de rotació. En canvi, la segona direcció és ortogonal a l'eix longitudinal, el que implicarà un moviment transversal del punt F_0 . Aquesta velocitat transversal, la velocitat angular, ψ_0 , i la longitud del xassís estan directament relacionats per mitjà de la següent equació:

$$v \cdot \sin(\delta) = \dot{\psi}_0 \cdot L_0 \quad (19)$$

$$\dot{\psi}_0 = \frac{v \cdot \sin(\delta)}{L_0} \quad (20)$$

Reprenent l'equació 17 i substituint-hi $\dot{\psi}_0$ per l'expressió 20, es desenvolupa la següent relació:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}(P_0) \\ \dot{y}(P_0) \\ \dot{z}(P_0) \end{pmatrix} &= v \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_0 + \delta) \\ \sin(\psi_0 + \delta) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \cdot \frac{\sin(\delta)}{L_0} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -L_0 \cdot \cos(\psi_0) \\ -L_0 \cdot \sin(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= v \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_0 + \delta) + \sin(\psi_0) \cdot \sin(\delta) \\ \sin(\psi_0 + \delta) - \cos(\psi_0) \cdot \sin(\delta) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= v \cdot \cos(\delta) \begin{pmatrix} \cos(\psi_0) \\ \sin(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

Amb la cinemàtica del xassís ja definida, es podria calcular la posició al llarg del temps dels punts P_0 i F_0 integrant el vector velocitat dels respectius punts, tal com s'ha indicat a continuació:

$$\vec{X}(P_0) = \int_0^t \vec{v}(P_0) \cdot dt + \vec{X}_o(P) \quad (22)$$

$$\vec{X}(F_0) = \int_0^t \vec{v}(F_0) \cdot dt + \vec{X}_o(F_0) \quad (23)$$

On les posicions inicials $\vec{X}_o(P_0)$ i $\vec{X}_o(F_0)$ hauran de respectar la següent relació geomètrica:

$$\vec{X}_o(F_0) = \vec{X}_o(P_0) + L_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_{0o}) \\ \sin(\psi_{0o}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

La integració indicada en les equacions 22 i 23 pot ser un procés complex, ja que sovint ψ_0 i δ varien en el temps. Aquesta dificultat serà tractada posteriorment a l'apartat 5.

4.1.1 Geometria d'Ackermann

Quan un vehicle descriu una trajectòria curvilínia, cada punt del xassís tindrà associat un radi de gir que serà la distància entre el mateix punt i el CIR del xassís. Com a conseqüència, el punt tindrà una velocitat tangencial a l'arc descrit pel radi de curvatura, que a la vegada serà perpendicular a la recta que uneix el CIR amb el punt específic.

Aquest fet té una influència directa sobre l'angle de gir de les rodes direccionals, ja que cadascuna tindrà un radi de gir diferent i, com a conseqüència, el seu angle de gir serà també diferent.

La geometria de direcció que ens assegura aquesta diferència d'angle entre ambdues rodes es coneix com a geometria d'Ackermann.

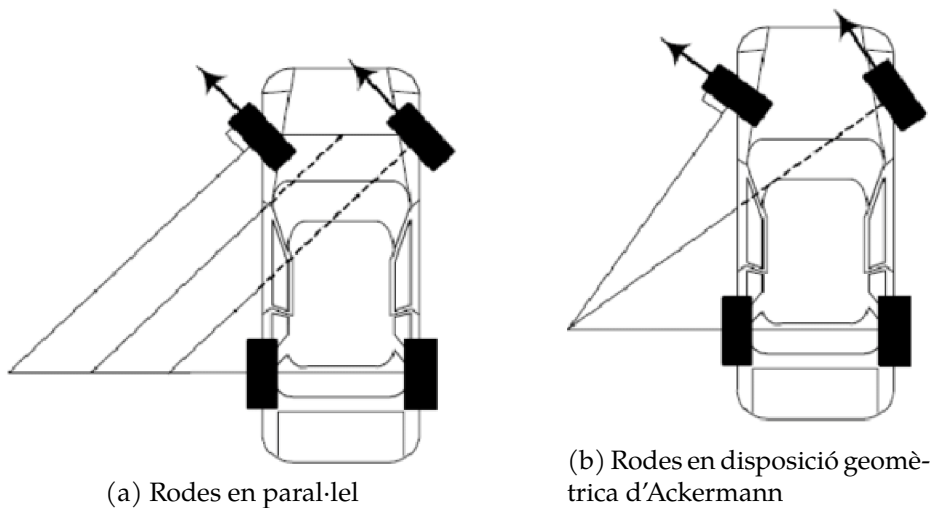


Figura 13: Comparativa rodes paral·leles i Ackermann [8]

Tal com es pot observar a la figura 13a, si les rodes es troben alineades en paral·lel durant la realització d'un gir, això portarà a un lliscament de les rodes i a trajectòries inesperades.

Per contra, si el xassís està equipat amb una geometria d'Ackermann com la indicada a la figura 13b, les rodes no estaran alienades, sinó que presentaran una desviació entre elles. Aquesta

desviació permetrà que els eixos transversals a ambdues rodes convergeixin a un mateix punt, el CIR.

Per calcular l'angle de gir de cada roda, s'ha representat el radi de curvatura que tindrà cadascuna d'elles en dues figures diferents, 14b i 14c.

Tal com s'ha il·lustrat a la figura 11, es vol que el punt F_0 tingui una velocitat amb un angle δ respecte de l'eix longitudinal. Això és equivalent a tenir una roda en el mateix punt orientada amb la mateixa direcció que la roda. Per tant, es pot calcular la posició del CIR a partir de l'angle δ i la longitud L_0 i, un cop es tingui el CIR localitzat, trobar quin angle de gir de les rodes, δ_{dreta} i $\delta_{esquerra}$, garanteix un mateix CIR.

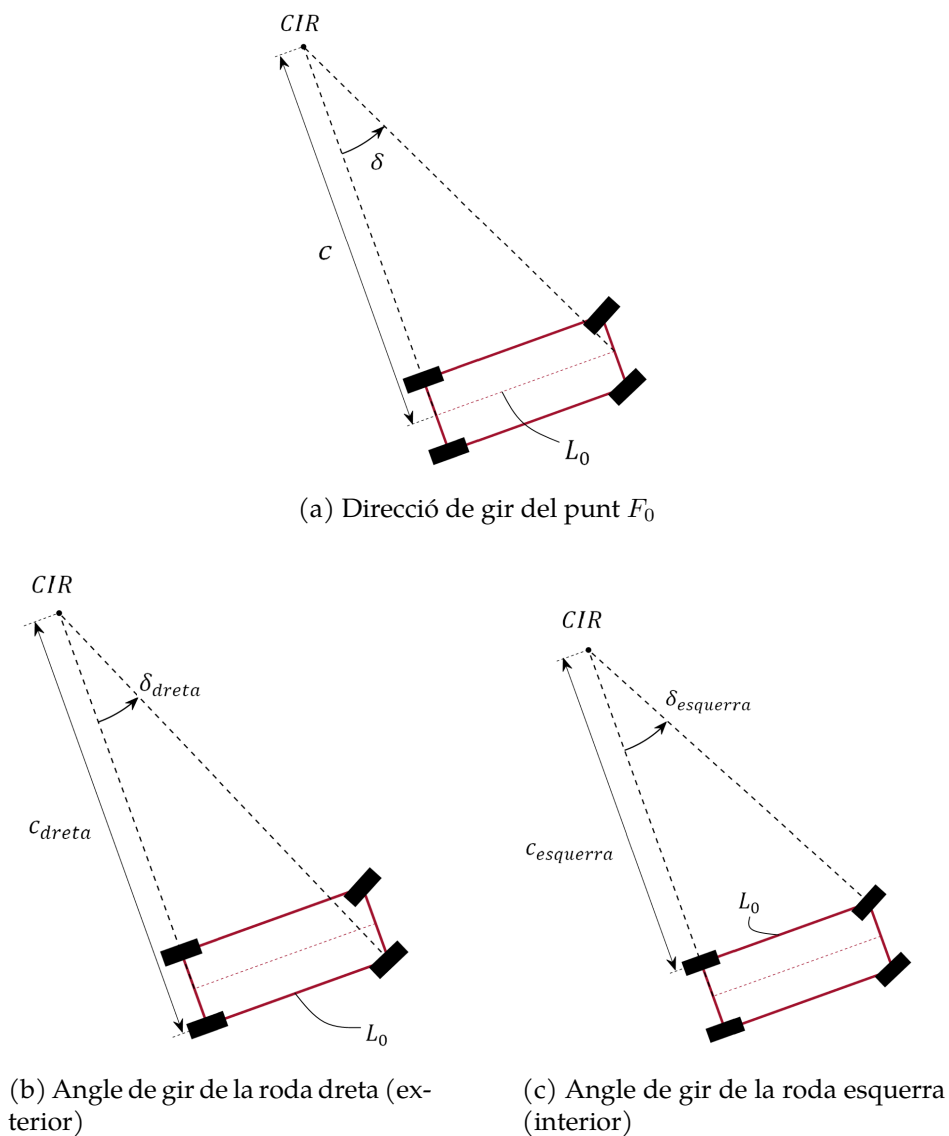


Figura 14: Direccions de gir de les rodes frontals

A partir de la figura 14a, s'observa que la distància entre P_0 i el CIR s'ha indicat amb un paràmetre c . El càlcul d'aquest valor es calcula directament mitjançant la $\tan(\delta)$, ja que es tracta

d'un triangle amb un angle recte.

$$\tan(\delta) = \frac{L_0}{c} \quad (25)$$

$$c = \frac{L_0}{\tan(\delta)} \quad (26)$$

Si la distància entre el CIR i P_0 és c , la distància entre el CIR i les dues rodes posteriors estarà influenciada per l'amplada del xassís, H_0 .

$$c_{dreta} = \frac{L_0}{\tan(\delta)} + \frac{H_0}{2} \quad (27)$$

$$c_{esquerra} = \frac{L_0}{\tan(\delta)} - \frac{H_0}{2} \quad (28)$$

Amb els valors de c_{dreta} i $c_{esquerra}$ calculats i tenint en compte que la llargada del xassís és constant i de valor L_0 , s'obtenen els següents angles de gir per cada roda:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan(\delta_{esquerra}) = \frac{L_0}{c_{esquerra}} = \frac{\tan(\delta)}{1 - \frac{H_0}{2 \cdot L_0} \cdot \tan(\delta)} \\ \delta_{esquerra} = \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\delta)}{1 - \frac{H_0}{2 \cdot L_0} \cdot \tan(\delta)} \right) \end{array} \right. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan(\delta_{dreta}) = \frac{L_0}{c_{dreta}} = \frac{\tan(\delta)}{1 + \frac{H_0}{2 \cdot L_0} \cdot \tan(\delta)} \\ \delta_{dreta} = \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\delta)}{1 + \frac{H_0}{2 \cdot L_0} \cdot \tan(\delta)} \right) \end{array} \right. \quad (30)$$

Tal com queda indicat a les equacions 29 i 30, el valor dels angles estarà condicionat per la geometria del xassís, específicament per la relació entre l'amplada i la longitud, $\frac{H_0}{L_0}$. Com més gran sigui l'amplada o més curta sigui la longitud del xassís, més evident serà aquesta diferència en l'angle de gir.

Per tal d'exposar la discrepància de gir entre ambdues rodes, s'han graficat les expressions 29 i 30 en un mateix gràfic, havent considerat $\frac{H_0}{L_0} = 0.4$.

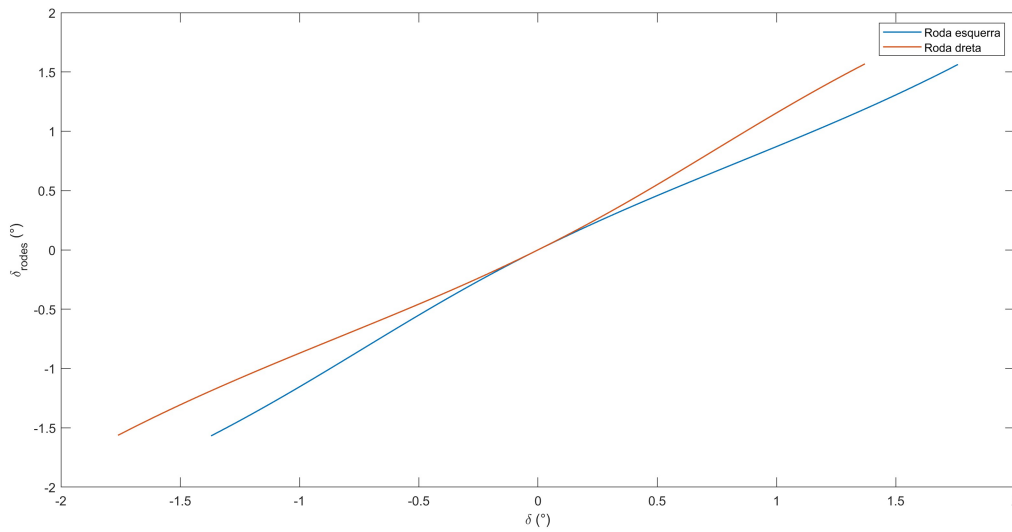


Figura 15: Angle de gir de les rodes direccionals

Mitjançant la figura 15, es pot observar com la discrepància entre els girs és major per valors de $|\delta|$ elevats i que, com era previsible, per una trajectòria rectilínia ($\delta=0$) ambdues rodes presentaran un angle de gir comú de valor 0.

4.2 Equacions dels remolcs amb unió simple

En aquesta secció es busca calcular les equacions cinemàtiques que regeixen el moviment del primer remolc, que presenta únicament un eix longitudinal unit per un extrem al xassís motriu i per l'altre extrem al tren posterior.

En aquest cas, tots els paràmetres referents al primer remolc estaran identificats amb el subíndex 1, tal com s'indica a la figura 16.

Així mateix, com que la part frontal del xassís del remolc està unida per un eix de revolució amb P_0 , ambdós punts són solidaris i tindran el mateix vector de velocitat.

Per tant, si $\vec{v}(P_0) = \vec{v}(F_1)$, reprenent l'expressió 21:

$$\vec{v}(F_1) = v \cdot \cos(\delta) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_0) \\ \sin(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Amb $\vec{v}(F_1)$ calculat, es procedeix a calcular el vector velocitat al punt F_1 per mitjà de l'equació 13, que permet relacionar els vectors velocitats de dos punts del mateix sòlid.

$$\vec{v}(F_1) = \vec{v}(P_1) + \vec{\Omega}^{Remolc1} \cdot \overrightarrow{P_1 F_1} \quad (32)$$

Al no haver-hi lliscament entre el terra i les rodes, es pot assegurar que el vector $\vec{v}(P_1)$ tindrà la mateixa direcció que l'eix longitudinal de la roda i, com a conseqüència, que l'eix longitudinal

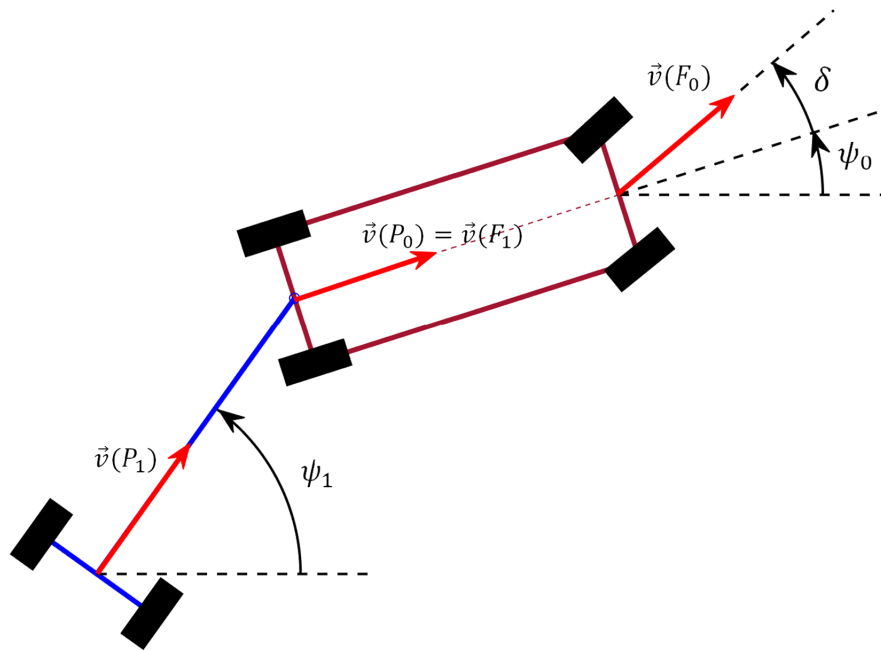


Figura 16: Vehicle motriu amb un remolc

del xassís. Per tant, es pot assegurar que el vector prendrà la següent forma, sent v_{P_1} el mòdul de la velocitat:

$$\vec{v}(P_1) = v_{P_1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_1) \\ \sin(\psi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Substituint la relació 33 a l'equació 32, s'obté la següent expressió:

$$\begin{aligned} \vec{v}(F_1) &= v_{P_1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_1) \\ \sin(\psi_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_1 \cdot \cos(\psi_1) \\ L_1 \cdot \sin(\psi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_{P_1} \cdot \cos(\psi_1) - \dot{\psi}_1 \cdot L_1 \cdot \sin(\psi_1) \\ v_{P_1} \cdot \sin(\psi_1) + \dot{\psi}_1 \cdot L_1 \cdot \cos(\psi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{34}$$

En ser $\vec{v}(F_1)$ un vector de valors coneguts, el que s'obté és un sistema de dues incògnites, v_{P_1} i $\dot{\psi}_1$:

$$v \cdot \cos(\delta) \begin{pmatrix} \cos(\psi_0) \\ \sin(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{P_1} \cdot \cos(\psi_1) - \dot{\psi}_1 \cdot L_1 \cdot \sin(\psi_1) \\ v_{P_1} \cdot \sin(\psi_1) + \dot{\psi}_1 \cdot L_1 \cdot \cos(\psi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Per facilitar-ne la resolució, s'opta per reescriure la igualtat en forma matricial, on les incògnites

queden definides al vector columna. Com que les components de l'eix 3 són nul·les en els dos costats de la igualtat, ja no s'han tingut en compte en l'expressió matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos(\psi_1) & -L_1 \cdot \sin(\psi_1) \\ \sin(\psi_1) & L_1 \cdot \cos(\psi_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{P_1} \\ \dot{\psi}_1 \end{pmatrix} = \vec{v}(F_1) = \vec{v}(P_0) \quad (36)$$

Calculant la matriu inversa i multiplicant-la pel vector $\vec{v}(P_0)$, s'obtenen els valors de v_{P_1} i $\dot{\psi}_1$ en funció dels paràmetres del xassís motriu i el xassís del remolc (xassís 0 i 1).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{P_1} \\ \dot{\psi}_1 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\psi_1) & -L_1 \cdot \sin(\psi_1) \\ \sin(\psi_1) & L_1 \cdot \cos(\psi_1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \vec{v}(P_0) \\ &= \frac{1}{L_1} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \cdot \cos(\psi_1) & L_1 \cdot \sin(\psi_1) \\ -\sin(\psi_1) & \cos(\psi_1) \end{bmatrix} \cdot \vec{v}(P_0) \\ &= \frac{1}{L_1} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \cdot \cos(\psi_1) & L_1 \cdot \sin(\psi_1) \\ -\sin(\psi_1) & \cos(\psi_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(\psi_0) \\ v \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\psi_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(\psi_0 - \psi_1) \\ \frac{v}{L_1} \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\psi_0 - \psi_1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

4.2.1 Generalització per a un sistema de n remolcs

Si es vol analitzar la cinemàtica per a un vehicle de n remolcs, cadascun d'ells amb les seves dimensions pròpies, cal generalitzar l'equació 37 per a qualsevol remolc.

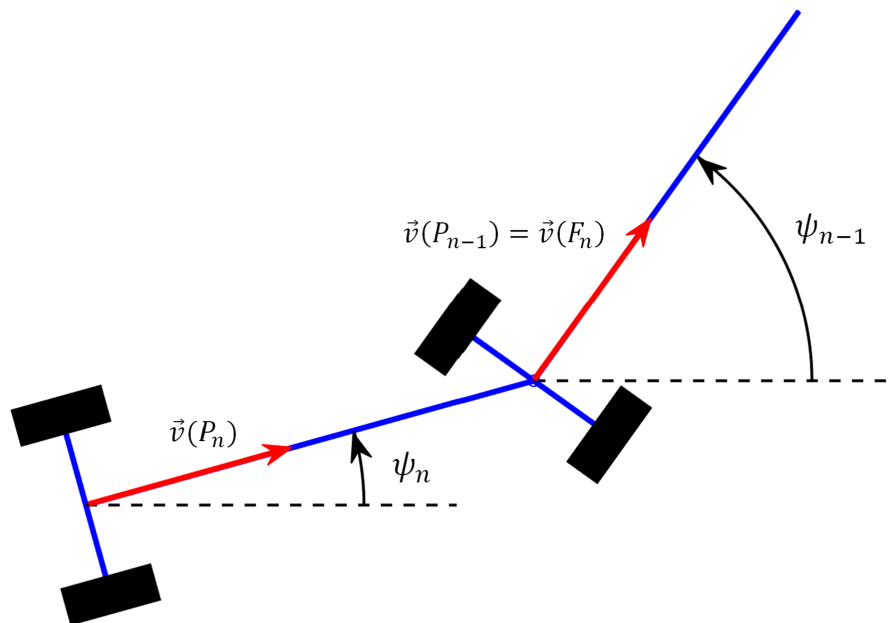


Figura 17: Remolc $n - 1$ i n

Observant l'expressió 37, es dedueix que aquesta equació relaciona la velocitat posterior i la velocitat angular del xassís a partir de la velocitat posterior del xassís predecessor. Per tant, si se substitueix el xassís 0 pel $n - 1$ i el xassís 1 pel n , l'equació pren la següent forma:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{P_n} \\ \dot{\psi}_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{L_n} \cdot \begin{pmatrix} L_n \cdot \cos(\psi_n) & L_n \cdot \sin(\psi_n) \\ -\sin(\psi_n) & \cos(\psi_n) \end{pmatrix} \cdot \vec{v}(P_{n-1}) \\ &= \frac{1}{L_n} \cdot \begin{pmatrix} L_n \cdot \cos(\psi_n) & L_n \cdot \sin(\psi_n) \\ -\sin(\psi_n) & \cos(\psi_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{P_{n-1}} \cdot \cos(\psi_{n-1}) \\ v_{P_{n-1}} \cdot \sin(\psi_{n-1}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_{P_{n-1}} \cdot \cos(\psi_{n-1} - \psi_n) \\ \frac{v_{P_{n-1}}}{L_n} \cdot \sin(\psi_{n-1} - \psi_n) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

Si es vol l'expressió de v_{P_n} en funció de la velocitat frontal del xassís motriu, $v_{F_0} = v$, en lloc de $v_{P_{n-1}}$, caldrà fer un seguit de productes fins a deixar l'expressió en funció de la velocitat desitjada:

$$\begin{aligned} v_{P_n} &= v_{P_{n-1}} \cdot \cos(\psi_{n-1} - \psi_n) \\ &= v_{P_{n-2}} \cdot \cos(\psi_{n-2} - \psi_{n-1}) \cdot \cos(\psi_{n-1} - \psi_n) \\ &= v_{P_0} \cdot \cos(\psi_0 - \psi_1) \cdot \dots \cdot \cos(\psi_{n-1} - \psi_n) \\ &= v \cdot \cos(\delta) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \cos(\psi_k - \psi_{k+1}) \end{aligned} \quad (39)$$

Per expressar el seu vector, v_{P_n} , cal tenir en compte altra vegada ψ_n . Descomponent el vector en la base xyz s'obté el vector velocitat:

$$\begin{aligned} \vec{v}(P_n) &= v_{P_n} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_n) \\ \sin(\psi_n) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= v \cdot \cos(\delta) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \cos(\psi_k - \psi_{k+1}) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_n) \\ \sin(\psi_n) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (40)$$

El mateix procediment que s'ha utilitzat per calcular v_{P_n} , es pot emprar per calcular $\dot{\psi}_n$ i que quedi expressada en funció del xassís motriu.

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_n &= \frac{v_{P_{n-1}}}{L_n} \cdot \sin(\psi_{n-1} - \psi_n) \\
 &= \frac{v_{P_{n-2}}}{L_n} \cdot \cos(\psi_{n-2} - \psi_{n-1}) \cdot \sin(\psi_{n-1} - \psi_n) \\
 &= \frac{v_{P_0}}{L_n} \cdot \cos(\psi_{n-2} - \psi_{n-1}) \cdot \dots \cdot \cos(\psi_0 - \psi_1) \sin(\psi_{n-1} - \psi_n) \\
 &= \frac{1}{L_n} \cdot v \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\psi_{n-1} - \psi_n) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \cos(\psi_{k-1} - \psi_k)
 \end{aligned} \tag{41}$$

4.3 Equacions dels remolcs amb unió amb desplaçament lateral

Tal com s'ha explicat a l'apartat 3.1, els remolcs posteriors tendiran a descriure una trajectòria més curta que el xassís predecessor. Per mitigar aquest desplaçament, una opció és que la part frontal del xassís $i + 1$ tingui, a part de la rotació, un desplaçament lateral respecte del xassís i . Si es controla aquest desplaçament per mitjà d'actuadors, es poden aconseguir trajectòries amb un off-tracking gairebé nul [9].

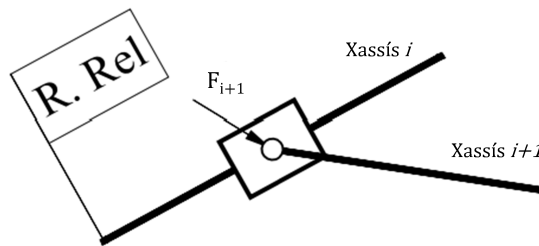


Figura 18: Mecanisme guia-botó [10]

El mecanisme que garanteix aquestes condicions de desplaçament i rotació es coneix com a guia-botó o guia corredera articulada (Figura 18), sent el desplaçament de la corredera al llarg del xassís i la variable a controlar, definida amb el paràmetre s .

Per contrarestar la tendència cap a l'interior de la corba, el punt frontal del xassís es desplaçarà una distància s cap a l'exterior de corba, podent quedar completament anul·lat el desviament de la part posterior respecte del xassís predecessor.

A continuació es mostren tres trajectòries amb un valor de s diferent per a cada una amb la finalitat de mostrar l'efecte d'aquest desplaçament controlat:

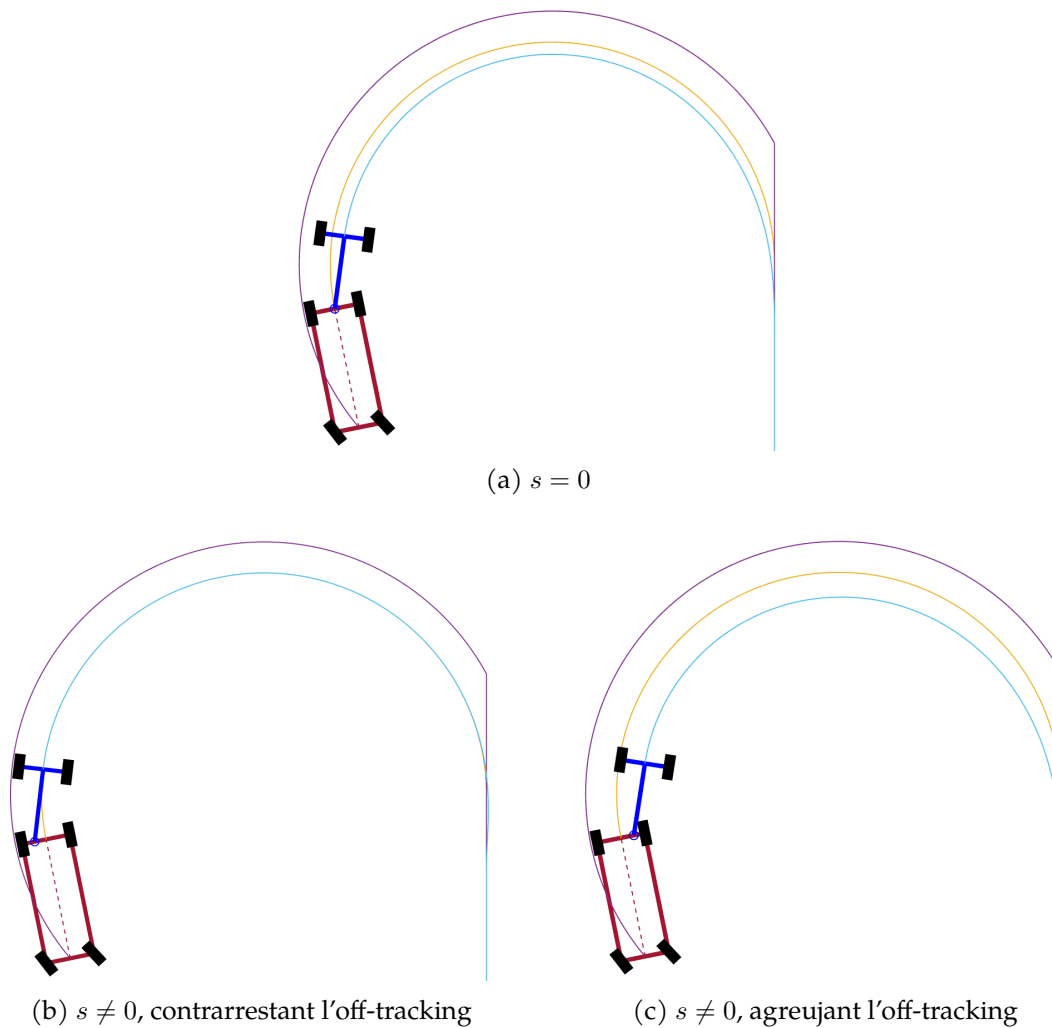


Figura 19: Comparativa de trajectòries per diferents valors de s

Tal com s'ha comentat, amb un desplaçament adequat del remolc respecte al xassís predecessor, l'off-tracking entre les trajectòries dels punts posteriors dels xassissos pot arribar a ser nul (Figura 19b), fet que implica una major facilitat a l'hora d'afrontar qualsevol classe de corba. Per contra, amb un mal accionament del controlador, l'off tracking es pot agreujar, donant a lloc a trajectòries més tancades i amb major risc de sortir de la via o de col·lisions (Figura 19c).

L'estudi cinemàtic d'aquest tipus de vehicle és més complex d'estudiar, ja que el punt mig posterior del xassís i , P_i , no és solidari amb el punt mig frontal del xassís $i + 1$, F_{i+1} , i per tant les seves velocitats seran diferents.

A la figura 20 s'ha representat el xassís motriu i un remolc amb tots els paràmetres i vectors velocitat que es tindran en compte durant l'anàlisi d'aquest conjunt.

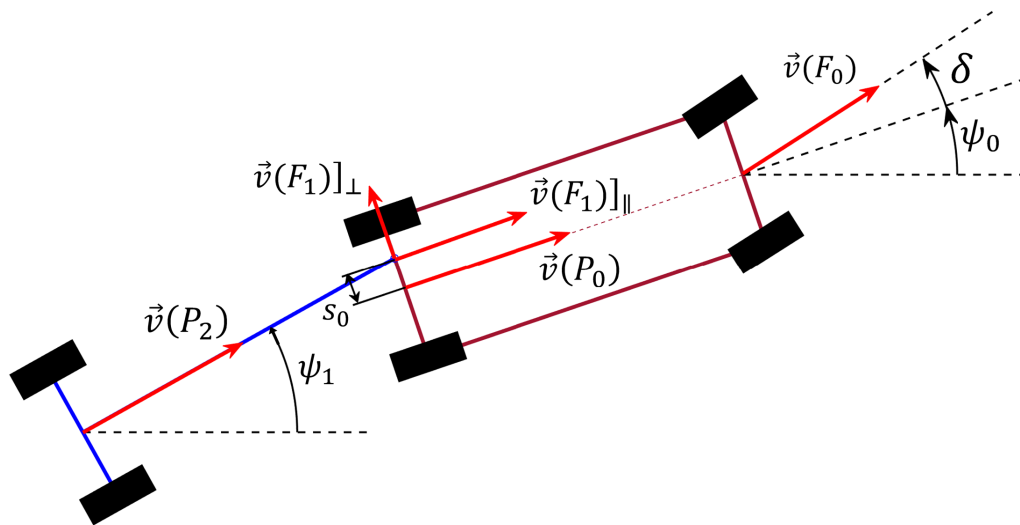


Figura 20: Vehicle motriu i remolc 1 amb l'articulació desplaçada

Si s'analitza amb atenció el punt F_1 , s'observa que la seva velocitat es pot descompondre en dues components, la primera orientada en l'eix longitudinal del vehicle i la segona en el seu eix perpendicular.

La primera component està directament relacionada amb el moviment que presenta el xassís predecessor. La segona component, en canvi, queda definida per la velocitat de l'actuador que tindrà el mecanisme guia-botó. De forma equivalent, es pot calcular el vector $\vec{v}(F_1)$ com la velocitat que té el xassís motriu al punt F_1 , considerat com a referència relativa, i la velocitat de l'actuador, interpretada com a velocitat de lliscament. L'equació que determina el vector resultant és:

$$\vec{v}_{Global}(Q) = \vec{v}_{Relativa}(Q) + \vec{v}_{arrossegament}(Q) \quad (42)$$

Adaptant l'equació pel cas concret del vehicle:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Terra}(F_1) &= \vec{v}_{Xassis0}(F_1) + \vec{v}_{actuador}(F_1) \\ &= \vec{v}(F_1) \Big|_{\parallel \vec{v}(P_0)} + \vec{v}(F_1) \Big|_{\perp \vec{v}(P_0)} \end{aligned} \quad (43)$$

El primer component, com ja s'ha comentat, és paral·lel al vector $\vec{v}(P_0)$ i el seu vector és la suma del mateix vector, $\vec{v}(P_0)$, i del vector generat a partir de la velocitat angular del vehicle i el desplaçament s_0 .

Per tant, el vector es pot calcular per mitjà de la següent equació:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(F_1) \Big|_{\parallel \vec{v}(P_0)} &= \vec{v}(P_0) + \vec{\Omega}_{Terra}^{Vehicle} \times \overrightarrow{P_0 F_1} \\
&= v \cdot \cos(\delta) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_0) \\ \sin(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -s_0 \cdot \sin(\psi_0) \\ s_0 \cdot \cos(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (v \cdot \cos(\delta) - \dot{\psi}_0 \cdot s_0) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_0) \\ \sin(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (v_{P_0} - \dot{\psi}_0 \cdot s_0) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_0) \\ \sin(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{44}$$

El segon component, el qual és perpendicular al vector $\vec{v}(P_0)$, surt de la velocitat de l'accionament de la unió. El seu vector s'indica a continuació:

$$\vec{v}(F_1) \Big|_{\perp \vec{v}(P_0)} = \dot{s}_0 \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\psi_0) \\ \cos(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

Així doncs, el vector resultant és:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(F_1) &= \vec{v}(F_1) \Big|_{\parallel \vec{v}(P_0)} + \vec{v}(F_1) \Big|_{\perp \vec{v}(P_0)} \\
&= (v_{P_0} - \dot{\psi}_0 \cdot s_0) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_0) \\ \sin(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{s}_0 \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\psi_0) \\ \cos(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{46}$$

Un cop es té definit $\vec{v}(F_1)$, es pot repetir el procés seguit al capítol 4.2 i calcular v_{P_1} i $\dot{\psi}_1$ per mitjà de l'equació següent:

$$\vec{v}(P_1) = \vec{v}(F_1) + \vec{\Omega}_{Terra}^{Remolc1} \times \overrightarrow{F_1 P_1} \tag{47}$$

Sabent que $\vec{v}(P_1)$ serà paral·lel a l'eix longitudinal del xassís 1, es pot expressar el vector en funció del mòdul, que és v_{P_1} .

$$\vec{v}(P_1) = v_{P_1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_1) \\ \sin(\psi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

Reescrivint l'equació 47 a partir de l'expressió 48:

$$v_{P_1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_1) \\ \sin(\psi_1) \\ 0 \end{pmatrix} = (v_{P_0} - \dot{\psi}_0 \cdot s_0) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_0) \\ \sin(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{s}_0 \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\psi_0) \\ \cos(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -L_1 \cdot \cos(\psi_1) \\ -L_1 \cdot \sin(\psi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

Es reescriu l'equació en format matricial amb la finalitat d'aïllar v_{P_1} i $\dot{\psi}_1$, que són les dues incògnites que estaran ubicades al vector columna. Així mateix, s'elimina la tercera component dels vectors en ser nul·la a tots ells:

$$v_{P_1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_1) \\ \sin(\psi_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\psi}_1 \cdot \begin{pmatrix} -L_1 \cdot \sin(\psi_1) \\ L_1 \cdot \cos(\psi_1) \\ 0 \end{pmatrix} = (v_{P_0} - \dot{\psi}_0 \cdot s_0) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_0) \\ \sin(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{s}_0 \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\psi_0) \\ \cos(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\psi_1) & -L_1 \cdot \sin(\psi_1) \\ \sin(\psi_1) & L_1 \cdot \cos(\psi_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{P_1} \\ \dot{\psi}_1 \end{pmatrix} = (v_{P_0} - \dot{\psi}_0 \cdot s_0) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_0) \\ \sin(\psi_0) \end{pmatrix} + \dot{s}_0 \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\psi_0) \\ \cos(\psi_0) \end{pmatrix} \quad (51)$$

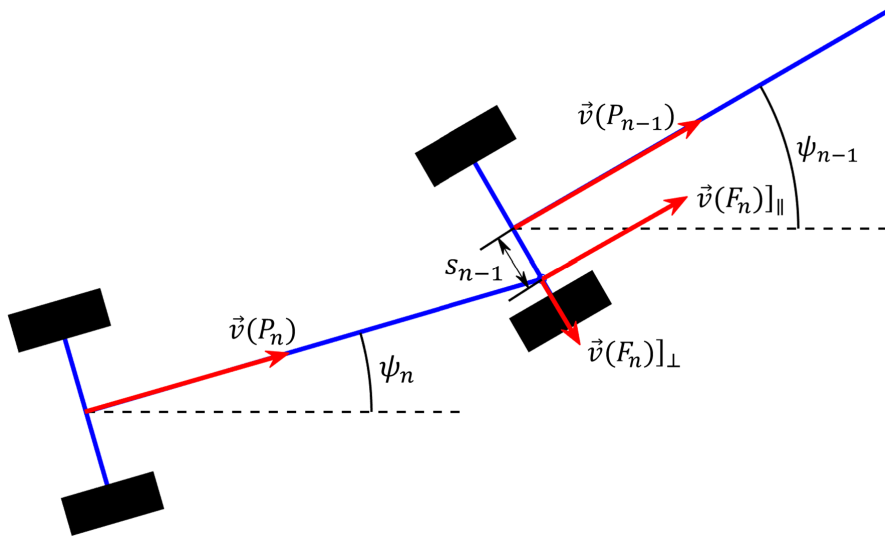
Calculant la matriu inversa i multiplicant pels vectors columna associats a la velocitat longitudinal i transversal, es troben les expressions per a v_{P_1} i $\dot{\psi}_1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{P_1} \\ \dot{\psi}_1 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\psi_1) & -L_1 \cdot \sin(\psi_1) \\ \sin(\psi_1) & L_1 \cdot \cos(\psi_1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left[(v_{P_0} - \dot{\psi}_0 \cdot s_0) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_0) \\ \sin(\psi_0) \end{pmatrix} + \dot{s}_0 \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\psi_0) \\ \cos(\psi_0) \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} (v_{P_0} - \dot{\psi}_0 \cdot s_0) \cdot \cos(\psi_0 - \psi_1) - \dot{s}_0 \cdot \sin(\psi_0 - \psi_1) \\ \frac{1}{L_1} \cdot \left[(v_{P_0} - \dot{\psi}_0 \cdot s_0) \cdot \sin(\psi_0 - \psi_1) + \dot{s}_0 \cdot \cos(\psi_0 - \psi_1) \right] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (52)$$

4.3.1 Generalització per a un sistema de n remolcs amb desplaçament lateral

Tal com ja s'ha fet a l'apartat 4.2.2, cal generalitzar les equacions per a un sistema on hi hagi una quantitat n de remolcs per poder fer les simulacions pertinents.

Si es té en compte que l'equació cinemàtica 52 defineix la velocitat del xassís 1 únicament a partir de la cinemàtica del xassís predecessor, indicat amb el subíndex 0, i l'angle relatiu entre ells, es pot generalitzar l'equació fàcilment per a un sistema de n remolcs reemplaçant els subíndexs 0 i 1 pels subíndexs $n - 1$ i n respectivament:

Figura 21: Remolcs $n - 1$ i n amb l'articulació desplaçada

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{P_n} \\ \dot{\psi}_n \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\psi_n) & -L_n \cdot \sin(\psi_n) \\ \sin(\psi_n) & L_n \cdot \cos(\psi_n) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left[(v_{P_{n-1}} - \dot{\psi}_{n-1} \cdot s_0) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_{n-1}) \\ \sin(\psi_{n-1}) \end{pmatrix} + \dot{s}_{n-1} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\psi_{n-1}) \\ \cos(\psi_{n-1}) \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} (v_{P_{n-1}} - \dot{\psi}_{n-1} \cdot s_{n-1}) \cdot \cos(\psi_{n-1} - \psi_n) - \dot{s}_{n-1} \cdot \sin(\psi_{n-1} - \psi_n) \\ \frac{1}{L_n} \cdot \left[(v_{P_{n-1}} - \dot{\psi}_{n-1} \cdot s_{n-1}) \cdot \sin(\psi_{n-1} - \psi_n) + \dot{s}_{n-1} \cdot \cos(\psi_{n-1} - \psi_n) \right] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (53)$$

Si es compara l'equació 53 amb l'equació 37, s'observa que la diferència que presenten ambdues equacions és l'aparició dels paràmetres s i \dot{s} com a conseqüència del mecanisme guia-botó. Fent $s = 0$ i $\dot{s} = 0$, les dos relacions esdevenen la mateixa.

Un cop calculats els moduls de v_{P_n} i $\dot{\psi}_n$, es poden expressar els vectors velocitat dels punts F_n i P_n , tal com s'indica a les següents expressions:

$$\vec{v}(P_n) = (v_{P_{n-1}} - \dot{\psi}_{n-1} \cdot s_{n-1}) \cdot \cos(\psi_{n-1} - \psi_n) - \dot{s}_{n-1} \cdot \sin(\psi_{n-1} - \psi_n) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_n) \\ \sin(\psi_n) \end{pmatrix} \quad (54)$$

$$\vec{v}(F_n) = \vec{v}(P_n) + \dot{\psi}_n \cdot L_n \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\psi_n) \\ \cos(\psi_n) \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$\dot{\psi}_n = \frac{1}{L_n} \cdot \left[(v_{P_{n-1}} - \dot{\psi}_{n-1} \cdot s_{n-1}) \cdot \sin(\psi_{n-1} - \psi_n) + \dot{s}_{n-1} \cdot \cos(\psi_{n-1} - \psi_n) \right] \quad (56)$$

A diferència de les equacions obtingudes a l'apartat 4.2.1, en aquest apartat les relacions cinemàtiques no es poden escriure algebraicament de forma compacta per mitjà de productoris, així que els xassissos s'hauran d'estudiar de forma successiva, començant pel xassís 0 i acabant pel xassís n .

4.4 Paràmetres s_i

Els paràmetres s_i indiquen el desplaçament lateral que tindrà el punt F_{i+1} respecte del punt P_i al llarg del xassís i .

Com ja s'ha observat a la figura 19, el valor que prengui el valor s pot condicionar de forma notable la trajectòria dels xassissos i , com a conseqüència, l'off-tracking. En aquest estudi es tindran en compte únicament tres equacions per a determinar el valor s_i , cada una amb un mètode i una eficiència diferent de les altres.

4.4.1 Unió sense desplaçament

És equivalent a l'estudi fet a la secció 4.2. El centre de la part posterior del xassís i i el punt frontal del xassís $i + 1$ conformen un mateix punt al llarg de tot el recorregut, per tant:

$$\begin{cases} s_i = ct = 0 \\ \dot{s}_i = \frac{ds_i}{dt} = 0 \end{cases}$$

A partir de la consideració anterior, tenint en compte que els valors de s_i i \dot{s}_i són nuls, el sistema queda reduït significativament i regit per les equacions 40 i 41.

4.4.2 Unió amb controlador de desplaçament lineal

En aquest cas, el punt P_i i el punt F_{i+1} es troben separats en una distància s_i en direcció a l'eix perpendicular de $\overrightarrow{P_i F_i}$. L'equació que defineix el valor d'aquest desplaçament ve donada per la següent relació lineal:

$$\begin{cases} s_i = K_i \cdot \psi_i \\ \dot{s}_i = \frac{ds_i}{dt} = K_i \cdot \dot{\psi}_i \end{cases}$$

on K_i és un valor constant i positiu per a cada remolc.

S'observa que, per mitjà d'aquesta relació, un augment del valor de ψ_i implicarà també un augment del valor de s_i . Aquest raonament surt de la relació inversa que existeix entre el radi de curvatura, \mathfrak{R} , i la velocitat angular, $\dot{\psi}$. Tenint en compte la definició matemàtica de l'off tracking màxim, equació 8, a major velocitat angular, $\dot{\psi}$, menor radi de curvatura, \mathfrak{R} , i major OT_{max} . Per tant, augmentant s_i a mesura que augmenta ψ_i donarà com a conseqüència una reducció de l'off tracking.

Reescrivint les equacions 55, 54 i 56 a partir de les relacions de s_i i \dot{s}_i , s'obtenen les noves relacions cinemàtiques:

$$\vec{v}(F_n) = \vec{v}(P_{n-1}) + K_{n-1} \cdot \ddot{\psi}_{n-1} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\psi_{n-1}) \\ \cos(\psi_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (57)$$

$$\vec{v}(P_n) = \left(v_{P_{n-1}} - \dot{\psi}_{n-1} \cdot K_{n-1} \cdot \dot{\psi}_{n-1} \right) \cdot \cos(\psi_{n-1} - \psi_n) - K_{n-1} \cdot \ddot{\psi}_{n-1} \cdot \sin(\psi_{n-1} - \psi_n) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_n) \\ \sin(\psi_n) \end{pmatrix} \quad (58)$$

$$\dot{\psi}_n = \frac{1}{L_n} \cdot \left[\left(v_{P_{n-1}} - \dot{\psi}_{n-1} \cdot K_{n-1} \cdot \dot{\psi}_{n-1} \right) \cdot \sin(\psi_{n-1} - \psi_n) + K_i \cdot \ddot{\psi}_i \cdot \cos(\psi_{n-1} - \psi_n) \right] \quad (59)$$

4.4.3 Articulació amb controlador de desplaçament no lineal

Com en l'apartat anterior, els punts P_{i-1} i F_i es troben separats en una distància de s_i . En aquest cas, el valor s_i busca que el CIR de cadascun dels xassissos correspongui a un mateix punt per a tots i que els seus radis de curvatura, \mathfrak{R} , siguin iguals.

L'objectiu d'aquesta configuració és una mateixa trajectòria per a tots els punts posteriors, tal com s'indica a la figura 22.

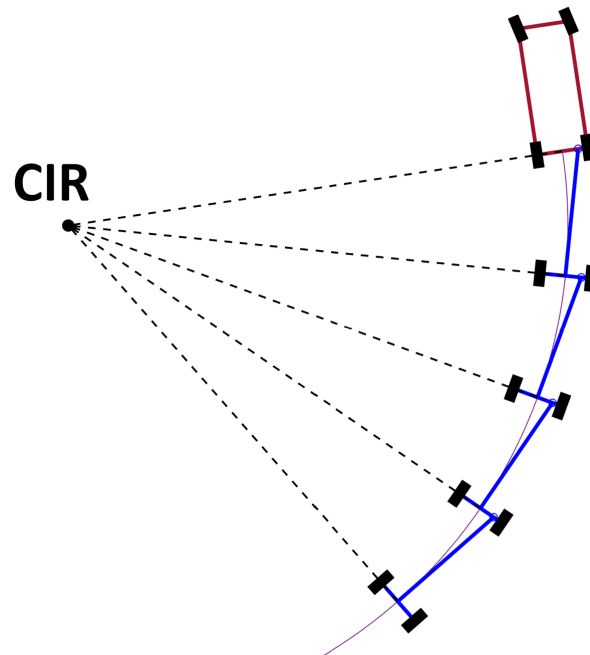


Figura 22: Xassissos amb articulació amb controlador de desplaçament no lineal seguint una trajectòria comuna

Tal com s'ha mencionat, perquè aquesta trajectòria sigui possible, la distància entre el CIR i P_i ha de ser igual per a tots els xassissos. A més a més, el CIR de cadascun dels sòlids ha de convergir a un mateix punt del pla.

Per facilitar el càlcul de s_i i fer-lo més il·lustratiu, s'empraran els paràmetres \mathfrak{R} i h , on \mathfrak{R} és el radi de gir i h és la distància entre el CIR i el punt frontal del remolc, F_{i+1} . Ambdós valors, així com la llargària del xassís i els seus angles de gir, són els paràmetres necessaris per al càlcul i són indicats de forma il·lustrativa a la figura 23.

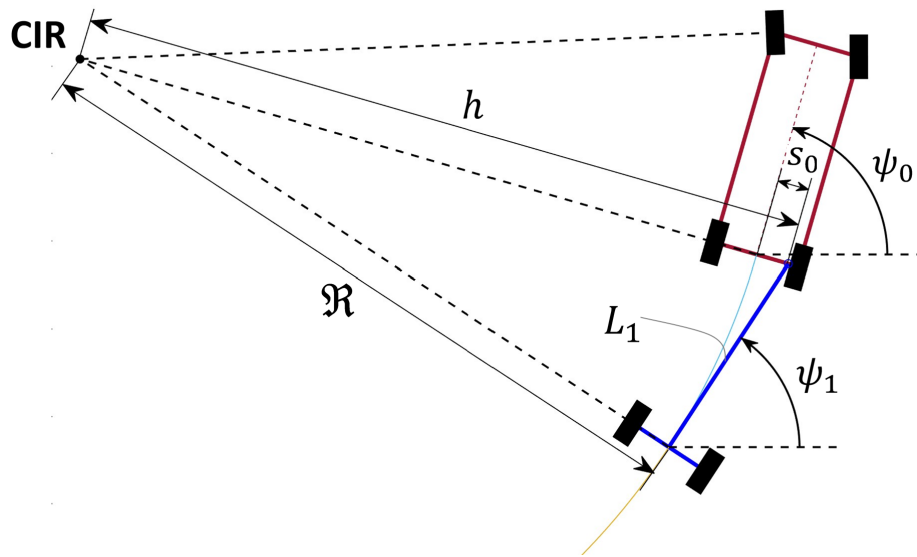


Figura 23: Vehicle tractor i remolc amb el mateix CIR

A continuació s'indiquen les relacions geomètriques que s'han tingut en compte i que estan representades a la figura anterior:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \psi_0 - \psi_1 \quad (60)$$

$$\mathfrak{R} = L_1 \cdot \tan(\varphi) \quad (61)$$

$$h = \mathfrak{R}^2 + L_1^2 \quad (62)$$

$$s_0 = h - \mathfrak{R} \quad (63)$$

Substituint la variable \mathfrak{R} de l'equació 62 per l'expressió 61, s'obté la relació següent:

$$h = L_1 \cdot \sqrt{1 + \tan(\varphi)} \quad (64)$$

A partir de la relació 63, reemplaçant el valor de h per l'expressió 64 i el paràmetre \mathfrak{R} altra vegada per l'equació 61, s'arriba a l'equació 65:

$$\begin{aligned} s_0 &= L_1 \cdot \left(\sqrt{1 + \tan(\varphi)} - \tan(\varphi) \right) \\ &= L_1 \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \right)^2} - \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \right) \\ &= L_1 \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\cos(\varphi)} \right)^2} - \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \right) \\ &= L_1 \cdot \left(\frac{1 - \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \right) \end{aligned} \quad (65)$$

Per obtenir l'equació en funció dels angles dels xassissos, ψ_0 i ψ_1 , es substitueix la variable φ de l'equació 65 per la relació 60, obtenint l'expressió definitiva:

$$\begin{aligned} s_0 &= L_1 \cdot \left(\frac{1 - \sin(\frac{\pi}{2} + \psi_0 - \psi_1)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \psi_0 - \psi_1)} \right) \\ &= L_1 \cdot \frac{1 - \cos(\psi_0 - \psi_1)}{\sin(\psi_0 - \psi_1)} \end{aligned} \quad (66)$$

Generalitzant l'equació anterior pel desplaçament entre P_i i F_{i+1} i derivant-la respecte del temps, els valors de s_i i \dot{s}_i prenen la següent expressió:

$$\begin{cases} s_i = L_{i+1} \cdot \frac{1 - \cos(\psi_i - \psi_{i+1})}{\sin(\psi_i - \psi_{i+1})} \\ \dot{s}_i = \frac{ds_i}{dt} = L_{i+1} \cdot \frac{(\dot{\psi}_i - \dot{\psi}_{i+1}) \cdot (1 - \cos(\psi_i - \psi_{i+1}))}{\sin(\psi_i - \psi_{i+1})} = L_{i+1} \cdot (\dot{\psi}_i - \dot{\psi}_{i+1}) \cdot s_i \end{cases} \quad (67)$$

Amb els valors de s_i i \dot{s}_i definits, es poden reescriure els valors de $\vec{v}(F_i)$, $\vec{v}(P_i)$ i $\dot{\psi}_i$ pel cas específic on la unió està equipada amb un desplaçament no lineal. Modificant les equacions 55, 54 i 56, s'obtenen les següents relacions cinemàtiques:

$$\vec{v}(F_n) = \vec{v}(P_{n-1}) + L_{n-1} \cdot (\dot{\psi}_{n-1} - \dot{\psi}_n) \cdot \frac{1 - \cos(\psi_{n-1} - \psi_n)}{\sin(\psi_{n-1} - \psi_n)} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\psi_{n-1}) \\ \cos(\psi_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(P_n) &= \left(v_{P_{n-1}} - \dot{\psi}_{n-1} \cdot L_{n-1} \cdot \frac{1 - \cos(\psi_{n-1} - \psi_n)}{\sin(\psi_{n-1} - \psi_n)} \right) \cdot \cos(\psi_{n-1} - \psi_n) \\ &\quad + L_{n-1} \cdot (\dot{\psi}_{n-1} - \dot{\psi}_n) \cdot \frac{1 - \cos(\psi_{n-1} - \psi_n)}{\sin(\psi_{n-1} - \psi_n)} \cdot \sin(\psi_{n-1} - \psi_n) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi_n) \\ \sin(\psi_n) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_n &= \frac{1}{L_n} \cdot \left[\left(v_{P_{n-1}} - \dot{\psi}_{n-1} \cdot L_{n-1} \cdot \frac{1 - \cos(\psi_{n-1} - \psi_n)}{\sin(\psi_{n-1} - \psi_n)} \right) \cdot \sin(\psi_{n-1} - \psi_n) \right. \\ &\quad \left. + L_{n-1} \cdot (\dot{\psi}_{n-1} - \dot{\psi}_n) \cdot \frac{1 - \cos(\psi_{n-1} - \psi_n)}{\sin(\psi_{n-1} - \psi_n)} \cdot \cos(\psi_{n-1} - \psi_n) \right] \quad (70) \end{aligned}$$

5 Solució numèrica

Tal com s'ha vist a l'apartat 4, la cinemàtica del vehicle queda regida per equacions en derivades parcials, on $v(F_i)$, $v(P_i)$ i ψ_i són les derivades parcials i $x(F_i)$, $x(P_i)$ i ψ_i són les seves respectives solucions.

La solució analítica d'aquest conjunt d'equacions pot ser de gran dificultat depenen de les condicions inicials que s'apliquin, per tant, en aquest treball s'ha optat per buscar una solució numèrica.

A diferència de la solució analítica, la solució numèrica es basa en aproximacions calculades mitjançant mètodes numèrics i tècniques computacionals que requereixen l'ús d'algoritmes. Aquests mètodes impliquen discretitzar el domini, aproximar derivades i resoldre les equacions pas a pas. Per contra, les seves solucions són aproximacions i la seva precisió dependrà de la discretització que s'hagi realitzat.

Existeixen múltiples mètodes numèrics per resoldre numèricament equacions diferencials. En aquest cas s'ha optat per resoldre-les mitjançant el mètode d'Euler explícit.

5.1 Mètode d'Euler

El mètode d'Euler és un procediment numèric de primer ordre per resoldre equacions diferencials ordinàries amb un valor inicial donat. És el mètode explícit més bàsic per a la integració numèrica d'equacions diferencials i el més simple dels mètodes de Runge-Kutta [11].

Volent aproximar la solució del problema de valor inicial:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \tag{71}$$

Si es desenvolupa l'expansió de Taylor de la funció y al voltant de t_0 , la funció pren la següent forma:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + h \cdot f(t_0, y(t_0)) + O(h^2) \tag{72}$$

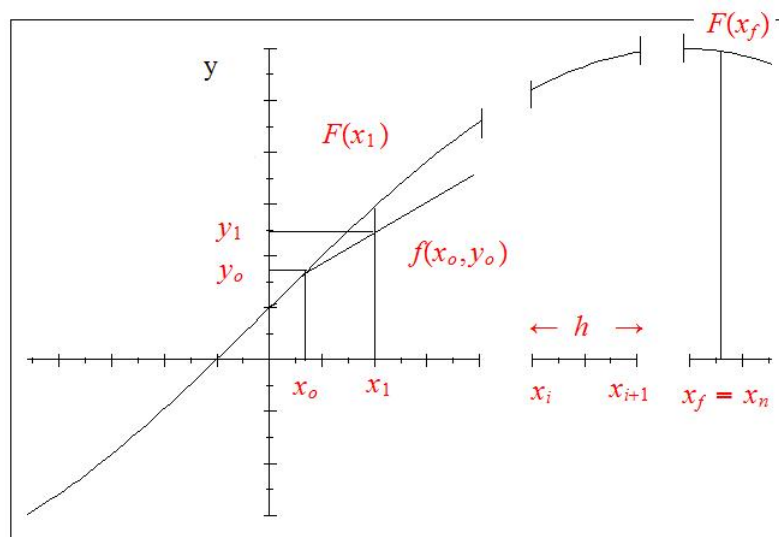


Figura 24: Mètode d'Euler en un domini discretitzat on x_i és t_i [12]

Discretitzant el domini de t en n elements de tamany h cadascún, complint la relació $n = \frac{t_f - t_0}{h}$, l'equació x es pot representar en funció dels nodes:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \cdot f(t_0, y_0) \\ y_2 &= y_1 + h \cdot f(t_1, y_1) \\ &\vdots \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(t_i, y_i) \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + h \cdot f(t_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

L'error que s'està introduint en cada node en utilitzar el mètode d'Euler ve donat per la diferència entre l'expansió completa de Taylor i la solució d'Euler:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot y''(t_0) + O(h^3) \quad (73)$$

Per h petita, l'error dominant és proporcional a h^2 . Per tant, per obtenir resultats precisos caldrà treballar amb valors d' h suficientment petits.

Amb la finalitat d'exposar la influència del valor de h sobre el resultat final, s'ha realitzat una simulació d'un vehicle descrivint una trajectòria sinusoidal amb diferents mides d'interval i se n'ha graficat el valor de ψ al llarg de t .

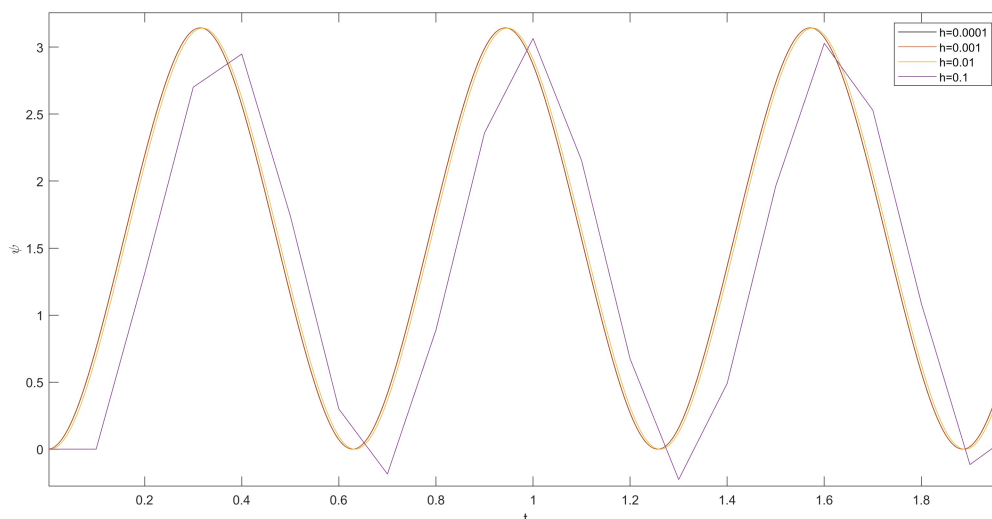
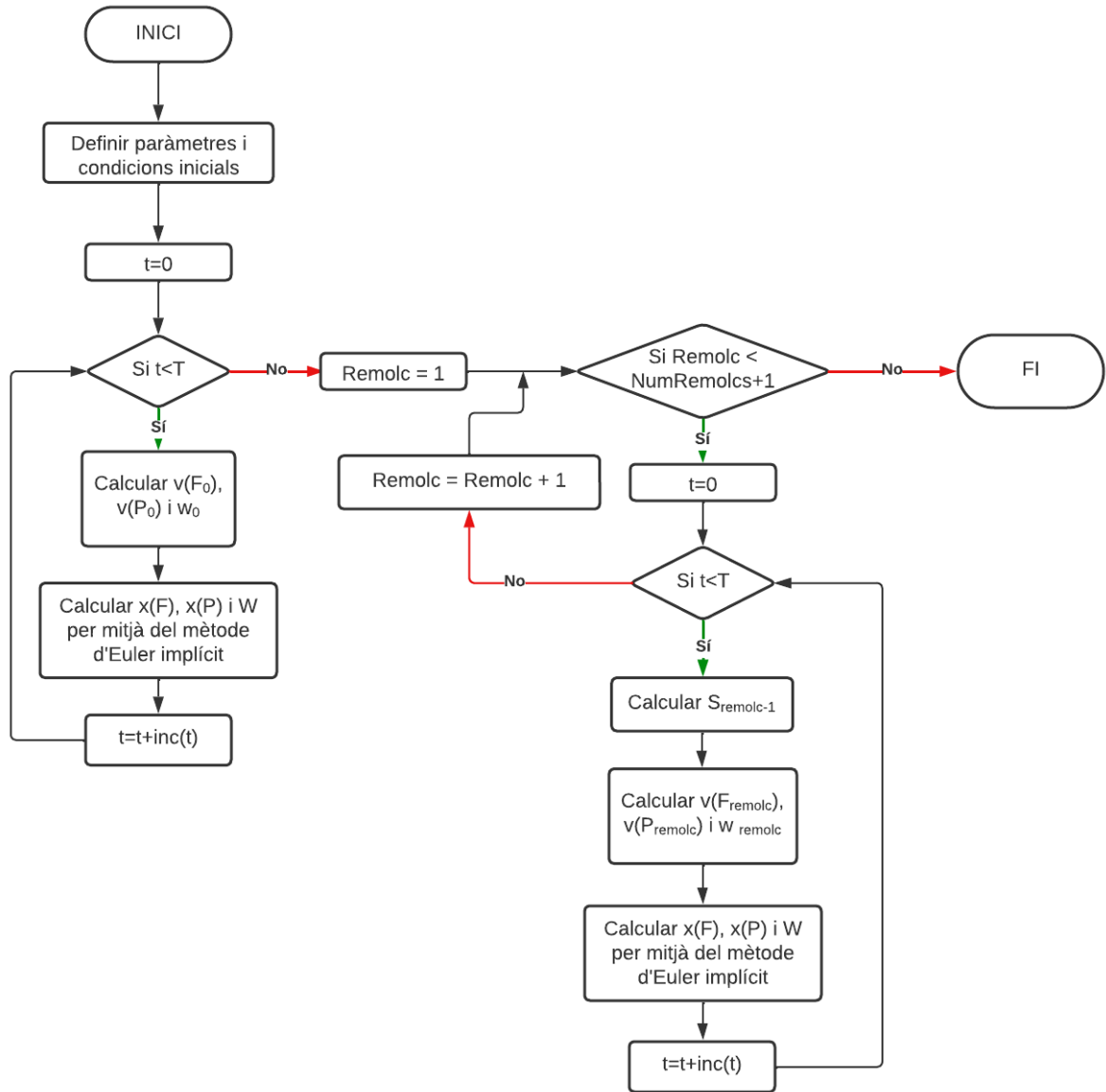


Figura 25: Valor de ψ en funció de t i h

Tal com s'observa a la figura 25, una disminució de la mida de l'interval té com a conseqüència una major precisió, a la vegada que un major temps de computació.

5.2 Algorisme

L'estructura que segueix el codi de Matlab és la següent:



6 Simulacions

La finalitat d'aquest apartat es basa a aplicar les equacions i els codis generats en Matlab per tal de visualitzar i quantificar el fenomen de l'off tracking en diferents configuracions que poden resultar d'interès, ja sigui per la seva quotidianitat en la conducció de vehicles articulats com per ser situacions excepcionals que poden resultar també de valor per entendre el comportament d'aquest fenomen.

Totes les simulacions han estat representades per una seqüència de 9 imatges ordenades cronològicament i obtingudes en temps equidistants entre ells. A més a més, cada simulació està acompanyada de gràfiques que quantifiquen l'off tracking o el desplaçament del remolc en els casos en què aquests xassissos estan equipats del dispositiu guia-botó.

6.1 Simulació del xassís motriu

Les primeres simulacions estaran centrades en un únic xassís, el motriu, del qual se n'estudiarà la seva trajectòria en realitzar un canvi de direcció, un canvi de sentit i una volta completa de 360°.

Les dimensions i configuracions del vehicle en les tres simulacions venen indicades a la taula següent:

	Longitud (m)	Amplada (m)	δ	$\psi_{inicial}$	Off tracking màx. (m)
Xassis motriu	5	2	-20.05	0	0,884

Taula 1: Configuració i valors referents al xassís motriu

El valor de l'off tracking màxim indicat a la taula ve determinat per l'equació 8. Per tant, el valor s'obté de:

$$\begin{aligned}
 OT_{max} &= L_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \delta}} - \sqrt{\frac{L_0^2}{\tan^2 \delta} - \sum_{i=1}^n L_i^2} \\
 &= 5 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(-20.05)}} - \sqrt{\frac{5^2}{\tan^2(-20.05)}} \\
 &= 0.88404m
 \end{aligned} \tag{74}$$

A causa de les seves dimensions, la simulació pot ser equivalent a la de diversos vehicles com un cotxe, un tractor o un camió tractor de dos eixos.

6.1.1 Canvi de direcció del xassís motriu

En aquesta primera simulació, el xassís es troba inicialment horitzontal i amb les rodes alineades amb el vehicle ($\delta=0^\circ$). En l' instant en què comença la simulació, les rodes giren $-20,05^\circ$ i es comença a descriure una trajectòria circumferencial, que es dona per finalitzada quan el xassís ha realitzat el canvi de direcció, és a dir, quan $\psi_0=-90^\circ$. En aquest instant, el xassís es desplaça un instant el línia recta fins a acabar la simulació.

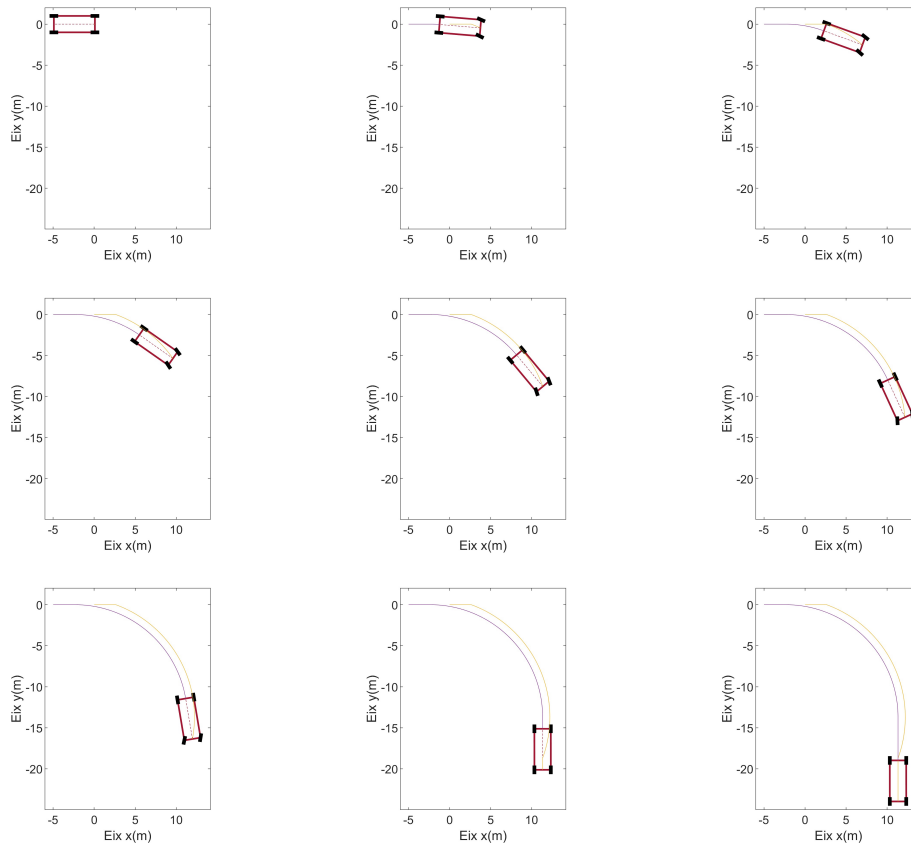


Figura 26: Simulació del xassís motriu en un canvi de direcció

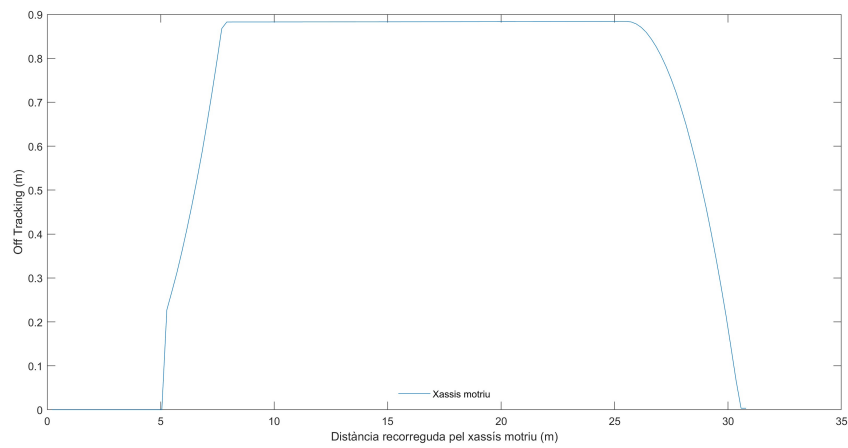


Figura 27: Off tracking del xassís al llarg del canvi de direcció

Pel que fa a l'off tracking calculat en cada instant de la trajectòria, s'observa com la tendència a assolir el valor màxim de l'off tracking és ràpida. El mateix passa quan el vehicle torna a descriure una trajectòria recta i l'off tracking retorna a 0.

6.1.2 Canvi de sentit del xassís motriu

La segona simulació es tracta d'un canvi de sentit, des de $\psi_0=0$ fins a assolir el valor de $\psi_0=-180^\circ$. Igual que per al cas anterior, les rodes giren un angle de $-20,05^\circ$, romanent així fins a haver realitzat el canvi de sentit al complet. Un cop assolida l'orientació desitjada, s'acaben de recórrer uns últims metres en línia recta.

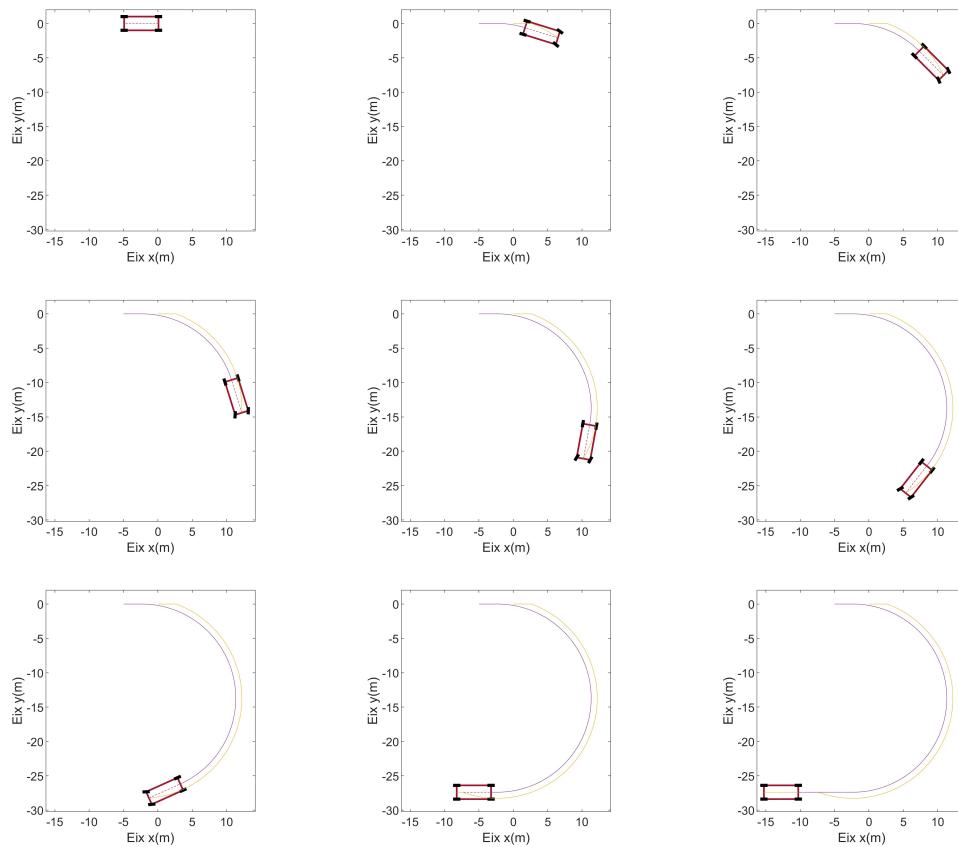


Figura 28: Simulació del xassís motriu en un canvi de sentit

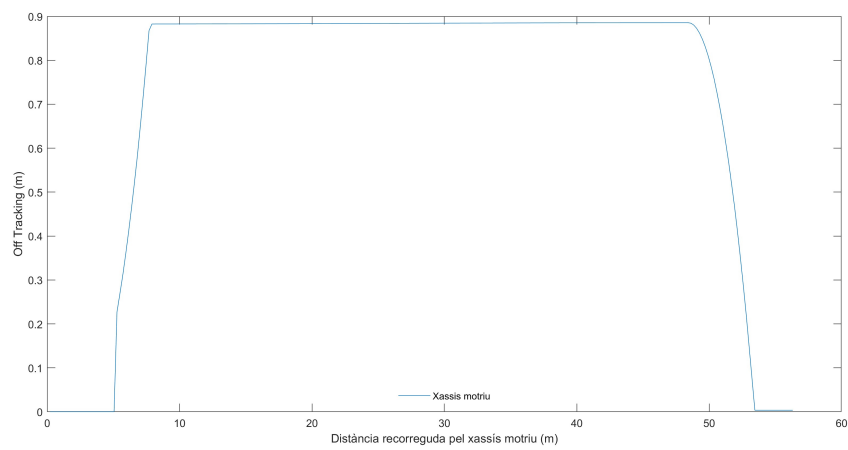


Figura 29: Off tracking del xassís al llarg del canvi de sentit

Amb referència a l'off tracking, els estats de transició fins a assolir el valor màxim i el valor de 0 són idèntics als assolits a la primera simulació.

6.1.3 Gir de 360° del xassís motriu

En aquesta última simulació el vehicle dona una volta sencera fins a recuperar la posició inicial i poder continuar la seva trajectòria des del mateix punt on ha començat el gir. L'angle de gir de les rodes torna a ser el mateix que per a les altres dues simulacions.

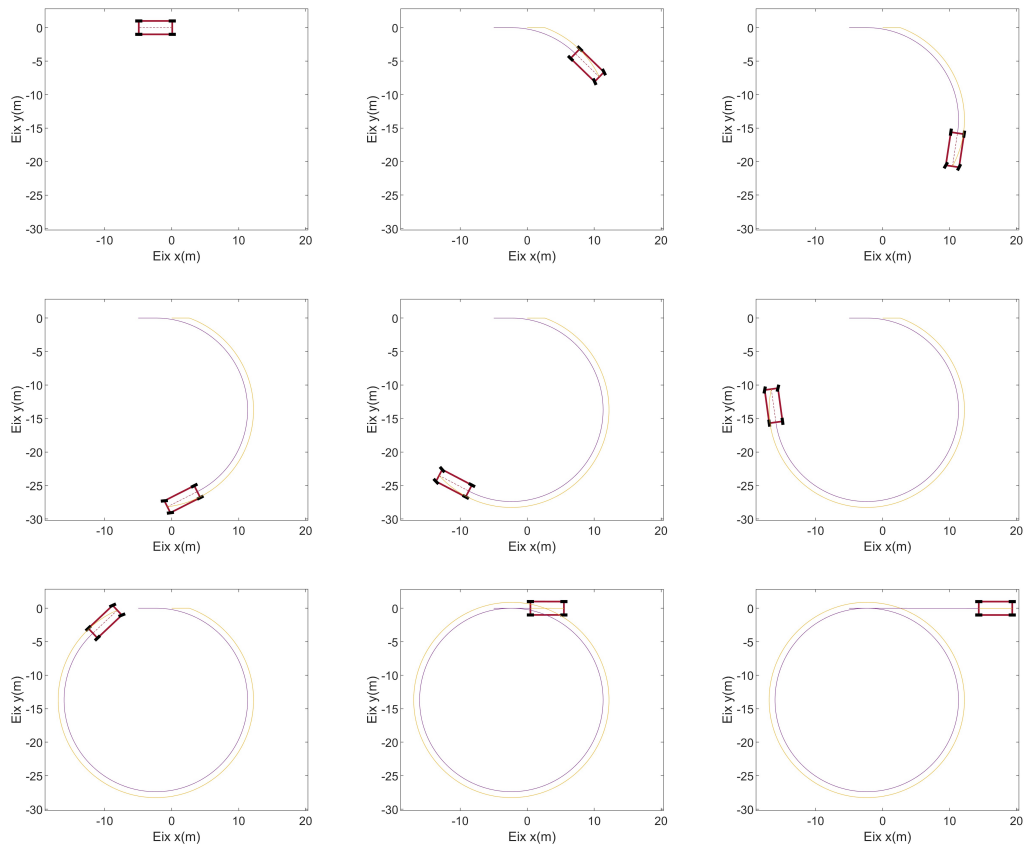


Figura 30: Simulació del xassís motriu en un gir de 360°

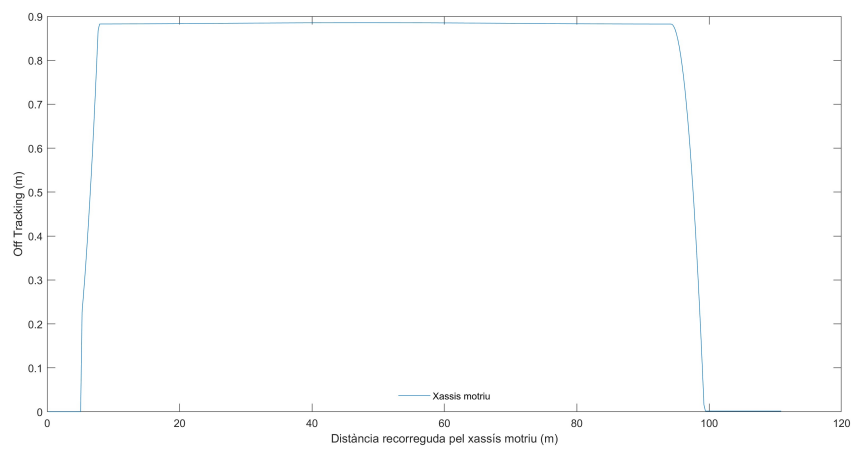


Figura 31: Off tracking del xassís al llarg del gir de 360°

L'off tracking ocasionat en aquesta simulació torna a ser idèntic al dels altres dos casos, sent l'única diferència l'interval de distància on l'off tracking és màxim.

6.2 Simulació del xassís motriu amb remolc

En aquest apartat, es repetiran les mateixes trajectòries que al punt 6.1 però amb la presència d'un remolc.

Les configuracions del conjunt del vehicle per a les següents simulacions queden exposades a continuació:

	Longitud (m)	Amplada (m)	δ	$\psi_{inicial}$	Off tracking màx. (m)
Xassís motriu	5	2	-20,05	0	0,884
Remolc 1	4	2	-	0	1,481

Taula 2: Configuració i valors referents al xassís motriu i remolc

Al no haver variat la llargària ni l'angle de gir del xassís motriu respecte de les simulacions anteriors, el valor de l'off tracking màxim del xassís motriu continua sent el mateix. Respecte a l'off tracking màxim del remolc, el valor s'obté de la següent expressió:

$$\begin{aligned}
 OT_{max} &= L_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \delta}} - \sqrt{\frac{L_0^2}{\tan^2 \delta} - \sum_{i=1}^n L_i^2} \\
 &= 5 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(-20.05)}} - \sqrt{\frac{5^2}{\tan^2(-20.05)} - 4^2} \\
 &= 1,48110m
 \end{aligned} \tag{75}$$

Si bé és cert que la distància entre la trajectòria del punt F_0 i el punt P_1 és 1,48110m, coneixent el valor màxim de l'off tracking per ambdós xassissos i tenint en compte que en assolir aquests valors tots dos xassissos tindran un centre instantani de gir comú, es pot calcular fàcilment l'off tracking entre els punts P_0 i P_1 amb la relació següent:

$$\begin{aligned}
 OT_{max, P_0 \rightarrow P_1} &= OT_{max, P_1} - OT_{max, P_0} \\
 &= 1,48110 - 0,88404 \\
 &= 0,59706m
 \end{aligned} \tag{76}$$

6.2.1 Canvi de direcció del xassís motriu i remolc

En aquest apartat, igual que a la secció 6.1.1, es busca que el xassís motriu faci un canvi de direcció i la seva orientació passi de $\psi_0=0^\circ$ a $\psi_0=-90^\circ$. En aquest cas, però, el primer xassís va unit a un xassís remolc que descriu una trajectòria diferent de la primera.

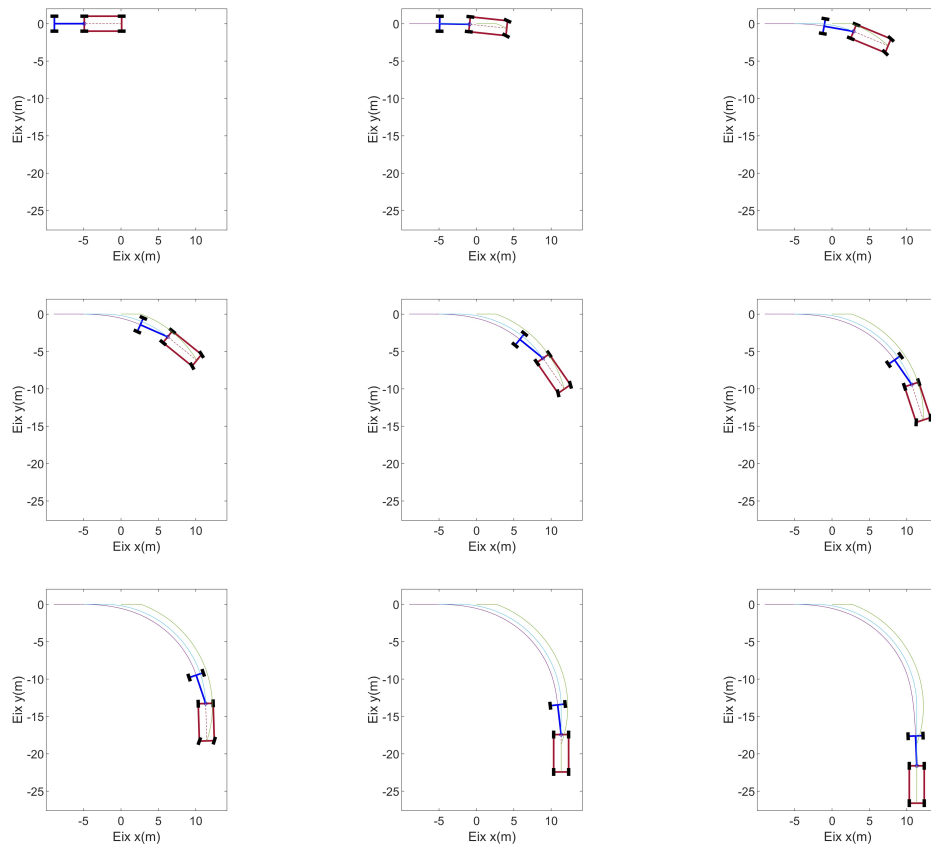


Figura 32: Simulació del xassís motriu+remolc en un canvi de direcció

En vehicles amb remolc, l'estudi de l'off tracking sol ser de més interès que en vehicles d'un sol xassís, ja que la seva magnitud tendeix a ser més elevada i l'assoliment d'aquest valor màxim és més lent.

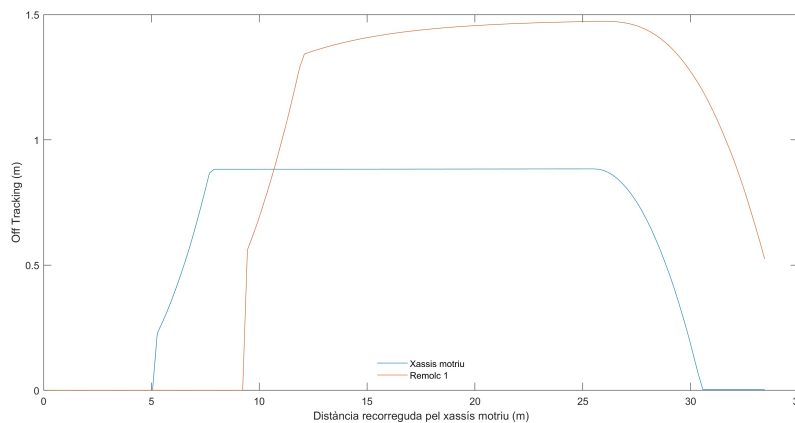


Figura 33: Off tracking dels xassissos al llarg del canvi de direcció

A partir de la figura 33, observant la corba corresponent al *Remolc 1*, s'observa com la convergència al valor límit és més lenta que per al *Xassís motriu*. A més a més, en finalitzar la maniobra de canvi de direcció, el remolc encara no ha assolit el valor màxim.

A més de l'estudi de l'off tracking, en simulacions de vehicles amb remolc pot resultar també d'interès l'estudi de l'angle relatiu entre ambdós xassissos. Aquest valor tendeix a un valor determinat, que queda en funció de la longitud dels xassissos i l'angle de gir de les rodes direccionals del xassís motriu.

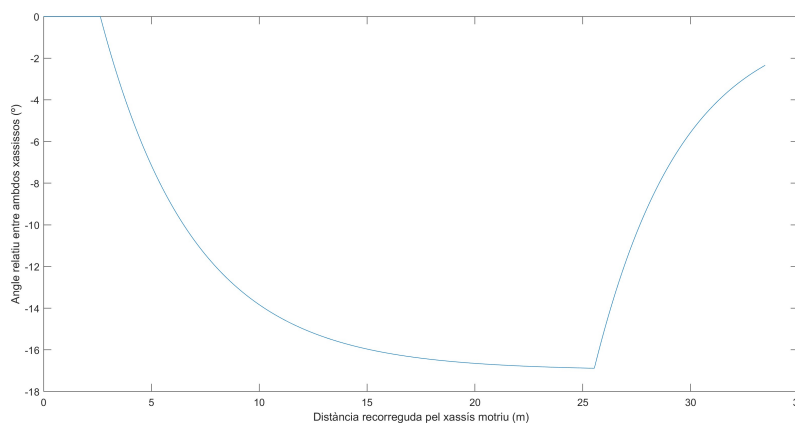


Figura 34: Angle relatiu entre ambdós xassissos al llarg del canvi de direcció

Tal com es pot observar a la gràfica 34, i paral·lelament a l'ocorregut amb la figura 33, un gir de 90° no és suficient per assolir el valor estable de l'angle relatiu. Això es pot explicar tenint en compte que tots dos efectes estan relacionats, i que, per tant, no s'assolirà la magnitud màxima de l'off tracking sense haver assolit el valor màxim de l'angle relatiu, i a la inversa.

Un cop les rodes direccionals tornen a quedar alineades amb el xassís, l'angle comença a tendir ràpidament a 0, recuperant així la configuració inicial.

6.2.2 Canvi de sentit del xassís motriu i remolc

La segona simulació busca realitzar un gir de 180° del xassís motriu i estudiar la trajectòria seguida pel remolc.

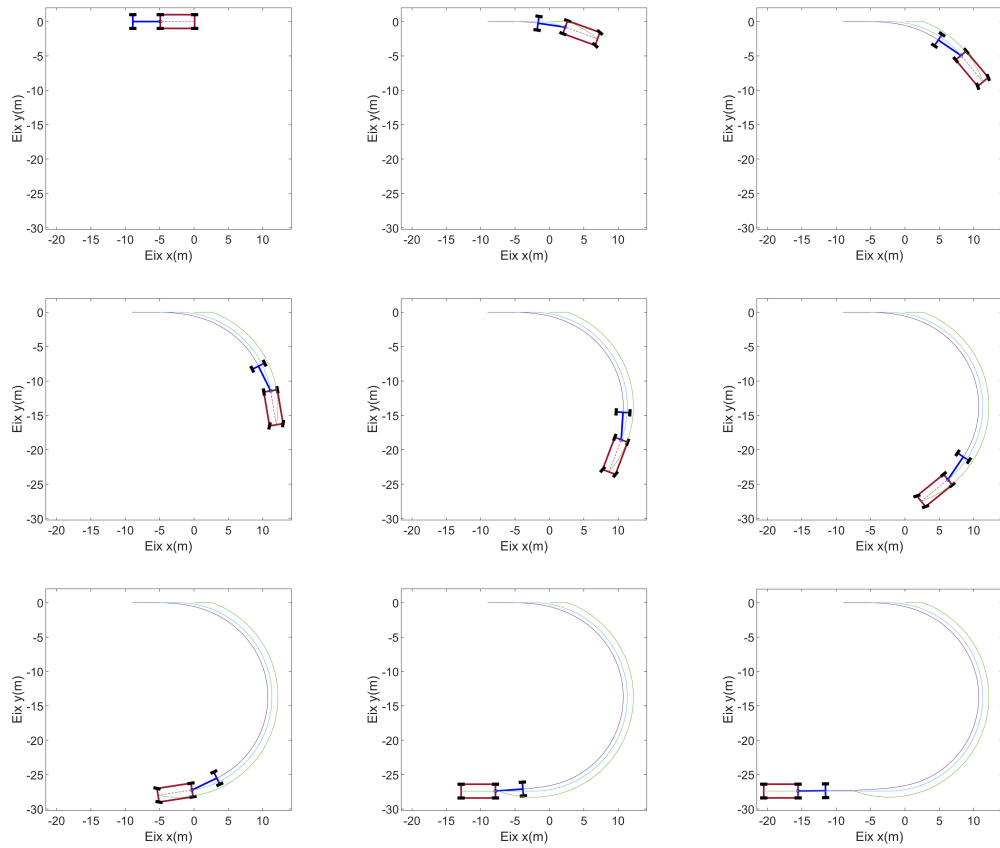


Figura 35: Simulació del xassís motriu+remolc en un canvi de sentit

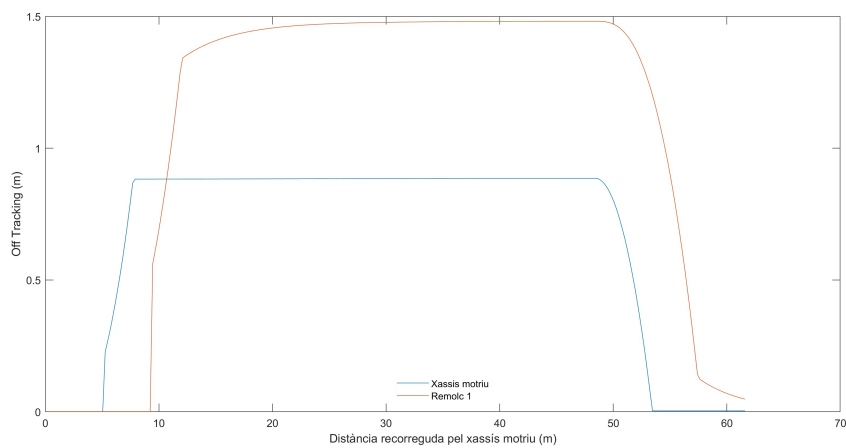


Figura 36: Off tracking dels xassissos al llarg del canvi de sentit

A diferència de la figura 33, en aquesta simulació es pot considerar que el remolc ha assolit l'off tracking màxim de 1,48110m i, per tant, ha arribat a una situació d'estabilitat abans de finalitzar la maniobra.

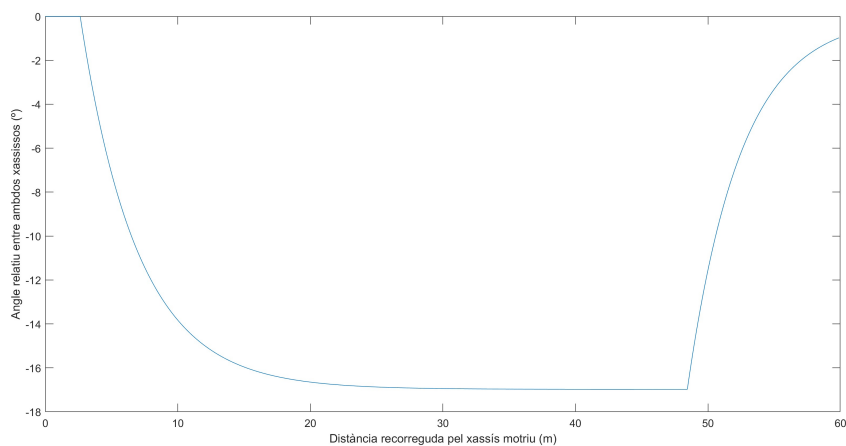


Figura 37: Angle relatiu entre ambdós xassissos al llarg del canvi de sentit

L'assoliment del valor màxim es veu reflectit també a l'eix relatiu entre ambdós xassissos, donant pràcticament per aconseguit el valor límit de $-16,98^\circ$.

6.2.3 Gir de 360º del xassís motriu i remolc

En la darrera simulació, el xassís motriu repeteix el recorregut de l'apartat 6.1.3 i es prent especial atenció a la trajectòria del xassís remolc.

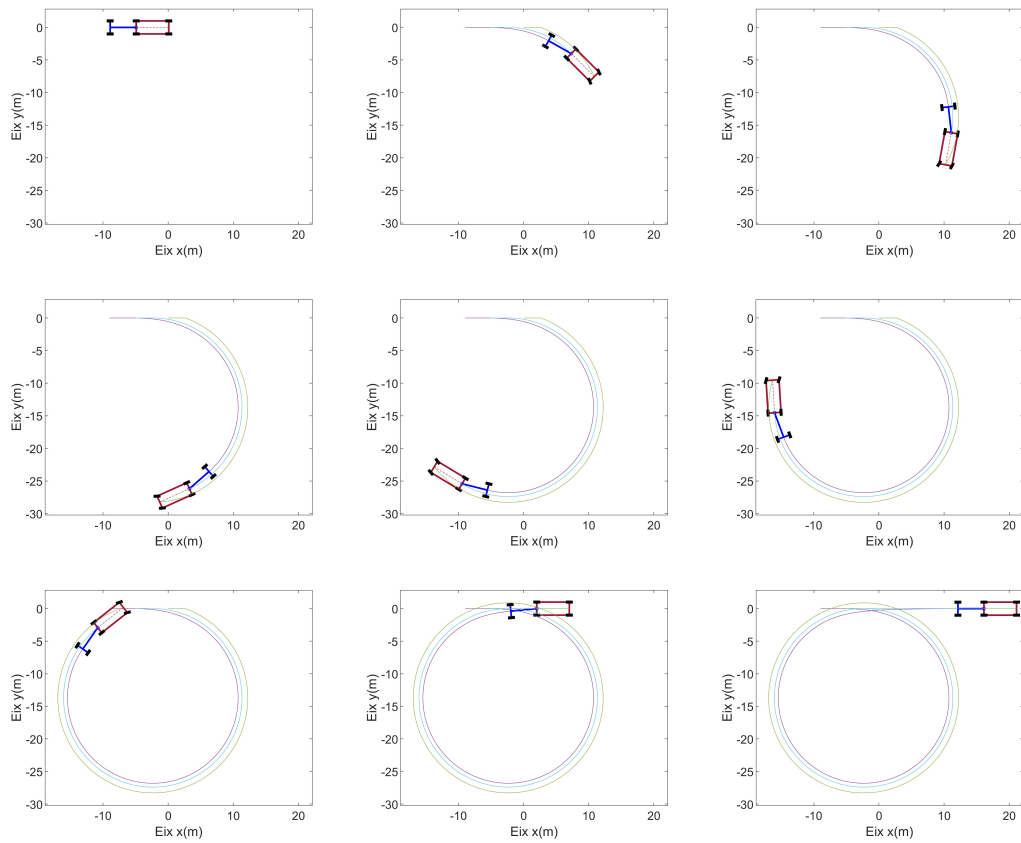


Figura 38: Simulació del xassís motriu+remolc en un gir de 360º

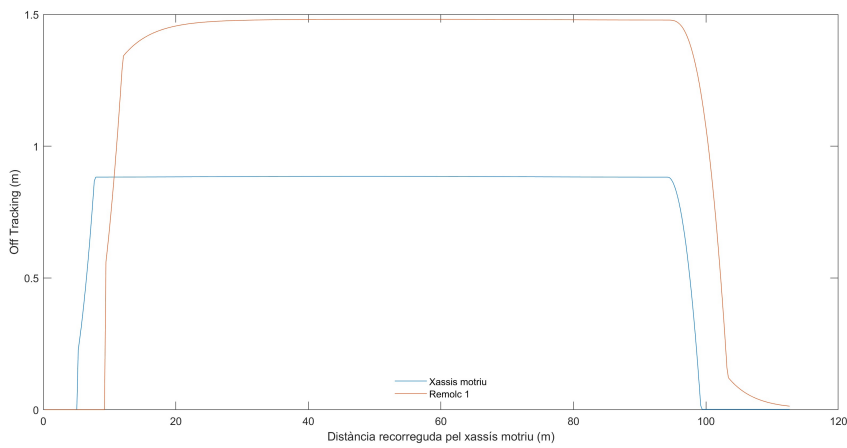


Figura 39: Off tracking dels xassissos al llarg del gir de 360º

Tal com ha ocorregut al punt , es torna a assolir l’off tracking màxim i, un cop completat el gir sencer, el valor descendeix ràpidament fins a assolir pràcticament de nou el valor 0.

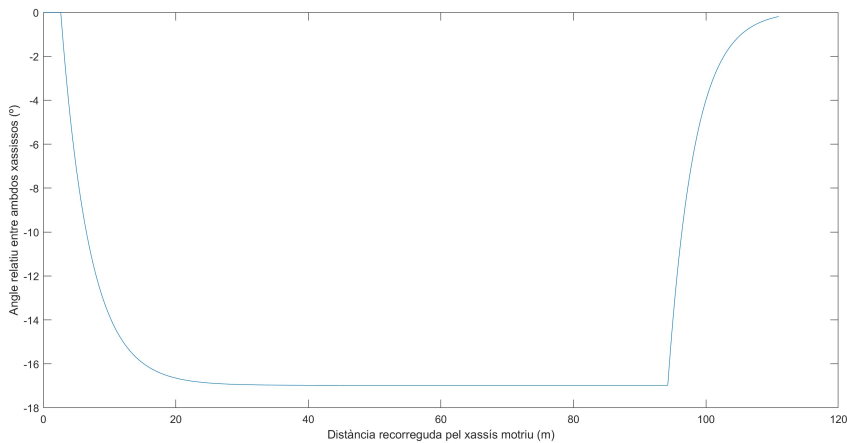


Figura 40: Angle relatiu entre ambdós xassissos al llarg del gir de 360º

Respecte a l’angle relatiu, s’assoleix de nou el valor límit, a la vegada que l’interval on aquest valor és estable augmenta respecte de les altres simulacions.

6.3 Simulació del xassís motriu amb remolc unit mitjançant guia-botó

L'objectiu d'aquesta secció és analitzar altra vegada les tres trajectòries dels darrers apartats, però, en aquest punt, la unió entre el xassís motriu i el remolc no serà una unió simple, si no que estarà equipada per un mecanisme guia-botó amb el controlador no lineal que ja s'ha especificat en l'apartat 4.3.

A continuació es mostren les característiques d'ambdós xassissos:

	Longitud (m)	Amplada (m)	δ	$\psi_{inicial}$	Off tracking màx. (m)
Xassís motriu	5	2	-20,05	0	0,884
Remolc 1	4	2	-	0	0,976

Taula 3: Configuració i valors referents al xassís motriu i remolc amb el mecanisme guia-botó

L'única variació d'aquesta taula respecte a la taula 2 és el valor de l'off tracking del remolc 1. L'equació 8, utilitzada en els darrers apartats, deixa de ser vàlida en aquesta simulació, ja que la unió entre ambdós xassissos es troba sovint desplaçada del centre posterior del primer xassís. Així doncs, el càlcul de l'off tracking màxim del remolc 1 resulta de gran complicació mitjançant una equació algebraica i, per tant, ha estat obtingut a partir de les simulacions que s'exposaran a continuació:

6.3.1 Canvi de direcció del xassís motriu i remolc amb guia-botó

Es repeteix la simulació ja realitzada a la secció 6.2.1 per poder evidenciar els canvis que implica el mecanisme guia-botó sobre la trajectòria del remolc.

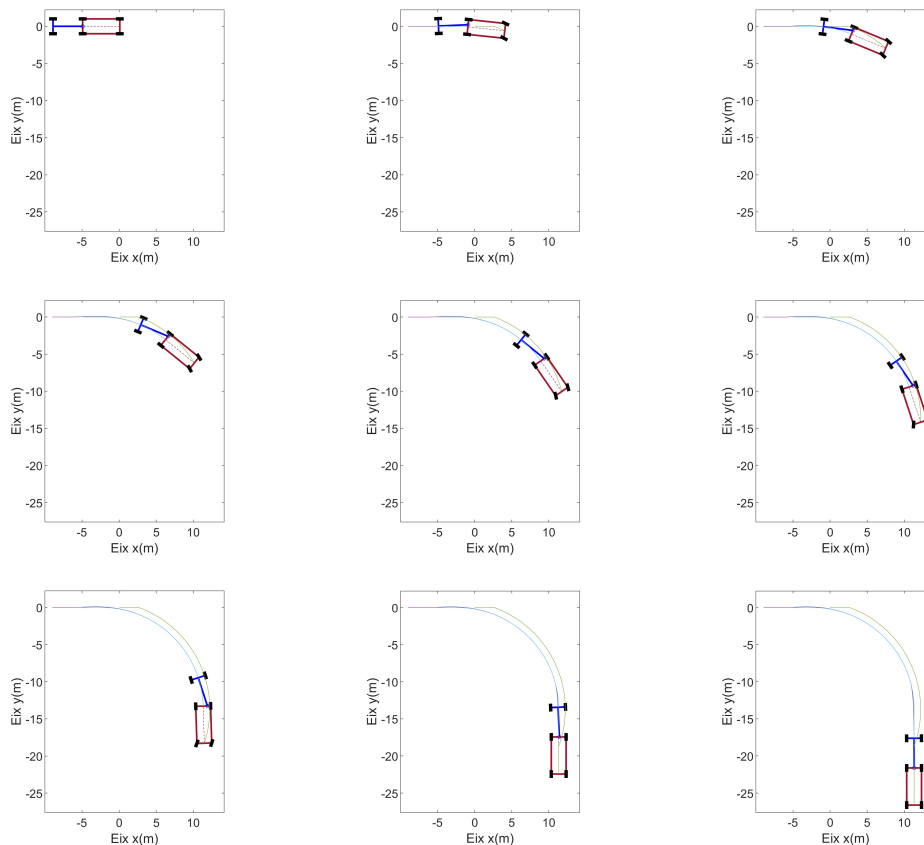
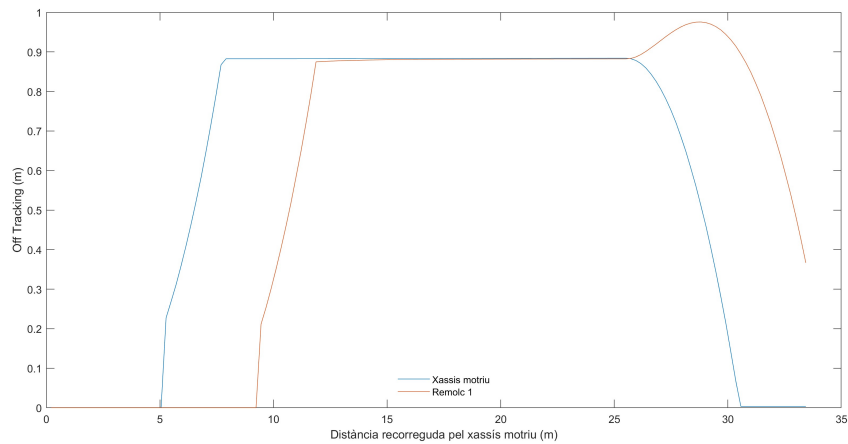


Figura 41: Simulació del vehicle amb el mecanisme guia-botó en un canvi de direcció

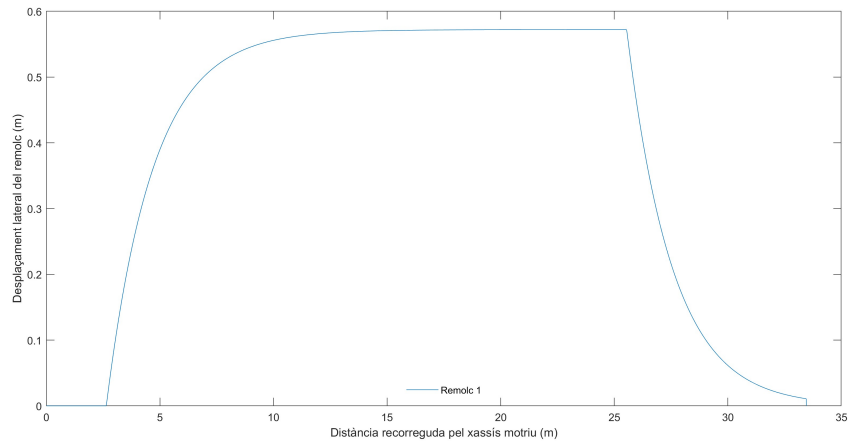
Tal com es pot observar a la seqüència, el punt frontal del remolc es desplaça al llarg de la part posterior del xassís motriu per aconseguir que, fora de la zona de transició, els punts P_0 i P_1 ressegueixin la mateixa trajectòria i, com a conseqüència, el seu off tracking sigui nul.

Cal destacar que en els instants de transició on el xassís motriu inicia o finalitza la maniobra de canvi de direcció, les trajectòries de P_0 i P_1 no convergeixen completament, ja que el remolc es veu afectat per les velocitats transversals ocasionades per l'actuador del mecanisme guia-botó.

A continuació s'han graficat dos variables que s'han considerat d'interès en aquest tipus de simulació. La primera correspon als valors de l'off tracking, mentre que la segona figura mostra el desplaçament dels punts P_0 i F_1 al llarg de la guia.



(a) Off tracking durant el canvi de direcció



(b) Desplaçament del guia-botó durant el canvi de direcció

Figura 42: Off tracking i desplaçament del mecanisme guia-botó en un canvi de direcció

A partir de la figura 42a es pot afirmar que l’off tracking entre el remolc i la part posterior del xassís motriu és 0, ja que ambdós extrems tendeixen a la mateixa magnitud, concretament a 0,88404m. A més a més, un cop finalitzada la maniobra, l’off tracking del xassís motriu comença a decreixer ràpidament, mentre que el remolc assoleix llavors el seu màxim de 0,97573m a conseqüència de l’actuador.

L’inici i el final del canvi de direcció també queda representat a la figura 42b, on s’observa com el punt F_1 es desplaça cap a la roda posterior esquerra del xassís motriu fins a assolir el valor estable de 0,57209m. Un cop s’ha realitzat el gir de 90°, el valor retorna ràpidament a la magnitud inicial, el 0.

6.3.2 Canvi de sentit del xassís motriu i remolc amb guia-botó

En aquesta secció, es torna a donar un canvi de sentit al xassís motriu per estudiar el comportament del remolc equipat pel mecanisme guia-botó.

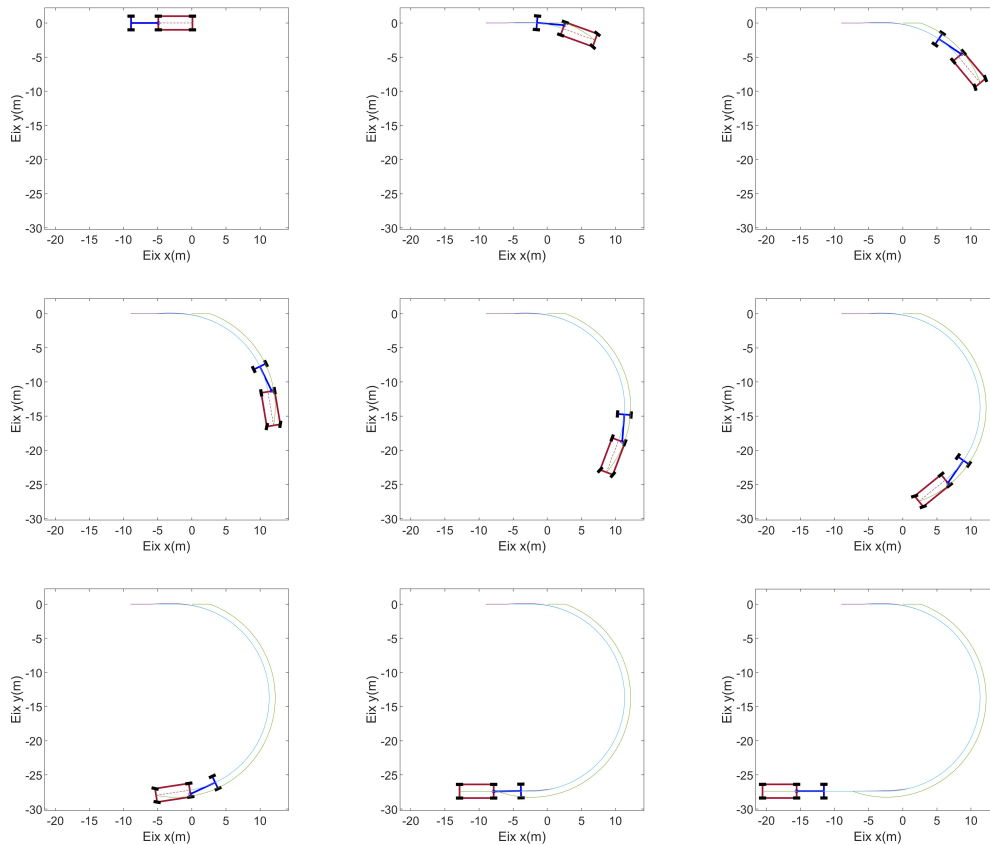
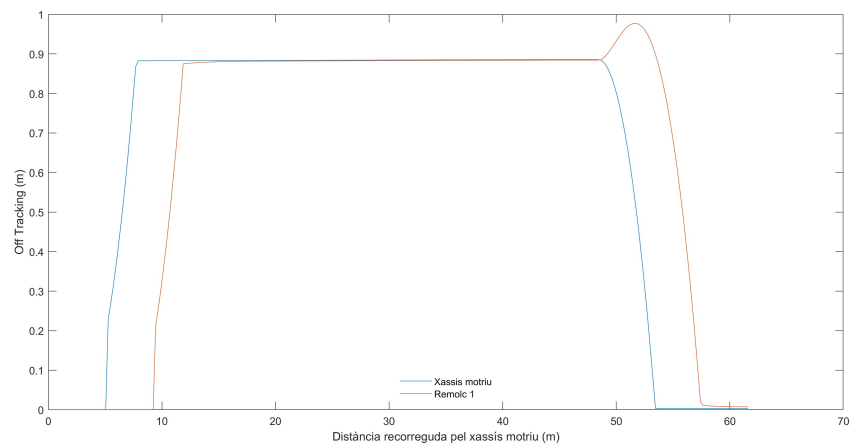
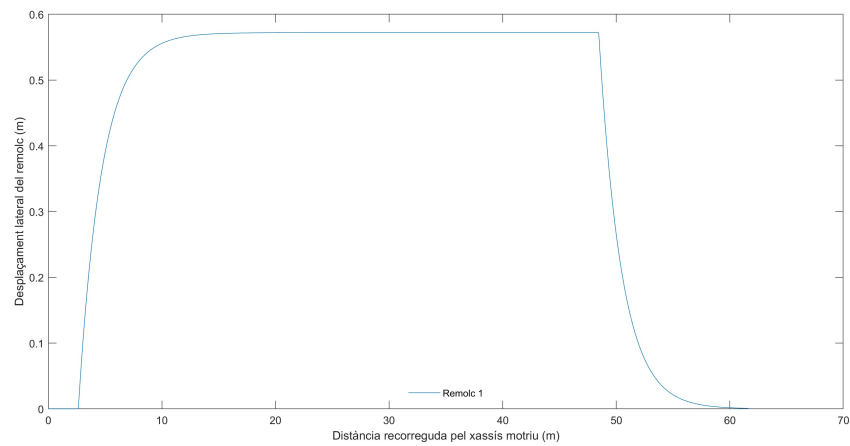


Figura 43: Simulació del vehicle amb el mecanisme guia-botó en un canvi de sentit

Com ja s'ha graficat i comentat a l'apartat anterior, es grafiquen els valors de l'off tracking i el desplaçament del mecanisme del remolc per tal de poder comparar amb les altres simulacions.



(a) Off tracking durant el canvi de sentit



(b) Desplaçament del guia-botó durant el canvi de sentit

Figura 44: Off tracking i desplaçament del mecanisme guia-botó en un canvi de sentit

Tenint en compte que a l'apartat 6.3.1 ja es considerava que el sistema havia assolit una situació d'estabilitat, l'única variació que s'evidencia entre les figures 44 i 42 és que la zona que queda fora de la transició és més elevada en aquesta darrera simulació en haver recorregut més distància en condició d'estabilitat.

6.3.3 Gir de 360° del xassís motriu i remolc amb guia-botó

Es repeteix el procediment seguit per a les altres simulacions. En aquest cas, el xassís motriu realitza una volta completa fins a recuperar la seva orientació inicial.

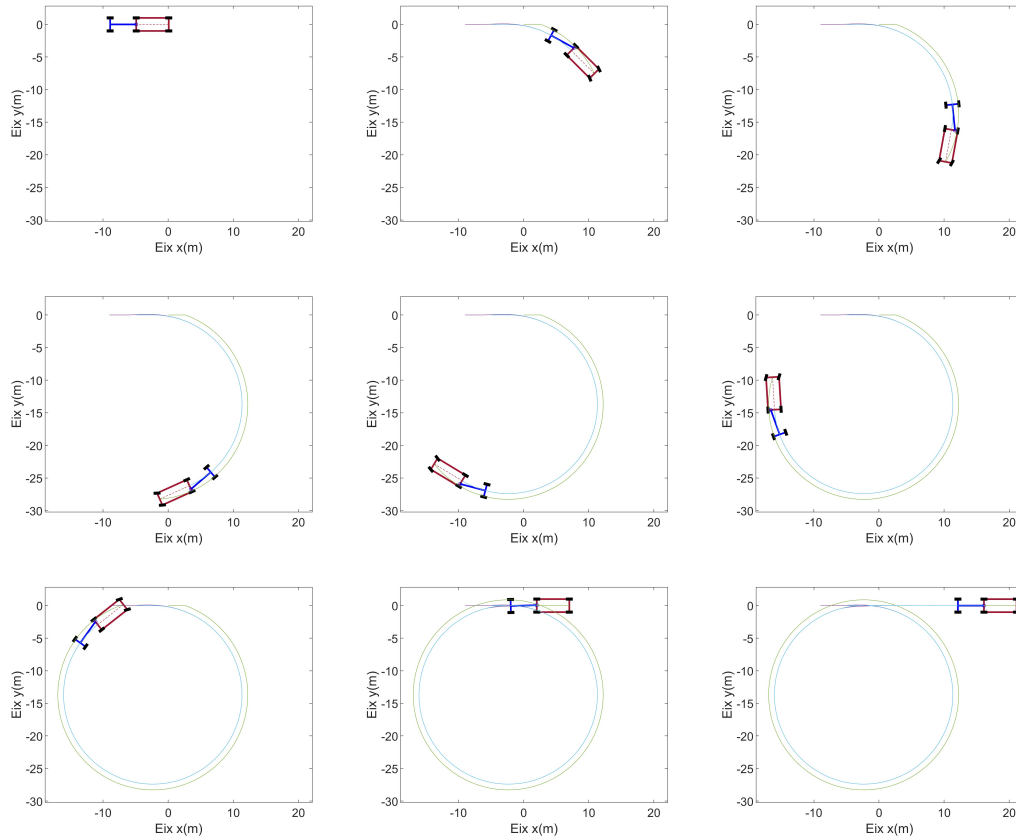
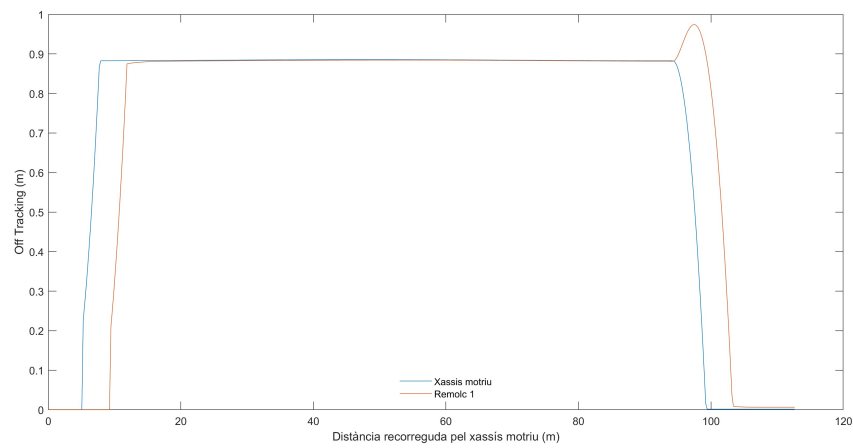
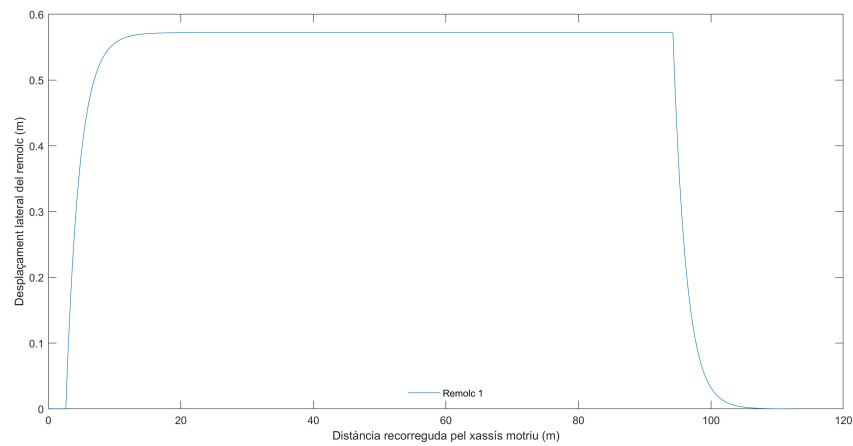


Figura 45: Simulació del vehicle amb el mecanisme guia-botó en un gir de 360°

Es grafiquen de nou els valors de les variables que s'han considerat d'interès per aquest tipus de simulacions al llarg del seu recorregut.



(a) Off tracking durant el gir de 360°



(b) Desplaçament del guia-botó durant el gir de 360°

Figura 46: Off tracking i desplaçament del mecanisme guia-botó en un gir de 360°

Tal com ja s'ha comentat anteriorment, les gràfiques no presenten cap variació destacable respecte la figura 42. L'únic que es veu modificat és la llargària que totes elles presenten de l'interval on el sistema es manté estable.

6.4 Simulació d'un remolc convencional i d'un remolc galera

En vehicles de grans dimensions en els quals els remolcs poden ser de longituds elevades, sovint s'opta per remolcs coneguts com a tipus galera. Aquest tipus de remolc presenta un eix giratori al llarg de la primera meitat del remolc. A efectes pràctics i de maniobrabilitat, és l'equivalent a tenir dos remolcs moguts pel xassís motriu.



(a) Remolc convencional

(b) Remolc galera

Figura 47: Comparativa entre un remolc convencional i una galera [13]

Tot i presentar una major dificultat per a maniobrar marxa enrere, aquest tipus de xassís pot resultar més versàtil, podent aconseguir configuracions i posicions més extremes, a la vegada que el valor de l'off tracking màxim disminueix notablement.

Per demostrar aquesta disminució de l'off tracking, es pot recórrer a l'equació 8. Si es considera el paràmetre $L_{convencional}$ com la longitud total d'un remolc convencional i $L_{galera,1}$ i $L_{galera,2}$ com les longituds que defineixen les dues parts d'un remolc tipus galera (sent $L_{galera,1} + L_{galera,2} = L_{convencional}$), si es defineixen els valors de l'off tracking màxim per a cada remolc:

$$OT_{max,convencional} = \sqrt{R_0^2 + L_0^2} - \sqrt{R_0^2 - L_{convencional}^2} \quad (77)$$

$$OT_{max,galera} = \sqrt{R_0^2 + L_0^2} - \sqrt{R_0^2 - L_{galera,1}^2 - L_{galera,2}^2} \quad (78)$$

Es pot assegurar que:

$$OT_{max,galera} < OT_{max,convencional} \quad (79)$$

Aquesta afirmació és vàlida per a qualsevol valor de R_0 i L_0 sempre que es garanteixi la igualtat entre les longituds totals, ja que:

$$L_{convencional}^2 > L_{galera,1}^2 + L_{galera,2}^2 \quad (80)$$

Per fer-ho més visible, s'ha graficat el valor de l'off tracking màxim en funció del radi de gir d'un remolc convencional de 10m de longitud i d'un remolc galera de 2+8m. El resultat és el següent:

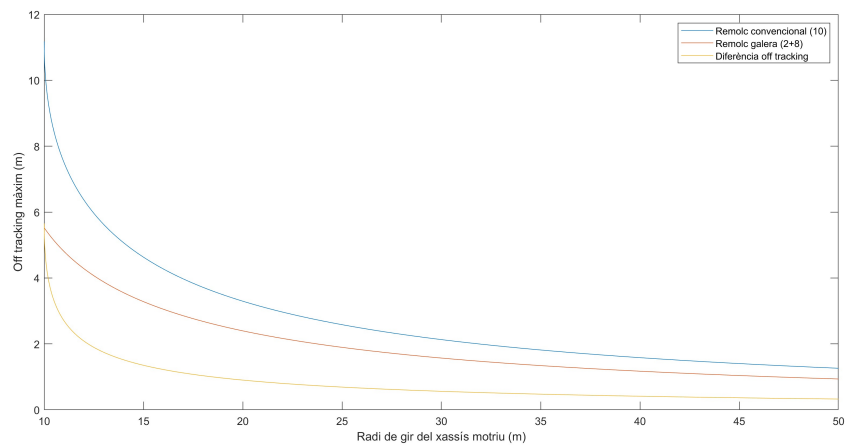


Figura 48: Comparativa de l'off tracking màxim entre els dos tipus de remolc

Tal com es pot observar a la gràfica, sobretot en radis de gir tancats, el desplaçament lateral d'un remolc de tipus galera és notablement inferior al d'un remolc convencional. En canvi, per a corbes més obertes, la diferència entre ambdós valors disminueix fins a deixar de ser rellevant.

6.4.1 Simulació d'un remolc convencional

Per les simulacions d'aquesta secció, s'ha escollit una trajectòria de tipus sinusoidal pel xassis motriu. Les dimensions i característiques del conjunt del vehicle venen indicades a la taula següent:

	Longitud (m)	Amplada (m)	δ°	$\psi_{inicial}^\circ$
Xassis motriu	5	2	[-45, 45]	90
Remolc convencional	10	2	-	0

Taula 4: Configuració i valors referents al xassis motriu i remolc convencional

Un cop definits tots els paràmetres del sistema, es procedeix a realitzar la simulació del conjunt al llarg del temps, donant lloc a la seqüència que s'indica a continuació:

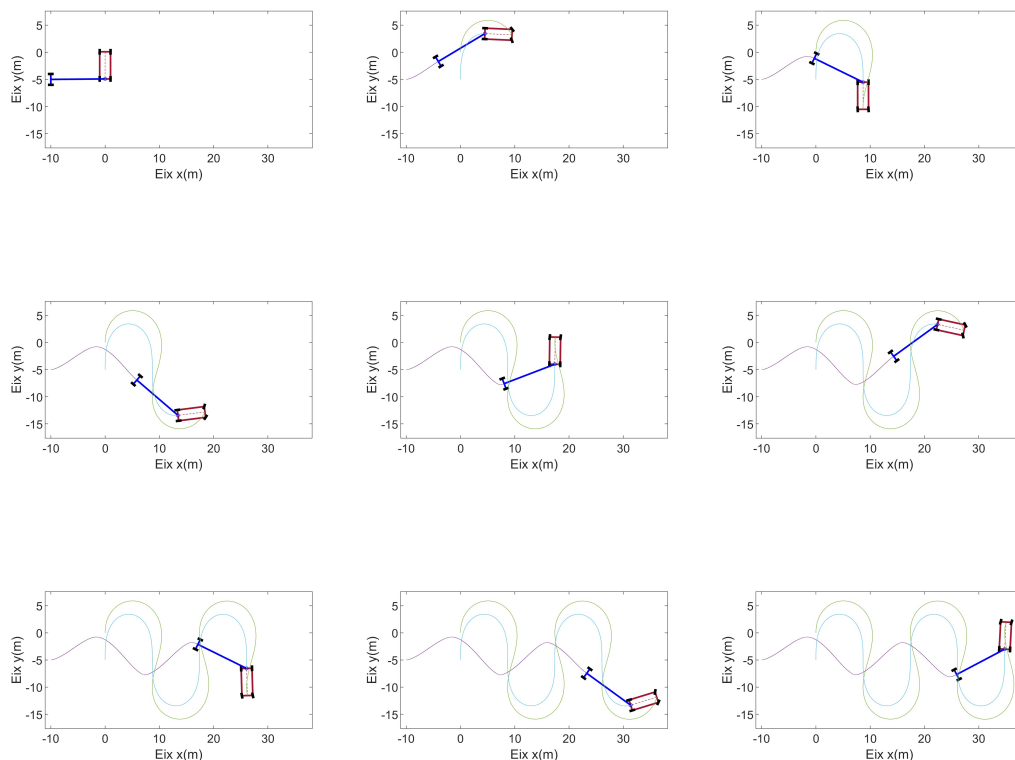


Figura 49: Simulació del remolc de tipus convencional

Observant la simulació, es pot destacar ràpidament que la trajectòria seguida pel remolc divergeix completament del xassis motriu. Aquesta gran diferència és deu bàsicament a la gran llargada del remolc i les corbes tancades que fa el primer xassis.

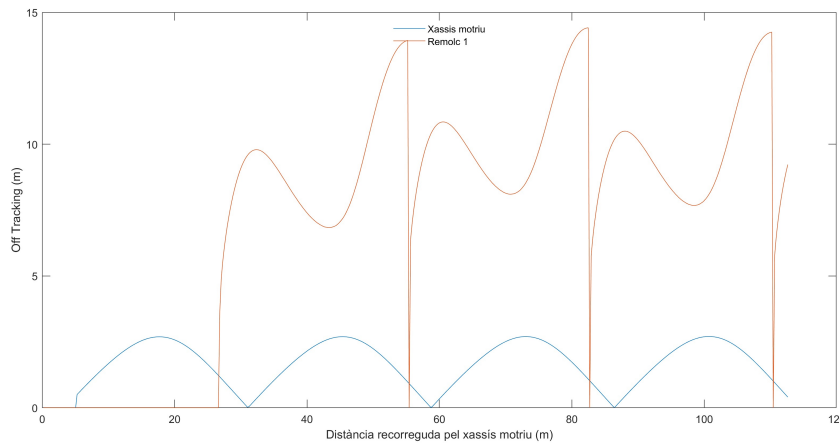


Figura 50: Off tracking generat pel remolc convencional

Pel que fa a l'off tracking, la corba referent al remolc presenta una geometria bastant extrema i amb una gran amplitud de valors, oscil·lant des del 0 fins a gairebé el 15. Per contra, l'off tracking del xassís motriu és periòdic des del primer oscil·lant entre 0 i 2,5m en cada canvi de direcció que dona el xassís.

6.4.2 Simulació d'un remolc galera

Per a poder comparar de forma efectiva entre ambdós tipus de remolc, el xassís motriu descriurà la mateixa trajectòria sinusoidal que en l'apartat 6.4.1.

A continuació es detallen les característiques de cada xassís, així com les dues parts que formen la galera.

		Longitud (m)	Amplada (m)	δ	$\psi_{inicial}$
Xassís motriu		5	2	$[-45, 45]$	90
Remolc galera	Part 1	2	2	-	0
	Part 2	8	2	-	0

Taula 5: Configuració i valors referents al xassís motriu i remolc galera

Amb els paràmetres inicials definits, es procedeix a fer la simulació, obtenint els següents 9 instants:

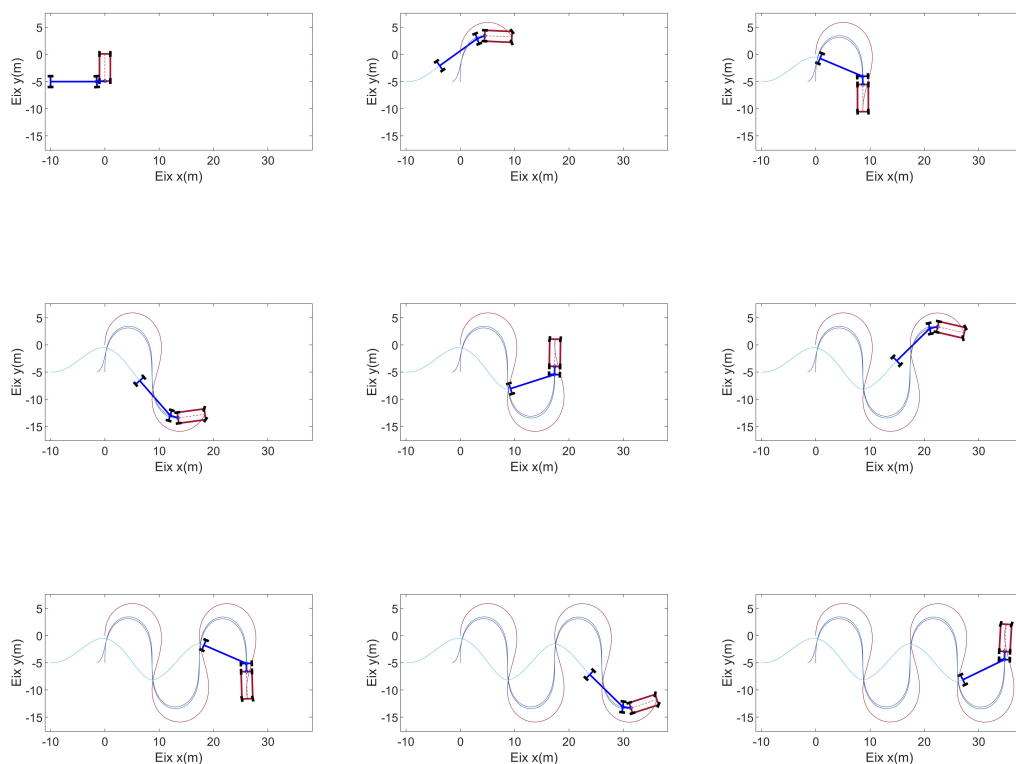


Figura 51: Simulació del remolc de tipus galera

Es pot apreciar com, igual que passava amb la figura 49, la part posterior de la galera divergeix de la trajectòria traçada pel primer xassís. Si es comparen totes dues figures amb detall, però, s'observa com el remolc de tipus galera ressegueix lleugerament millor el recorregut que no el remolc convencional.

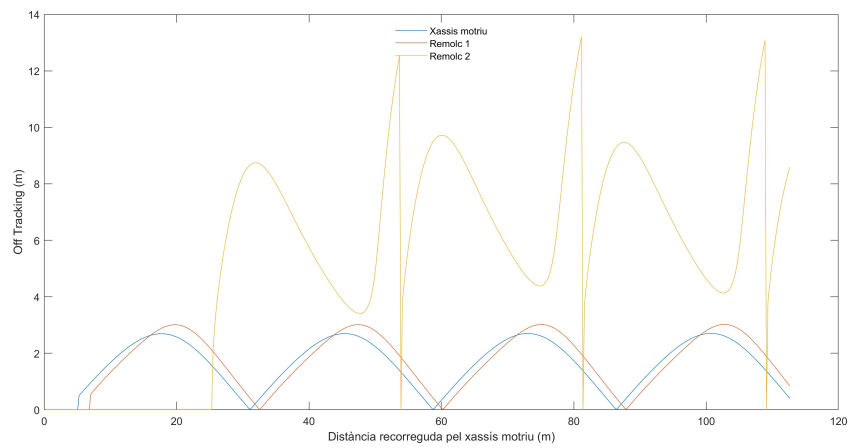


Figura 52: Off tracking generat pel remolc galera

La millora que implica l'ús de la galera es veu també reflectida en la gràfica de l'off tracking, ja que tot i continuar presentant una geometria extrema, els valors màxims són lleugerament menors que els obtinguts a la secció anterior.

6.5 Simulacions en configuracions límit

En aquesta secció es vol determinar els intervals dels valors límit de les longituds dels xassissos i de l'angle de gir de les rodes direccionals que garantiran un bon funcionament del sistema.

Per calcular aquests valors cal recordar que fora de l'estat de transició tots els xassissos tenen en comú un mateix centre instantani de rotació (fig. 4). Per tant, sabent que l'off tracking màxim és la distància entre el CIR i qualsevol punt de la trajectòria circumfèrica, per garantir que tots els punts dels xassissos girin al voltant d'aquest punt cal garantir que $OT_{max} < \mathfrak{R}'_0$, sent \mathfrak{R}'_0 el radi de gir del punt F_0 .

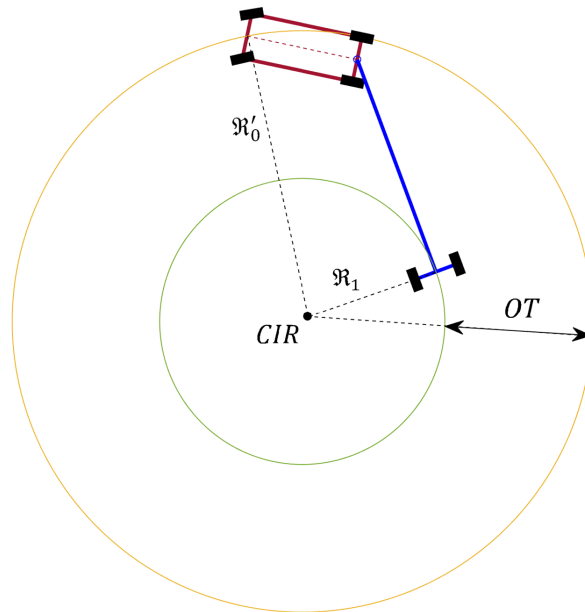


Figura 53: Representació dels radis \mathfrak{R}'_0 i \mathfrak{R}_1 i el valor OT

Així doncs, aplicant aquesta igualtat i substituint el valor de \mathfrak{R}'_0 per l'expressió en funció de δ (eq. 3), s'obté la següent expressió:

$$\frac{L_0}{\sin(\delta)} - \sqrt{\frac{L_0^2}{\tan^2(\delta)} - \sum_{i=1}^n L_i^2} < \frac{L_0}{\sin(\delta)} \quad (81)$$

Eliminant els dos termes iguals i l'arrel quadrada, s'obté la condició d'estabilitat que relaciona l'angle de gir i les longituds de tots els xassissos:

$$\tan(\delta) > \frac{L_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n L_i^2}} \quad (82)$$

6.5.1 Simulació d'un sol remolc amb configuració límit

En aquest primer apartat es vol simular la trajectòria que seguirà el remolc de longitud crítica a mesura que el xassís motriu vagi donant tombos al centre de la trajectòria.

Els valors que defineixen la configuració del sistema són els següents:

	Longitud (m)	Amplada (m)	δ	$\psi_{inicial}$	Off tracking màx. (m)
Xassís motriu	5	2	-22,92	0	1,014
Remolc 1	11,826	2	-	0	12,840

Taula 6: Configuració i valors referents al xassís motriu i remolc en situació límit

Escollint un angle de gir de $-22,92^\circ$ i un xassís motriu de longitud 5m, la longitud límit del remolc indicada a la taula prové de l'equació 82:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \frac{L_0}{\tan(\delta)} \\
 &= \frac{5}{\tan(-22,92)} \\
 &= 11,82611m
 \end{aligned} \tag{83}$$

Un cop es té calculada la longitud del remolc, es pot procedir a calcular l'off tracking màxim:

$$\begin{aligned}
 OT_{max} &= L_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \delta}} - \sqrt{\frac{L_0^2}{\tan^2 \delta} - \sum_{i=1}^n L_i^2} \\
 &= 5 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(-22.92)}} - \sqrt{\frac{5^2}{\tan^2(-22.92)} - 11.82611^2} \\
 &= 12,83966m
 \end{aligned} \tag{84}$$

Per comprovar que es tracta d'una situació límit, es pot calcular el radi \mathfrak{R}'_0 i observar com ambdós valors coincideixen:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R}'_0 &= \frac{L_0}{\sin(\delta)} \\
 &= \frac{5}{\sin(-22.92)} \\
 &= 12,83966m
 \end{aligned}$$

Amb la configuració definida es pot iniciar la simulació, obtenint la seqüència següent:

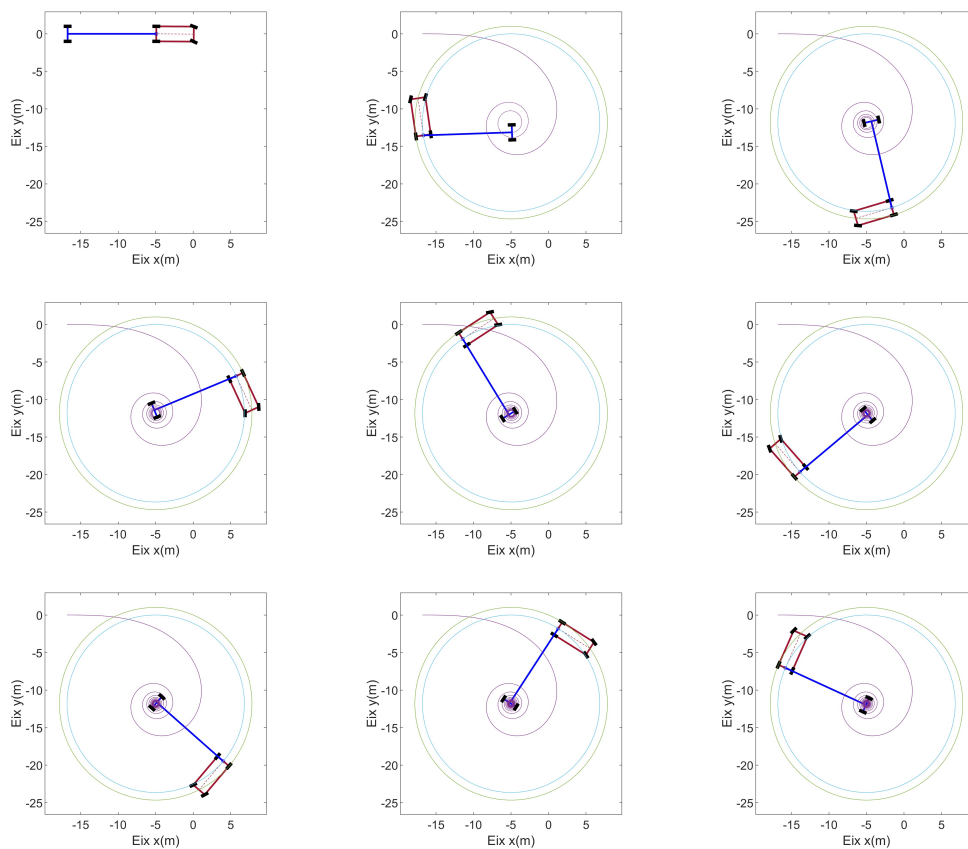


Figura 54: Simulació del remolcs de longitud crítica

En aquesta simulació es pot observar com el punt posterior del remolc, el punt P_1 , tendeix al centre de la trajectòria, a la vegada que el xassís motriu i el remolc acaben formant un angle de 90° .

La tendència de P_1 d'igualar-se al CIR també es veu reflectida a la figura 55, on s'observa com la distància recorreguda pels punts F_0 , P_0 i F_1 va augmentant mentre que la distància que recorre el punt posterior del xassís convergeix a un valor finit, fet que implica que la velocitat d'aquest extrem tendeix a 0.

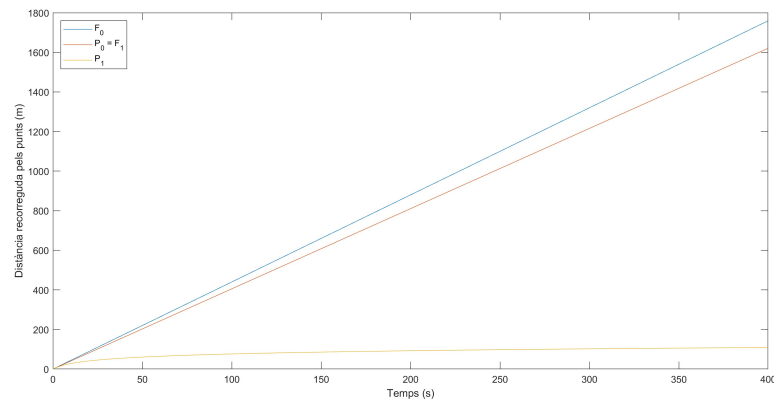


Figura 55: Distància recorreguda pels diferents punts del remolc i del xassís motriu

Remolc amb la configuració límit superada S'ha volgut simular també una situació en què s'ha superat la longitud límit del remolc en 0,1m. La resta de paràmetres no s'han vist modificats respecte de la simulació anterior.

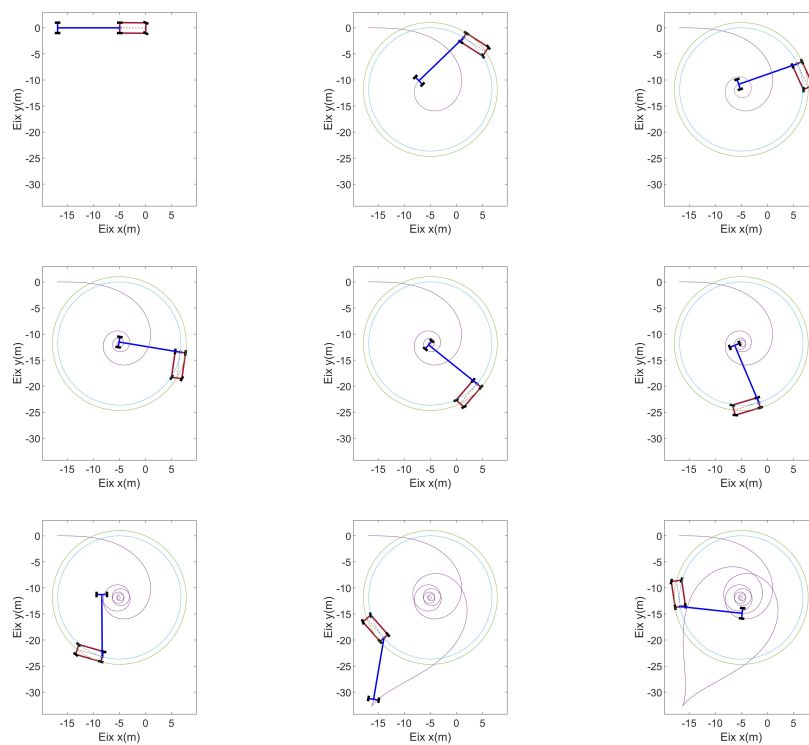


Figura 56: Simulació del remolc de longitud excessiva

S'observa ràpidament com l'angle relatiu entre els dos xassissos supera els 90° , donant lloc a col·lisions o geometries impossibles.

6.5.2 Simulació de múltiples remolcs amb configuració límit

Un cop realitzada la simulació per a un sol remolc en una situació límit, es procedeix a simular un sistema de 4 remolcs de longitud crítica.

Els valors escollits per cada un dels xassissos són els següents:

	Remolc (m)	Amplada (m)	δ	$\psi_{inicial}$	Off tracking max. (m)
Xassís motriu	5	2	-22,92	0	1,014
Remolc 1	5,913	2	-	0	2,598
Remolc 2	5,913	2	-	0	4,477
Remolc 3	5,913	2	-	0	6,927
Remolc 4	5,913	2	-	0	12,840

Taula 7: Configuració i valors referents al xassís motriu i els 4 remolcs en situació límit

Per determinar la longitud crítica dels remolcs s'ha optat per utilitzar el mateix valor per als quatre remolcs. Així doncs, utilitzant la relació 82:

$$\begin{aligned}
 L_i &= \frac{L_0}{\sqrt{k} \cdot \tan(\delta)}, i = 1, 2, 3, 4 \\
 &= \frac{5}{\sqrt{4} \cdot \tan(-22,92)} \\
 &= 5.91305m
 \end{aligned}$$

Els valors de l'off tracking màxim han estat calculats a partir de l'equació genèrica de l'off tracking màxim. S'observa com el valor màxim de 12,840m torna a coincidir amb el radi \mathcal{R}'_0 ja calculat a l'apartat anterior.

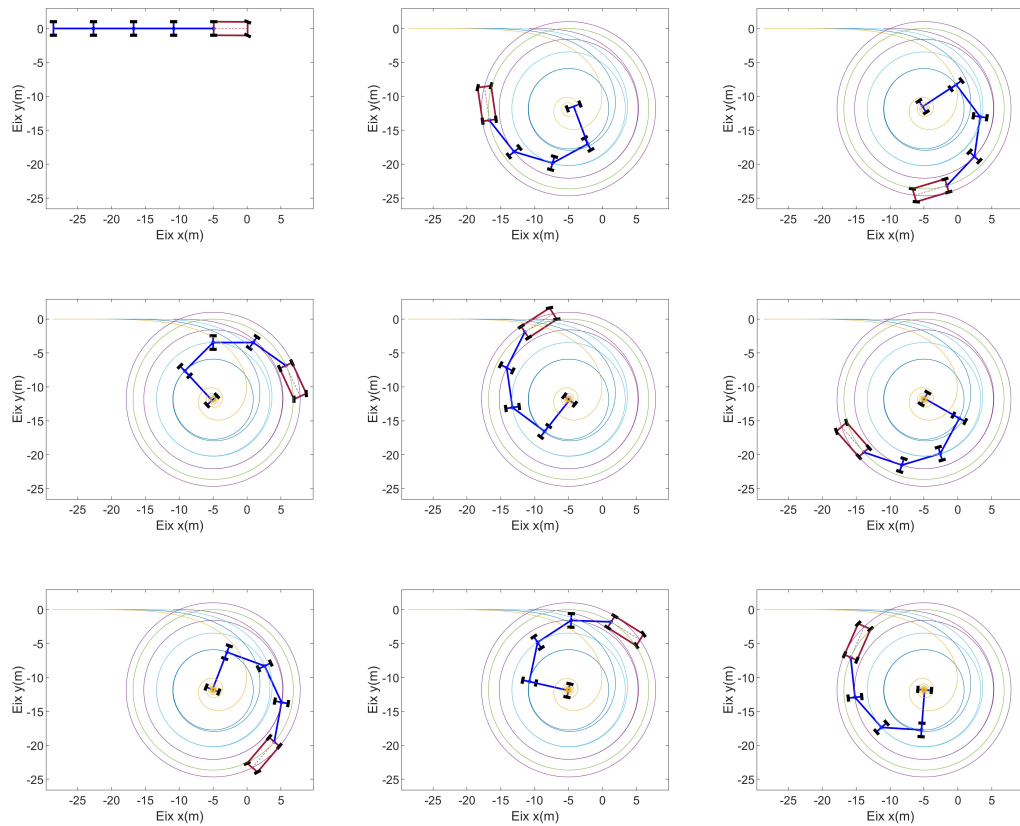


Figura 57: Simulació dels 4 remolcs de longitud crítica

Una vegada realitzada la simulació del sistema es pot comprovar com el remolc 4, el qual està sotmès al major off tracking, tendeix a igualar el punt posterior, P_4 , al CIR dels 5 xassissos.

Com ja s'ha comentat a la figura 55, si es grafica la distància recorreguda pels dos punts de cada xassís, s'obtenen les corbes de la gràfica següent. Cal destacar altra vegada la distància recorreguda pel punt P_4 , que en tendir a un punt fix, la seva distància recorreguda és finita.

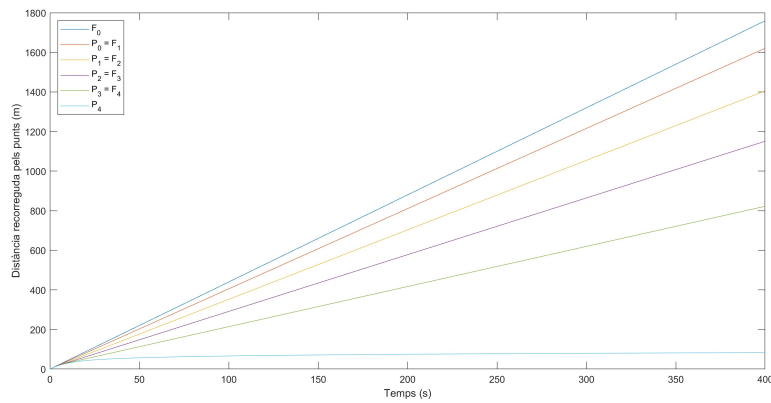


Figura 58: Distància recorreguda pels diferents punts dels remolcs i del xassís motriu

Remolcs amb la configuració límit superada Si cada remolc supera la longitud crítica en 0,02m, el sistema perd puntualment l'estabilitat i deixa de girar al voltant del CIR, tal com s'observa a la figura 59.

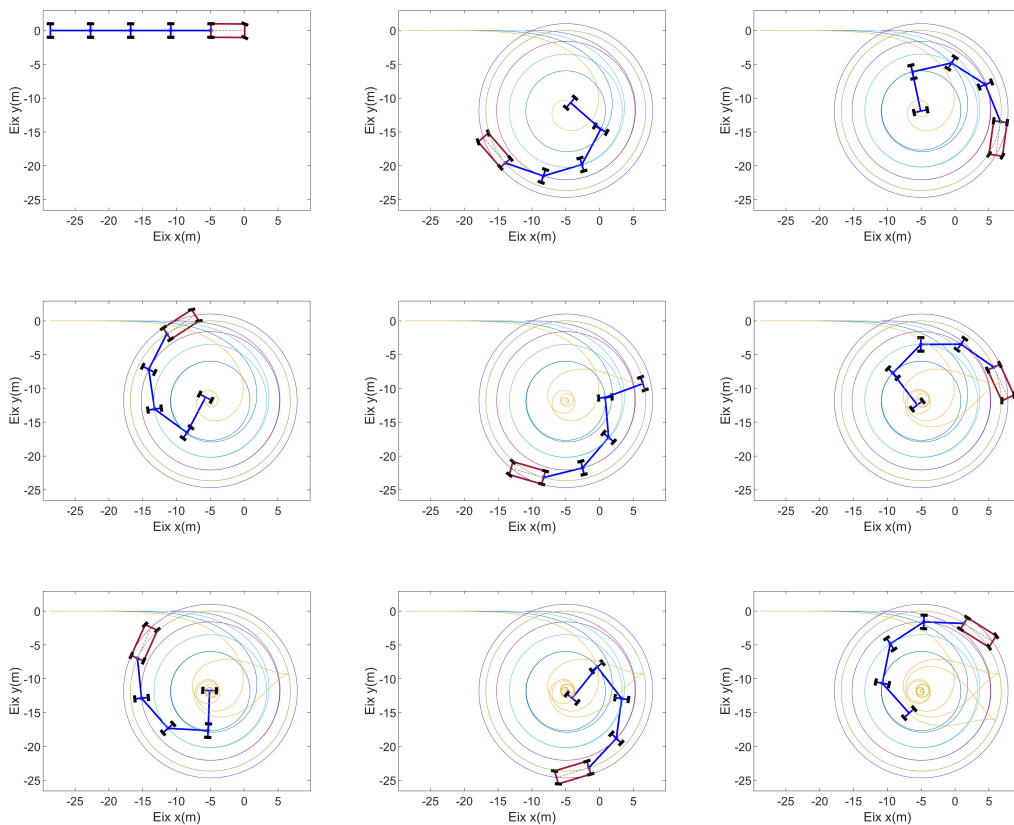


Figura 59: Simulació dels 4 remolcs de longitud excessiva

6.6 Gràfiques d'interès de l'off tracking

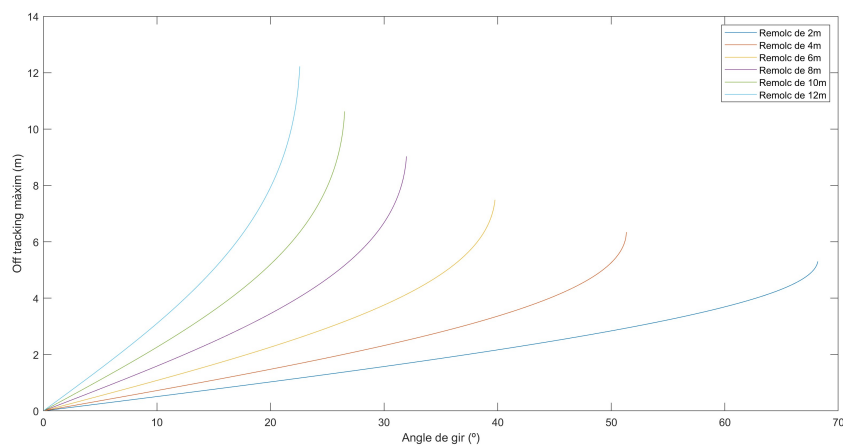
En aquest darrer apartat es vol calcular el valor d'off tracking màxim per a diferents radis de gir, R_0 , i diferents longituds de remolc.

A més a més, s'ha volgut estudiar el recorregut necessari per a poder considerar que el remolc ha assolit el màxim valor de l'off tracking.

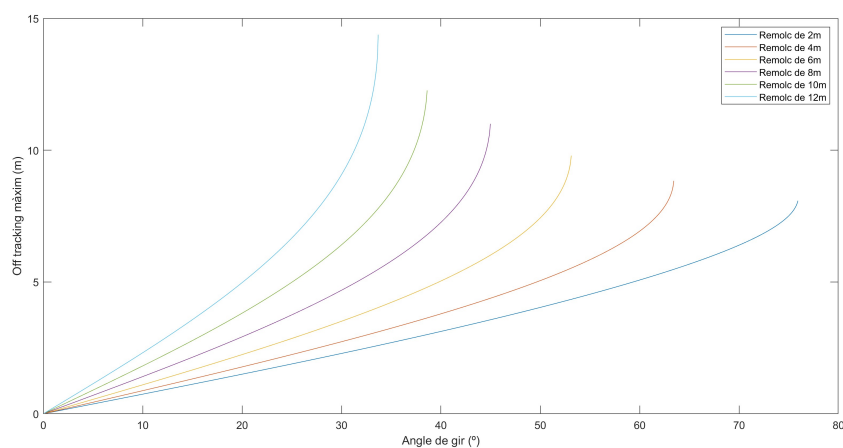
6.6.1 Valors d'off tracking en funció del radi de gir i longituds

S'han graficat els valors d'off tracking màxim que un remolc assolirà en realitzar trajectòries curvilínies. Aquests valors han estat representats en funció de l'angle de gir de les rodes directrius i de la longitud del remolc que s'estudia.

Les dues figures han estat calculades a partir de l'equació 8, amb longituds del xassís motriu de 5m i 8m respectivament:



(a)



(b)

Figura 60: Valors de l'off tracking màxim en funció de l'angle de gir (δ) i la longitud del remolc

6.6.2 Gir necessari per assolir l'off tracking màxim

Una altra gràfica que pot ser d'interès és la que relaciona l'angle que ha hagut de girar el xassís motriu perquè el remolc hagi assolit l'off tracking màxim i, per tant, estigui fora de l'interval de transició. En aquest cas s'ha considerat com a assolida l'estabilitat quan la magnitud ha superat el 99,5% del valor d'off tracking màxim. La figura obtinguda és la següent:

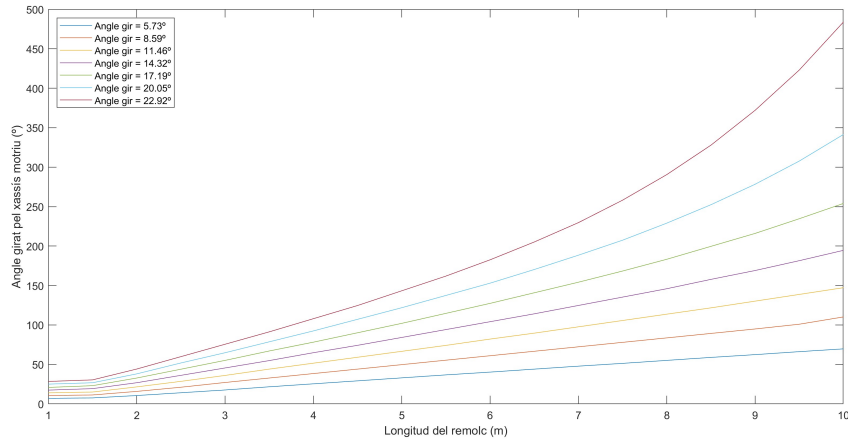


Figura 61: Variació mínima de ψ_0 per assolir l'off tracking màxim

A partir de la gràfica es pot observar com l'angle girat pel xassís motriu augmenta a mesura que augmenta també l'angle de gir i la longitud del remolc.

Com ja s'ha esmentat, l'assoliment del valor màxim de l'off tracking implica també la fi de l'estat de transició i, per tant, altres variables com l'angle relatiu entre ambdós xassissos també es pot donar per assolit en el mateix instant.

7 Impacte ambiental

El sector del transport té un paper significatiu en el canvi climàtic a causa de la seva contribució a les emissions de gasos amb efecte d'hivernacle (GEI). Els GEI, com el diòxid de carboni (CO₂), el metà (CH₄) i l'òxid nitrós (N₂O), són responsables de l'escalfament global i el canvi climàtic que estem experimentant actualment. Segons dades de l'Agència Internacional d'Energia (AIE), el 2020 el transport representava aproximadament el 22% de les emissions mundials de CO₂ relacionades amb l'energia i aproximadament el 27% de les emissions a escala nacional. Això inclou les emissions de vehicles de carretera, avions, vaixells i ferrocarrils. Les emissions de CO₂ del transport solen ser la contribució més gran dins del sector.

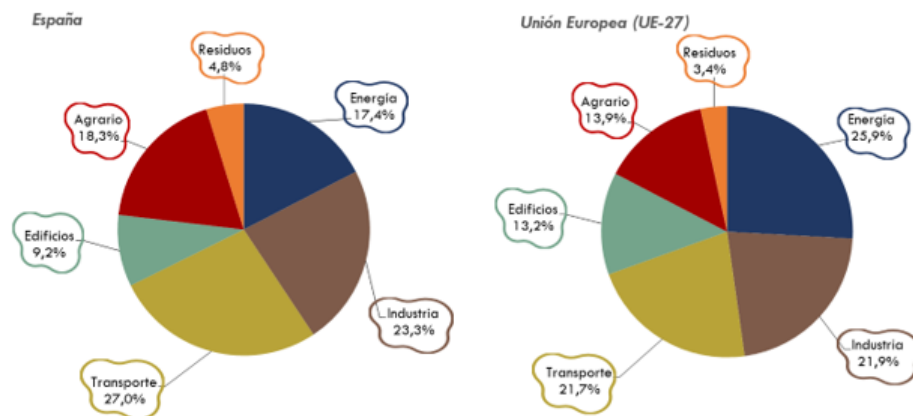


Figura 62: Percentatge d'emissions de CO₂ per sector [14]

Del 27% associat al transport, l'any 2020 més del 94% de les emissions de CO₂ eren conseqüència directa del transport per carretera, tal com queda representat a la figura 64.

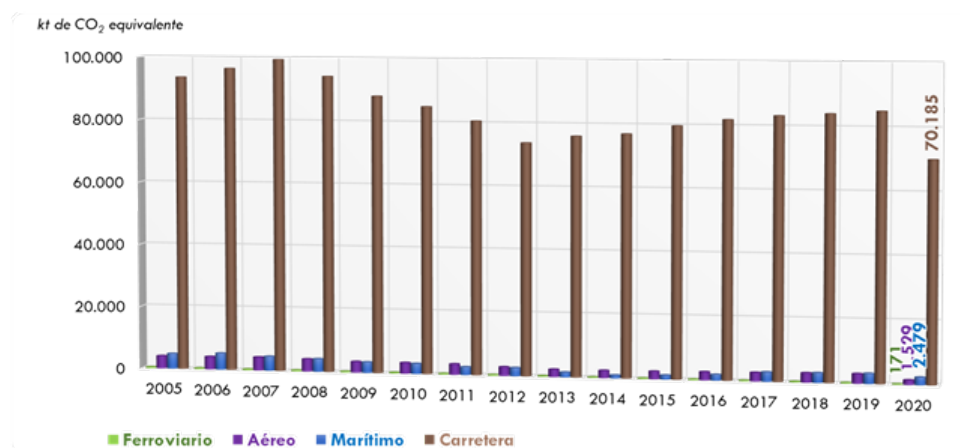


Figura 63: CO₂ alliberat en els diferents mitjans de transport [14]

A conseqüència de l'elevat impacte que té el transport terrestre, sembla evident que cal buscar alternatives o millores dels sistemes actuals per a minimitzar al màxim l'impacte generat. En aquest treball s'han estudiat els vehicles terrestres articulats, que presenten una capacitat per transportar càrregues més grans i pesades en un sol viatge. Això condueix a una major eficiència

en el transport, ja que calen menys camions i menys temps a la carretera per moure la mateixa quantitat de càrrega que es requeriria amb vehicles més curts. Menys camions a la carretera també signifiquen menys congestió del trànsit i una reducció de la petjada de carboni associada amb la logística de transport.

Els vehicles articulats són, a més a més, essencials per al transport de mercaderies a llarga distància. Això permet que els productes s'entreguin més ràpidament i eficientment, reduint els temps d'espera i garantint un flux constant de subministraments a tot el país i, en alguns casos, a escala internacional.

L'adopció de vehicles articulats també pot promoure pràctiques més sostenibles a la indústria del transport. Les empreses que opten per utilitzar aquests vehicles solen estar més disposades a invertir en tecnologies més netes i en la capacitat de conductors en pràctiques de conducció eficients. Això no només redueix les emissions de gasos amb efecte d'hivernacle, sinó que també millora l'eficiència operativa i redueix els costos de combustible.

A més, la planificació de rutes i l'optimització logística esdevenen més crucials quan s'usen vehicles articulats, fet que porta a una planificació més eficient dels viatges i, en última instància, a una reducció dels impactes ambientals negatius.

En resum, l'ús de vehicles articulats en lloc de vehicles més curts pot tenir un impacte positiu en la lluita contra el canvi climàtic en reduir les emissions de gasos d'efecte hivernacle, millorar l'eficiència en el transport i promoure pràctiques sostenibles a la indústria del transport. Per tant, tota tecnologia que millori i faci més accessible l'ús de vehicles articulats, es pot considerar com una opció valuosa per a la transició cap a un sistema de transport més respectuós amb el medi ambient.

8 Estudi social i d'igualtat de gènere

La igualtat de gènere està estretament relacionada amb el sector dels vehicles articulats, ja sigui en la pagesia com en l'àmbit del transport en general. A continuació, es presenten algunes de les formes en què la igualtat de gènere es vincula amb els vehicles articulats:

- **Accés i oportunitats laborals:** La indústria de vehicles articulats, que inclou conductors de camions de llarga distància, ha estat tradicionalment dominada per homes. Això ha portat a una disparitat de gènere quant a accés i oportunitats laborals. Fomentar la igualtat de gènere en aquesta indústria implica eliminar barreres i estereotips que han impedit que les dones ingressin i avancin en feines relacionades amb vehicles articulats. Això inclou promoure programes de capacitat i reclutament que atreguin dones i ofereixin igualtat d'oportunitats.
- **Equitat salarial:** Garantir que les dones que treballen a la indústria de vehicles articulats rebin salaris equitatius en comparació dels seus col·legues masculins és un aspecte important de la igualtat de gènere. Això implica abordar qualsevol disparitat salarial que hi pugui haver i promoure la transparència salarial.
- **Seguretat i ambient laboral:** Garantir que les dones que treballen a la indústria de vehicles articulats estiguin segures i lliures de discriminació al seu lloc de treball és essencial per a la igualtat de gènere. Això inclou la prevenció de l'assetjament sexual i la promoció d'un ambient laboral inclusiu i respectuós.
- **Educació i conscienciació:** Promoure la igualtat de gènere a la indústria de vehicles articulats també implica educar la societat sobre els estereotips de gènere i la importància de la diversitat de gènere en la força laboral. Això pot ajudar a superar percepcions errònies i prejudicis que hi pugui haver.

Per finalitzar, la igualtat de gènere al sector de vehicles articulats es tracta de garantir que les dones tinguin igualtat d'accés, oportunitats i condicions de treball en aquesta indústria. En abordar qüestions de gènere i promoure la diversitat de gènere, no només se'n beneficia les dones, sinó que també s'enriqueix la indústria en aprofitar tot el talent disponible. A més, fomentar la igualtat de gènere al sector de vehicles articulats o de grans dimensions és essencial per construir una societat més justa i equitativa en conjunt.

9 Diagrama de Gantt

Per a un correcte desenvolupament i planificació del treball, s'ha seguit el diagrama de Gantt que queda indicat a continuació:

	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny	Juliol	Agost	Setembre
1	■	■	■					
2		■	■	■				
3								
4			■	■				
5				■	■	■		
6				■	■	■	■	
7						■	■	■
8							■	■
9								■

Figura 64: Diagrama de Gantt

Sent els números les següents activitats:

1. Definició dels objectius
2. Literatura prèvia
3. Càlcul de les equacions per a un sol xassís
4. Càlcul de les equacions per a múltiples xassissos
5. Desenvolupament dels fitxers de Matlab
6. Redacció dels temes tècnics de la memòria
7. Redacció dels temes no tècnics de la memòria
8. Realització de simulacions
9. Preparació de la presentació

Conclusions

Al llarg d'aquest treball de final de grau, s'ha fet una anàlisi exhaustiva de les simulacions de trajectòries de vehicles a remolc utilitzant MATLAB i calculant aquestes trajectòries a partir de les equacions cinemàtiques. A més, s'ha avaluat el fenomen de l'off tracking, centrant-se en els factors determinants, com ara la longitud dels xassissos i el radi de gir. Les conclusions obtingudes d'aquesta investigació són les següents:

- MATLAB ha demostrat ser una eina efectiva per realitzar simulacions de trajectòries de vehicles a remolc. La seva capacitat de càlcul i representació gràfica ha permès modelar amb precisió el moviment d'aquests vehicles a diversos escenaris.
- Les simulacions han proporcionat una comprensió profunda del comportament dels vehicles a remolc en una varietat de situacions de conducció. Això inclou l'estudi de com les dimensions del xassís i el radi de les corbes influeixen en les trajectòries i l'off tracking.
- S'ha confirmat que la longitud del xassís i el radi de curvatura són factors clau que influeixen en l'off tracking. Com més gran és la longitud del xassís i menor és el radi de gir, més gran serà l'off tracking. Aquesta informació és essencial per als dissenyadors de carreteres i conductors de vehicles a remolc.
- L'off tracking és un factor crític que afecta la seguretat viària, especialment en girs tancats i maniobres. Comprendre com aquests factors incideixen en l'off tracking és fonamental per dissenyar carreteres i rutes que minimitzin els riscos associats amb els vehicles a remolc.
- Les conclusions d'aquest treball tenen aplicacions pràctiques en la planificació de rutes de transport, el disseny d'interseccions i la capacitació de conductors. A més, poden contribuir al desenvolupament de tecnologies d'assistència al conductor que millorin la seguretat i l'eficiència a l'operació de vehicles a remolc.

En resum, aquest treball de final de grau ha demostrat la utilitat de MATLAB per fer simulacions de trajectòries de vehicles a remolc i avaluar l'off tracking. Les conclusions obtingudes proporcionen una base sòlida per a la presa de decisions en el disseny de carreteres i l'operació de vehicles a remolc. La gestió efectiva de l'off tracking és essencial per promoure la seguretat viària i l'eficiència en el transport de càrrega, i aquesta investigació contribueix a aquest objectiu.

Agraïments

En primer lloc, m'agradaria expressar el meu més profund agraïment a la meva directora del treball, Ana Barjau, pel seu suport i orientació durant aquests mesos. Estic molt agraït per les seves valuoses idees i el seu suport constant. La seva experiència i els seus coneixements sobre cinemàtica i la mecànica en general han estat realment inspiradors, a la vegada que desafiants i engrescadors per a continuar aprenent i millorant.

En segon lloc, voldria donar també les gràcies a la meva família i companys que han estat presents durant els mesos que ha durat el desenvolupament del treball.

Bibliografia

- [1] *Alle Varianten LZV*, Wikipedia https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Alle_Varianten_LZV.jpg
- [2] H. STEVENS, C. TIGNOR, I F. LOJANCO, *Offtracking, Turning Track Widths and Curb Radii for single-Unit Vehicles and Trailer Combinations on Turns of Various Degrees and Radii*, SAE International, 1966
- [3] KENNETH L. HEALD, *Use of the WHI Offtracking Formula*, Transportation Research Record N1052, 1986
- [4] *Heavy combination vehicle stability and dynamics: an introduction programme for drivers of heavy motor vehicles*, Waka Kotahi, <https://www.nzta.govt.nz/resources/heavy-learner/heavy-combination-vehicles/2.html>
- [5] *Comprehensive Truck Size and Weight Limits Study - Highway Safety and Truck Crash Comparative Analysis Technical Report*, U.S. Department of Transportation, https://ops.fhwa.dot.gov/freight/sw/map21tswstudy/technical_rpts/hstcanalysis/app_c_maneuv_stabl.htm
- [6] *La Cicloide*, Laboratorio de matemàtiques, <https://laboratoriomatematicas.uniandes.edu.co/semarquitec/Cicloide.htm>
- [7] A. BARJAU, I J. AGULLÓ, *Rigid body kinematics*, Cambridge University Press, 2020
- [8] A. F. MOGGIO BESSOLO, *Diseño del sistema de dirección de un vehículo de fórmula SAE*, Universidad de los Andes, 2016
- [9] V. DELIGIANNIS, G. DAVRAZOS, S. MANESIS, I T. ARAMPATZIS, *Flatness Conservation in the n-trailer System Equipped with a Sliding Kingpin Mechanism*, Springer Science, 2006
- [10] S. CARDONA, I D. CLOS, *Teòria de màquines*, Edicions UPC, 2000
- [11] J. G. DE JALÓN, I E. BAYO, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*, Springer-Verlag, 1994
- [12] *Mètode de Euler*, Wikipedia https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Euler

- [13] *Bañeras agrícolas*, Remolques Beguer <https://www.beguer.es/portfolio/baneras-agricolas/>
- [14] *Emisiones contaminantes del transporte*, Ministerio de Transportes, Movilidad y Agenda Urbana <https://observatoriotransporte.mitma.es/inform/es/2022/5-sostenibilidadambiental/52-2022/5-sostenibilidadambiental/52-emisiones-y-eficienciaambiental/521emisiones-contaminantes-del-transporte,2020>