Dimensión métrica y dimensión métrica tolerante en grafos MOP[S]

G. Hernández[a], C. Hernando[b], M. Mora[b], M. Maureso[b], J. Tejel[c]

(a) `E-mail: gregorio.hpenalver@upm.es`

(b) *Departamento de Matemáticas, Universitat Politècnica de Catalunya.*
`E-mail: carmen.hernando@upc.edu, merce.mora@upc.edu, montserrat.maureso@upc.edu`

(c) *Departamento de Métodos Estadísticos, Universidad de Zaragoza.*
`E-mail: jtejel@unizar.es`

Resumen. En este trabajo estudiamos la dimensión métrica y la dimensión métrica tolerante en grafos periplanos maximales. Concretamente, damos cotas ajustadas de ambos parámetros y caracterizamos los grafos que alcanzan las cotas inferiores.

Palabras clave. Dimensión métrica, dimensión métrica tolerante, grafo periplano maximal.

---

1 Introducción

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $W \subset V$ se dice que *resuelve* G si para todo par de vértices distintos u, $v \in V$ existe un vértice $w \in W$ tal que $d(u, w) \neq d(v, w)$. El mínimo cardinal de un conjunto que resuelve G se llama *dimensión métrica* de G, y lo denotamos $\beta(G)$. Un conjunto de cardinal mínimo que resuelve G se llama *base métrica* de G. Este problema ha sido largamente estudiado por sus muchas aplicaciones en diferentes áreas (ver referencias de [1]).

En [4] se introdujo la siguiente variante en el concepto de resolución de un grafo. Un conjunto W que resuelve G es *tolerante*, FTRS para abreviar, si para cada $w \in W$, $W \setminus \{w\}$ es también un conjunto que resuelve el grafo G. La *dimensión métrica tolerante* de G es el cardinal mínimo de estos conjuntos, y la denotaremos $\beta'(G)$. Un FTRS de G de cardinal mínimo se llama *base métrica tolerante* de G. Si pensamos los vértices de un FTRS como sensores que nos dan información o como nodos de un circuito eléctrico, un FTRS ofrece toda la información correcta incluso cuando uno de los sensores o nodos no está funcionando,

[S] Parcialmente financiado por los proyectos Gen.Cat. DGR2021-SGR-00266, MICINN PID2019-104129GB-I00/MCIN/AEI/10.13039/501100011033, Gob. Aragón E41-23R.

lo cual hace que este concepto sea muy interesante desde la perspectiva de las aplicaciones y que su estudio haya tomado auge en estos últimos años.

En este trabajo estudiamos los parámetros β y β' en grafos periplanos maximales, MOP para abreviar. Un grafo $G = (V, E)$ es *periplano* si tiene una representación plana en la que todos los vértices están en el borde de la cara exterior y es *periplano maximal* si, además, al añadir una arista deja de ser periplano. Este tipo de grafos han sido ampliamente estudiados debido a que son de gran importancia tanto en el ámbito de la química, como en el análisis de la estructura de determinados biopolímeros como el RNA, o bien en el de triangulación de polígonos [2, 5].

2 Dimensión métrica en MOP

En [3] se estudia la dimensión métrica de grafos MOP y se han obtenido los siguientes resultados.

Teorema 1. *Sea G un grafo MOP de orden n, entonces* $2 \leq \beta(G) \leq \lceil 2n/5 \rceil$.

Además, se caracterizan los grafos MOP que verifican que $\beta(G) = 2$. Para ello se utiliza lo siguiente. Es conocido que los grafos con dimensión métrica 2, fijada una base métrica, se pueden representar como un subgrafo del producto fuerte de dos caminos $P_m \boxtimes P_m$ (donde $V(P_m) = \{0, 1, \dots, m-1\}$, $A(P_m) = \{\{i, i+1\} : 0 \leq i < m-1\}$), de forma que el vértice con coordenadas métricas (x_1, x_2) se sitúa en el punto con coordenadas cartesianas (x_1, x_2). Para todo entero $k \geq 1$, sea $A_k = \{(i, j) : i + j \leq k, \mid j - i \mid \leq k\}$ y $V_k = \{(i, j) : i + j = k\}$.

Llamamos *zigzag* a un subgrafo del producto fuerte inducido por un conjunto de vértices $\{(i + k, j + k) : 0 \leq k \leq r\} \cup \{(i + k, j + 1 + k) : 0 \leq k \leq s\}$, para algún $r \leq 1$ y $s \in \{r - 1, r\}$, o bien por un conjunto de vértices $\{(i + k, j + k) : 0 \leq k \leq r\} \cup \{(i + 1 + k, j + k) : 0 \leq k \geq s\}$, para algún $r \leq 1$ y $s \in \{r - 1, r\}$. En el primer caso diremos que es un zigzag con base la arista $\{(i, j), (i, j + 1)\}$ y en el segundo caso que es un zigzag con base la arista $\{(i, j), (i + 1, j)\}$.

Teorema 2. *Sea G un grafo MOP, entonces $\beta(G) = 2$ si y sólo si existe una representación G^* de G como subgrafo del producto fuerte de dos caminos tal que para algún $d \geq 1$,*

(1) $V(G^*) \subseteq A_d$, $V_d \cap A_d \subseteq V(G^*)$, y $E(G^*)$ contiene las aristas del camino mínimo que une $(0, d)$ y $(d, 0)$.

(2) $V_{d+1} \cap A_d \subseteq V(G^*)$ y para cada $(i, j) \in V_{d+1} \cap A_d$, $E(G^*)$ contiene las aristas $\{(i, j), (i - 1, j)\}$ y $\{(i, j), (i, j - 1)\}$.

(3) *Para cada par de vértices* $(i, j+1)$ *y* $(i+1, j)$ *de* V_{d+1} *con* $i, j \geq 1$*, o bien* $\{(i, j+1), (i+1, j)\} \in E(G^*)$ *o bien* $\{\{(i, j+1), (i+1, j+1)\}, \{(i+1, j), (i+1, j+1)\}, \{(i, j), (i+1, j+1)\}\} \subseteq E(G^*)$*. Además, si* $\{(i, j+1), (i+1, j)\} \in E(G^*)$ *pertenece a dos triángulos de* G^**, entonces* $(i+1, j+1) \in V(G^*)$ *y* $\{\{(i, j+1), (i+1, j+1)\}, \{(i+1, j), (i+1, j+1)\}\} \subseteq E(G^*)$*.*

(4) *Cualquier otro vértice o arista del gráfo pertenece a un zigzag con base la arista* $(0, d)(1, d)$*, o la arista* $(d, 0)(d, 1)$*, o cualquier otra arista de* G^* *de las descritas en los puntos anteriores con un extremo en* V_{d+1} *y el otro en* V_{d+2}*, con la condición adicional de que dos zigzag del grafo MOP no comparten ninguna arista.*

En cuanto a la cota superior, damos a continuación una familia de grafos que la alcanza cuando el orden es múltiplo de 5. Un *grafo abanico* de orden n, denotado por $F_{1,n-1}$, es un grafo MOP tal que uno de los vértices tiene grado $n-1$.

Proposición 1. *Sea* $n \geq 8$*, entonces* $\beta(F_{1,n-1}) = \lceil 2(n-2)/5 \rceil$*.*

3 Dimensión métrica tolerante en grafos MOP

Sea G un grafo MOP, sabemos que $\beta(G) \geq 2$ y por tanto $\beta'(G) \geq \beta(G) + 1 \geq 3$.

Sea H_6 el grafo con conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y aristas $E = \{\{i, i+1\} \ : \ 1 \leq i \leq 5\} \cup \{\{1, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 1\}\{1, 6\}\}$.

Proposición 2. *Sea* G *un grafo MOP de orden* $n \geq 3$*, entonces* $\beta'(G) = 3$ *si y sólo si* $G \cong H_6$ *o* $G \cong K_3$*.*

Así pues, si G es un grafo MOP de orden $n \geq 7$, entonces $\beta'(G) \geq 4$. Observamos que si G es un grafo MOP con $\beta'(G) = 4$, entonces $\beta(G) = 2$ o $\beta(G) = 3$. Hemos caracterizado todos los MOP con $\beta'(G) = 4$ y $\beta(G) = 2$. Queda abierto el problema de caracterizar los que tienen $\beta'(G) = 4$ y $\beta(G) = 3$. Por otra parte, hemos obtenido el siguiente resultado.

Proposición 3. *Sea* G *un grafo MOP de orden al menos* 7 *y* $\beta(G) = 2$*, entonces* $4 \leq \beta'(G) \leq 6$*.*

En cuanto a la cota superior, tenemos la siguiente conjetura, que de ser cierta, se alcanzaría por los grafos abanico.

Conjetura 1. *Sea* G *un grafo MOP de orden* $n \geq 7$*, entonces* $\beta'(G) \leq \lceil n/2 \rceil$*.*

Proposición 4. *Sea* $n \geq 8$*, entonces* $\beta'(F_{1,n-1}) = \lceil n/2 \rceil$*.*

Referencias

[1] Cáceres, J., Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I.M., Puertas, M.L., Seara C., Wood, D.R., On the Metric Dimension of Cartesian Products of Graphs, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 21 (2007), 423–441.

[2] Canales, S., Hernández, G., Martins, A. M., Matos, I. Distance domination, guarding, and covering of maximal outerplanar graphs, Discrete Applied Mathematics, 181 (1) (2015),41-49.

[3] Claverol, M., García, A., Hernández, G., Hernando, C., Maureso, M., Mora, M., Tejel, J. Metric dimension of maximal outerplanar graphs. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 44 (2021), 2603–2630.

[4] Hernando, C., Mora, M., Slater, P. J., Wood, D. R. Fault-tolerant metric dimension of graphs. Convexity in discrete structures, 5 (2008), 81–85.

[5] Leydold, J., Stadler, P. F. (1998). Minimal cycle bases of outerplanar graphs. SFI WORKING PAPER: 1998-01-011 (1998).