GD Geometria per al disseny
Pràctiques

2022-23 Q2 EEBE-UPC Mercè Claverol 1

PRÀCTICA : Introducció

Alguns elements bàsics

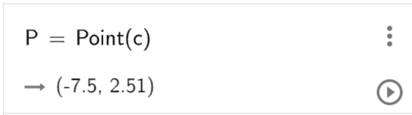
- **Punts, vectors i les seves coordenades.**

  Els punts i els vectors poden introduir-se en la línea d'entrada, o en cadascuna de les vistes.

  En general, les lletres majúscules representen punts i les minúscules, vectors. Així per exemple $P = (1, 2)$ és un punt i $v = (3, 4)$ un vector. Si el vector v té origen en A i final en B, també podem escriure $v = B - A$ o $v = Vector(A, B)$.

  Es pot obtenir un punt com el traslladat d'un altre, per exemple, $P = Point(A, v)$ o bé $P = A + v$.

  Si tenim una corba, diem-li c, i pintem un punt sobre ella, automàticament en l'entrada apareixerà escrit $P = Point(c)$. Podrem desplaçar el punt sobre la corba, o bé manualment, o bé accionant el triangulet encerclat que apareix en la vista algebraica. Una forma alternativa és crear un lliscador, diem-li t, i després en l'entrada escriure $P = c(t)$.

  Els punts introduïts en la fulla de càlcul s'anomenaran igual que la cel·la on són, si l'etiquetatge automàtic està activat.

  En $\mathbb{R}^2$ es pot accedir a les coordenades del punt i del vector amb les funcions $x(P), y(P)$ i o $x(v), y(v)$, respectivament. Anàlogament en espais d'altres dimensions.

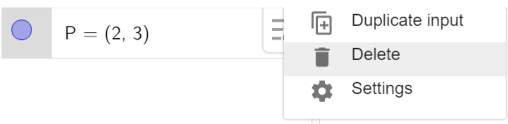
  La longitud d'un vector v es pot carcular amb la instrucció: $\text{Length}(v)$ que equival a fer $sqrt(v * v)$.

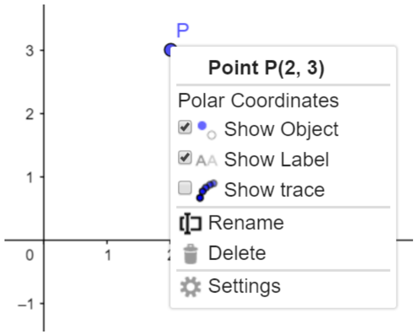
  Hi ha funcions específiques per obtenir a partir d'un vector v el corresponent vector unitari, el perpendicular o el producte vectorial amb un altre vector u: UnitVector(v), PerpendicularVector(v), Cross(u,v).

  Igual que en altres programes (com R), si a un punt o a un vector li sumem una constant, aquesta se suma a cadascuna de les coordenades. Per exemple, si $A = (a, b)$, $A + 1 = (a + 1, b + 1)$.

- **Propietats dels objectes, etiquetatge. Textos.**

  Quan introduïm un element podem veure i modificar la seva configuració (Settings) tant si cliquem sobre els tres punts de l'entrada en la vista algebraica i triem l'opció de les propietats (Settings), com si fem clic dret sobre l'objecte de la vista gràfica.

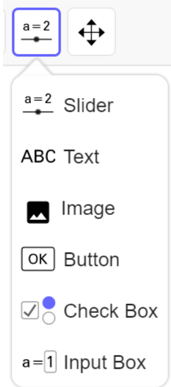
  

  Podem controlar si volem fer visible o no l'objecte clicant sobre el circle que apareix en la fila on està definit, en la vista algebraica. Podem també controlar-ho fent clic dret sobre l'objecte en la vista gràfica i marcant o desmarcant aquesta opció. De la mateixa manera podem actuar soble la visibilitat de l'etiqueta.

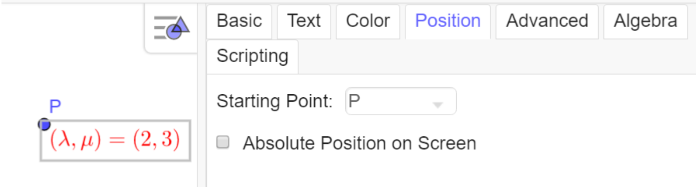
  Si en les propietats generals tenim marcada l'opció d'etiquetatge automàtic, cada cop que introduïm un element nou l'etiquetarà. Si no ens interessa, podem eliminar aquesta opció.

  En el desplegable de l'objecte trobem també altres opcions com la de canviar el nom. L'opció d'activar el traç (show trace) permet una visualització animada de l'objecte deixant rastre de cadascuna de les posicions per les que passa (per exemple, quan activem un slider i l'objecte que depèn d'ell té activada l'opció d'activar el traç, veurem les diferents posicions de l'objecte sense deixar de visualitzar-les a mesura que avança el lliscador).

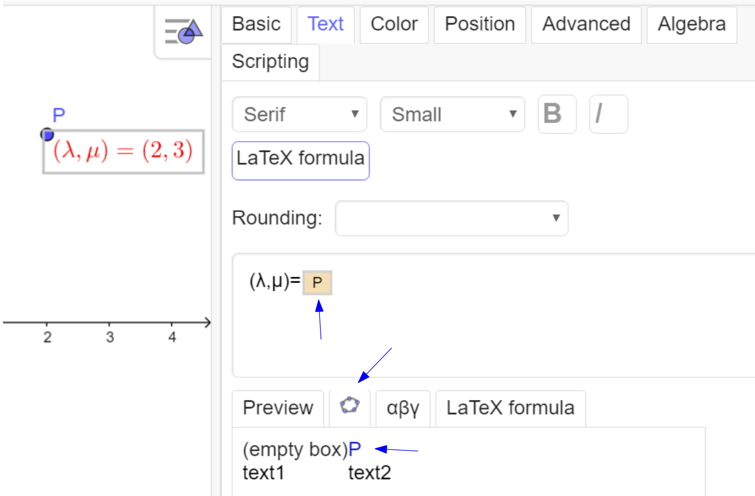
En la barra d'eines, en el desplegable de la icona del lliscador teniu l'opció de Text.



Els objectes es poden renombrar o podem voler un text en lloc de l'etiqueta. Un cop creat el text, si cliquem amb el botó dret i anem a configuració, podem triar el tipus de lletra (també lletres gregues), o escriure fórmules en Latex, o fixar la seva posició entre altres propietats.



Si per exemple voleu que apareguin les coordenades d'un punt, en les *opcions avançades* cliqueu la icona , aleshores apareixerà un text dient "empty box" (o requadre de fórmula en blanc) i al costat veureu els noms dels objectes que teniu en la vista 2D. Seleccioneu l'etiqueta del vostre punt (en l'exemple que teniu a la figura és P). Això farà que aparegui un requadre en el text amb el nom seleccionat i automàticament en el text de la vista 2D apareixeran les coordenades de P.



- **Matrius**

  Les matrius es representen com a llista de llistes que contenen les files de la matriu. Es poden introduir en la entrada algebraica, en la vista CAS, o introduir-les en el full de càlcul i crear després la matriu (clicant botó dret del ratolí l'opció de crear matriu).

  Si volem aplicar la matriu m al punt H, on m i H són:

  $m = \{\{3, 1, 0\}, \{0, 0, 2\}\{0, 0, 1\}\}$, $H = \{\{x\}, \{y\}, \{1\}\}$

  aleshores farem el producte d'ambdues matrius m*H o bé ApplyMatrix(m,H).

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Donada la matriu m, l'element de la fina i i columna j es pot cridar amb la instrucció Element(m,i,j).

  També es poden aplicar a m altres instruccions com:

  Determinant(m), Invert(m), Transpose(m), ApplyMatrix(m, Object), ReducedRowEchelonForm(m).

- **Llistes. Seqüències.**

  Les llistes s'introdueixem indicant els elements entre claus. Per exemple, $L_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és una llista de valors i $L_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ és una llista de punts.

  Si volem un element i-èsim de la llista L, el podem cridar amb la instrucció Element(L,i). La longitud de la llista es pot obtenir amb la instrucció Length(L).

  També es poden crear llistes directament des del full de càlcul. S'introdueixen els elements en les cel·les, es marquen les cel·les i fent clic dret s'escull l'opció de crear llista. Si són punts i no volem que s'etiquetin amb el nom de la cel·la, recordeu desmarcar l'etiquetatge automàtic en les propietats generals.

Les seqüències s'introdueixen amb la instrucció Sequence(expressió,variable,valor inicial, valor final, increment). Per exemple, de la instrucció Sequence(x^i,i,1,10,2) resulta: x, x^3, x^5, x^7, x^9.

Per indicar els valors inicial i/o final es poden utilitzar lliscadors. Si no s'indica l'increment, anirà del valor inicial al final d'un en un. Si hi ha més d'una variable, es poden fer seqüències niuades.

- **Corbes**
  - **Funcions**
    A l'input podem definir funcions i veure automàticament la seva representació gràfica.
    Per exemple, podem escriure en forma explícita $y = x^3$, o implícita $y - x^3 = 0$.
    Li podem donar un nom $f(x) = x^3$ o directament escrivim x^3 i el programa li assignarà un nom.

    Si volem restringir la funció a un interval, podem fer-ho amb la instrucció Function o amb un condicional: Function$(\exp(x), 0, 1)$ o equivalentment If$(0 \leq x \leq 1, \exp(x))$. Però també es pot fer servir la instrucció Curve$(x, \exp(x), x, 0, 1)$.

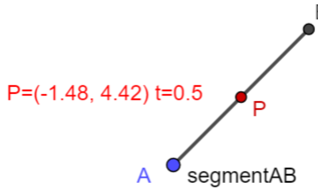
    Es poden utilitzar funcions per descriure les components de corbes parametritzades. En aquest cas, possiblement ens interessarà ocultar-les.

  - **Corbes en forma implícita**
    Són expressions de la forma $F(x, y) = 0$.
    Per exemple, la recta $x - y = 0$, o la circumferència $x^2 + y^2 = 4$ (les còniques també es poden crear amb la icona específica de la barra d'eines 2D). També es poden definir amb la instrucció ImplicitCurve$(x^2 + y^2 - 4)$.
  - **Corbes paramètriques**,
    Es poden introduir amb la instrucció Curve$(f(t), g(t), t, t_1, t_2)$, on f i g són funcions del paràmetre t que té per valor inicial t_1 i final t_2. Per exemple, Curve$(\cos(t), \sin(t), t, 0, 2\,pi)$ descriu una circumferència.
    Observeu que una corba en forma explícita $y = f(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$ sempre es pot expressar en forma paramètrica així: Curve$(x, f(x), x, x_1, x_2)$.
    També es poden escriure parametritzacions en forma vectorial. Per exemple, havent definit els punts A i B, podem escriure una parametrització en forma vectorial del segment AB, recorregut de A cap a B, fent:
    Curve$(A + t(B - A), t, 0, 1)$.
    Recordeu que quan teniu una expressió algebraica, en les propietats, en la pestanya *Algebra*, podreu seleccionar la forma en què voleu expressar l'input: forma extesa, reduïda o paramètrica.

- **Superfícies.**
  - **Superfícies en forma implícita**
    Són expressions de la forma $F(x, y, z) = 0$.
    En la versió actual de GeoGebra no admet qualsevol potència de les variables.
    Alguns exemples amb polinomis de graus més petits o igual a 2, són el pla $x + y + z = 1$, o l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (les cuàdriques també es poden crear amb la icona específica de la barra d'eines 3D).
    En les propietats, en la pestanya *Algebra*, podreu seleccionar la forma en què voleu expressar l'input: forma extesa o reduïda.
  - **Superfícies paramètriques**
    Es poden introduir amb la instrucció Surface$(f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v), u, u_1, u_2, v, v_1, v_2)$, on f_i són funcions dels paràmetres u i v que prenen valors en els intervals $[u_1, u_2]$ i $]v_1, v_2]$, respectivament.
    Observeu que una corba en forma explícita $z = f(x, y)$, $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$ sempre es pot expressar en forma paramètrica així: Surface$(x, y, f(x, y), x, x_1, x_2, y, y_1, y_2)$.

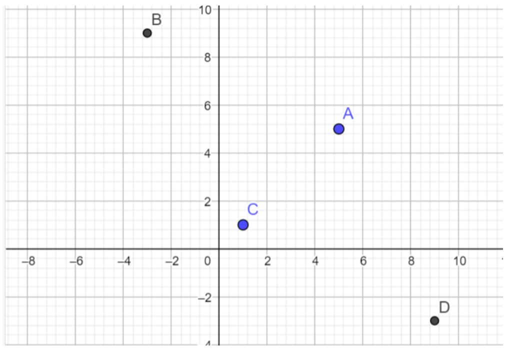
Exercici 1 (Segments)

1. Introduïu a la línia d'entrada A, B i c. Quin tipus de corba és?
   $A = (1, 1)$
   $B = A + 3$
   c=Curve$((1 - t)A + tB, t, 0, 1)$
2. Comproveu que Curve$(A + t\,Vector(A, B), t, 0, 1)$ dona la mateixa corba c.
3. Creeu un lliscador (clicant la icona corresponent i després la vista gràfica 2D), de nom t, valor mínim 0, màxim 1, i increment 0.1. Després, en la línea d'entrada, definiu $P = c(t)$. Observeu que P és un punt de la corba c, que anirà variant segons el valor del lliscador, que hem anomenat com el paràmetre de la corba t.
4. Poseu un text en la posició de P que indiqui les seves coordenades i també el valor del lliscador.



Exercici 2 (Punts més vectors. Treballar en la vista CAS)

Introduïu $A := (5, 5)$ i $C := (1, 1)$, que seran els dos vèrtexs no consecutius d'un rombe (paral·lelogram amb tots els costats d'igual longitud). Sabent que el costat AD és paral·lel a la recta $(x, y) = (5, -1) + t(1, -2)$ i el tercer vèrtex és $B = (-3, 9)$, trobeu la coordenada del vèrtex que falta.
Feu que al costat del nom dels punts apareguin les seves coordenades.

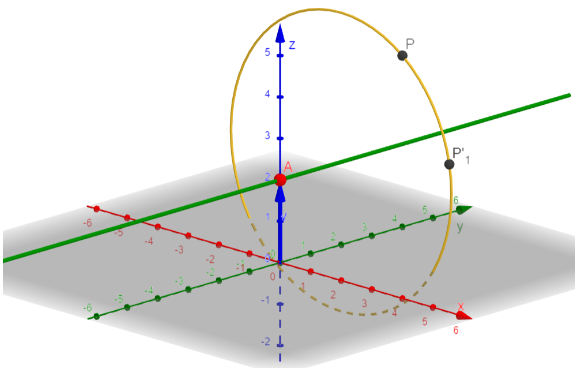


Exercici 3 (Matrius)

Introduïu el punt $P = (a, b, c)$ i el vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ (automàticament es crearan els lliscadors per cadascuna de les coordenades). Definiu les matrius descrites a continuació i feu el producte. Definiu el punt P' com les tres primeres files de la matriu resultant d'aquest producte:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x(v) \\ 0 & 1 & 0 & y(v) \\ 0 & 0 & 1 & z(v) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & 0 & \sin(\pi/4) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\pi/4) & 0 & \cos(\pi/4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x(v) \\ 0 & 1 & 0 & -y(v) \\ 0 & 0 & 1 & -z(v) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(P) \\ y(P) \\ z(P) \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Experimenteu amb els lliscadors per observar la relació entre P i P'.



Exercici 4 (Llistes)

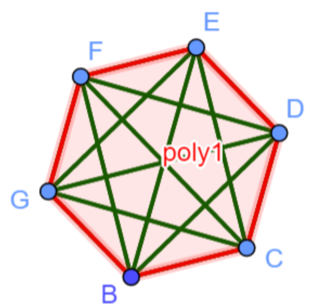
Donat un conjunt de punts, volem obtenir la llista de les seves abscisses i també de les ordenades.

1. En la vista gràfica dibuixeu 5 punts. Siguin per exemple, A, B, C, D i E.
2. Volem introduir-los en el full de càlcul (Spreadsheet). Perquè al fer-ho no torni a etiquetar els punts, aneu a les propietats generals i desmarqueu l'opció d'etiquetar automàticament, marcant l'opció de no etiquetar els objectes nous.

   Introduïu els punts en la primera columna del full de càlcul, posant el nom en cada cel·la (A intro, B intro,...). Reserveu la cel·la A1 per donar-li un nom a la columna, per exemple, *Punts*.
3. A la segona columna obtindreu les primeres coordenades de cada punt. En B1 anomeneu la columna (*Abscisses*). En B2 escriureu $x(A2)$ i feu intro. Marqueu aquesta cel·la, copieu (crtl C) i des de l'extrem inferior dret arrossegueu fins a B6.
4. Obteniu de manera anàloga les segones coordenades de cada punt en la tercera columna.
5. Marqueu cada columna i amb clic dret creeu una llista per a les abscisses i una altra per a les ordenades.

Exercici 5 (Seqüències)

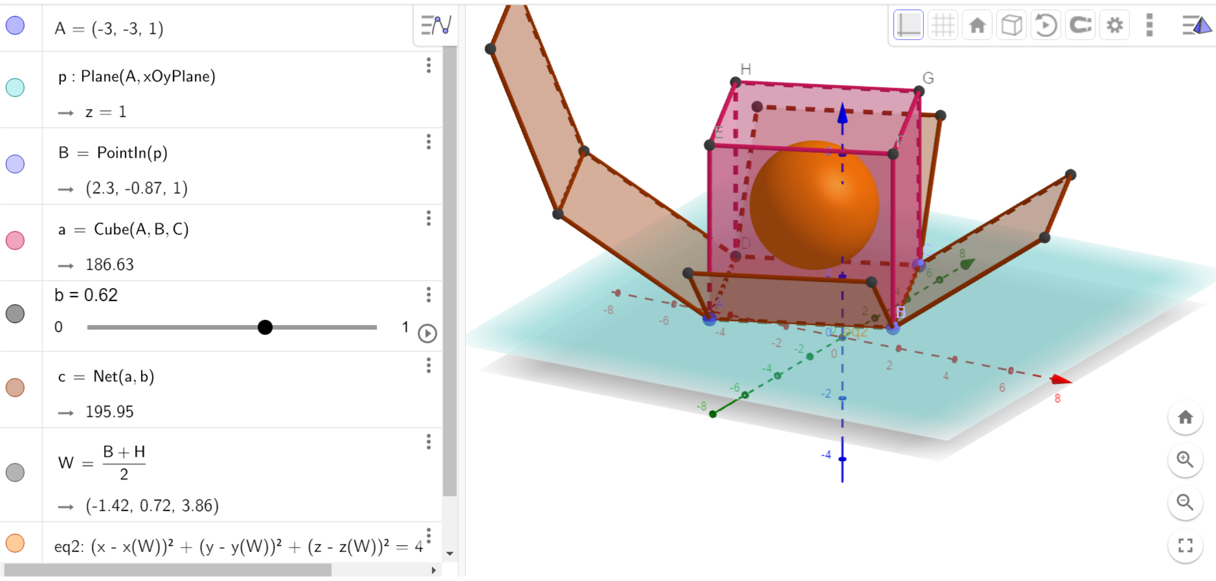
1. En la vista gràfica dibuixeu un polígon regular amb la icona corresponent en la barra d'eines.
2. En la línea d'entrada definiu una llista amb les etiquetes dels vèrtexs del polígon que heu creat.
3. Feu un segment que uneixi dos element de la llista utilitzant les instruccions *Curve* per al segment i *Element* per indicar els elements de la llista escollits.
4. Amb seqüències anidades, feu que tots els vèrtexs del polígon estiguin units entre sí mitjançant segments.



Exercici 6 (Eines Vista 3D)

En aquest exercici veurem entre altres coses que el cub és una *superfície desenvolupable* fent servir les icones de la barra d'eines 3D.

1. En la vista gràfica 3D, activa la icona de dibuixar punts. Només podreu dibuixar el punt sobre algun objecte, en aquest cas sobre el pla $z = 0$. Amb les fletxes que us apareixen podreu moure'l pel pla o fora d'ell. Coloqueu el punt lleugerament per sobre del pla.
2. Amb la icona corresponent, feu un pla paral·lel al pla $z = 0$ passant pel punt que heu creat.
3. Dibuixeu un altre punt sobre el nou pla i amb la icona dels poliedres, creeu un cub que passi per aquests dos punts.
4. En el desplegable dels poliedres (sota la icona del cub) trobareu l'opció de desenvolupament (net), apliqueu-la al cub. Automàticament es crearà uns slider en la vista algebraica. Podeu recórrer els seus valors accionant el triangulet encerclat del final de la línea algebraica.
5. Amb centre al punt mig de dos vèrtexs no adjacents del cub, dibuixeu una esfera de radi 2.


A = (-3, -3, 1)
p : Plane(A, xOyPlane)
→ z = 1
B = PointIn(p)
→ (2.3, -0.87, 1)
a = Cube(A, B, C)
→ 186.63
b = 0.62
0
1
c = Net(a, b)
→ 195.95
W = (B + H) / 2
→ (-1.42, 0.72, 3.86)
eq2: (x - x(W))² + (y - y(W))² + (z - z(W))² = 4
H
G

GD Geometria per al disseny
Pràctiques

2021-23 Q2 EEBE-UPC Mercè Claverol **2**

PRÀCTICA: Coordenades Baricèntriques

Convexitat, envolupant convexa. Coordenades baricèntriques. Combinacions baricèntriques o afins.

Un sistema de coordenades ve donat per un punt de l'espai geomètric que estem considerant (l'origen de coordenades) i un conjunt de vectors independents d'aquest espai. Aleshores qualsevol punt de l'espai P es pot expressar de manera única com l'origen més una combinació dels vectors del sistema de coordenades.

Equivalentment, si expressem els vectors del sistema de referència com a resta de punts, qualsevol punt P d'un espai de dimensió n s'expressa de manera única com a combinació lineal de $n+1$ punts on els coeficients sumen 1.

Per exemple, siguin A, B i C 3 punts no alineats del pla.
Sigui A l'origen de coordenades i $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ els dos vectors del sistema de coordenades.
Podem expressar qualsevol punt P del pla com: $\boxed{P = A + a\vec{AB} + b\vec{AC}}$, aleshores:

$\boxed{P = (a, b)}$ són coordenades afins de P en la referència $\{A; \vec{AB}, \vec{AC}\}$, i
$\boxed{P = (1-(a+b), a, b)}$ les baricèntriques de P en $\{A; B, C\}$.

Observem gràficament la interpretació de les coordenades.

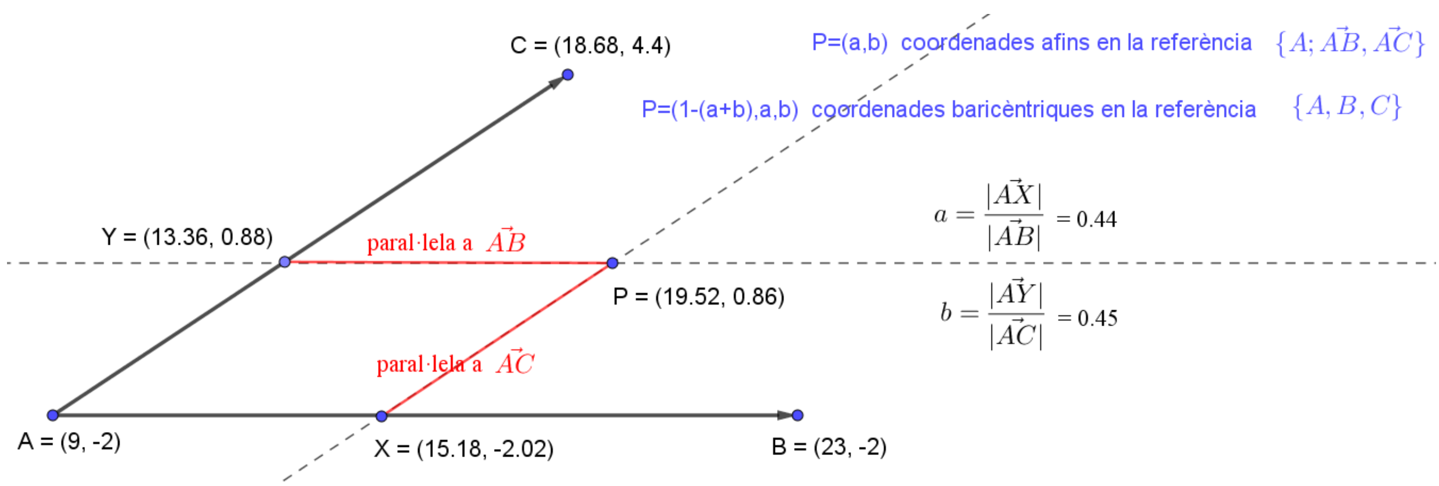
Sigui X punt projecció de P sobre $\vec{AB}$ en la direcció de $\vec{AC}$.

Sigui Y punt projecció de P sobre $\vec{AC}$ en la direcció de $\vec{AB}$.

Aleshores, les coordenades afins de P en la referència $\{A; \vec{AB}, \vec{AC}\}$, són:

$$a = \frac{|\vec{AX}|}{|\vec{AB}|} \qquad b = \frac{|\vec{AY}|}{|\vec{AC}|}$$

però amb signe positiu o negatiu, depenent de si la parella de vectors que defineixen la coordenada tenen el mateix o diferent sentit, respectivament.



Combinacions baricèntriques o afins

Encara que no formin referència, podem realitzar combinacions baricèntriques o afins de diversos punts $\{P_1, \cdots, P_n\}$ i escriure **un punt** P com

$$P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$$

on λ_i són **els coeficients de la combinació** que **hauran de sumar 1**,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Es pot pensat com que el punt P és el baricentre dels punts $P_1, \cdots, P_n$ amb els pesos $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

Per exemple, donats tres punts A, B i C en $\mathbb{R}^3$, no colineals, la combinació afí

$$\alpha A + \beta B + \gamma C, \quad \text{on} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \alpha + \beta + \gamma = 1$$

representa el pla que passa pels tres punts i els coeficients (α, β, γ) són les coordenades baricèntriques dels punts del pla.

Les aplicacions afins f respecten les combinacions baricèntriques,

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(P_i)$$

Més endavant veurem que aquest fet és clau en les parametritzacions de les corbes de Bézier atès que aquestes corbes són combinacions afins dels seus punts de control!

Raó simple

La raó simple de tres punts alineats descriu la proporció en què un dels punts divideix al segment definit pels altres dos. Si el punt $P = A + t\vec{AB}$, és a dir, P té coordenades baricèntriques $(1-t, t)$ en la referència $\{A; B\}$, aleshores la raó simple $r(A, P, B)$ es pot definir com :

$$r(A, P, B) = \frac{t}{1-t}$$

Observa que: $P = A + t\vec{AB} = A + t(\vec{AP} + \vec{PB}) \Longrightarrow \vec{AP} = t(\vec{AP} + \vec{PB}) \Longrightarrow \vec{AP}(1-t) = t\vec{PB} \Longrightarrow \boxed{\vec{AP} = \frac{t}{1-t}\vec{PB}}$

Però també trobem altres maneres de definir la raó simple com ara la que ens dóna GeoGebra si $P = A + t\vec{AB}$:

$$\text{AffineRatio} = (\text{punt origen}, \text{punt final}, \text{punt alineat}) = \text{AffineRatio}(A, B, P) = t$$

Observa que: $P = A + t\vec{AB} \Longrightarrow \boxed{\vec{AP} = t\vec{AB}}$

Cal saber quina definició estem utilitzant (si estem descrivint la proporció entre $\vec{AP}$ i $\vec{PB}$, o entre $\vec{AP}$ i $\vec{AB}$), però les propietats que se'n deriven d'ambdues definicions són les mateixes.

La importàcia de la raó simple rau en què és invariant per les aplicacions afins. De fet,
les aplicacions afins es caracteritzen per ser les úniques que conserven la raó simple de tres punts alineats.

Qüestions:

1. Considereu la referència canònica de $\mathbb{R}$, $\{A; \vec{AB}\}$, on $A = 0$ i $B = 1$.

   (a) Comproveu que $P = (1-t)A + tB \Longrightarrow \vec{AP} = t\vec{AB}$.

   (b) Esbrineu en quina part de la recta que passa per A i B, les dues coordenades de $P = (1-t, t)$ estan entre 0 i 1.

   (c) Per quin valor de t el punt descrit és A? I B?

   (d) Quins són els punts de la recta per als quals $t > 1$ (i, per tant, $1 - t < 0$).
   Anàlogament quins són els punts per a $t < 0$ (i, per tant, $1 - t > 1$).

   (e) Considereu coordenades baricèntriques en la referència $\{A; B\}$. Marca en la recta per A i B els punts amb les coordenades baricèntriques següents: $P = (1/2, 1/2)$, $Q = (-1, 2)$ i $R = (2, -1)$.

2. Considereu la referència canònica de $\mathbb{R}^2$, $\{A; \vec{AB}, \vec{AC}\}$, on $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, i $C = (0,1)$. En aquesta referència, considereu el punt $P = (p_1, p_2)$ i el vector $v = (v_1, v_2)$.

   (a) Quines són les coordenades baricèntriques del punt P en la referència $\{A; B, C\}$?

   (b) Quines són les coordenades baricèntriques del vector v en la referència $\{A; B, C\}$? (Indicació: utilitzeu que $v = v_1\vec{AB} + v_2\vec{AC}$ i expresseu els vectors com a resta de punts.)

   (c) En quina regió del pla estarà P si les seves coordenades baricèntriques són positives?

   (d) Dibuixeu l'envolupant convexa del conjunt $\{A, B, C\}$, és a dir, el convex més petit que conté als tres punts. És la regió de l'apartat anterior?

3. Considereu la referència canònica de $\mathbb{R}^3$, $\{A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\}$, on $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)$ i $D = (0,0,1)$. En aquesta referència, considereu el punt $P = (p_1, p_2, p_3)$ i el vector $v = (v_1, v_2, v_3)$.

   (a) Quines són les coordenades baricèntriques del punt P en la referència $\{A; B, C, D\}$?

   (b) Quines són les coordenades baricèntriques del vector v en la referència $\{A; B, C, D\}$?

   (c) En quina regió del pla estarà P si les seves coordenades baricèntriques són positives?

   (d) Dibuixeu l'envolupant convexa del conjunt $\{A, B, C, D\}$, és a dir, el convex més petit que conté als tres punts. És la regió de l'apartat anterior?

Exercici 1

El farem utilitzant l'opció de càlcul simbòlic, CAS, que trobareu en *view* al menú de la barra superior de Geogebra.

Dibuixem 3 punts no alineats, A, B i C, i un quart punt P.

Fixades les coordenades de P en la referència canònica, com trobar les coordenades en la referència $\{A; B, C\}$?

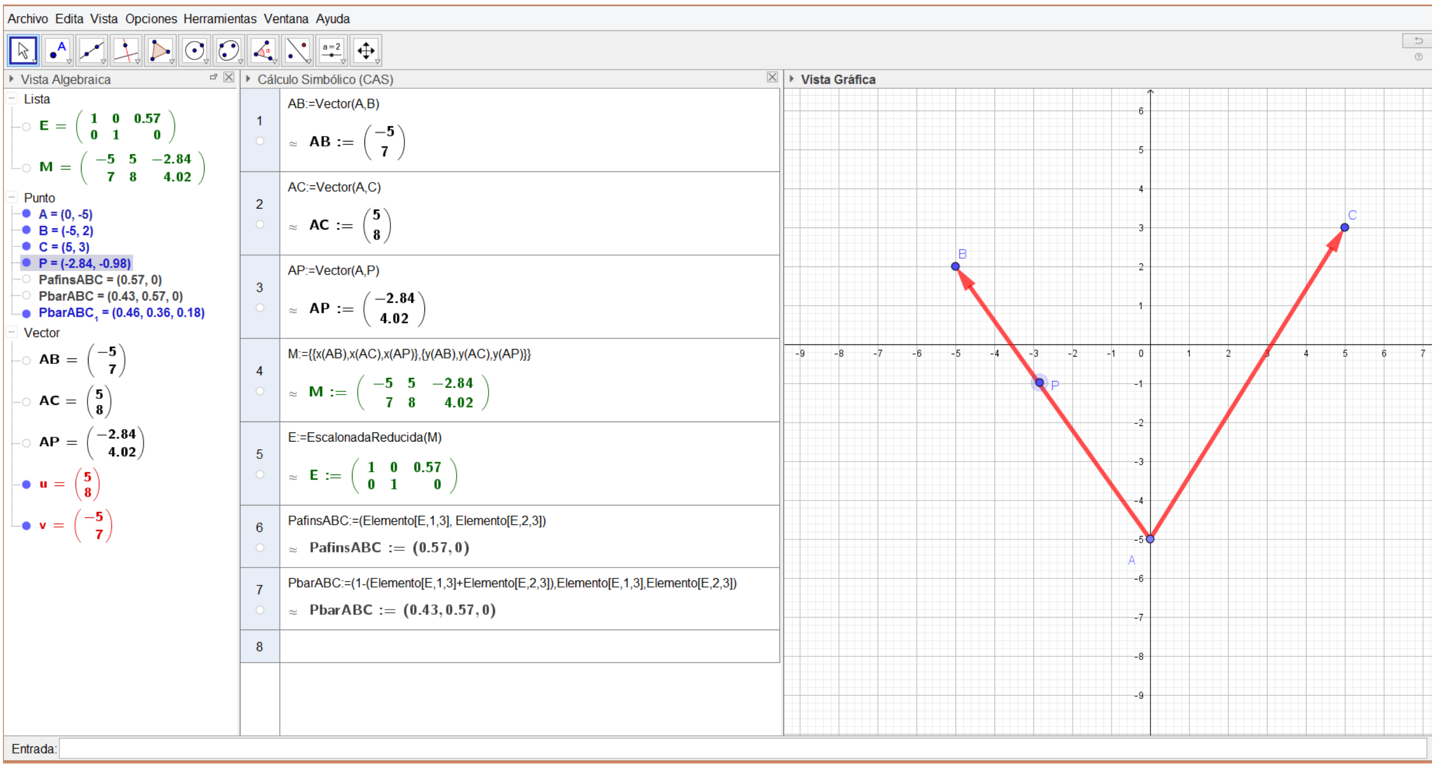
Resoldrem el sistema donat per: $\vec{AP} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$, on les incògnites són a i b:

A CAS:

Definim els vectors:
AB :=Vector(A, B), AC := Vector(A, C) i AP := Vector(A, P).

Definim la matriu del sistema i el resolem:
$M := \{\{x(AB), x(AC), x(AP)\}, \{y(AB), y(AC), y(AP)\}$
E:=ReducedRowEchelonForm(M)

PafinsABC:=(Element(E,1,3), Element(E,2,3))
PbarABC:=(1 - (Element(E,1,3) + Element(E,2,3)), Element(E,1,3), Element(E,2,3))



Qüestions:

1. Considereu $A = (0, -5)$, $B = (-5, 3)$, $C = (4, 1)$ i $P = (0, 0)$. Quines són les coordenades afins de P en la referència $\{A; \vec{AB}, \vec{AC}\}$? I les coordenades baricèntriques en la referència $\{A; B, C\}$?

2. Col·loqueu A, B, C on vulgueu, sempre que no estiguin alineats.

   (a) Situeu el punt P sobre el vector $\vec{AB}$ (o recta suport d'aquest vector). Quin és el valor de la segona coordenada afí en la referència $\{A; \vec{AB}, \vec{AC}\}$?

   (b) Si col·loquem P sobre el vector $\vec{AC}$, quin és el valor de la primera coordenada?

   (c) Des de la vora del triangle ABC, moveu lleugerament el punt P cap a l'interior i després cap a l'exterior, quin canvis observeu en les coordenades baricèntriques?

Exercici 2

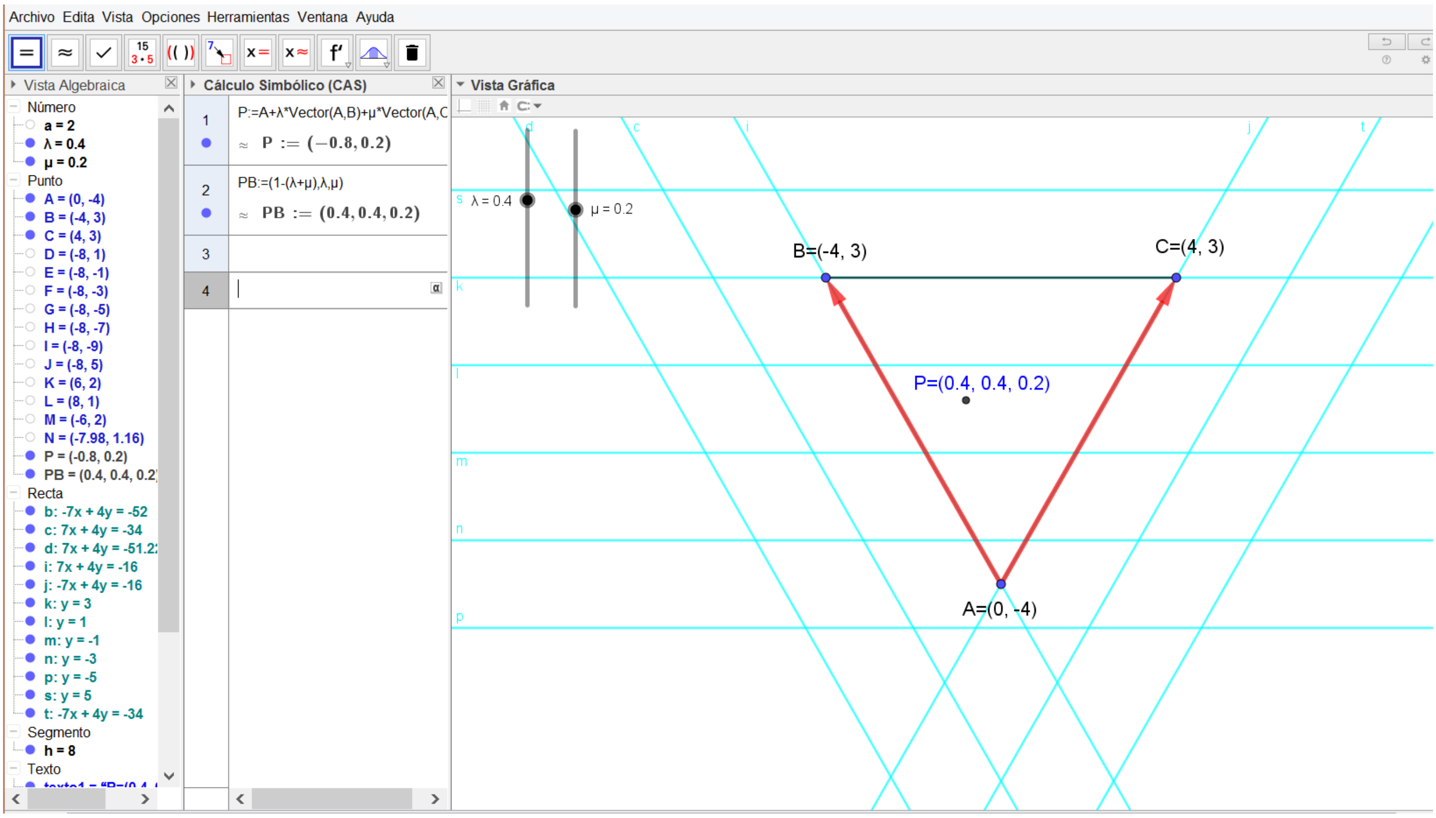
Dibuixem tres punts A, B i C i els vectors $\vec{AB}$ i $\vec{BC}$.
Definim dos lliscadors λ i μ i el punt P en funció d'ells:

$$P := A + \lambda{*}\text{Vector}(A, B) + \mu{*}\text{Vector}(A, C)$$

Les coordenades de P (afins en la referència canònica) aniran canviant segons canviem els valors de λ i μ.
Perquè figurin les coordenades baricèntriques en la posició de P, definim

$$PB := (1 - (\lambda + \mu), \lambda, \mu)$$

i en la gràfica creem un text que digui $P = PB$ i l'ubiquem en P.

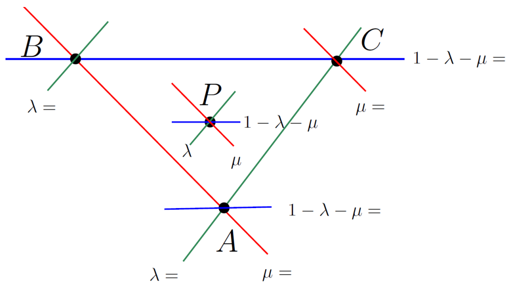


Qüestions:

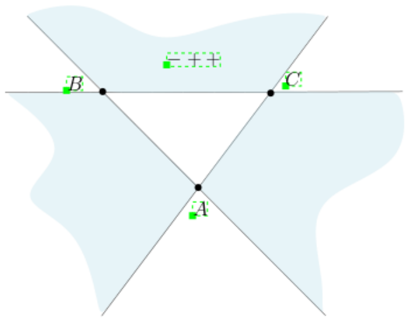
1. Dibuixeu 3 punts A, B, C no alineats, i definiu un quart punt $P = A + \lambda{*}\text{Vector}(A, B) + \mu{*}\text{Vector}(A, C)$ fent servir dos lliscadors, un per a λ i l'altre per a μ. Doneu diferents valors per a λ i μ i anoteu quines són les coordenades de P en la referència canònica.

2. Definiu ara les coordenades baricèntriques de P en la referència $\{A, B, C\}$. Movent el punt P, determineu la regió on siguin totes tres positives i digueu si els seus valors es mantenen dins de l'interval $[0, 1]$.

   Completeu els valors de λ i μ en els punts A, B i C de la figura següent:



3. Las rectes que contenen als costats del triangle ABC delimiten al pla en set regions. Dibuixeu algunes rectes paral·leles als tres costats del triangle ABC i analitzeu com canvien sobre elles el signe i valor de les coordenades baricèntriques de P. Treieu conclusions sobre els signes de les coordenades d'un punt en cadascuna de les set regions.



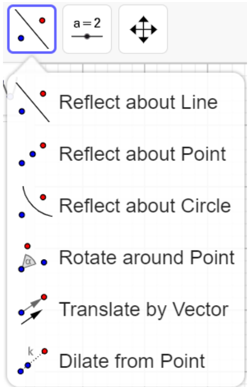
GD Geometria per al disseny
Pràctiques

2022-23 Q2 EEBE-UPC Mercè Claverol **2**

PRÀCTICA : Afinitats

Afinitats en $\mathbb{R}^2$. Translació. Rotació. Simetries (central, axial). Escalatge

En la vista 2D de Geogebra hi ha una icona que us facilitarà l'aplicació de les afinitats esmentades.



Coordenades homogènies

Per al punt de coordenades $P = (a, b)$ existeix un punt en **coordenades homogènies** (x, y, t) tal que $a = x/t$ i $b = y/t$.

Per exemple, el punt $P = (3, 4)$ té coordenades homogènies $(6, 8, 2)$, $(15, 20, 5)$ o qualsevol (x, y, t) tal que $x/t = 3$ i $y/t = 4$.

Podem imaginar que els punts (x, y, t) són punts a l'espai on t és la variable z. En lloc de treballar en dos dimensions podem treballar en un pla de l'espai tridimensional. La misió de la coordenada t és escalar les coordenades x, y. Si fem $t = 1$, tots els punts estan en el pla $z = 1$ i no caldrà fer cap escalament. Així doncs, considerarem que el punt (x, y) té coordenades homogènies $(x, y, 1)$ i el vector (v_1, v_2) té coordenades homogènies $(v_1, v_2, 0)$.

Utilitzarem les coordenades homogènies en les transformacions geomètriques (afinitats) perquè com veureu més endavant ens permetrà fer seqüències o composicions de transformacions de forma ràpida i eficient.

Afinitats en $\mathbb{R}^2$

1. **Translació** T_v **:** Transformació geomètrica que aplicada al punt $P = (x, y)$ el desplaça seguint una trajectòria recta indicada per un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ fins a $P' = (x', y')$.

$$\begin{aligned} x' &= x + v_1 \\ y' &= y + v_2 \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

   Observeu que matricialment no podem expressar la translació amb una matriu (2×2) aplicada al punt $P = (x, y)$. Volem poder representar cada afinitat amb una sola matriu perquè això ens facilitarà la composició d'afinitats (serà producte de matrius).

   Utilitzarem **matrius ampliades** 3×3 i **coordenades homogènies** (afegint una tercera coordenada igual a 1 als punts i 0 als vectors):

$$\begin{aligned} x' &= x + v_1 \\ y' &= y + v_2 \\ 1 &= 1 \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. **Rotació** G_P^{θ} **:** Transformació geomètrica que aplicada al punt $P = (x, y) = (r\cos\Phi, r\sin\Phi)$ el desplaça seguint una trajectòria circular, que depèn d'un centre $C = (c_1, c_2)$ i un angle θ, fins a un punt $P' = (x', y')$. L'angle és positiu si gira en sentit antihorari (negatiu en sentit horari).

- Si $C=(0,0)$,

$$x' = r\cos(\Phi+\theta) = r\cos\Phi\cos\theta - r\sin\Phi\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = r\sin(\Phi+\theta) = r\sin\Phi\cos\theta + r\cos\Phi\sin\theta = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$\begin{array}{l} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{array} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Amb matrius ampliades: $$\begin{array}{c} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \\ 1 = 1 \end{array} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si $C=(c_1,c_2)\neq(0,0)$, seguirem els passos següents:

  (1) Aplicar una translació que porti el centre C a l'origen $(0,0)$: $T_{(-c_1,-c_2)}$

  (2) Girar amb angle θ i centre $O=(0,0)$: G_O^θ

  (3) Desfer la translació inicial, de manera que el punt de rotació torni a la seva posició original: $T_{(c_1,c_2)}$

  Resumint (1)-(3): $\boxed{T_{(c_1,c_2)}\circ G_O^\theta\circ T_{(-c_1,-c_2)}}$, amb matrius ampliades: $\widehat{T}_{(c_1,c_2)}\,\widehat{G}_O^\theta\,\widehat{T}_{(-c_1,-c_2)}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & -c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Observeu que la **rotació** G_P^π ens dóna una **simetria central**.

3. **Simetria axial** S_r **:** Transformació geomètrica que aplicada al punt $P=(x,y)$ li fa correspondre un altre P' de manera que l'eix és la mediatriu del segment PP'.

- Simetria respecte de l'eix OY,

Amb matrius ampliades: $$\begin{array}{c} x' = -x \\ y' = y \\ 1 = 1 \end{array} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Si la simetria és respecte a una recta $x=a$, paral·lela a l'eix OY, feu primer una translació que porti la recta a l'eix OY i després d'aplicar la simetria feu la translació inversa: $\boxed{T_{(a,0)}\circ S_{OY}\circ T_{(-a,0)}}$

- Simetria respecte de l'eix OX,

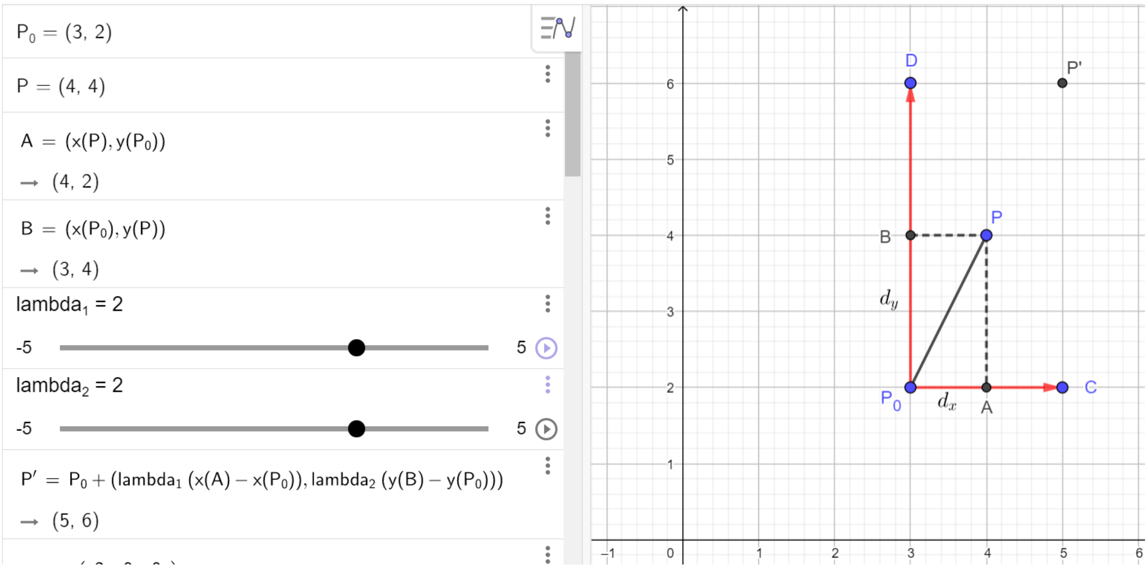
Amb matrius ampliades: $$\begin{array}{c} x' = x \\ y' = -y \\ 1 = 1 \end{array} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Si la simetria és respecte a una recta $y=b$, paral·lela a l'eix OX, feu primer una translació que porti la recta a l'eix OX i després d'aplicar la simetria feu la translació inversa: $\boxed{T_{(0,b)}\circ S_{OX}\circ T_{(0,-b)}}$

4. **Escalatge** $E_P^{\lambda_1\,\lambda_2}$ **:** Transformació geomètrica respecte d'un punt fix $P_0=(x_0,y_0)$ i amb factors d'escala λ_1 i λ_2, que aplicada sobre un punt $P=(x,y)$ el mou a un nou punt $P'=(x',y')=P_0+(\lambda_1\,d_x,\lambda_2\,d_y)$, on d_x és la distància horitzontal entre P_0 i P i d_y la vertical. Si l'escalatge és uniforme, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, aleshores és una homotècia H_P^λ

Exemple. $P_0=(3,2)$, $P=(4,4)$. Si apliquem a P una homotècia de centre P_0 i paràmetres $\lambda_1=\lambda_2=2$, aleshores:

$$P' = P_0+(\lambda_1\,d_x,\lambda_2\,d_y) = (3,2)+(2\cdot(4-3),2\cdot(4-2)) = (5,6)$$



- Si $\color{red}{P_0 = (0,0)}$,

$$\begin{array}{l} x' = \color{red}{\lambda_1}\, x \\ y' = \color{red}{\lambda_2}\, y \end{array} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \color{red}{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Amb matrius ampliades:
$$\begin{array}{c} x' = \color{red}{\lambda_1}\, x \\ y' = \color{red}{\lambda_2}\, y \\ 1 = 1 \end{array} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

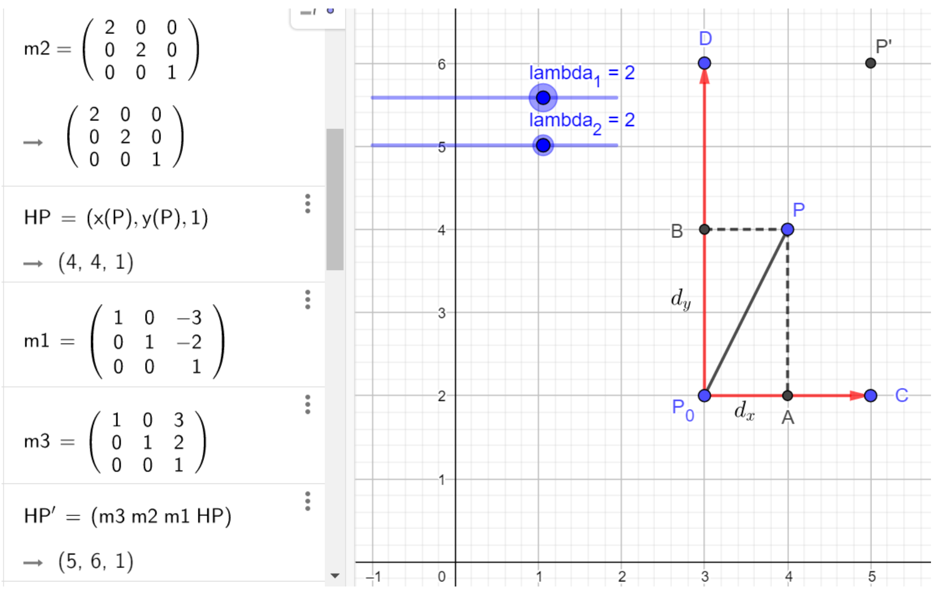
- Si $\color{red}{P_0 = (x_0, y_0) \neq (0,0)}$, seguirem els passos següents:

  (1) Aplicar una translació que porti el punt fix $P_0 = (c_1, c_2)$ a l'origen $(0,0)$: $T_{(-c_1,-c_2)}$

  (2) Escalar amb $P_0 = (0,0)$ i factors λ_1 i λ_2: $E_O^{\lambda_1\,\lambda_2}$

  (3) Desfer la translació inicial: $T_{(c_1,c_2)}$

Resumint (1)-(3): $\boxed{T_{(c_1,c_2)} \circ E_O^{\lambda_1\,\lambda_2} \circ T_{(-c_1,-c_2)}}$ amb matrius ampliades: $\widehat{T}_{(c_1,c_2)}\, \widehat{E}_O^{\lambda_1\,\lambda_2}\, \widehat{T}_{(-c_1,-c_2)}$



AplicaMatriz(m3, AplicaMatriz(m2, AplicaMatriz(m1, HP)))=m3*m2*m1*HP=HP'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \color{red}{3} \\ 0 & 1 & \color{red}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \color{red}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \color{red}{-3} \\ 0 & 1 & \color{red}{-2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$ =HP' coordenades homogènies de P'

Exercici 1 (Propietats bàsiques)

La composició d'afinitats no és commutativa, llevat que siguin totes del mateix tipus. Digueu quins serien els resultats en els casos següents:

1. $T_{v_3} \circ T_{v_2} \circ T_{v_1} =$
2. $G_P^{\theta_1} \circ G_P^{\theta_2} \circ G_P^{\theta_3} =$
3. $E_P^{\lambda_5\,\lambda_6} \circ E_P^{\lambda_3\,\lambda_4} \circ E_P^{\lambda_1\,\lambda_2} =$

Exercici 2 (Propietats bàsiques)

Per a cadascuna de les afinitats de translació, rotació i escalatge, comproveu que les matrius inverses de les matrius ampliades són les indicades a continuació. Podeu fer-ho en la vista CAS de geogebra que us premetrà introduir les matrius amb paràmetres $a, b, \ldots$, (sense haver de definir sliders).
Expliqueu què fan. Completeu el cas de l'escalatge.

$$\widehat{T}_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{inversa} \widehat{T}_{(-a,-b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{R}_O^{\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{inversa} \widehat{R}_O^{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{E}_O^{\lambda_1\,\lambda_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{inversa} \widehat{E}_O^{?\,?} = \begin{pmatrix} ? & 0 & 0 \\ 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per experimentar, feu algun exemple en la vista CAS com el que teniu a continuació:

c1:=Curve$(\cos(t), \sin(t), t, 0, 1)$ descriu la corba a la que aplicarem la translació i la seva inversa

$T := \{\{1, 0, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 0, 1\}\}$ matriu ampliada de la translació

Ti:=Invert(M) matriu inversa

$P := (\cos(t), \sin(t), 1)$ punt genèric de c_1 amb coordenades homogènies

$T * P$ apliquem T a P

c1:=Curve$(\cos(t) + 2, \sin(t) + 3, t, 0, 1)$ corba resultant

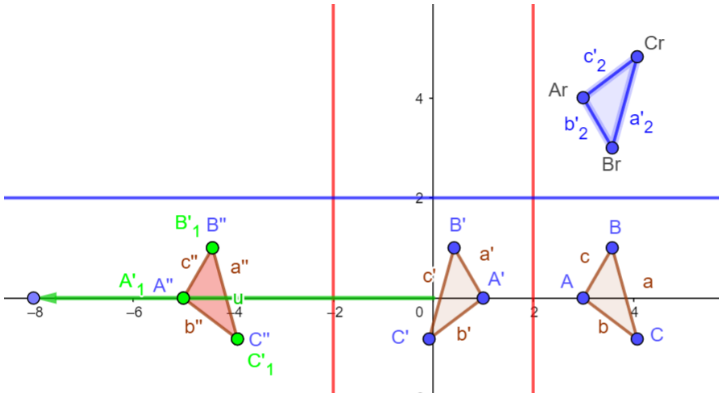
$Ti * P$ apliquem Ti a P

c2:=Curve$(\cos(t) - 2, \sin(t) - 3, t, 0, 1)$ corba resultant

Observació: per aplicar la matriu a P en la vista algebraica, cal definir P com una matriu columna.

Exercici 3 (Simetria axial)

1. A la dreta de la recta $x = 2$, dibuixeu un triangle de vèrtexs A, B i C. Apliqueu-li una simetria d'eix $x = 2$ seguida d'una altra d'eix $x = -2$. El resultat final, en la figura el triangle de vèrtexs A'', B'' i C'', s'hagués pogut obtenir aplicant al triangle inicial una translació, quina?
2. Al triangle A, B, C apliqueu-li una simetria d'eix $y = 2$ per obtenir el triangle de la figura de vèrtexs A_r, B_r i C_R. Descriviu el resultat matricialment.



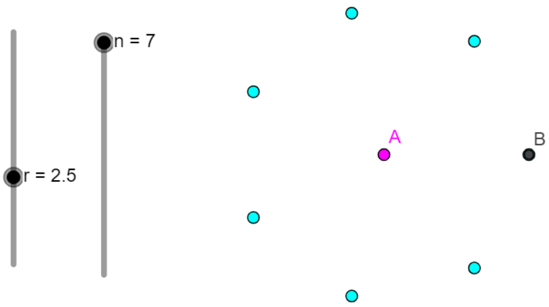
Exercici 4 (Rotacions amb Rotate)

1. En la vista gràfica, dibuixeu un punt, diem-li A.

2. Creeu un lliscador de nom r, amb valors positius. Definiu un punt B a distància r de A. Indicació: podeu per exemple definir B sumant al punt A, un vector de longitud r.

3. Definiu un lliscador de nom n amb valor mínim 2 i màxim 7, que definirà el nombre de vèrtexs d'un polígon regular. Utilitzant les instruccions Sequence i Rotate, heu d'obtenir aquests vèrtexs aplicant-li al punt B rotacions de centre A.

   Indicació: l'angle π es pot introduir escrivint: pi.



Exercici 5 (Translació Rotació i Escalatge amb matrius)

Al triangle de vèrtexs $A = (3, 2)$, $B = (3, 3)$ i $C = (5, 2)$ mitjançant la composició d'afinitats volem aconseguir que la hipotenusa sigui un segment vertical. Volem també triplicar la mida del triangle rotat deixant fix el punt $A' = (-4, 2)$. És a dir, volem transformar el triangle de la dreta de la figura en el de l'esquerra, de manera que A vagi a parar a A'.

1. Descriviu amb quins moviments podeu transformar A, B, C en A', B', C'.

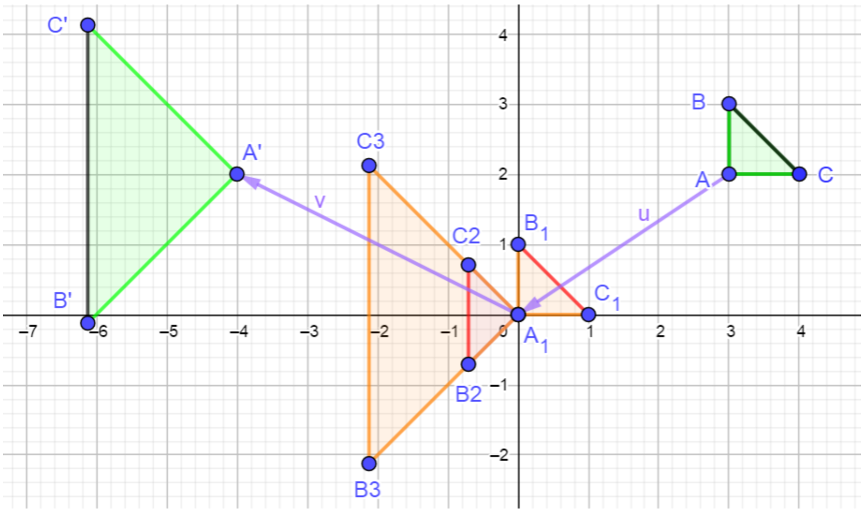
2. Feu la composició dels moviments expressant-los matricialment.

Indicacions:

- Atès que coneixeu A', la posició final de A, utilitzeu el vèrtex A per traslladar-lo a l'origen.

- Un cop tingueu les matrius ampliades de les afinitats podreu aplicar-les a les coordenades homogènies dels punts fent el producte en l'ordre convenient. Però no cal fer-ho punt a punt.

  Podeu definir una matriu que tingui per columnes les coordenades homogènies de tots els punts (vèrtexs del triangle inicial) i aplicar-li a aquesta matriu les matrius ampliades de les afinitats. Obtindreu alhora les coordenades homogènies dels punts solució (vèrtexs del triangle final).



C'
A'
B'
C3
C2
B2
B3
B
A
C
B1
C1
A1
u
v

GD Geometria per al disseny
Pràctiques

2022-23 Q2 EEBE-UPC Mercè Claverol **3.2**

PRÀCTICA : Afinitats

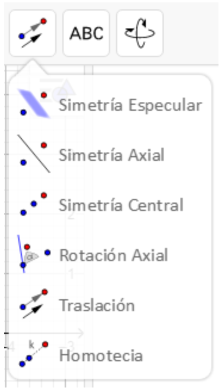
Afinitats en $\mathbb{R}^3$*. Translació. Rotació. Escalatge*

A l'espai geomètric de dimensió 3, 3D, els punts tindran tres coordenades (en les homogènies, afegirem un 1 com a quarta coordenada) i les matrius ampliades seran matrius 4×4.

Les translacions i els escalatges es defineixen de manera anàloga al cas 2D.

Les rotacions dependran d'un angle i d'un eix de rotació.

En la vista 3D de Geogebra hi ha una icona que us facilitarà l'aplicació d'aquestes afinitats.



1. **Translació** T_v **:** Transformació geomètrica que aplicada al punt $P = (x, y, z)$ el desplaça seguint una trajectòria recta indicada per un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ fins a $P' = (x', y', z')$.

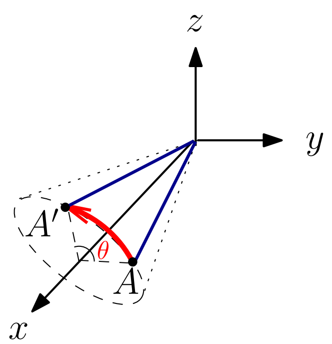
$$\begin{aligned} x' &= x + v_1 \\ y' &= y + v_2 \\ z' &= z + v_3 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Amb matrius ampliades:
$$\begin{aligned} x' &= x + v_1 \\ y' &= y + v_2 \\ z' &= y + v_3 \\ 1 &= 1 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. **Rotació** G_r^θ **:** Transformació geomètrica que aplicada al punt $P = (x, y, z)$ el desplaça seguint una trajectòria circular d'**angle** θ, en el pla perpendicular a una recta r, **eix de rotació**, fins a un punt $P' = (x', y', z')$. L'angle és positiu si gira en sentit antihorari (amb la regla de la ma dreta).

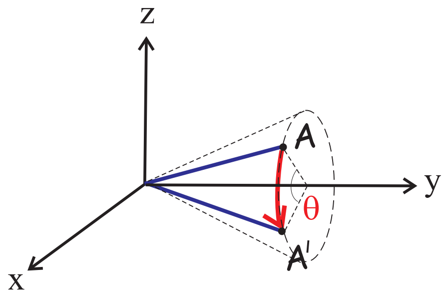
   - Si l'eix r és un dels eixos coordenats.
     - Gir d'angle θ al voltant de l'eix x: $\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y\cos\theta - z\sin\theta \\ z' &= y\sin\theta + z\cos\theta \end{aligned}$

$$\widehat{G}_{OX}^\theta = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$



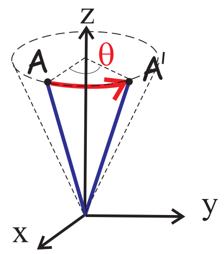
– Gir d'angle θ al voltant de l'eix y: $\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + z\sin\theta \\ y' &= y \\ z' &= -x\sin\theta + z\cos\theta \end{aligned}$

$$\widehat{G}^{\theta}_{OY} = \left(\begin{array}{ccc|c} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$



– Gir d'angle θ al voltant de l'eix z: $\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{aligned}$

$$\widehat{G}^{\theta}_{OZ} = \left(\begin{array}{ccc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$



Observeu que si fem una rotació en un pla coordenat, la transformació coincideix amb la descrita en 2D prenent com a centre de rotació el punt d'intersecció de l'eix de rotació amb el pla. Per exemple, si rotem en el pla xy ($z = 0$), l'eix de rotació r és paral·lel a l'eix z i el centre de gir és el punt $r \cap \{z = 0\}$.

- Si l'eix r no és un dels eixos coordenats, seguir els passos següents:
  (1) Aplicar una translació de manera que l'eix de rotació passi per l'origen de coordenades: T_v
  (2) Aconseguir que l'eix de rotació r coincideixi amb algun dels eixos de coordenades, per a la qual cosa poden fer falta dues rotacions:
    – Primera rotació d'angle α per portar r a un pla coordenat,
    per exemple, escollim el pla yz. Rodem al voltant de l'eix y fins que r estigui al pla yz: G^{α}_{OY}
    – Segona rotació d'angle β per fer coincidir r amb un eix coordenat,
    per exemple, rodant al voltant de l'eix x fins que r estigui sobre l'eix z: G^{β}_{OX}
  (3) Aplicar a l'objecte la rotació d'angle θ al voltant de la nova posició de r (eix de rotació),
  per exemple, al voltant de l'eix z: G^{θ}_{OZ}
  (4) Desfer, en ordre invers, les rotacions d'angles α i β del pas 2 i la translació inicial: $T_{-v} \circ G^{-\alpha}_{OY} \circ G^{-\beta}_{OX}$

  Resumint (1)-(4): $\boxed{T_{-v} \circ G^{-\alpha}_{OY} \circ G^{-\beta}_{OX} \circ G^{\theta}_{OZ} \circ G^{\beta}_{OX} \circ G^{\alpha}_{OY} \circ T_v}$, matrius ampliades: $\widehat{T}_{-v}\, \widehat{G}^{-\alpha}_{OY}\, \widehat{G}^{-\beta}_{OX}\, \widehat{G}^{\theta}_{OZ}\, \widehat{G}^{\beta}_{OX}\, \widehat{G}^{\alpha}_{OY}\, \widehat{T}_v$

3. **Escalatge** $E_P^{\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3}$ **:** Transformació geomètrica respecte d'un **centre** o punt fix $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i amb **factors d'escala** λ_1, λ_2 i λ_3, que aplicada sobre un punt $P = (x, y, z)$ el mou a un nou punt $P' = (x', y', z')$ obtingut multiplicant la distància respecte de cadascun dels eixos coordenats entre P_0 i P per λ_1, λ_2 i λ_3, respectivament. Si l'escalatge és uniforme, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, aleshores és una homotècia.

   Exemple. $P_0 = (1, 3, 2)$, $P = (-1, 4, 4)$. Si apliquem a P una homotècia de centre P_0 i paràmetres $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, aleshores:

$$P' = P_0 + (\lambda_1\, d_x, \lambda_2\, d_y, \lambda_1\, d_z) = (1, 3, 2) + (2 \cdot (-1 - 1), 2 \cdot (4 - 3), 2 \cdot (4 - 2)) = (-3, 5, 6)$$

- Si $P = (0, 0, 0)$,

  Amb matrius ampliades: $\begin{aligned} x' &= \lambda_1\, x \\ y' &= \lambda_2\, y \\ z' &= \lambda_3\, z \\ 1 &= 1 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$

- Si $P = (x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$, seguirem els passos següents:
  (1) Aplicar una translació que porti el punt fix P a l'origen $(0,0,0)$: T_v
  (2) Escalar amb $P = (0,0,0)$ i factors λ_1, λ_2 i λ_3: $E_P^{\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3}$
  (3) Desfer la translació inicial: T_{-v}

  Resumint (1)-(3): $\boxed{T_{-v} \circ E_P^{\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3} \circ T_v}$ matrius ampliades: $\widehat{T}_{-v}\widehat{E}_P^{\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3}\widehat{T}_v$

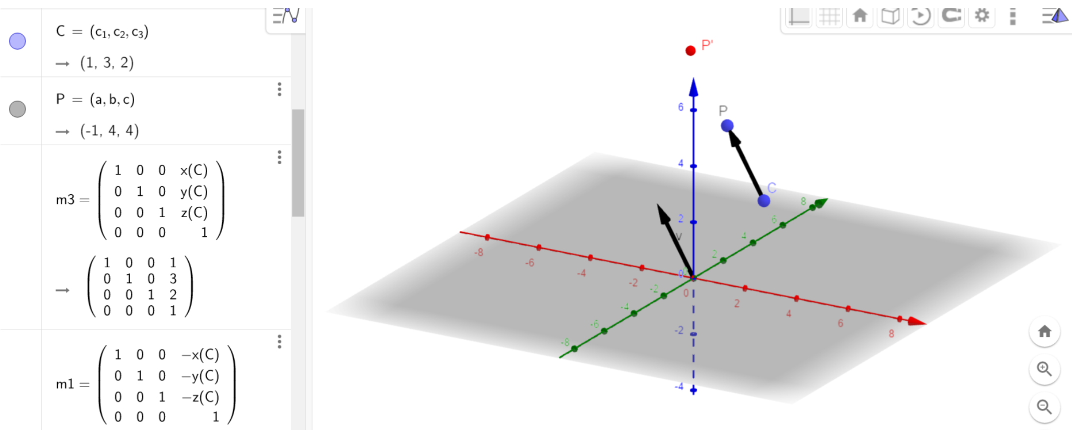
Exercici 1 (Escalatge)

Definiu un punt arbitrari $P = (a, b, c)$. Automàticament es crearan els lliscadors a, b i c amb els què podreu anar canviant les coordenades del punt. Després, quan les necessiteu, les indicareu amb $x(P), y(P)$ i $z(P)$ perquè al canviar els valors dels lliscadors canviïn automàticament les coordenades de P en tot l'exercici.

Apliqueu-li a P una homotècia de centre $C = (c_1, c_2, c_3)$ (novament controlareu aquestes coordenades amb lliscadors i cridareu les coordenades amb $x(C), y(C)$ i $z(C)$) i raó r (un nou lliscador per poder canviar aquest valor).

Apliqueu l'homotècia a P de les dues maneres: matricialment i amb la definició.

Comproveu que la imatge de $P = (-1, 4, 4)$ per l'homotècia amb centre $C = (1, 3, 2)$ i raó $r = 2$ és $(-3, 5, 6)$.



Exercici 2 (Propietats bàsiques)

Per a cadascuna de les afinitats de translació, rotació i escalatge, trobeu les matrius inverses i expliqueu què fan.

Exercici 3 (Rotacions)

Si al punt $P = (1, 1, 0)$ li apliquem una rotació d'angle π i eix de rotació l'eix y, seguida d'una altra d'angle π i d'eix l'eix z i d'una d'angle π i d'eix l'eix x, el punt P torna a la posició inicial.

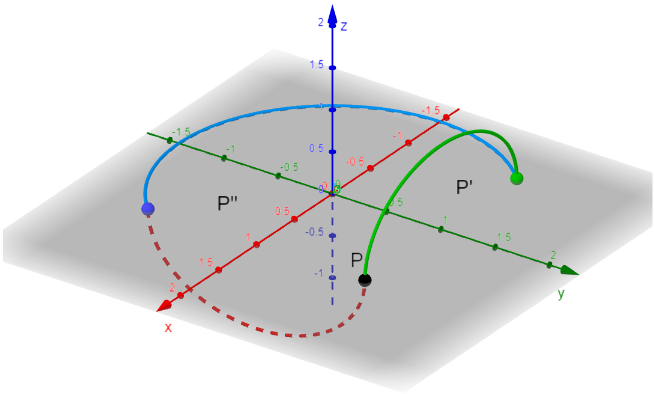
$$P = (1,1,0) \xrightarrow{R_y^\pi} P' \xrightarrow{R_z^\pi} P'' \xrightarrow{R_x^\pi} P''' = P$$

Quines són les coordenades de P' i P''?
Les trajectories que segueix el punt P són trossos de circumferències al voltant de cadascun dels eixos. Completa la descripció d'aquestes corbes i escull quina de les dues imatges de la figura és la correcta.

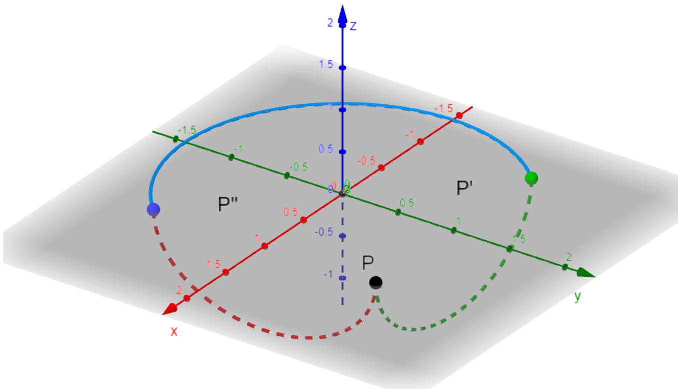
Curve$(\cos(t), \ldots, \sin(t), t, 0, \pi)$ comença en P i acaba en P', en un pla paral·lel al xz.

Curve$(\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t), \ldots, t, \frac{3\pi}{4}, \ldots)$ comença en P' i acaba en P'', en el pla xy.

Curve$(\ldots, \cos(t), \sin(t), t, \pi, 2\pi)$ comença en P'' i acaba en P, en un pla paral·lel al yz.



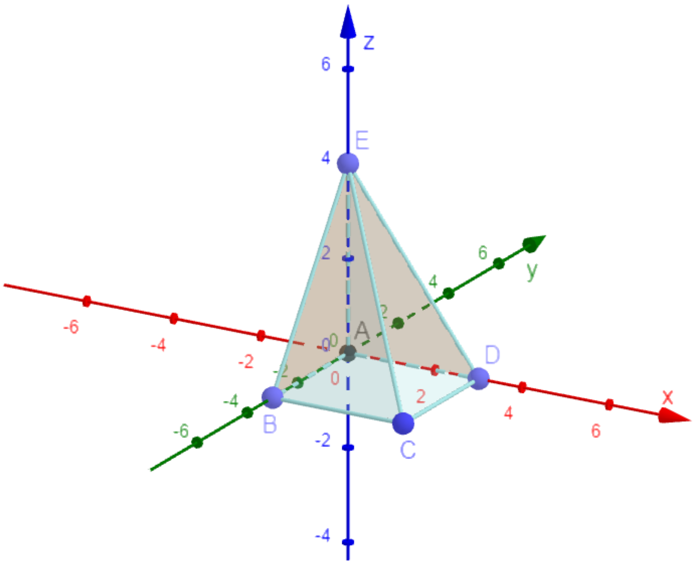
(a)



(b)

Exercici 4 (Translacions, rotacions i escalatge)

Considereu la piràmide de vèrtexs: $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, -3, 0)$, $C = (3, -3, 0)$, $D = (3, 0, 0)$ i $E = (0, 0, 4)$. Apliqueu-li una homotècia de centre $P = (3/2, -3/2, 1)$ i escala $1/3$. A la nova piràmide, apliqueu-li una rotació d'angle $\pi/4$ i eix la recta per $A'B'$.



GD Geometria per al disseny
Pràctiques

2022-23 Q2 EEBE-UPC Mercè Claverol

4

PRÀCTICA : Sistemes de coordenades

Canvis de sistemes de coordenades

Vegem com podem aplicar l'àlgebra lineal per a obtenir parametritzacions de corbes a $\mathbb{R}^3$ que no estan en posició estàndard. Per trobar la parametrització d'una corba en el sistema canònic el que farem serà buscar nous sistemes de coordenades on sigui fàcil identificar la parametrització. El nou sistema el farem construint bases ortonormals amb un punt origen. Després veurem com trobar l'expressió de les corbes en el sistema de coordenades inicial, és a dir, el canònic.

1. **Construcció de la base ortonormal. En $\mathbb{R}^3$: $\{u_1, u_2, u_3\}$**

   Sense canviar la posició de la corba, busquem on col·locar els eixos del nou sistemea de referència perquè la expressió de la corba sigui coneguda en aquest nou sistema. Aquí construïm la nova base ortonormal.

2. **Nou sistema de coordenades $S' = \{K; u_1, u_2, u_3\}$**

   El nou sistema de coordenades està format per la nova base i un punt origen, diem-li K.

3. **Expressió de les corbes en S'**

   En S' la corba té una expressió paramètrica coneguda, stàndard.

4. **Expressió de les corbes en el sistema canònic $S = \{O; e_1, e_2, e_3\}$**

   En S' els punts de la corba són $P'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ i volem expressar aquestes coordenades (coordenades X') en el sistema de coordenades canònic S, (coordenades X).

   Cal fer:

   $$X = AX' + K$$

   on A és la matriu del canvi de base $A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$, formada pels vector de la nova base en columnes.

Exercici 1 (Canvi de sistema de coordenades)

1. Definiu els punts $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ i $C = (0, 0, 3)$.

   Visualitzeu el pla, diem-li **p**, que passa per aquests tres punts (per exemple fent el polígon que passa per ells). Sobre aquest pla voldrem dibuixar una corba.

2. Considereu com a origen del nou sistema de referència S' al punt K, baricentre dels punts A, B i C.

3. Per definir el nou sistema $S' = \{K; u_1, u_2, u_3\}$, d'eixos x', y', z', coloqueu-los de la manera següent:

   u_3 que doni la direcció de l'eix z', perpendicular al pla **p**,

   u_1 el vector unitari d'origen K i final A (vector del pla **p**),

   $u_2 = u_3 \times u_1$

4. Sobre el pla **p**, dibuixarem la circumferència que en el pla cartesià xy té la parametrització

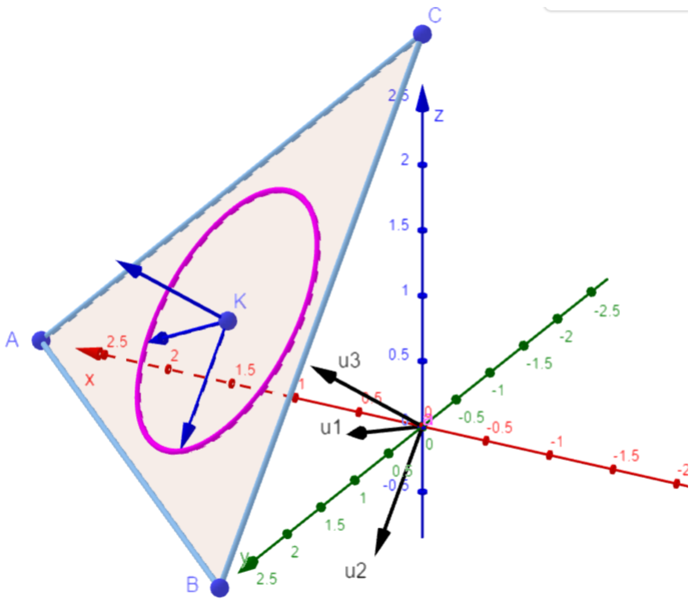
   $$(R\cos(t), R\sin(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

   En S' quina parametrització té? (heu de determinar quina de les tres coordenades és la nul·la).

5. Trobeu la parametrització de la circumferència en el sistema de coordenades canònic aplicant les equacions del canvi de base:

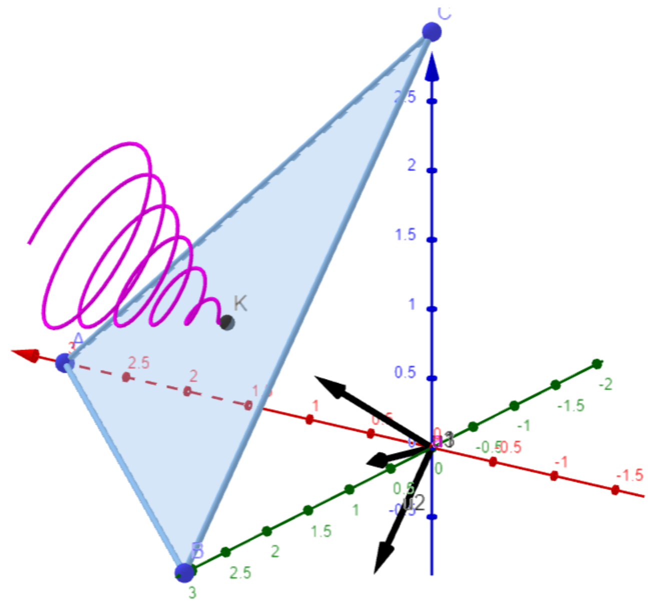
   $$X = AX' + K$$

6. Experimenteu amb altres corbes.



Aquí teniu una altra figura amb la corba paramètrica amb equació stàndard al pla xy:

$$(0.02\,t\,\cos(t), 0.02\,t\,\sin(t), t/30), \quad 0 \le t \le 12\pi$$



PRÀCTICA 4: Corbes de Bézier

Corbes de Bézier definició i propietats. Algorisme de Casteljau. Operacions.

Exercici 1 (Corba de Bézier)

Donats 2 punts: A i B, les corbes de Bézier de grau 1 es defineixen com:

$B(t) = \boxed{\mathrm{Curve}((1-t)A + tB, t, 0, 1)}$

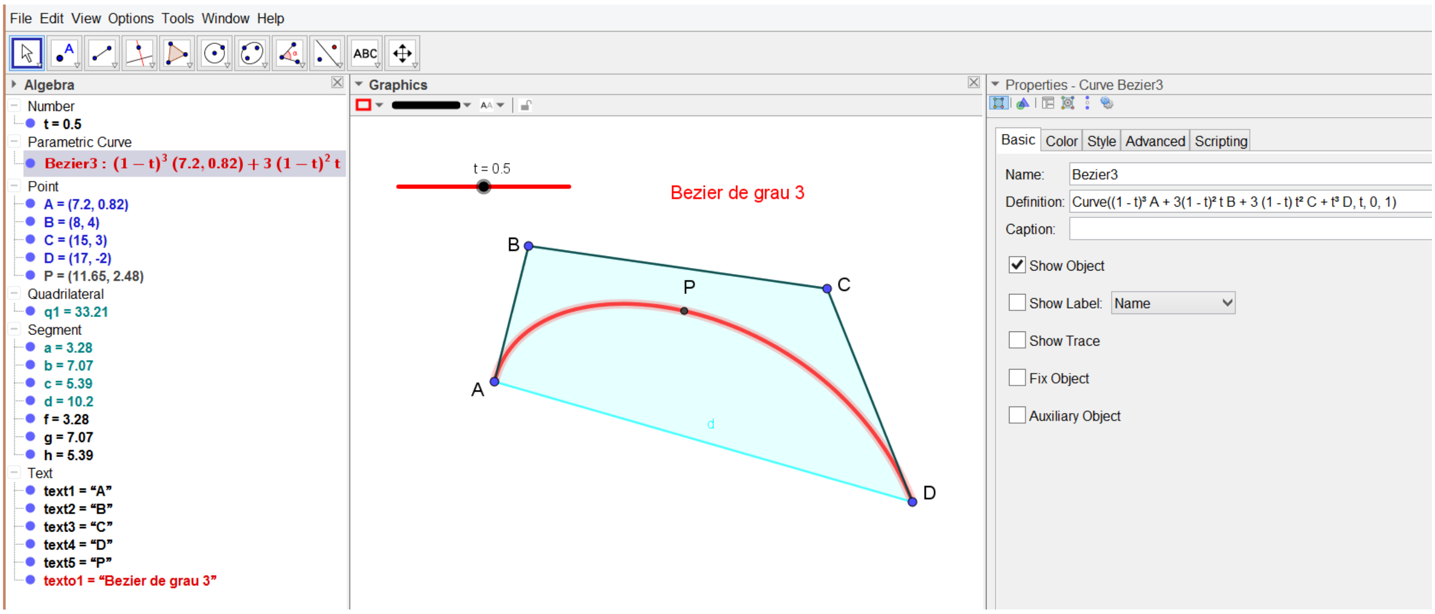
Donats 3 punts no alineats: A, B i C, les corbes de Bézier de grau 2 es defineixen com:

$B(t) = \boxed{\mathrm{Curve}((1-t)^2A + 2(1-t)tB + t^2C, t, 0, 1)}$

Donats 4 punts, no tres d'ells alineats: A, B, C i D les corbes de Bézier de grau 3 es defineixen com:

$B(t) = \boxed{\mathrm{Curve}((1-t)^3A + 3(1-t)^2tB + 3(1-t)t^2C + t^3D, t, 0, 1)}$

En general, donats $n+1$ punts $P_0, \cdots, P_n$ s'obtenen corbes de Bézier de grau n (les més usades són les de grau 3). Teniu un exemple a l'exercici 6: corba de Bézier de diferents graus, fins a 9, a $\mathbb{R}^3$.



Qüestions:

1. Dibuixeu una corba de Bézier de grau 3 (en la figura l'hem anomenat *Bézier3*). Per quins punts de control passa la corba? És una combinació afí dels punts de control, per què?

2. Per definir un punt P que es mogui sobre la corba de *Bézier3*, creeu primer un lliscador pel paràmetre t, amb valor mínim 0, màxim 1 i increment=0.01. Ara escriviu a l'input: $P = Bezier3(t)$. Observeu les posicions del punt P segons els valors de t. Per a quins valors del lliscador obteniu els extrems de la corba?

3. Les coordenades de la corba de Bézier son polinomis. Si les coordenades són paràboles, quants punts de control té la corba de Bézier?

4. Moveu els punts i observeu que la corba sempre es manté dins de la envolupant convexa dels punts de control, $CH(A, B, C, D)$ (polígon convex més petit que conté als punts).

5. Si els punts de control estan alineats com és la corba de Bézier que es genera?

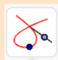
Exercici 2 (Algorisme de de Casteljau)

Dibuixem quatre punts A, B, C i D (no tres d'ells alineats). Dibuixem el segment AB i sobre ell, un nou punt, E.

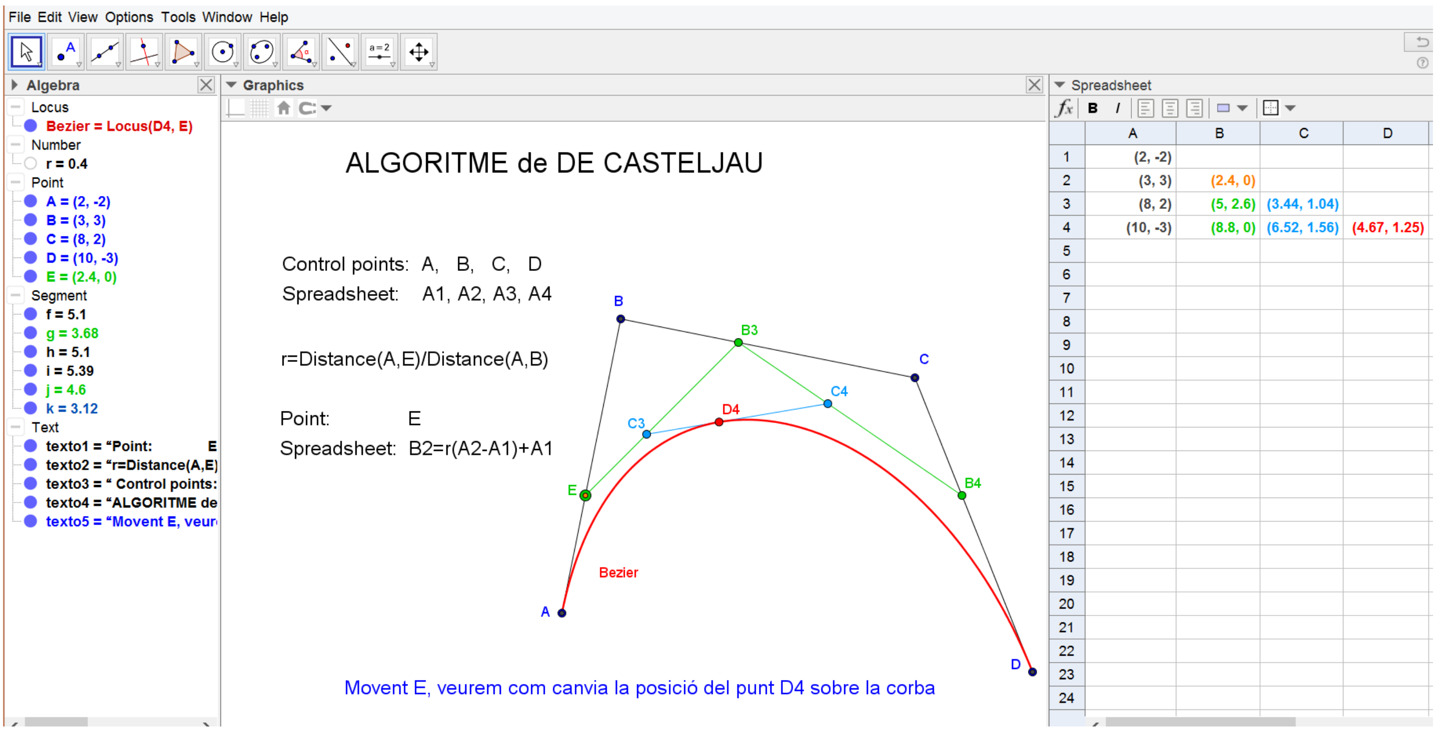
En l'input escrivim: $\boxed{\text{r=Distance(A,E)/Distance(A,B)}}$ o equivalentment $\boxed{\text{r=AffineRatio(A,B,E)}}$

(Recordeu que amb el valor de r sabem que $E = A + r\vec{AB}$)

En el full de càlcul (spreadsheet) escrivim:
En A1: =A intro
. . . . . .
En A4: =D intro
En B2: =A1+r(A2-A1) intro
Marquem B2 i estirem la cantonada dreta inferior fins a la casella B4.
Marquem els punts de la columna B i estirem la cantonada dreta inferior fins a la columna D. Quan soltem quedarà una matriu triangular inferior.
En la vista gràfica desmarqueu $A1$, $A2$, $A3$ $A4$, i $B2$ per deixar només les etiquetes de inicials A, B, C, D i E. Dibuixeu els segments $EB3$, $B3B4$ i $C3C4$.

En el menú d'eines marquem l'icona de lloc geomètric, *Locus*  , (es troba en el quart botó començant per l'esquerra); i senyalem sobre el dibuix l'últim punt de l'esquema triangular, D4, i el punt E del qual depèn. En la vista algebraica apareixerà Locus(D4,E) i en la vista gràfica es dibuixarà el lloc geomètric, és a dir, la corba de Bézier.

Alternativa equivalent: Dibuixem $A, B, C.D$, definim un slider t, de 0 a 1, i el punt $E = (1 - t)A + tB$.
En la fulla de càlcul:
entrem els punts de control en la primera columna A1..A4.
En la casella B2 posem (1-t)A1+tA2, la copiem i arrosseguem fins D4.
Finalment fem el lloc geomètric de D4 i el lliscador t, és a dir, Locus(D4,t).



Qüestions:

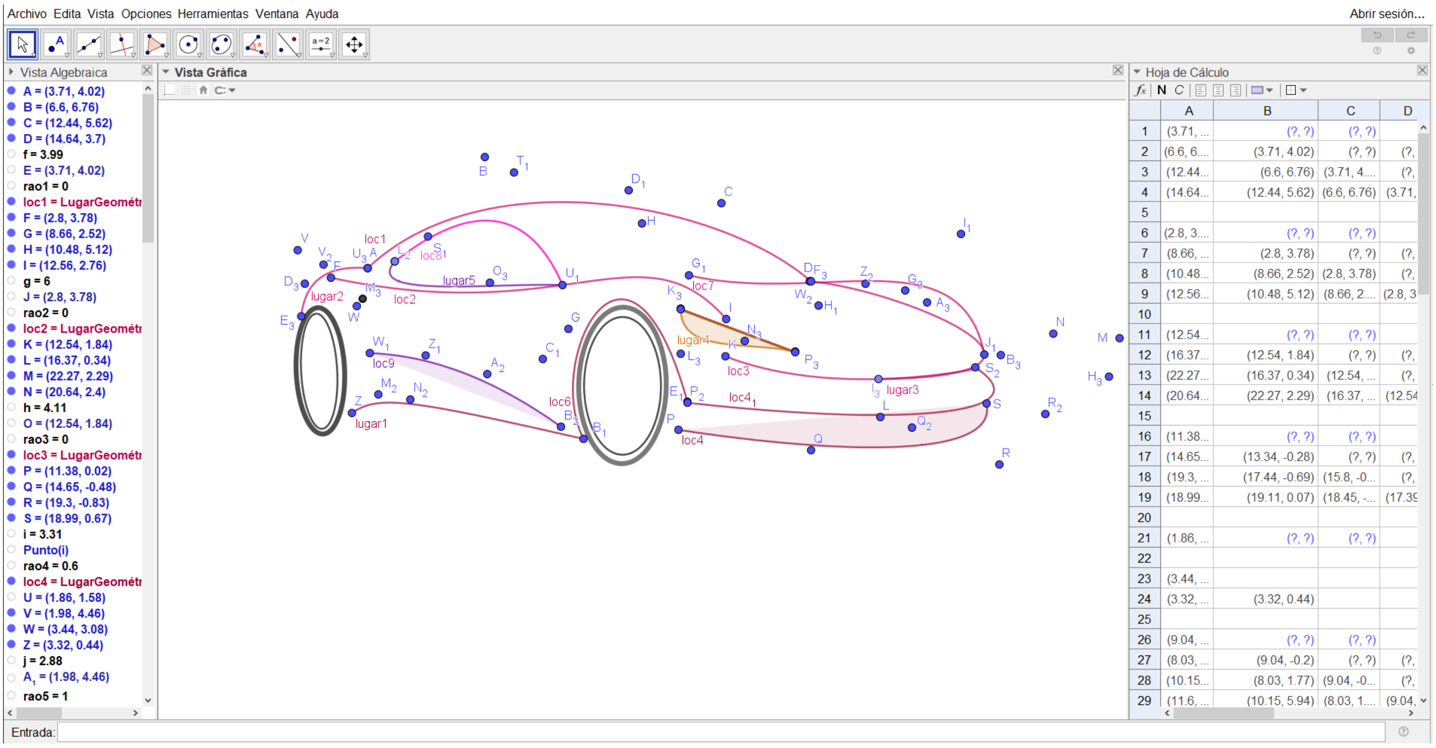
1. Considereu $A = (2, -2), B = (3, 3)$, $C = (8, 2)$ i $D = (10, -3)$.

   (a) Trobeu les coordenades del punt E situat sobre el segment d'extrems A i B, tal que $\vec{AE} = (2/5)\vec{AB}$.

   (b) Amb l'algoritme de de Casteljau trobeu a ma l'equació de la corba de Bézier de grau 3. Per a quins valors de t (paràmetre de la corba) passa pels punts A, D?

   (c) A l'esquema que heu trobat a l'apartat anterior, avalueu t=2/5 i comproveu que us dóna l'esquema del full de càlcul de la figura. Comproveu que fent $t = 2/5$ en la corba de Bézier obteniu el punt $D4 = (4.67, 1.25)$.

2. Feu un dibuix que involucri diverses corbes de Bézier de grau 3. Per a cada grup de quatre punts apliqueu l'algoritme de de Casteljau. Aquí teniu un exemple en la figura següent:



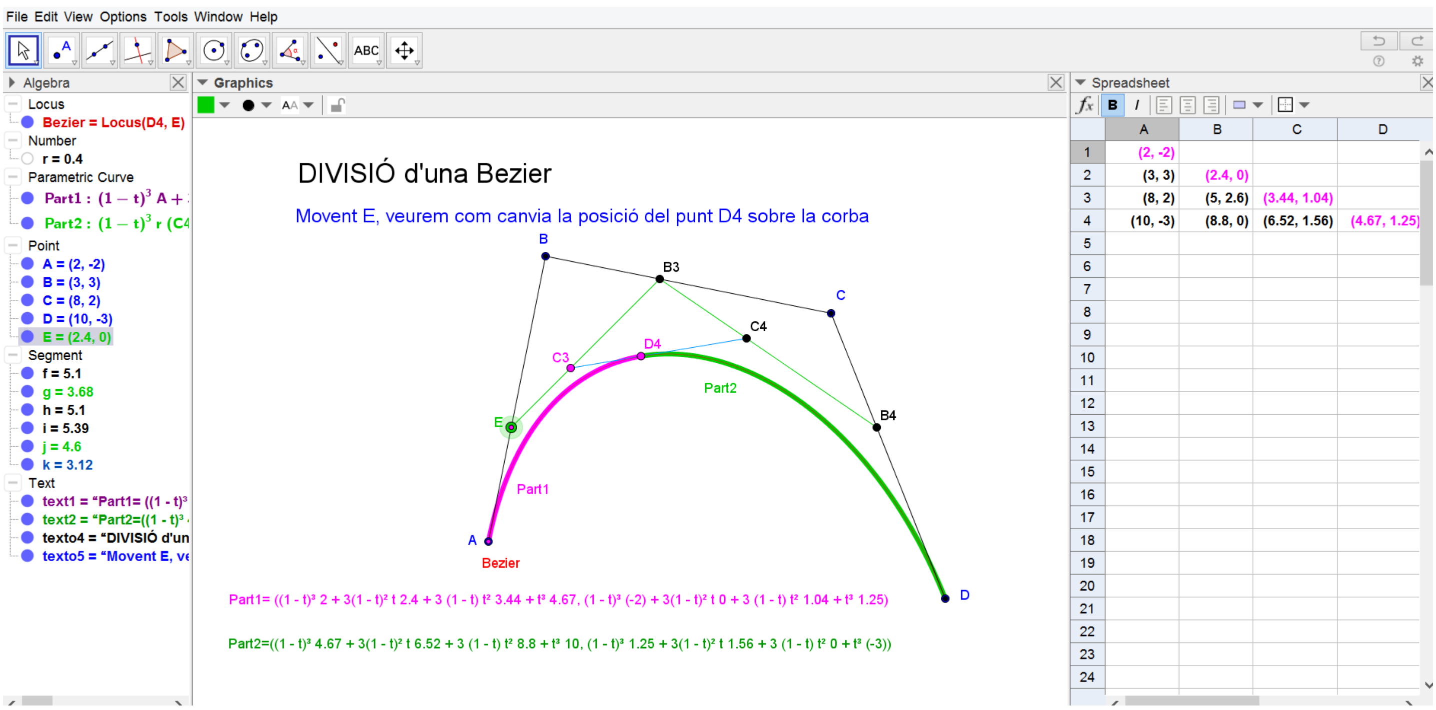
Exercici 3 (Operacions: Divisió)

Per dividir la corba de Bézier en dos parts trobem els punts de control de cadascuna d'elles en l'esquema triangular que ens proporciona l'algorisme de de Casteljau si fixem el valor del paràmetre (la corba de Bézier en aquest valor del paràmetre ens donaria el punt de la divisió).

Ho aplicarem a l'exemple de l'exercici 2.

Els punts de control de la primera part s'obtenen de la **diagonal** (d'esquerra a dreta) i els de l'**última fila** són els punts de control de la segona part (de dreta a esquerra).

En l'input escrivim:
Part1=Curve($(1-t)^3 A1 + 3(1-t)^2 tB2 + 3(1-t)t^2 C3 + t^3 D4, t, 0, 1$)
Part2= Curve($(1-t)^3 D4 + 3(1-t)^2 tC4 + 3(1-t)t^2 B4 + t^3 A4, t, 0, 1$)



Qüestions:

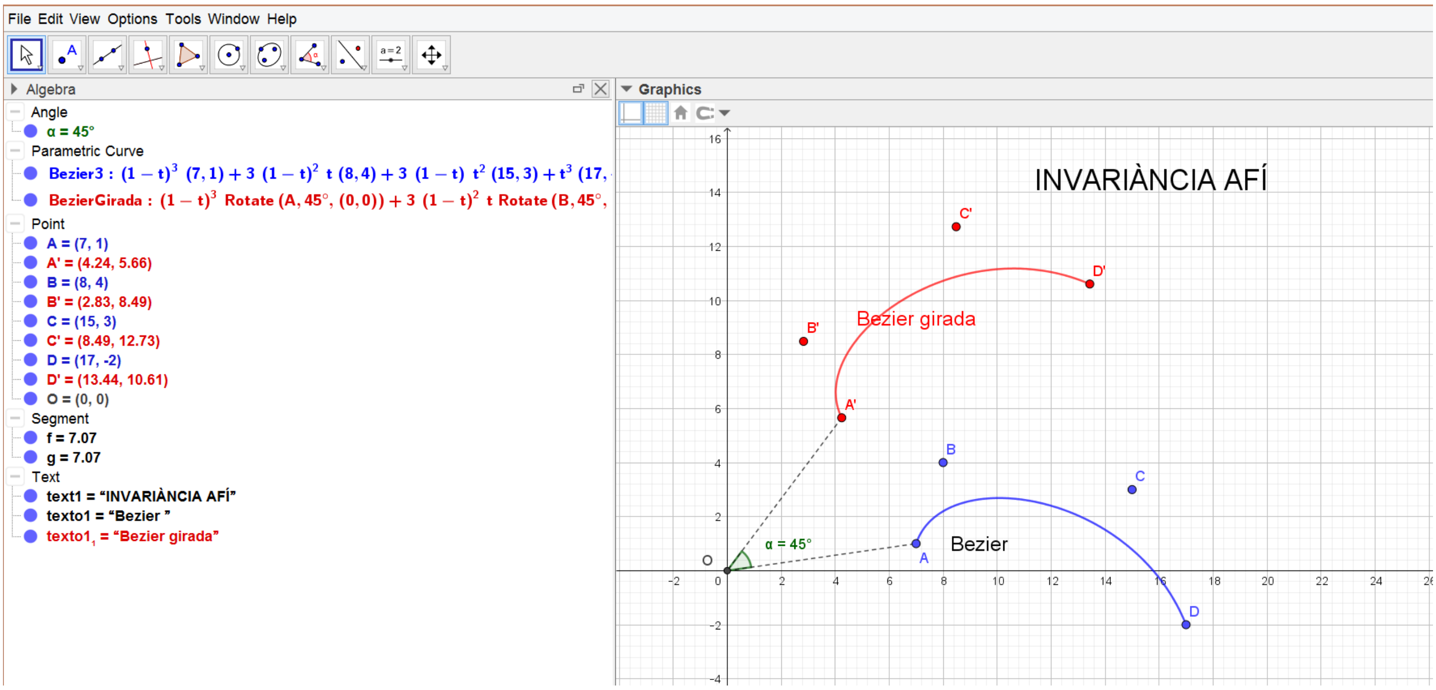
1. En l'esquema triangular de l'algorisme de de Casteljau amb $n+1$ files, quin és el punt pel qual dividim la corba?

2. Quins són els punts de control de la primera part de la corba? I els de la segona part?
3. Si $\{A, B, C, D\}$ és el polígon de control de la corba de Bézier, com canvia la corba si considerem com a polígon de control $\{D, C, B, A\}$?
4. Si dividim la corba de Bézier $\mathcal{B}(t)$ pel punt $\mathcal{B}(1/2)$, creus que quedarà dividida en dos parts iguals?
5. Feu una corba de Bézier de grau 3 i dividiu-la en tres parts (no necessàriament iguals).

Exercici 4 (Invariància afí)

Dibuixem els quatre punts de control A, B, C i D i la corba de Bézier que generen.
Per aplicar una afinitat a la corba, per exemple una rotació, només cal que l'apliquem als punts de control i tornem a generar una corba de Bézier amb els nous punts (A', B', C i D').

En l'input escrivim:
Bezier=Curve($(1-t)^3A + 3(1-t)^2tB + 3(1-t)t^2C + t^3D, t, 0, 1$)
Rotate(A,45,(0,0)) obtenim A'
... ...
Rotate(D,45,(0,0)) obtenim D'
BezierGirada=Curve($(1-t)^3A' + 3(1-t)^2tB' + 3(1-t)t^2C' + t^3D', t, 0, 1$)



Qüestions:

1. Experimenteu amb la composició d'afinitats. Per exemple, és el mateix aplicar primer una homotècia de centre l'origen i raó 1/2 i després una simeria respecte de l'eix d'ordenades, que fer-ho en l'ordre invers?

Exercici 5 (Continuïtat geomètrica)

Farem servir la notació de A, B, C, D i E, F, G, H per als punts de control de la primera i segona corba, respectivament. Dibuixeu 6 punts: 4 no alineats per a la primera corba de Bézier: A, B, C i D. I de moment dos, G i H (que seran l'últim i el penúltim punt de la segona corba):

En l'input escrivim:

Curve($(1-t)^3A + 3(1-t)^2tB + 3(1-t)t^2C + t^3D, t, 0, 1$)

Per tenir **continuïtat G0**, definim

$E = D$

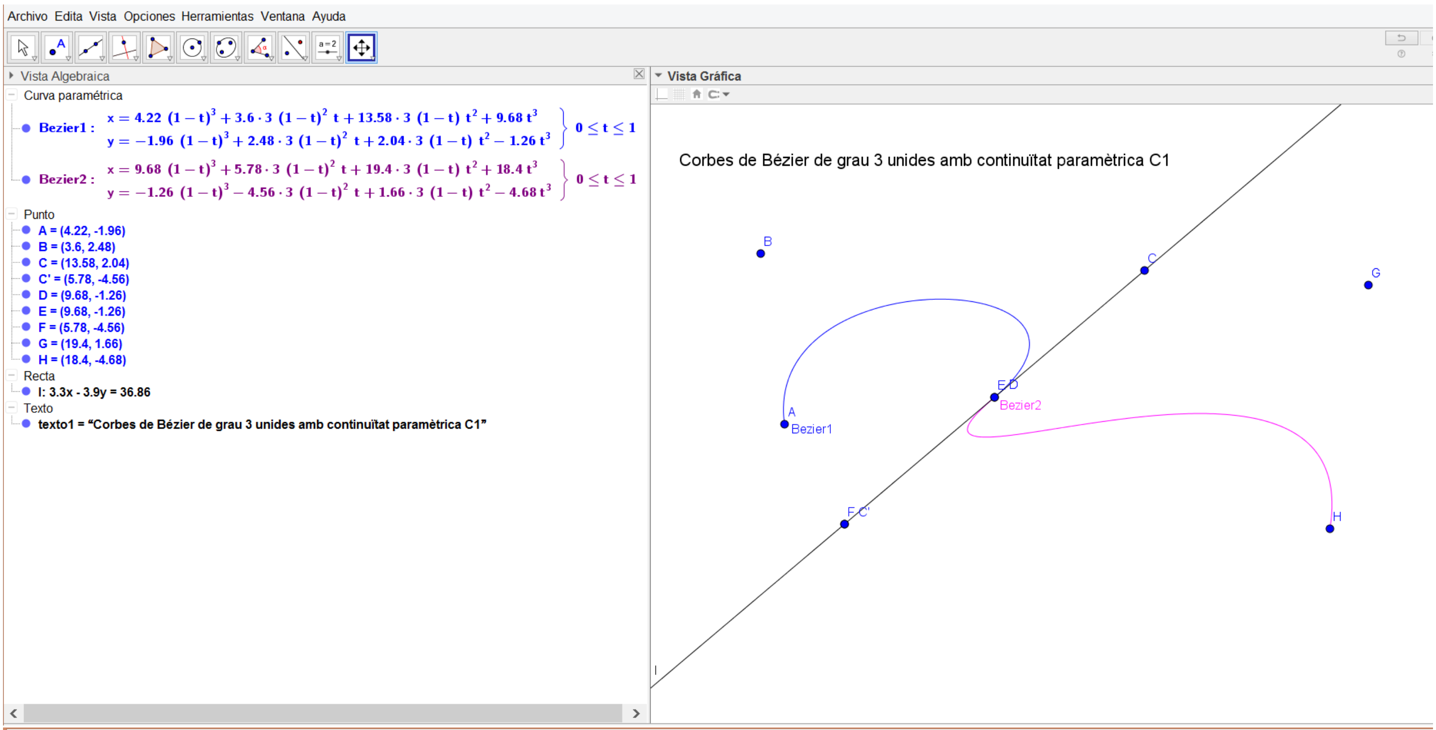
Per tenir **continuïtat G1**,
fem que el punt comú a les dues corbes ($D = E$) estigui entre C i F
(és a dir, que els vectors tangents CD i EF tinguin la mateixa direcció):

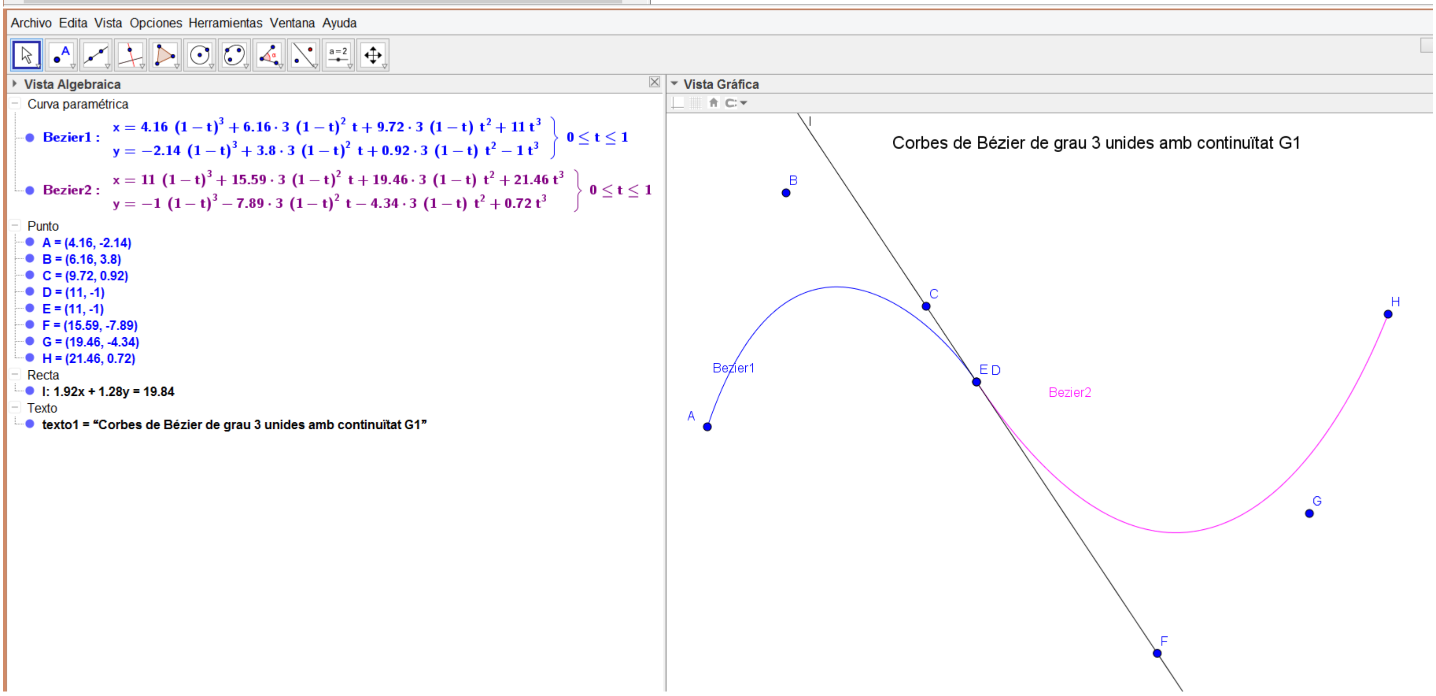
$l = \text{line}(C, D)$
$F = \text{point}(l)$

$\text{Curve}((1-t)^3 E + 3(1-t)^2 t F + 3(1-t) t^2 G + t^3 H, t, 0, 1)$

Per tenir **continuïtat C1**,
fem que els vectors tangents tinguin la mateixa direcció i magnitud.
Aconseguim el punt simètric de C respecte de D així:

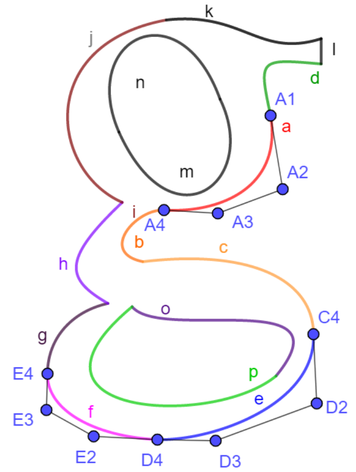
$C' = \text{Reflect}(C, D)$
$F = C'$
Observeu que C1$\Longrightarrow$ G1, però no al contrari.





Qüestions:

1. Normalment s'utilitzen corbes de Bézier de grau 3 i s'empalmen amb continuïtat geomètrica G1 perquè la corba resultant resulti suau, quins són els punts de control que han d'estar alineats?
2. Esbrineu si els tres punts següents estan o no alineats: $(6, 1)$, $(7, -1)$, $(10, -7)$.
3. Sigui $\{A, B, C, D\}$ el polígon de control de la corba de Bézier. Per trobar el vector tangent en A, escriviu a l'input: Vector(nom'(0)) el nom és el de la corba i recordeu que A és el punt de la corba amb t=0. Busqueu la icona de dibuixar el vector des d'un punt i clicant en A i el vector que acabeu de crear visualitzareu el vector tangent a la corba en A. Comproveu que el vector tangent a la corba en A és un múltiple del vector $\vec{AB}$, és a dir, λ(B-A). Quan val λ?
4. Quina diferència hi ha entre la continuïtat paramètrica C1 i la geomètrica G1?
5. Dibuixeu una lletra on utilitzeu diverses corbes de Bézier de grau 3. Escolliu algunes per indicar amb quina continuïtat geomètrica s'uneixen.



Exercici 6 (Corba de Bézier. Inconvenients)

Donats n+1 punts: $A1, \cdots, A_{n+1}$ obtenim corbes de Bézier de grau n.

Dibuixem $n+1$ punts i creem un slider per al grau de la corba de Bézier, de nom n, que vagi de 2 al valor que volgueu i increment=1.

En el full de càlcul (spreadsheet) escrivim:
En A1: =A intro
En A2: =B intro
... ...

En B1: =x(A1) intro
Marquem B1 i estirem la cantonada dreta inferior fins a l'alçada de l'últim punt obtenint les 1^{es} coords. dels punts.
En C1: =y(A1) intro
Marquem C1 i estirem la cantonada dreta inferior fins a l'alçada de l'últim punt obtenint les 2^{es} coords. dels punts.
En D1: =z(A1) intro
Marquem D1 i estirem la cantonada dreta inferior fins a l'alçada de l'últim punt obtenint les 3^{es} coords. dels punts.

Creem les llistes L_1, L_2, L_3 de les primeres, segones i terceres coordenades dels punts, respectivament així:
Marquem els valors de la columna B i amb el botó dret del ratolí creem una llista: L_1.
Fem el mateix amb les columnes C i D i obtenim L_2 i L_3.

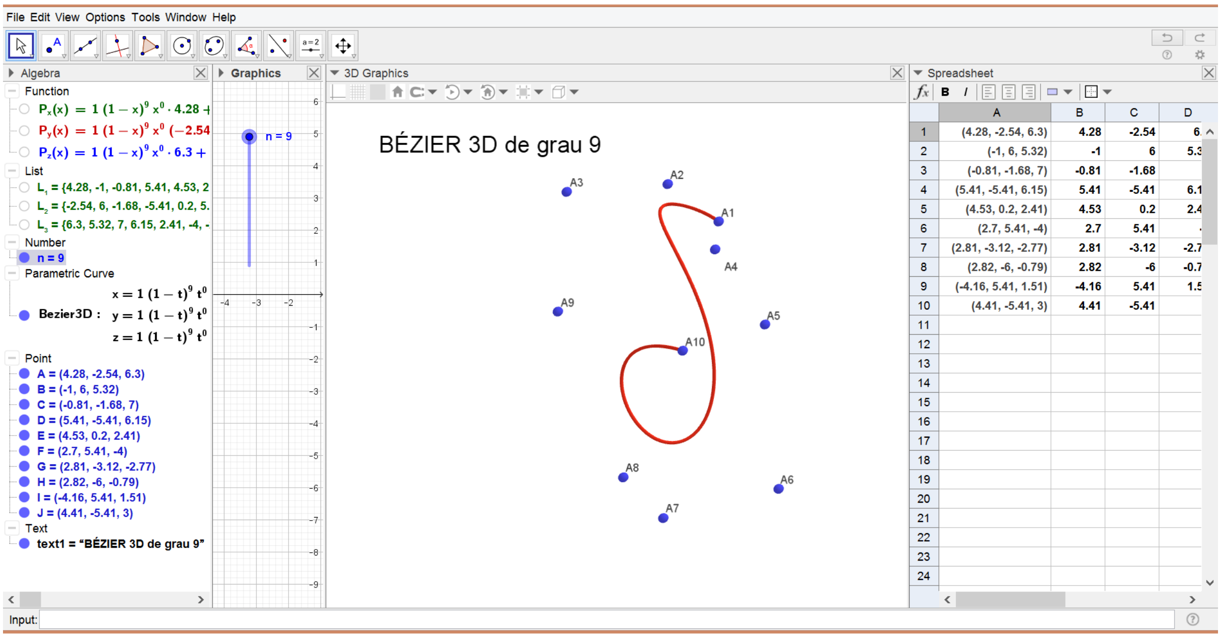
A l'input escrivim:

P_x =Sum(Sequence(BinomialCoefficient$(n, i)(1-x)^{(n-i)}x^i$Element$(L_1, i+1), i, 0, n)$)

P_x =Sum(Sequence(BinomialCoefficient$(n, i)(1-x)^{(n-i)}x^i$Element$(L_2, i+1), i, 0, n)$)

P_z =Sum(Sequence(BinomialCoefficient$(n, i)(1-x)^{(n-i)}x^i$Element$(L_3, i+1), i, 0, n)$)

Curve$(P_x(t), P_y(t), P_z(t), t, 0, 1)$



Qüestions:

1. Experimenteu canviant el grau i movent els punts. Enumereu els inconvenients que penseu que us podeu trobar si treballeu amb corbes de Bézier d'un grau alt.

PRÀCTICA 3: Corbes

Tipus de corbes.

Les **corbes** apareixen en gràfiques de funcions, contorns d'objectes, interseccions de superfícies, llocs geomètrics,...

I admeten diferents representacions com ara:

- *Implícita*: equació/ns que satisfan les coordenades dels punts de la corba
- *Paramètrica*: en funció d'un paràmetre

Tipus de corbes:

1. Corbes obtingudes amb interpolació lineal

   Segments o corbes aproximades per segments que uneixen alguns dels seus punts.

2. Corbes parametritzades

   Es dibuixen com a trajectòries d'una funció. La representació se'n diu *graf* i t és el *paràmetre.*

   - Amb parametritzacions polinòmiques

     $$\begin{aligned} \gamma: \quad & I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ & t \longmapsto (p_1(t), \cdots, p_n(t)), \quad p_i(t) \text{ són polinomis en } t. \end{aligned}$$

     Ex. Les corbes de Bézier

     $$\begin{aligned} \gamma: \quad & [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ & t \longmapsto (2t-1\,,\, 2t^2-2t+1) \end{aligned}$$

   - Amb parametritzacions racionals

     $$\begin{aligned} \gamma: \quad & I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ & t \longmapsto \left(\tfrac{p_1(t)}{q_1(t)}, \cdots, \tfrac{p_n(t)}{q_n(t)}\right), \quad p_i(t), q_i(t) \text{ polinomis en } t, \\ & \qquad\qquad \forall i,\ \forall t \in I,\ q_i(t) \neq 0. \end{aligned}$$

     Permeten dibuixar més corbes que les polinòmiques, per ex. qualsevol cònica (encara que també tenen problemes):

     Ex. Circumferència de centre $(0,0)$ i radi r:

     $$\gamma(t) = \left(r\tfrac{1-t^2}{1+t^2}, r\tfrac{2t}{1+t^2}\right),\ t \in \mathbb{R}\ (t \to \pm\infty)$$

3. Corbes spline

   Són corbes compostes, és a dir, el resultat d'empalmar dues o més corbes. Donen molta flexibilitat de disseny, però cal vigilar amb com es connecten (problema de la continuïtat geomètrica).

   Ex.

   $$\gamma(t) = \begin{cases} ((t+1)^2-1, t) & -2 \leq t < 0 \\ (1-(t-1)^2, t^3) & 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

- Recta

  En $\mathbb{R}^2$, que passa pel punt $P = (a,b)$ i té direcció $v = (v_1, v_2)$

  $\alpha(t) = (a + t\,v_1, b + t\,v_2), \quad t \in \mathbb{R}$

  En $\mathbb{R}^3$, que passa pel punt $P = (a,b,c)$ i té direcció $v = (v_1, v_2, v_3)$

  $\alpha(t) = (a + t\,v_1, b + t\,v_2, c + t\,v_3), \quad t \in \mathbb{R}$

- Paràbola

  Amb vèrtex (0,0) i directriu $y = -1/(4a)$

  $\alpha(t) = (t, at^2), \quad t \in \mathbb{R}$

- Circumferència

  De centre (c_1, c_2) *i radi* r

  $\alpha(t) = (c_1 + r\cos t, c_2 + r\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$

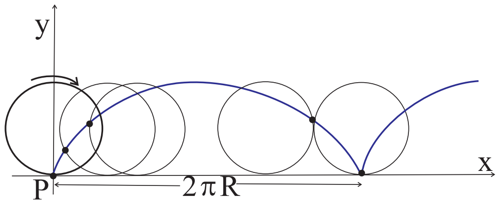
- El·lipse

  De centre (c_1, c_2) *i semieixos* a *i* b

  $\alpha(t) = (c_1 + a\cos t, c_2 + b\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$

- Cicloide $\alpha(t) = \big(R(t - \sin t), R(1 - \cos t)\big), \quad t \geq 0$

  Corba que descriu un punt P *fix d'una circumferència de radi* R *que roda sobre una recta.*

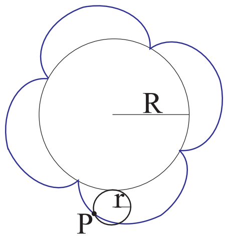


- Epicicloide $\alpha(t) =$

$\left((R + r)\cos t - r\cos\frac{(R+r)t}{r}, (R + r)\sin t - r\sin\frac{(R+r)t}{r}\right),$

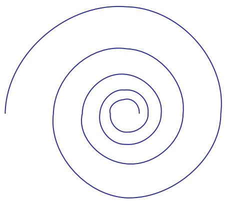
  $t \geq 0$

  Corba que descriu un punt P *fix d'una circumferència de radi* r *que roda sobre una circumferència de radi* R*.*



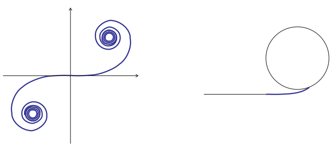
- Espiral logarítmica

  $\alpha(t) = (ae^{mt}\cos t, ae^{mt}\sin t) \quad t \in \mathbb{R}$
  ($a > 0$, $m \in \mathbb{R}$ fixats)



- Clotoide de Cornu

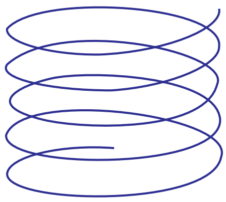
$$\alpha(t) = \left(\int_0^t \cos(\frac{\pi}{2}u^2)\,\mathrm{du}, \int_0^t \sin(\frac{\pi}{2}u^2)\,\mathrm{du}\right)$$



S'utilitza per unir rectes amb circumferències

- Hèlix circular

  $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \quad t > 0$
  ($a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ fixats)



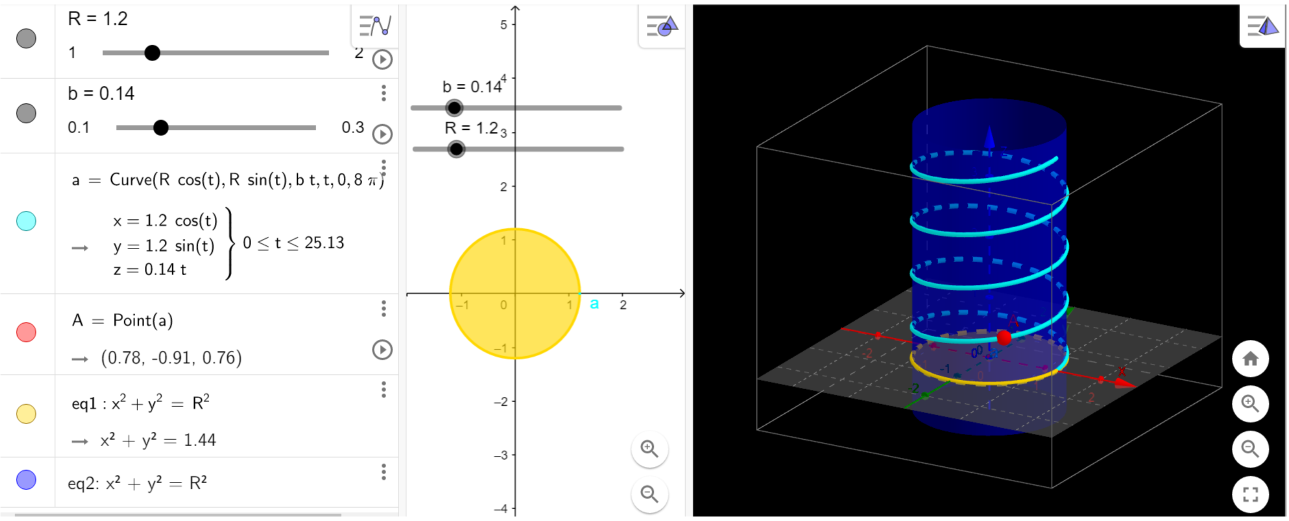
Exercici 1 (Hèlix circular)

Una parametrització de l'hèlix circular és $h(t) = (R\cos t, R\sin t, bt), t_1 \leq t \leq t_2, R > 0$.

1. Dibuixeu l'hèlix circular, de radi $R > 0$ i pas de rosca $b \neq 0$. Definiu abans R i b com a sliders per poder experimentar. Els extrems del paràmetre t també poden ser sliders per controlar el nombre de voltes.

2. Dibuixeu el cilindre que conté l'hèlix.

3. Experimenteu canviant l'ordre de les coordenades en la definició de l'hèlix.



Exercici 2 (Epicicloides esfèriques)

Anem a construir epicicloides esfèriques sobre una esfera.
En primer lloc creem un parell de lliscadors per als paràmetres **a** i **b** (aquests paràmetres ens permetran definir diferents corbes i la suma **a + b** ens donarà el radi al quadrat de l'esfera) i un altre lliscador c per al valor màxim del paràmetre t de la corba (experimenteu amb valors positius al voltant de 175). També definirem un parell de funcions $f(t)$ i $g(t)$ per descriure més fàcilment les coordenades de les epicicloides.

1. A l'input escrivim:

   f(t)=$(a + b)\sin(t) - b\sin(t(1 + a/b))$

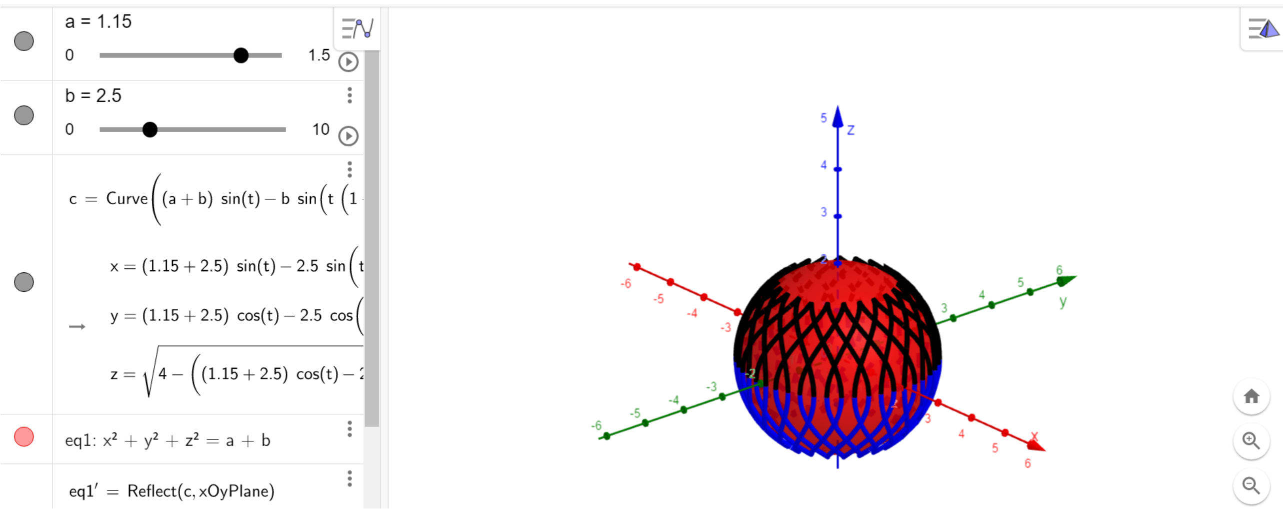
   g(t)=$(a + b)\cos(t) - b\cos(t(1 + a/b))$

2. Definiu la corba:

   c=Curve$(f(t), g(t), \sqrt{4 - (g(t))^2 - (f(t))^2}, t, 0, c)$

3. Dibuixeu l'esfera sobre la qual estan les epicicloides.

4. Feu una simetria de l'epicicloide respecte del pla $z = 0$ fent servir la icona de simetria especular en la vista 3D.

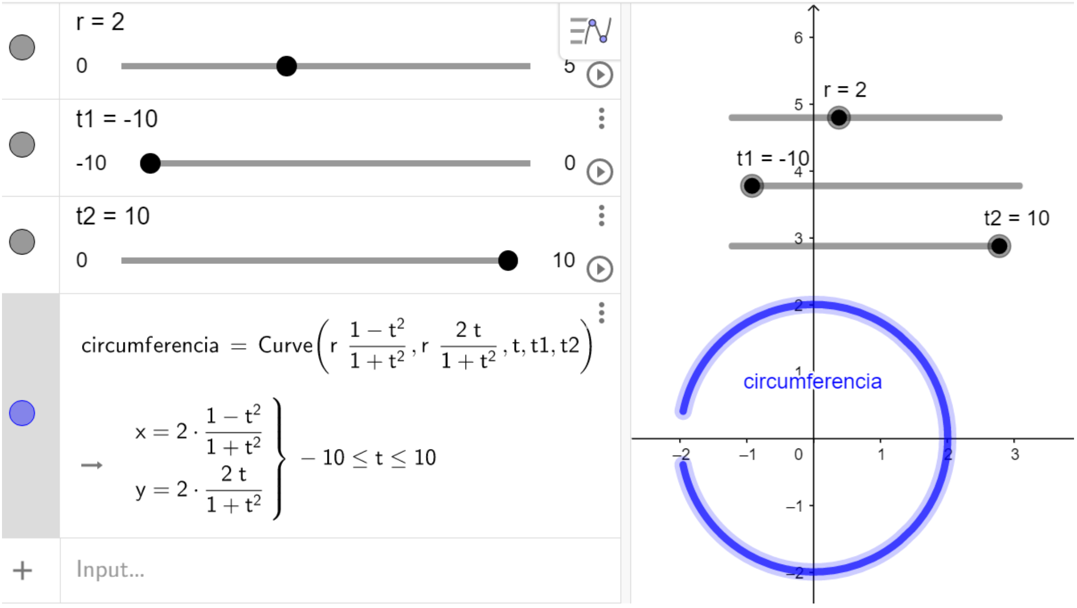


Exercici 3 (Parametrització racional)

Anem a utilitzar una parametrització racional per descriure una circumferència de centre $(0, 0)$ i radi r:

$$\gamma(t) = \left(r\frac{1-t^2}{1+t^2}, r\frac{2t}{1+t^2}\right), \; t \in \mathbb{R} \; (t \to \pm\infty)$$

Definiu els lliscadors $r, t1$ i $t2$, el primer per experimentar amb el radi i els altres per controlar el valor inicial i el valor final del paràmetre de la corba.



Qüestions:

1. Comproveu que les coordenades de la corba $\gamma(t) = \left(r\frac{1-t^2}{1+t^2}, r\frac{2t}{1+t^2}\right)$ compleixen l'equació implícita de la circumferència $x^2 + y^2 = r^2$.

2. Feu que el lliscador $t1$ prengui només valors negatius i $t2$ només positius. Experimenteu per esbrinar per quins valors del paràmetre obtenim la semicircumferència per sobre de l'eix d'abscisses i quins per sota.

3. Experimenteu augmentant el valor màxim de $t2$ i disminuint el mínim de $t1$. Creieu que podreu fer que la corba tanqui?

4. Si interpretem la corba com el camí recorregut per una partícula en funció del temps (paràmetre t), la derivada ens dóna el vector velocitat. I la velocitat en què la partícula recorre la corba és el mòdul d'aquests vectors.

   Calculeu la derivada $\gamma'(t)$ per a $t = 0$ i $t = 1$ i representeu els vectors obtinguts sobre els punts corresponents de la corba. La velocitat és la mateixa en tota la corba?

5. Considereu ara la parametrització $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$. Calculeu $\alpha'(t)$ i comproveu que, en aquest cas, la velocitat és constant.

PRÀCTICA 3: Geometria diferencial de corbes

Corbes i propietats. Triedre de Frenet. Curvatura i torsió. Cercle osculador, evoluta. Corbes offset.

Volem calcular alguns elements de la geometria diferencial que caracteritzen les corbes regulars al pla o a l'espai: curvatura, torsió, cercle osculador, evoluta i triedre de Frenet.

Una corba parametritzada **regular** és una aplicació

$$\begin{array}{rcl} \alpha : I \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & \alpha(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)) \end{array}$$

derivable (com a mínim 3 cops) en tots els punts i tal que $\boxed{\alpha'(t) \neq \vec{0}, \quad \forall t \in I}$, on t és el paràmetre de la corba.

Si $\alpha'(t) = 0$ per a algun $t \in I$, en el punt corresponent no tindrem vector tangent i direm que és un *punt singular*.

Triedre de Frenet: És una referència afí ortonormal de $\mathbb{R}^3$, adaptada a cada punt $P = \alpha(t_0)$ d'una corba (regular) a l'espai i formada pels corresponents vectors tangent, binormal i normal.

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{t}(t_0) = \dfrac{\alpha'(t_0)}{||\alpha'(t_0)||} \\[2ex] \vec{b}(t_0) = \dfrac{\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)}{||\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)||} \\[2ex] \vec{n}(t_0) = \vec{b}(t_0) \times t(t_0) \end{array}}$$

Donada la corba regular $\alpha(t)$, a $\mathbb{R}^2$ o a $\mathbb{R}^3$, la **curvatura** en un punt de la corba $P = \alpha(t_0)$ es defineix:

$$\boxed{k(t_0) = \frac{||\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)||}{||\alpha'(t_0)||^3}}$$

Mesura el canvi de direcció del vector tangent quan ens movem al llarg de la corba (velocitat angular del vector tangent). Marca la tendència de la corba a separar-se del vector tangent en el punt.

Recordeu que encara que estiguéssim en el pla (corba plana), per fer el producte vectorial de dos vectors s'han de considerar aquests dins de l'espai tridimensional.

La **torsió** es defineix:

$$\boxed{\text{torsio(t)} = \frac{-det(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0), \alpha'''(t_0))}{||\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)||^2}}$$

La torsió és la velocitat angular del pla rectificant (el pla generat pels vectors tangent i binormal). Reflecteix la desviació de la corba respecte del pla osculador (el pla generat pels vectors tangent i normal).

La torsió quantifica quant plana deixa de ser una corba en un punt. Si la corba és plana, aleshores té torsió nul·la perquè el vector binormal no canvia ja que en tots els punts de la corba és perpendicular al pla que la conté.

El **cercle osculador** en un punt de la corba $P = \alpha(t_0)$, on $k(t_0) \neq 0$, es defineix com el cercle que té:

(1) $\boxed{\text{radi} = \dfrac{1}{k(t_0)}}$, invers de la curvatura en P.

(2) $\boxed{\text{centre} = \alpha(t_0) + \dfrac{1}{k(t_0)} * \vec{n}(t_0)}$ s'anomena *centre de curvatura*.

És a dir, el centre és un punt que està a una distància d'un punt P de la corba igual a la donada pel radi (invers de la curvatura en P), en la direcció del vector normal.

(3) I està dins del pla determinat per: P i els vectors tangent $\vec{t}(t_0)$, i normal $\vec{n}(t_0)$.

La corba descrita pels centres de curvatura se'n diu **evoluta**.

Les **corbes offset** són la generalització de les rectes paral·leles. Són corbes que s'obtenen desplaçant una distància constant (l'offset) els punts d'una corba donada en la direcció normal a la corba.

Exercici 1 (Corba a $\mathbb{R}^2$. Curvatura, cercle osculador, evoluta)

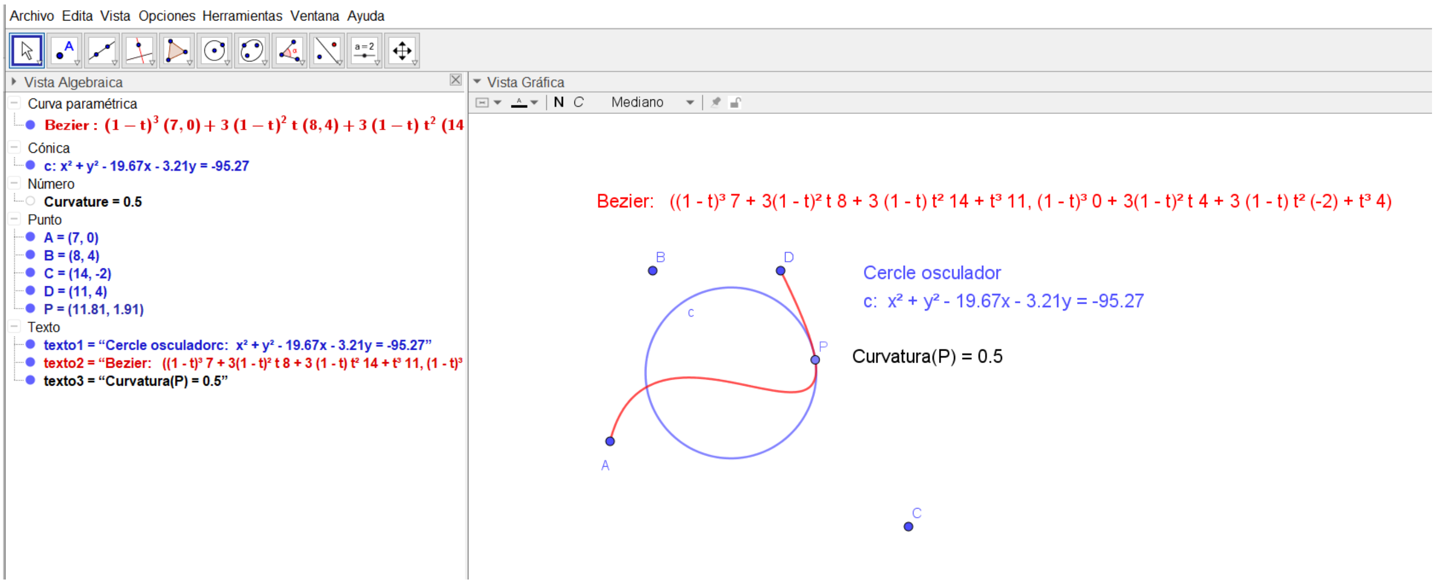
A $\mathbb{R}^2$:
Dibuixem 4 punts (polígon de control d'una corba de Bézier), definim la corba i un punt que es mogui sobre ella.
A l'input escrivim:

Bezier=Curve$((1-t)^3A + 3(1-t)^2tB + 3(1-t)t^2C + t^3D, t, 0, 1)$

Creem un lliscador per al paràmetre **t** i després a l'input escrivim
P=Bezier(t) punt sobre la corba.
O bé pintem el punt P directament sobre la corba (hi quedarà ancorat), i després el movem manualment sobre ella.

k=Curvature(P, Bezier) dóna el valor de la funció curvatura que és aquella que assigna a cada punt P el valor de la curvatura amb signe: és positiu si la circumferència osculadora (parametritzada en la mateixa direcció que la corba en el punt de contacte) es trasllada en sentit antihorari, i negativa altrament.
Podeu afegir un text a la figura indicant la curvatura. Si voleu que vagi mostrant els diferents valors que pren la curvatura, haureu de seleccionar dins del text l'"objecte"que ho calcula (en aquest cas, k).

O=OsculatingCircle(P, Bezier) aquesta instrucció només val a $\mathbb{R}^2$ i dóna el cercle osculador en el punt P.



Qüestions:

1. Moveu un punt sobre la corba de Bézier i contesteu raonadament:
   (a) Si augmenta la curvatura (si feu servir la funció curvatura, heu d'aplicar-li el valor absolut), el radi del cercle osculador augmenta o disminueix?
   (b) Quina relació observeu entre la forma de la corba i el tamany del cercle osculador?
   (c) Dibuixeu una circumferència amb la icona que demana el centre i el radi: el centre pot ser qualsevol punt del pla i el radi feu que sigui el valor invers de la curvatura que tingueu en un punt P de la corba. Després, movent el seu centre, sobreposeu la circumferència al cercle osculador en P per comprovar que tenen el mateix radi.
   (d) Observeu el signe de la funció curvatura al moure el punt sobre la corba. En cas que el signe canviï, observeu si el canvi es produeix en un punt d'inflexió de la corba. En aquests punts la curvatura val 0, el cercle osculador té radi infinit (és una recta) i el vector normal a cada banda del punt té sentits contraris.

Fem un altre exemple a $\mathbb{R}^2$, dibuixem una cicloide.

A l'input escrivim:

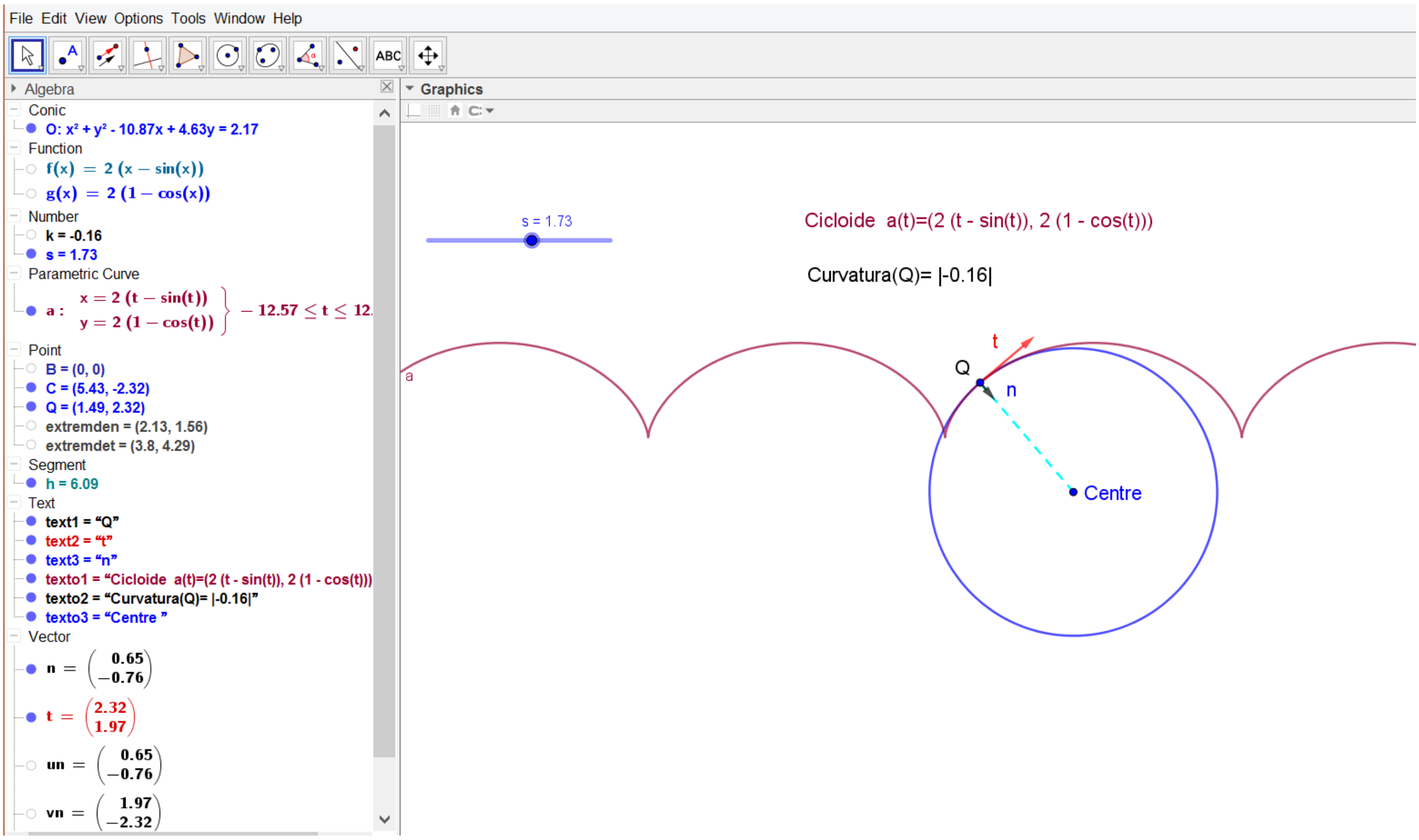
a=Curve$(2(t-\sin(t)), 2(1-\cos(t)), t, 0, 15*pi)$
Creem un lliscador per al paràmetre **t**.
Q=a(t) dibuixarà un punt sobre la corba.
k=Curvature(Q,a)
O=OsculatingCircle(Q,a)

vt=$a'(t)$ vector tangent. Observeu que queda representat amb l'origen a $(0,0)$. El col·loquem amb l'origen a Q seleccionant l'opció en la barra superior de vector des d'un punt i l'anomenem t.

vn=Rotate(vt,-pi/2) vector perpendicular a vt (també es pot obtenir amb la icona de rotar al voltant d'un punt). El vector normal sempre s'obté girant el tangent un angle recte, en aquest cas, en sentit horari (el vector normal apunta en la direcció on la corba és còncava).

un=UnitVector(vn) fem unitari el vector vn. Després el representem des d'el punt Q i l'anomenem n. Utilitzarem el vector normal n, per calcular el centre de curvatura.

C=a(t)+(1/abs(k))n és el centre del cercle osculador.



Qüestions:

1. És la cicloide una corba regular? En quins punts $a'(t) = 0$?

   Sabent que el vector normal en un punt arbitrari de la corba és $n(t) = \left(\frac{2\sin t}{\sqrt{(2-2\cos^2 t+4\sin^2 t}}, \frac{-(2-2\cos t)}{\sqrt{(2-2\cos t)^2+4\sin^2 t}}\right)$, calculeu $n(\pi/2)$, i trobeu el centre del corresponent cercle osculador.

2. Considereu la hipocicloide $a(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$, $0 \leq 2t \leq 2\pi$. Esbrineu si hi ha punts on $a'(t) = 0$. És una corba regular?

Exercici 2 (Corba a $\mathbb{R}^2$. Corbes offset)

Anem a construir les corbes offset d'un conjunt de paràboles, per exemple, $y = \dfrac{x^2}{4a}, a \in \mathbb{R}$.
En primer lloc creem un **lliscador** per al paràmetre **a**.

A l'input escrivim:

c=Curve($2at, at^2, t, -15, 15$)

Creem un **lliscador** per al paràmetre **t** per poder definir un punt genèric de la corba.
P=$c(t)$

També necessitem el lliscador per calcular un vector tangent fent la derivada i el vector normal com el perpendicular normalitzat:

vt=$c'(t)$
vn=Rotate(vt,pi/2) vector perpendicular a vt. Podem fer-ho així perquè, en aquest cas, el vector normal sempre s'obté girant el tangent un angle recte en sentit antihorari.
un=UnitVector(vn)

Aquests vectors aniran canviant segons canviï la posició del punt P. Els representem amb l'origen a P, (amb la icona de crear vector des d'un punt) i els anomenem t i n , respectivament.

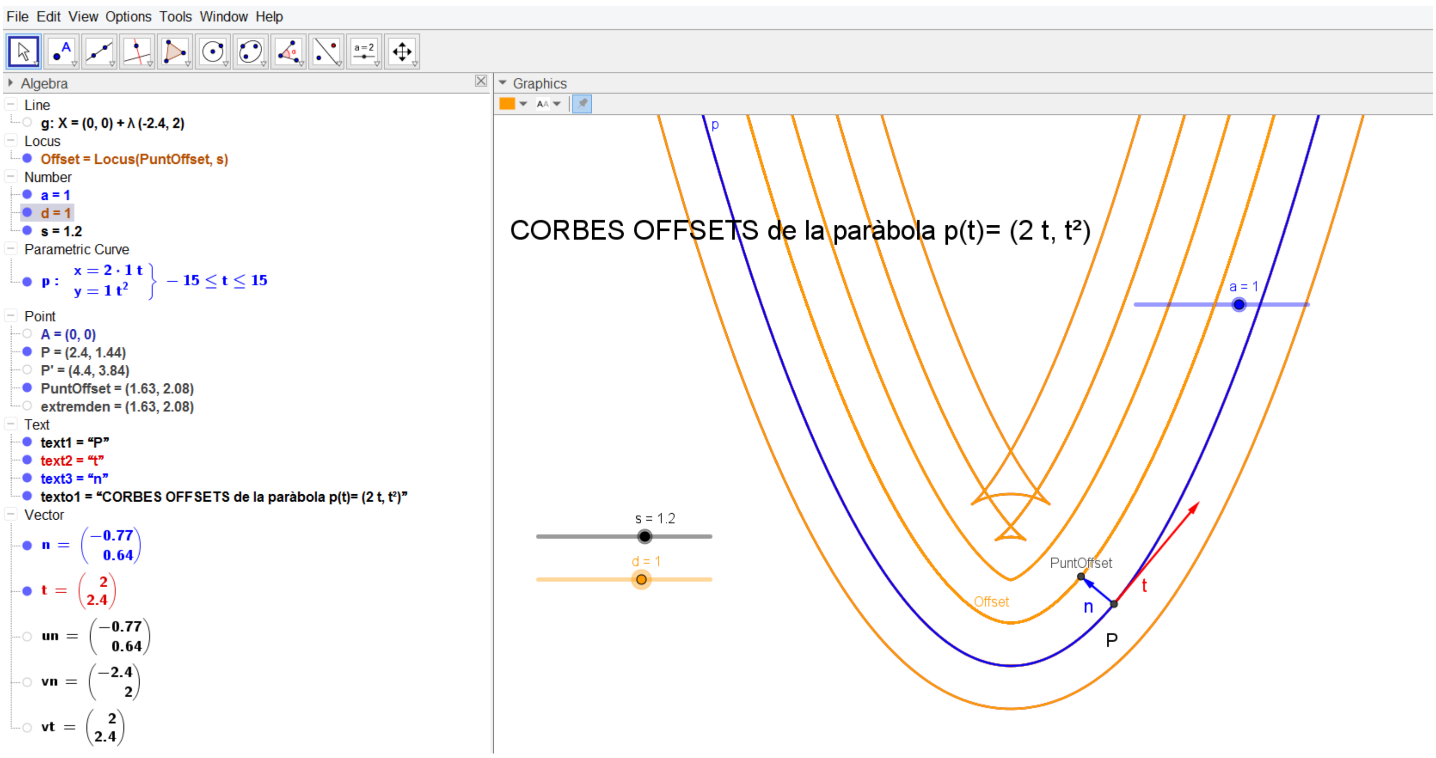
Ara les corbes offset es defineixen com les corbes situades a una distància "d" de la paràbola, on la distància es mesura en la direcció del vector normal en cada punt P. Necessitarem un **lliscador** per al paràmetre **d**.

PuntOffset=P+d n

Finalment la corba offset associada al valor del paràmetre d és el lloc geomètric del PuntOffset i el paràmetre t del qual depèn. Busqueu la icona de lloc geomètric en el menú i marqueu P i PuntOffset.

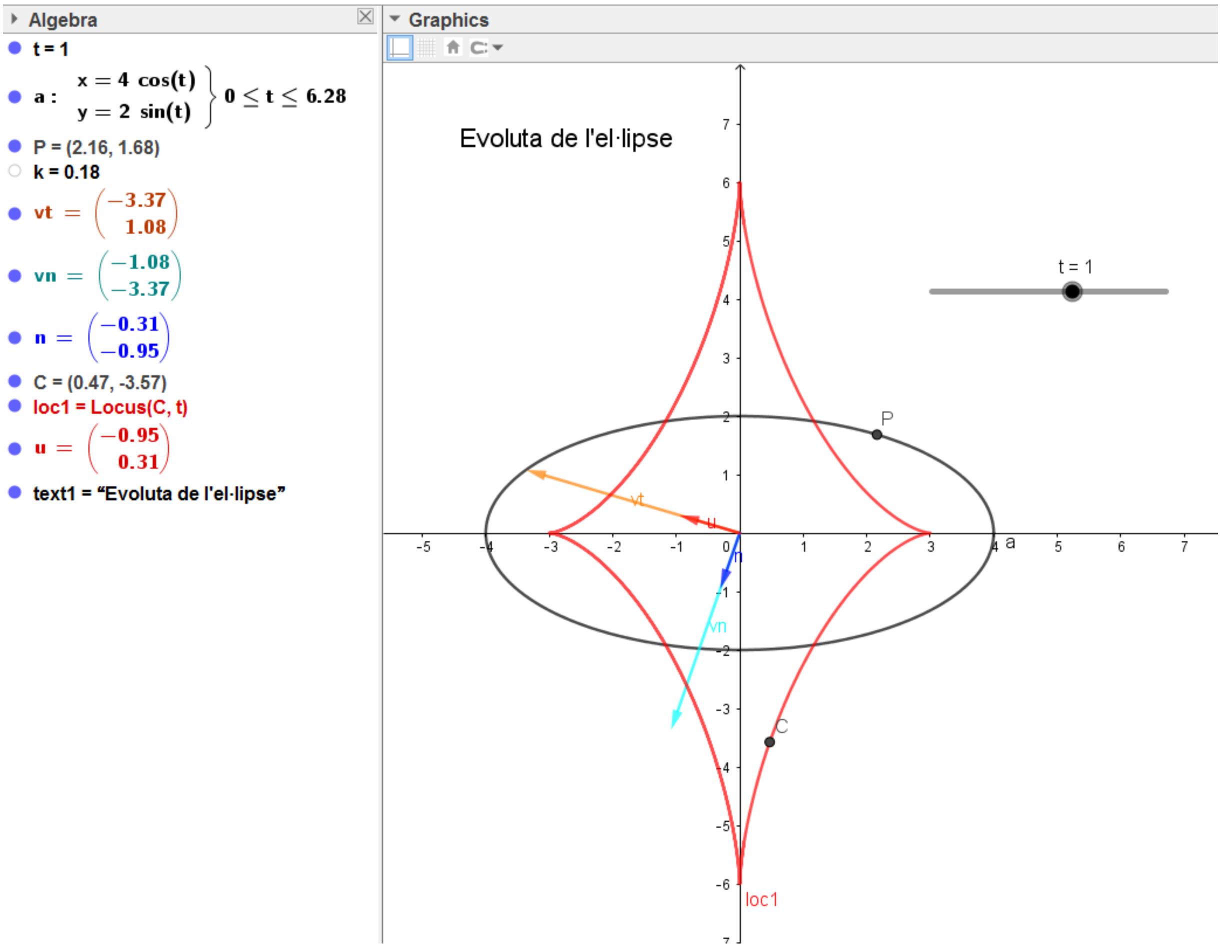
Offset=Locus(PuntOffset,t)

Si marquem "animation on"en les opcions del lliscador de d anirem veiem les diferents corbes offset a distància "d" de la paràbola. Si les volem veure totes alhora, cliquem sobre una corba offset amb el botó dret del ratolí i marquem "trace on".

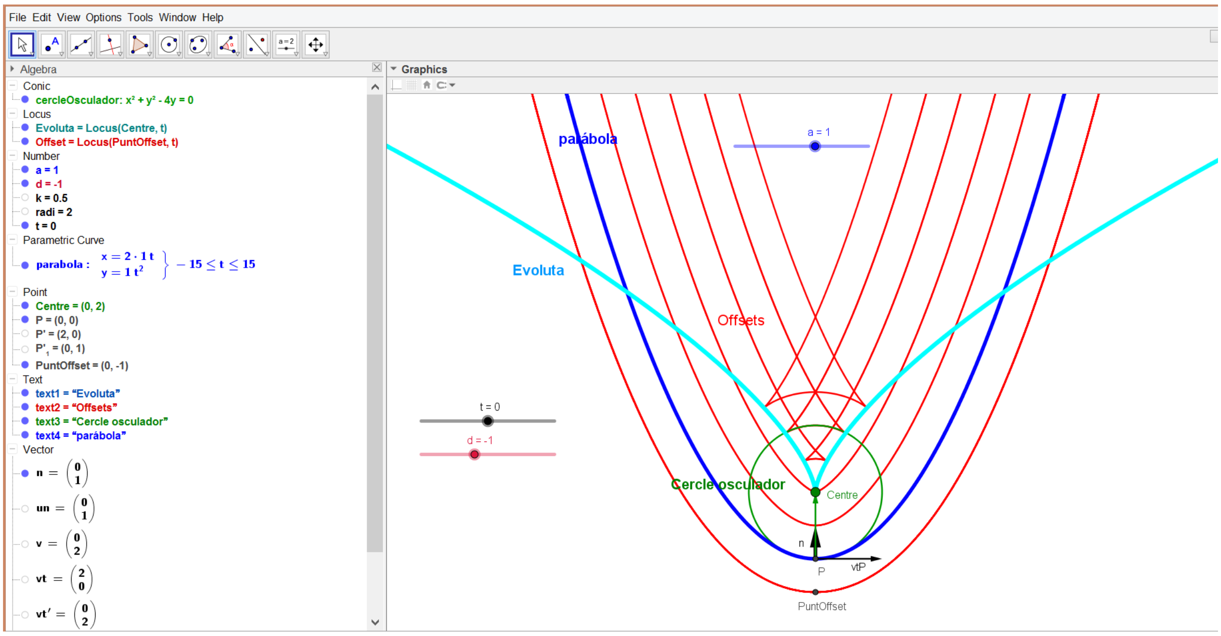


Qüestions:

1. L'evoluta és la corba descrita pels centres de curvatura (centres dels cercles osculadors): $e(t) = c(t) + \frac{1}{k(t)} n(t)$, on $c(t)$ és la corba, $k(t)$ la curvatura i $n(t)$ el vector normal. Observeu l'el·lipse de la figura següent i la seva evoluta (corba vermella). En quins punts té l'el·lipse curvatura mínima? En quins punts té curvatura màxima? Observeu que l'evoluta té un punt singular quan la curvatura assoleix un màxim o mínim local.



2. En la figura següent observeu la relació entre la corba les offsets (en vermell) i l'evoluta (en blau clar), en el punt de curvatura màxima. En la paràbola $p(t) = (2at, t^2)$, la corba offset a distància $d = 2a$ passa per un punt singular de l'evoluta. Observeu què passa amb les corbes offset quan $d > 2a$?



3. En una circumferència de radi R, raoneu quant val la curvatura en qualsevol dels seus punts.

4. Com són les corbes offset d'una circumferència? Raoneu quina és la seva evoluta.

Exercici 3 (Corba a $\mathbb{R}^3$. Triedre de Frenet)

Donada una corba a $\mathbb{R}^3$, volem obtenir el triedre de Frenet.
Primer definim les coordenades de la corba com a funcions (per tant, no necessitem definir cap lliscador): $f(t)$, $g(t)$ i $h(t)$. Per exemple,

$f(t) = (1/3)(\sin(3t) - t\cos(3t))$
$g(t) = (1/3)(\cos(3t) - t\sin(3t))$
$h(t) = t$

Ara definim la corba i un punt genèric d'ella.

a = Curve$(f(t), g(t), h(t), t, 0, 15pi)$

Per al punt genèric sobre la corba necessitem definir un **lliscador** per al paràmetre **t**.

$P = a(t)$

Per calcular les derivades successives de la corba, cal definir abans un lliscador per al paràmetre t (però ja el tenim).

$vt =$Vector$((f'(t), g'(t), h'(t)))$
$ut =$UnitVector(vt) és el vector tangent ancorat a l'origen.

$vt2 =$Vector$((f''(t), g''(t), h''(t)))$

$ub =$UnitVector(Cross$(vt, vt2)$) és el vector binormal ancorat a l'origen.

un=Cross(ub, ut) és el vector normal ancorat a l'origen,
(no cal fer-lo unitari perquè el producte vectorial de dos vectors unitaris ortogonals és un vector unitari).

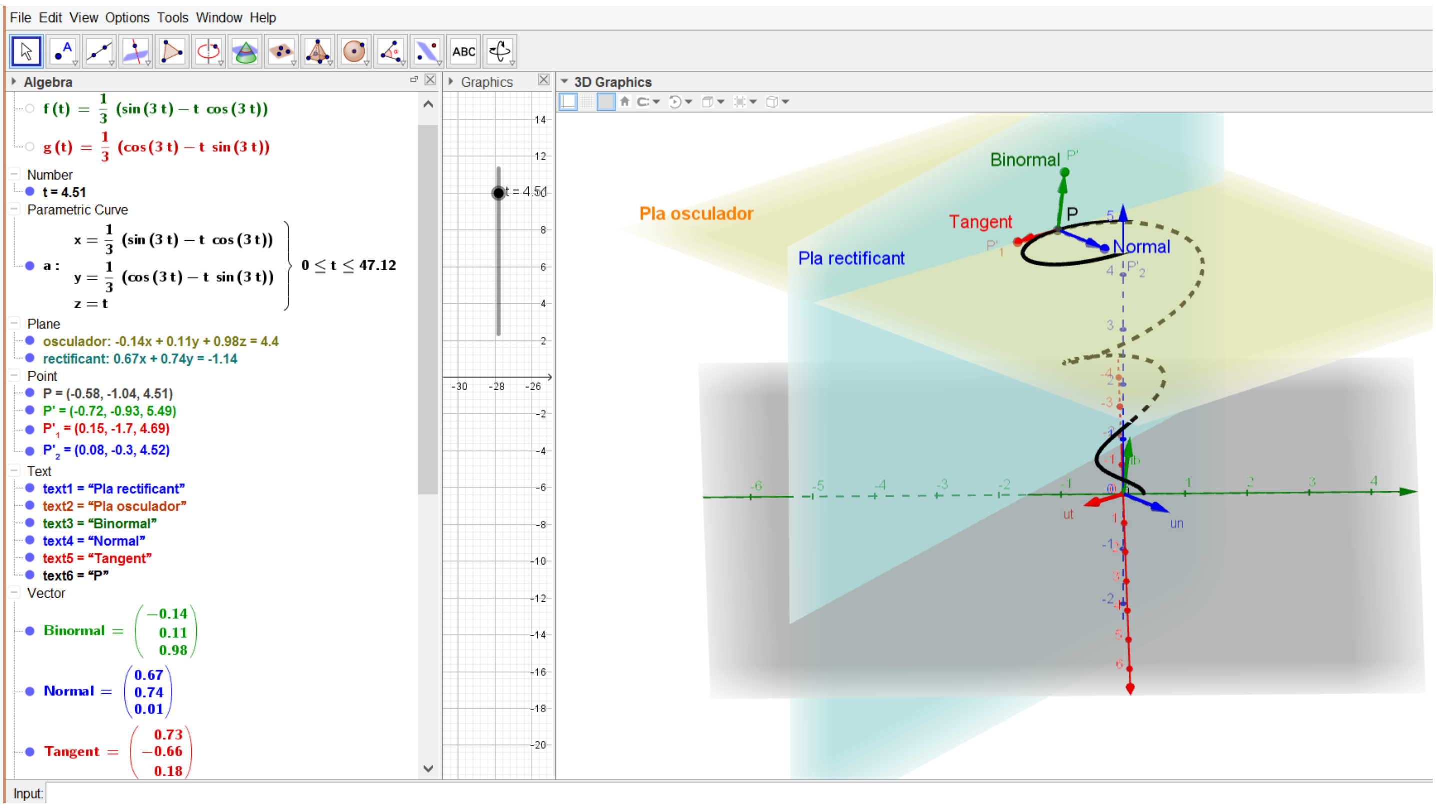
Ara clicant la icona de **vector des d'un punt** seleccionarem en la vista gràfica: 1) el punt sobre la corba, que serà P, i 2) un vector que serà ub, o un, o ut, segons volguem crear el vector binormal, normal o tangent, respectivament. Al fer-ho crearà els punts P', o P'_2, o P'_1 que seran els extrems dels vectors del triedre (referència sobre P), i apareixeran aquests vectors en la vista algebraica. Els punts P', o P'_2 i P'_1 es poden desmarcar i als vectors els hi podeu canviar el nom per Binormal, Normal i Tangent.

Binormal=Vector(P, P') **Normal**=Vector(P, P'_2) **Tangent**=Vector(P, P'_1)

Podem dibuixar els plans següents:

osculador=Plane(P, P'_1, P'_2) conté normal i tangent

rectificant=Plane(P, P', P'_1) conté binormal i tangent



Qüestions:

1. Si considereu una corba plana, com és el vector binormal?
2. Considereu una circumferència al pla XY, a(t)=$(R\cos(t), R\sin(t), 0)$. Calculeu el triedre de Frenet en un punt genèric de la circumferència.
3. Quant val la torsió en qualsevol punt d'una corba plana?
4. Considereu l'hèlix $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Calculeu el triedre de Frenet, la curvatura i la torsió en un punt arbitrari.

Exercici 4 (Corba a $\mathbb{R}^3$. Curvatura, torsió, cercle osculador, evoluta i corbes offset)

Definirem una corba de Bézier a $\mathbb{R}^3$ i treballarem sobre la mateixa.

A $\mathbb{R}^3$:
A la vista gràfica 3D dibuixem 4 punts: A, B, C i D.
A l'input escrivim:
Les funcions que defineixen les coordenades de la corba (les podeu desmarcar de la vista algebraica perquè no cal veure-les en la vista gràfica). I definim la corba.
$f(t) = (1-t)^3x(A) + 3(1-t)^2tx(B) + 3(1-t)t^2x(C) + t^3x(D)$
$g(t) = (1-t)^3y(A) + 3(1-t)^2ty(B) + 3(1-t)t^2y(C) + t^3y(D)$
$h(t) = (1-t)^3z(A) + 3(1-t)^2tz(B) + 3(1-t)t^2z(C) + t^3z(D)$

Bezier=Curve$(f(t), g(t), h(t), t, 0, 1)$
Creem un **lliscador** per al paràmetre **t** i definim un punt genèric de la corba així:
P=Bezier(t)
Per calcular les derivades successives de la corba, cal definir abans un lliscador per al paràmetre **t** (però ja el tenim).

vt =Vector$((f'(t), g'(t), h'(t)))$ fixeu-vos bé en no deixar-vos cap parèntesi!
$vt2$ =Vector$((f''(t), g''(t), h''(t)))$
vb =Vector$(Cross(vt, vt2))$

$\boxed{\text{k=Curvature(P, Bezier)}}$ Aleshores, $\boxed{\text{abs(k)}}$ = $\boxed{sqrt(\text{vb*vb})/(sqrt(\text{vt*vt}))^3}$ que és la **curvatura** en P.

Per obtenir el **cercle osculador**, necessitem el vector normal a P, el centre de curvatura i el radi de curvatura (invers de la curvatura):

ub =UnitVector(vb) és el vector binormal ancorat a l'origen.

ut =UnitVector(vt) és el vector tangent ancorat a l'origen.

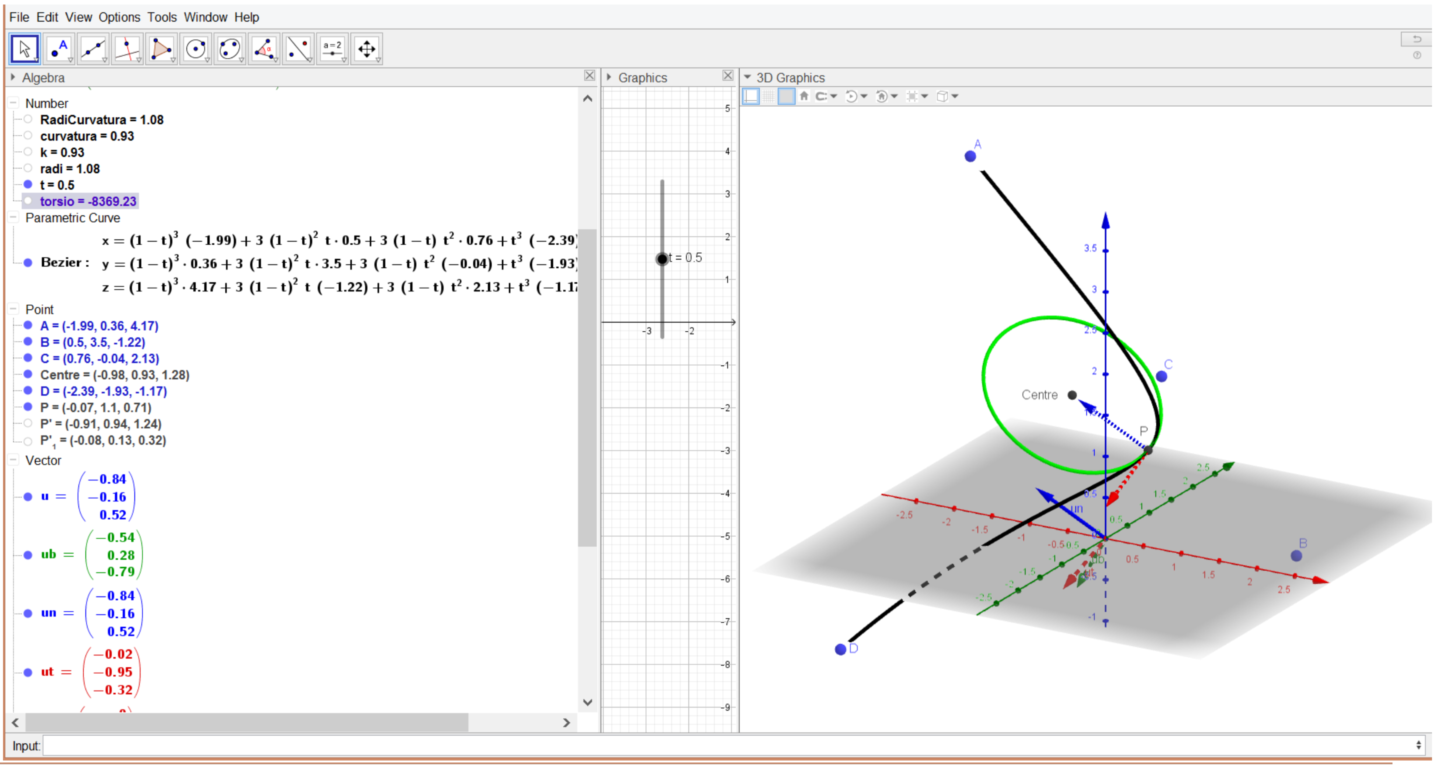
un =Cross(ub, ut) és el vector normal ancorat a l'origen.

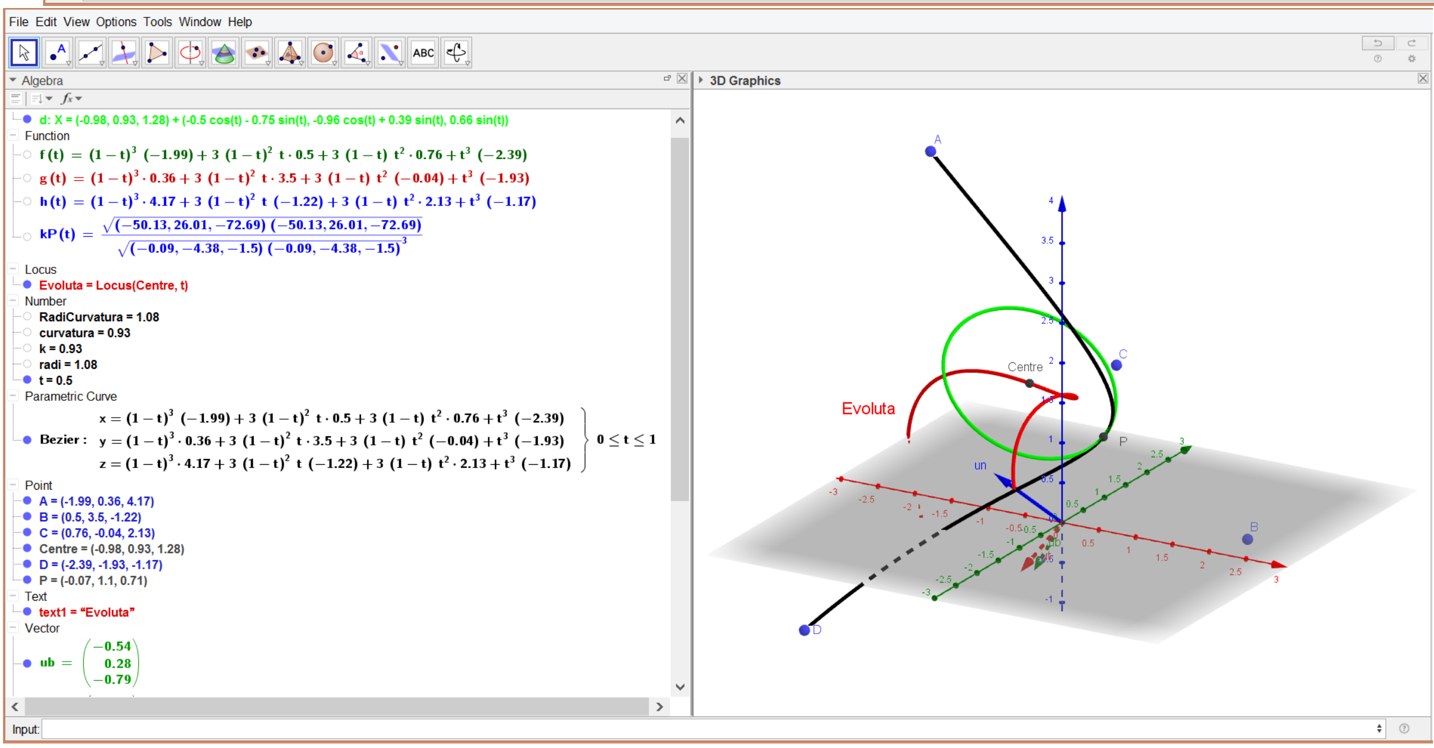
$\boxed{\text{radi=1/abs(k)}}$

$\boxed{\text{Centre=}\ P + (1/\text{abs(k)}) * \text{un}}$ és important escriure el nom dels punts en majúscula (Centre) perquè altrament el programa interpretarà que voleu dibuixar un vector.
Recordeu que OsculatingCircle(P,"nom-corba") no funciona en $\mathbb{R}^3$. Anem a la barra d'eines 3D i cliquem la icona de cercle amb centre, radi i direcció. Marquem en la vista gràfica el Centre i el vector vb, i ens demanarà el radi on escrivim 1/abs(k). Ja tenim el cercle osculador.

Calculem l'**evoluta** de la corba.
A l'input escrivim:
$\boxed{\text{Evoluta=Locus(Centre,t)}}$ O bé fem servir la icona de lloc geomètric i marquem el Centre i el lliscador de t.

A $\mathbb{R}^3$:
Calculem també la **torsió** de la corba.
A l'input escrivim:
vt3=Vector((f"'(t), g"'(t), h"'(t))) recordeu que vt i $vt2$ ja els hem definit en el càlcul de la curvatura.
M=$\{\{x(vt), y(vt), z(vt)\}, \{x(vt2), y(vt2), z(vt2)\}, \{x(vt3), y(vt3), z(vt3)\}\}$
$\boxed{\text{torsio=-Determinant(M)/(vb*vb)}}$





Qüestions:

1. Calculeu els cercles osculadors i l'evoluta d'una corba a l'espai.

   Aquí teniu unes adreces web on podeu trobar la parametrització d'algunes corbes de $\mathbb{R}^3$:

   http://3d-xplormath.org/j/applets/en/index.html

   http://www.mathcurve.com/courbes3d/courbes3d.shtml

   http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Curves/Curves.html

PRÀCTICA 4: Projeccions. Corbes de Bézier racionals

Projeccions. Còniques. Corbes racionals.

Volem dibuixar còniques de manera exacta. Les corbes de Bézier només ho poden fer de manera aproximada, llevat que siguin paràboles.

Totes les còniques no degenerades es poden obtenir, via projecció des de l'origen, a partir d'una paràbola.

Amb les corbes de Bézier racionals podem dibuixar trossos de tot tipus de còniques, de manera exacta.

Projeccions a $\mathbb{R}^2$

Es projecta sobre una recta $r : \{ax + by + c = 0\}$. D'aquí obtenim $(a\,b\,c)$.
De les coordenades homogènies d'un punt o un vector obtenim $(m,\ n,\ p)$. Veiem com:

- Projecció central: es projecta des d'un punt **P**

  $\mathbf{P} = (\mathbf{m},\ \mathbf{n}) \Longrightarrow (\mathbf{m},\ \mathbf{n},\ \mathbf{1})$

- Projecció paral·lela: en la direcció paral·lela a un vector $\overrightarrow{V}$ donat.

  $\overrightarrow{\mathbf{V}} = (m,\ n) \Longrightarrow (m,\ n,\ 0)$

Matriu de la projecció, en coordenades homogènies:

$$\begin{pmatrix} -bn - cp & bm & cm \\ an & -am - cp & cn \\ ap & bp & -am - bn \end{pmatrix}$$

Projeccions a $\mathbb{R}^3$

Es projecta sobre un pla d'equació $\{ax + by + bz + d = 0\}$. D'aquí obtenim (a, b, c, d) .
De les coordenades homogènies del punt o el vector obtenim $(m,\ n,\ p,\ q)$. Veiem com:

- Projecció central: es projecta des d'un punt **P** .

  $\mathbf{P} = (\mathbf{m},\ \mathbf{n},\ \mathbf{p}) \Longrightarrow (\mathbf{m},\ \mathbf{n},\ \mathbf{p},\ \mathbf{1})$

- Projecció paral·lela: en la direcció paral·lela a un vector $\overrightarrow{V} =(m, n, p)$.

  $\overrightarrow{\mathbf{V}} = (m,\ n,\ p) \Longrightarrow (m,\ n,\ p,\ 0)$

- Projecció ortogonal: en una direcció perpendicular al pla, és a dir, $\overrightarrow{V}$ proporcional a $(a,\ b,\ c)$.

  $\overrightarrow{V} = (m,\ n,\ p) \Longrightarrow (m,\ n,\ p,\ 0)$

Matriu de la projecció, en coordenades homogènies:

$$\begin{pmatrix} -(bn + cp + dq) & bm & cm & dm \\ an & -(am + cp + dq) & cn & dn \\ ap & bp & -(am + bn + dq) & dp \\ aq & bq & cq & -(am + bn + cp) \end{pmatrix}$$

Corba de Bézier racional:

Una **corba de Bézier racional de grau n** és una corba parametritzada

$$\mathcal{R}(t) = R_0^n(t)\, P_0 + R_1^n(t)\, P_1 + \cdots + R_n^n(t)\, P_n, \quad t \in [0,\,1], \quad \text{on:}$$

$$R_i^n(t) = \begin{cases} \dfrac{w_i\, B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j\, B_j^n(t)} & \text{si } w_i \neq 0 \\[2ex] \dfrac{B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j\, B_j^n(t)} & \text{si } w_i = 0 \end{cases} \qquad \text{i} \quad \begin{cases} \text{Polinomis de Bernstein : } B_0^n(t),\, \ldots,\, B_n^n(t) \\ \text{Punts de control: } P_0,\, \ldots,\, P_n, \\ \text{Pesos: } w_0,\, \ldots,\, w_n \in \mathbb{R}, \text{no tots nuls} \end{cases}$$

De la mateixa forma que es pot obtenir una Bézier utilitzant els polinomis de Berstein o fent servir l'algoritme de de Casteljau, també tenim dues maneres d'obtenir les corbes de Bézier racionals: utilitzant la definició amb els polinomis de Berstein i els pesos, o bé fent projeccions.

Efectivament, les corbes racionals són el resultat de la projecció central (perspectiva) desde l'origen de coordenades sobre el pla $z = 1$, d'una corba amb una dimensió més.

La idea és que un punt a l'espai de coordenades $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ amb $z \neq 0$ es projecta sobre el punt $(x/z, y/z, 1)$. Aquest punt, es pot identificar amb el punt $(x/z, y/z) \in \mathbb{R}^2$.

Per tant, si per exemple volem una corba racional a $\mathbb{R}^3$, amb punts de control $\{P_0, \cdots, P_3\}$ i pesos positius $\{w_0, \cdots, w_3\}$ una manera senzilla d'obtenir-la és definir primer una Bézier a $\mathbb{R}^4$, que tingui per punts de control als punts $\mathcal{P}_i$ que són els P_i en coordenades homogènies, fent servir els pesos així: $\mathcal{P}_i = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$. Un cop construïda la Bézier a $\mathbb{R}^4$, la projectarem per obtenir la Bézier racional, és a dir, la deshomogeneïtzarem (dividint per l'última coordenada i quedant-nos les altres tres).

Si els pesos són positius, les Bézier racionales són combinacions afins dels punts de control projectats. Per tant, les Bézier racionals tenen **invariància afí i també projectiva**.

Exercici 1 (Projecció central)

Farem una projecció central d'una Bézier a $\mathbb{R}^3$, des d'un punt P, sobre el pla $y = 0$.

A $\mathbb{R}^3$:
Dibuixem els punts A, B, C D i P en la vista gràfica.
Per controlar la visió del pla $y = 0$, ho fem amb 4 punts X, X', Z i Z', tals que X i Z estan definits amb un **lliscador** cadascun.

A l'input escrivim:

X'=Reflect(X, O), Z'=Reflect(Z, O), on O=$(0, 0, 0)$.

Bezier=Curve$((1-t)^3 A + 3(1-t)^2 tB + 3(1-t)t^2 C + t^3 D, t, 0, 1)$

El pla sobre el qual projectem és: $\{ax + by + cz + d = 0\}$.
Ho fem des del punt P de coordenades homogènies $P = (m, n, p, q)$ on $q = 1$ per ser projecció central.

Per tant, $y = 0 \Longrightarrow a = 0, b = 1, c = 0, d = 0$,
$P = (1, 4, 3) = (m, n, p) \Longrightarrow m = x(P), n = y(P), p = z(P), q = 1$.

Anomenem mproj a la **matriu de la projecció** i l'escrivim com a llista de files:

mproj=$\{\{-y(P), x(P), 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, z(P), -y(P), 0\}, \{0, 1, 0, -y(P)\}\}$

Anomenem mpunt1 a la **matriu dels punts amb coordenades homogènies** (quarta coordenada igual a 1):

mpunt1=$\{\{x(A), x(B), x(C), x(D)\}, \{y(A), y(B), y(C), y(D)\}, \{z(A), z(B), z(C), z(D)\}, \{1, 1, 1, 1\}\}$.

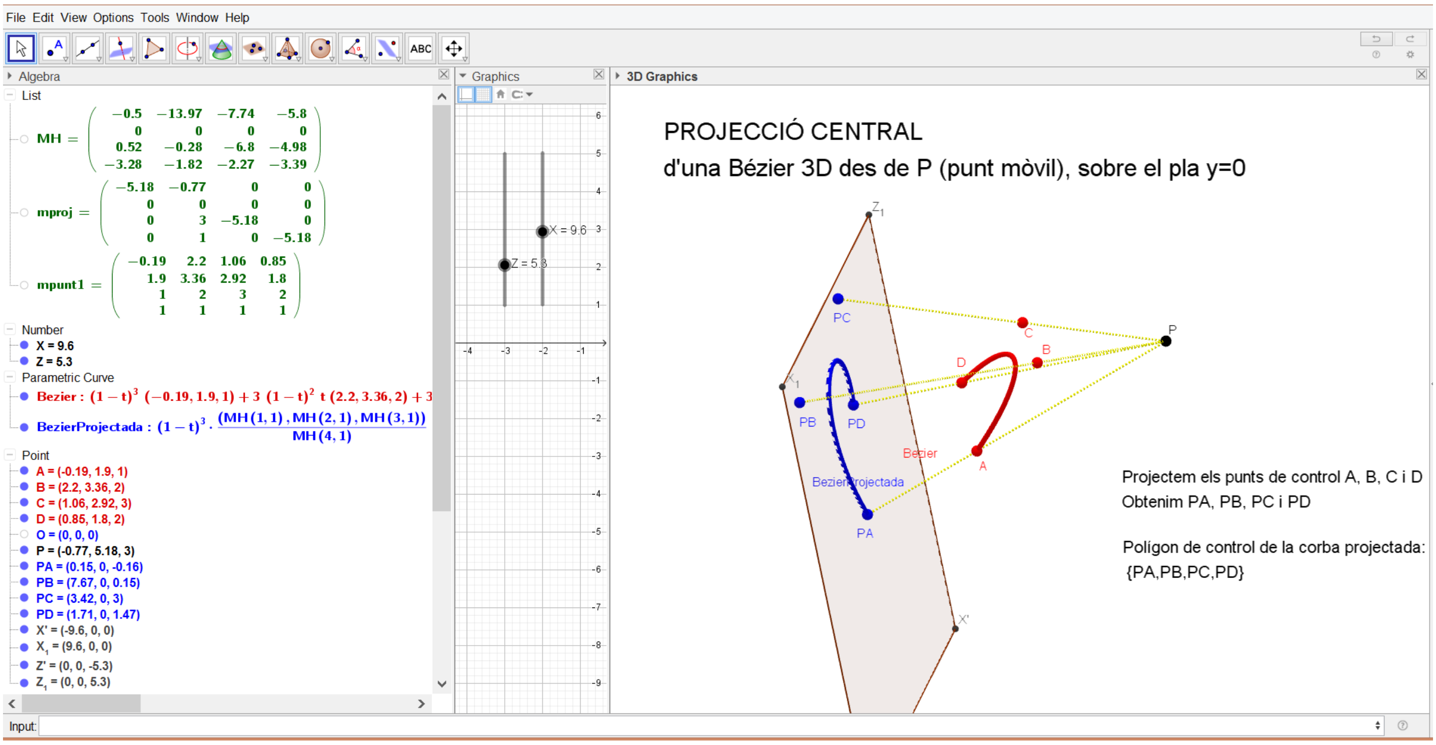
MH=mproj*mpunt1

Les columnes de MH són les projeccions dels punts A, B, C i D però en coordenades homogènies.
Per **deshomogeneïtzar**, considerem les tres primeres coordenades dividides per la quarta:

PA=$(MH(1,1), MH(2,1), MH(3,1))/MH(4,1)$
PB=$(MH(1,2), MH(2,2), MH(3,2))/MH(4,2)$
PC=$(MH(1,3), MH(2,3), MH(3,3))/MH(4,3)$
PD=$(MH(1,4), MH(2,4), MH(3,4))/MH(4,4))$

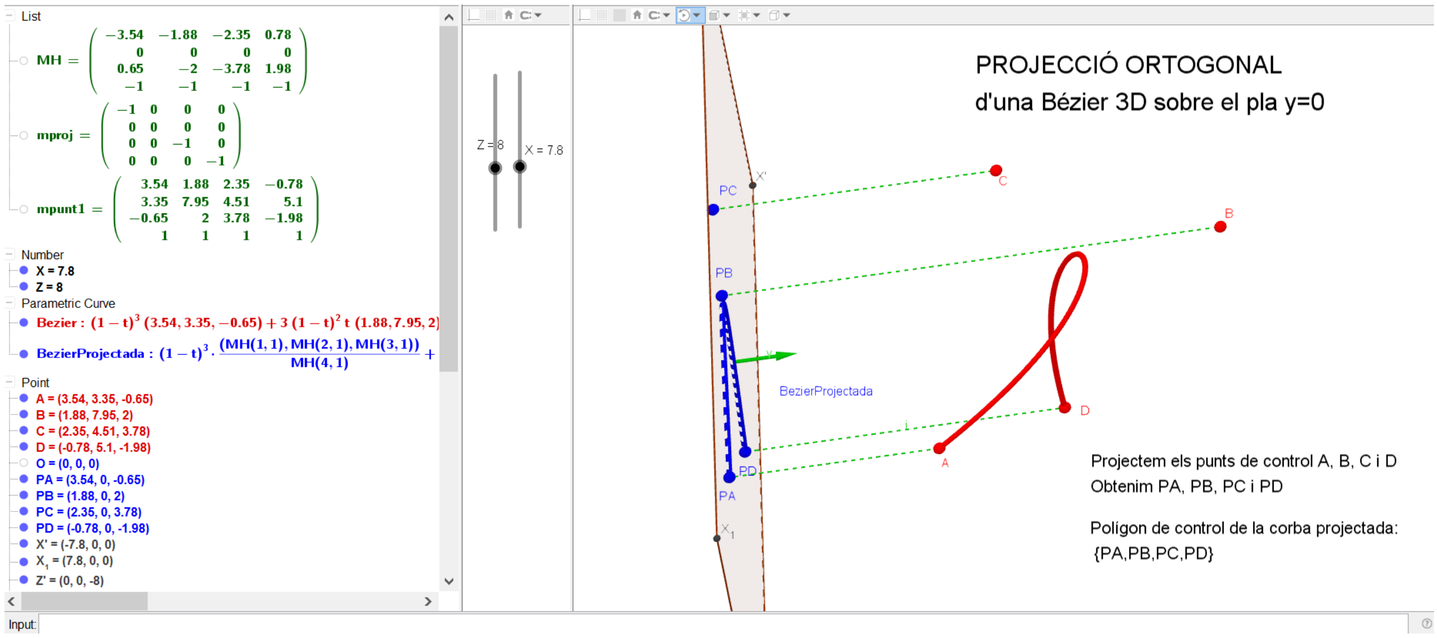
Finalment la projecció de la Bézier és la corba que té com a punts de control els punts projectats:

BezierProjectada=Curve$((1-t)^3 PA + 3(1-t)^2 tPB + 3(1-t)t^2 PC + t^3 PD, t, 0, 1)$



Qüestions:

1. Feu una projecció ortogonal. En la figura s'ha fet la projecció ortogonal al pla $y = 0$, quina és la matriu de projecció si projectem sobre $z = 0$?



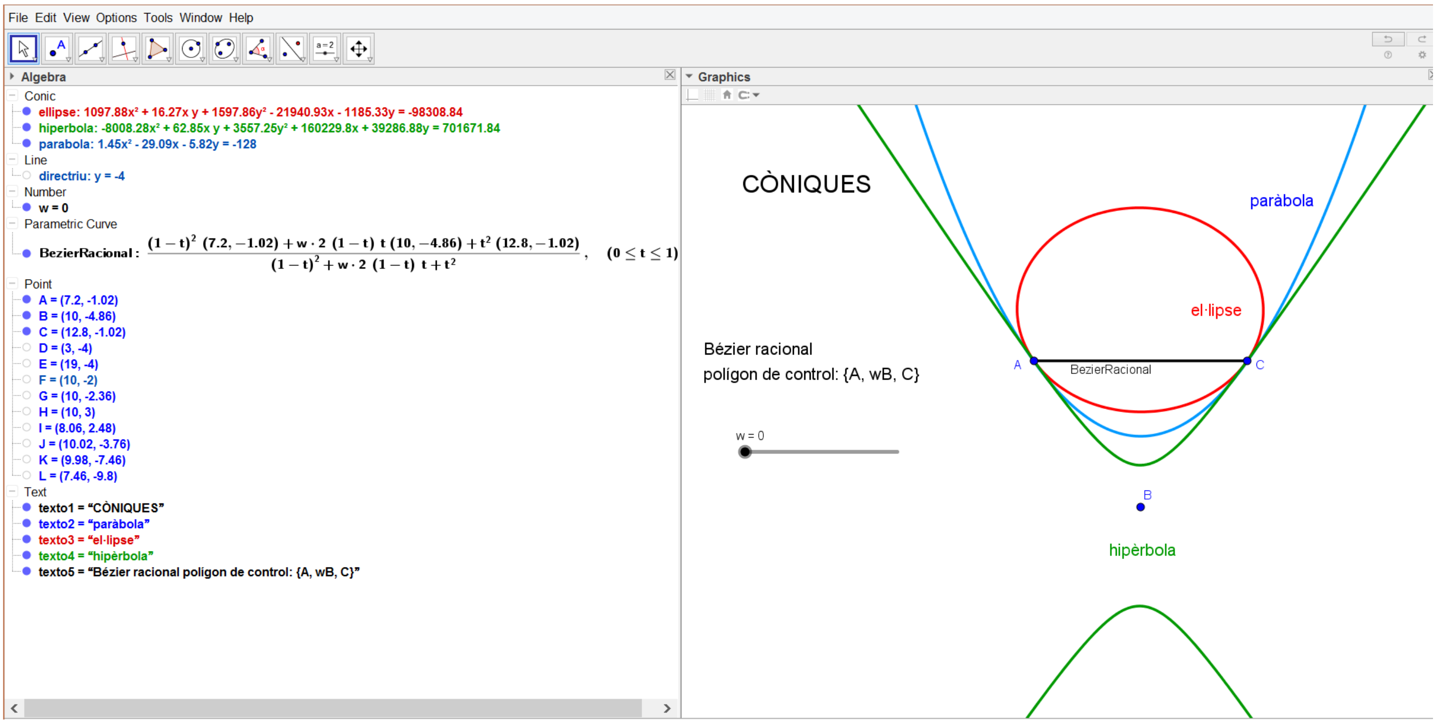
2. Feu una projecció paral·lela.

Exercici 2 (Còniques)

A $\mathbb{R}^2$:
Dibuixem els punts A, B i C. Construïm una corba de Bézier racional amb polígon de control $\{\mathbf{A}, \mathbf{wB}, \mathbf{C}\}$, on w és un pes que hem associat al segon punt, B. Creem un slider per al **paràmetre w**, $w > 0$.
A l'input escrivim:

BezierRacional= $\boxed{\text{Curve}\big(((1-t)^2 A + w\,2(1-t)tB + t^2 C)\,/\,((1-t)^2 + w\,2(1-t)t + t^2), t, 0, 1\big)}$

descriu trossos de còniques depenent de w.
Fent servir la icona corresponent a la barra del menú d'eines, hem dibuixat diferents còniques: una paràbola, una el·lipse i una hipèrbola.



Qüestions:

1. Descriu la corba pels valors de $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{w} = \mathbf{1}$, quina és la corba resultant en cada cas?
2. Comproveu que per a $\mathbf{w} < \mathbf{1}$ la corba de Bézier racional descriu el·lipses, amb $\mathbf{w} = \mathbf{1}$ paràboles i per a $\mathbf{w} > \mathbf{1}$ descriu hipèrboles.

Exercici 3 (Bézier racional de grau 3. Pesos no nuls)

A $\mathbb{R}^2$:
Dibuixem els punts A, B, C i D. Construïm una corba de Bézier racional amb polígon de control $\{\mathbf{w_A A}, \mathbf{w_B B}, \mathbf{w_C C}, \mathbf{w_D D}\}$. Creem quatre **lliscadors**, un per a cadascun dels pesos associats als punts de control $\mathbf{w_A}, \mathbf{w_B}, \mathbf{w_C}$ i $\mathbf{w_D}$.

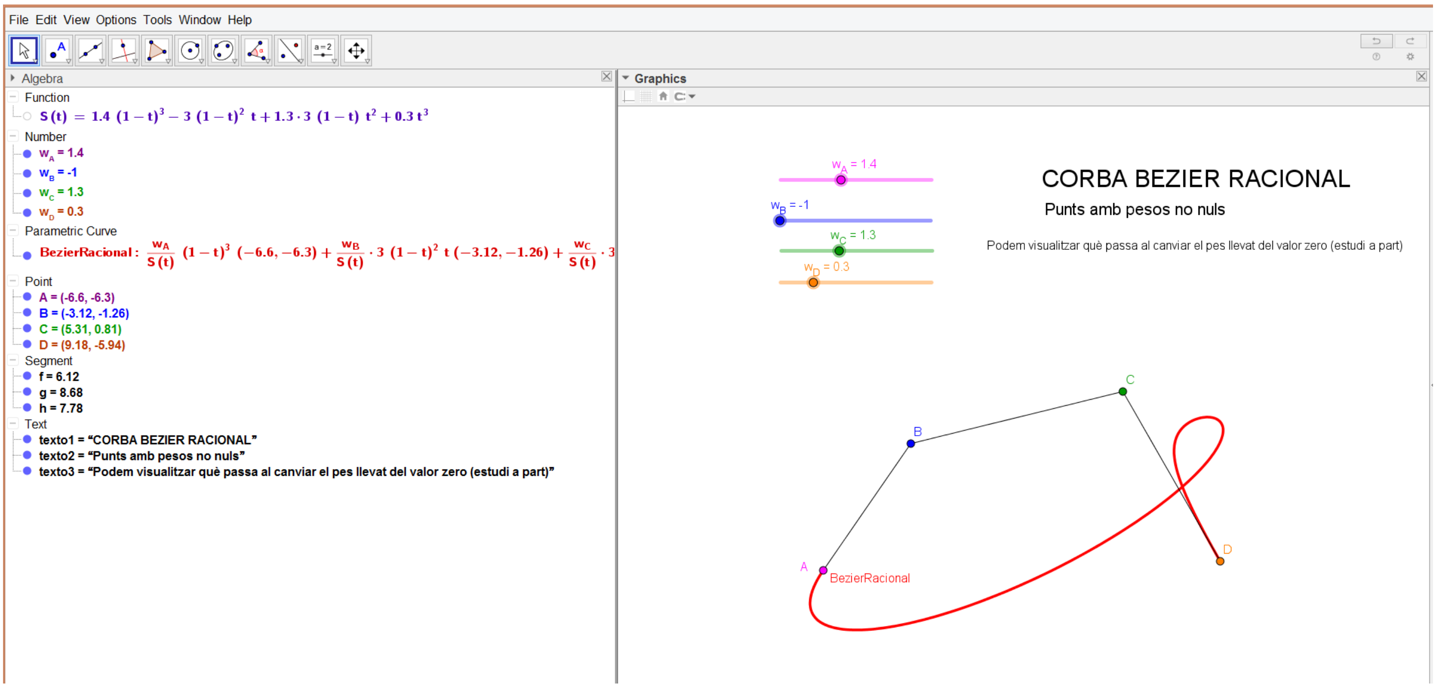
A l'input escrivim:

També multipliquem cada sumand pel pes del punt corresponent en $S(t)$:
S(t)=$w_A(1-t)^3 + w_B 3(1-t)^2 t + w_C 3(1-t)t^2 + w_D t^3$ Aquest serà el denominador de cada sumand en l'expressió de la Bézier racional de grau 3.
BezierRacional=

$\boxed{\text{Curve}(w_A/S(t)\ (1-t)^3 A + w_B/S(t)\ 3(1-t)^2 tB + w_C/S(t)\ 3(1-t)t^2 C + w_D/S(t)\ t^3 D, t, 0, 1)}$

Aquesta expressió no val per a pesos nuls, per això hem escrit la condició següent en les propietats de la corba (advanced to show object): $w_A \neq 0 \wedge w_B \neq 0 \wedge w_C \neq 0 \wedge w_D \neq 0$ (els símbols lògics es troben en el teclat de la vista algebraica).

En el proper exercici analitzarem algun pes nul.



Qüestions:

1. Comproveu que si tots els pesos són positius la corba resultant es manté dins de l'envolupant convexa dels punts de control. Per què?

2. Què passa quan augmentem el pes d'un sol punt?

3. Compareu la corba que resulta de fer tots els pesos igual 5 i la que resulta amb tots els pesos igual a 2. Hi ha alguna diferència? És possible "normalitzar"els pesos per tal que el primer pes w_0 sempre valgui 1?

Exercici 4 (Bézier racional amb un sol pes nul)

A $\mathbb{R}^2$:
Dibuixem els punts A, B, C i D.
Al punt A li associem un pes nul: $\boxed{w_A = 0}$.
Creem tres **lliscadors**, un per a cadascun dels pesos associats als altres punts de control $\mathbf{w_B}, \mathbf{w_C}$ i $\mathbf{w_D}$.

A l'input escrivim:

S(t)=$\mathbf{0}\,(1-t)^3 + w_B 3(1-t)^2 t + w_C 3(1-t)t^2 + w_D t^3$ Aquest serà el denominador de cada sumand en l'expressió de la Bézier racional de grau 3. Al lloc de w_A hem posat 0.

BezierRacional=

$\boxed{\text{Curve}(\mathbf{1}/S(t)\ (1-t)^3 A + w_B/S(t)\ 3(1-t)^2 t B + w_C/S(t)\ 3(1-t)t^2 C + w_D/S(t)\ t^3 D, t, 0, 1)}$

multipliquem cada sumand pel pes del punt corresponent, llevat del que val zero.

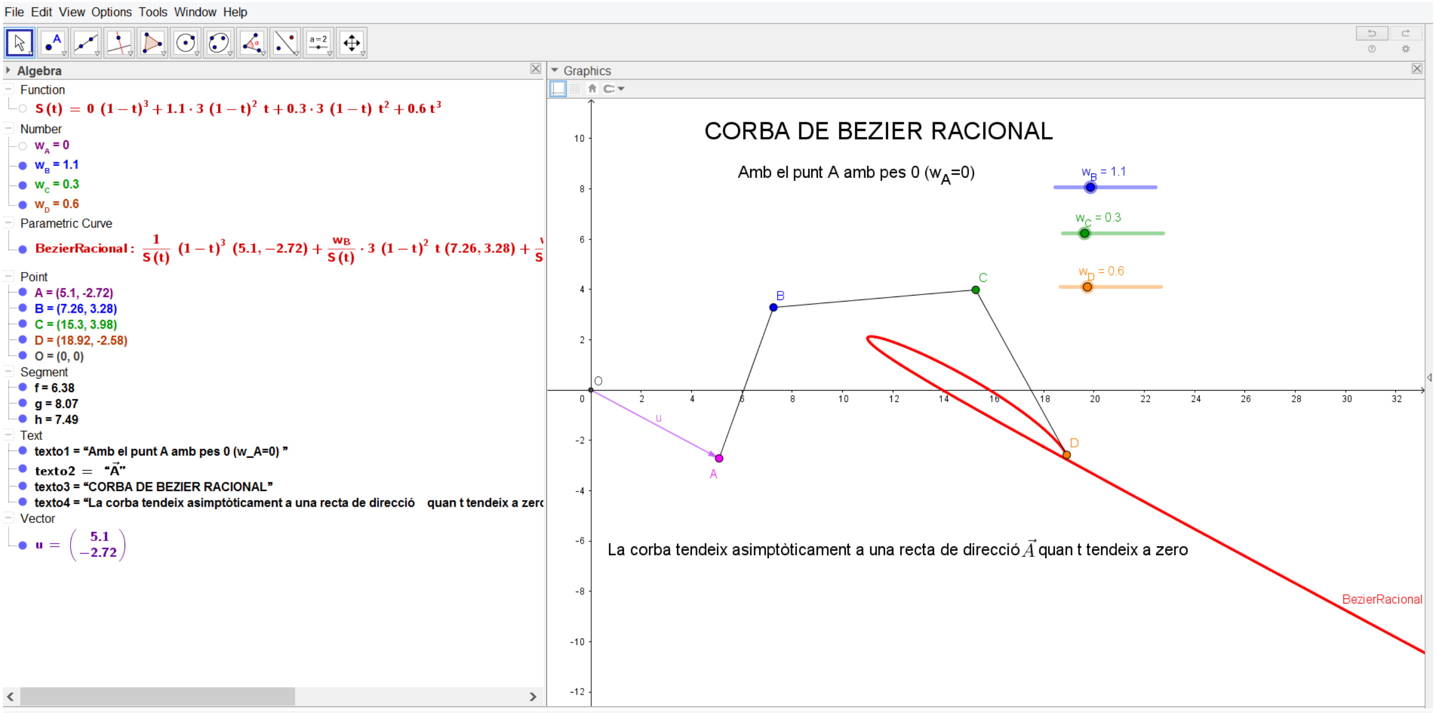
A $\mathbb{R}^2$:
Dibuixem els punts A, B, C i D.
Al punt B li associem un pes nul: $\boxed{w_B = 0}$.
Creem tres **lliscadors**, un per a cadascun dels pesos associats als altres punts de control $\mathbf{w_A}, \mathbf{w_C}$ i $\mathbf{w_D}$.

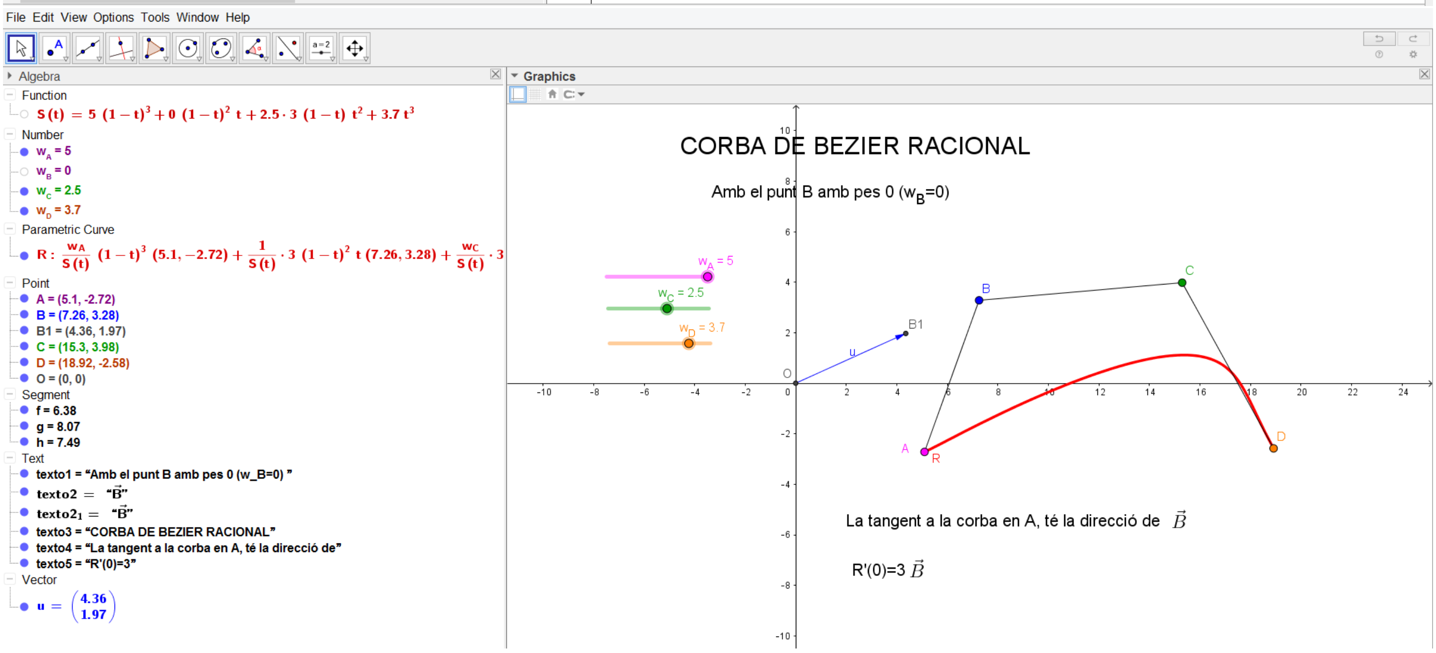
A l'input escrivim:

S(t)=$w_A(1-t)^3 + \mathbf{0}\,3(1-t)^2 t + w_C 3(1-t)t^2 + w_D t^3$ Aquest serà el denominador de cada sumand en l'expressió de la Bézier racional de grau 3. Al lloc de w_B hem posat 0.
R=

$\boxed{\text{Curve}(w_A/S(t)\ (1-t)^3 A + \mathbf{1}/S(t)\ 3(1-t)^2 t B + w_C/S(t)\ 3(1-t)t^2 C + w_D/S(t)\ t^3 D, t, 0, 1)}$

multipliquem cada sumand pel pes del punt corresponent, llevat del que val zero.





Qüestions:

1. En el cas de $w_A = 0$, quina és la direcció asimptòtica que pren la corba?

2. En el cas de $w_B = 0$, Calculeu el vector posició de B. Calculeu el vector tangent (no necessàriament unitari) a la corba R en A, és a dir, $R'(0)$. Comproveu que defineixen la mateixa direcció.

PRÀCTICA 7: B-splines i NURBS

Disseny de còniques i corbes lliures amb B-splines i NURBS.

Utilitzarem l'aplicatiu interactiu que trobareu en la pàgina web:

http://geometrie.foretnik.net/files/NURBS-en.swf

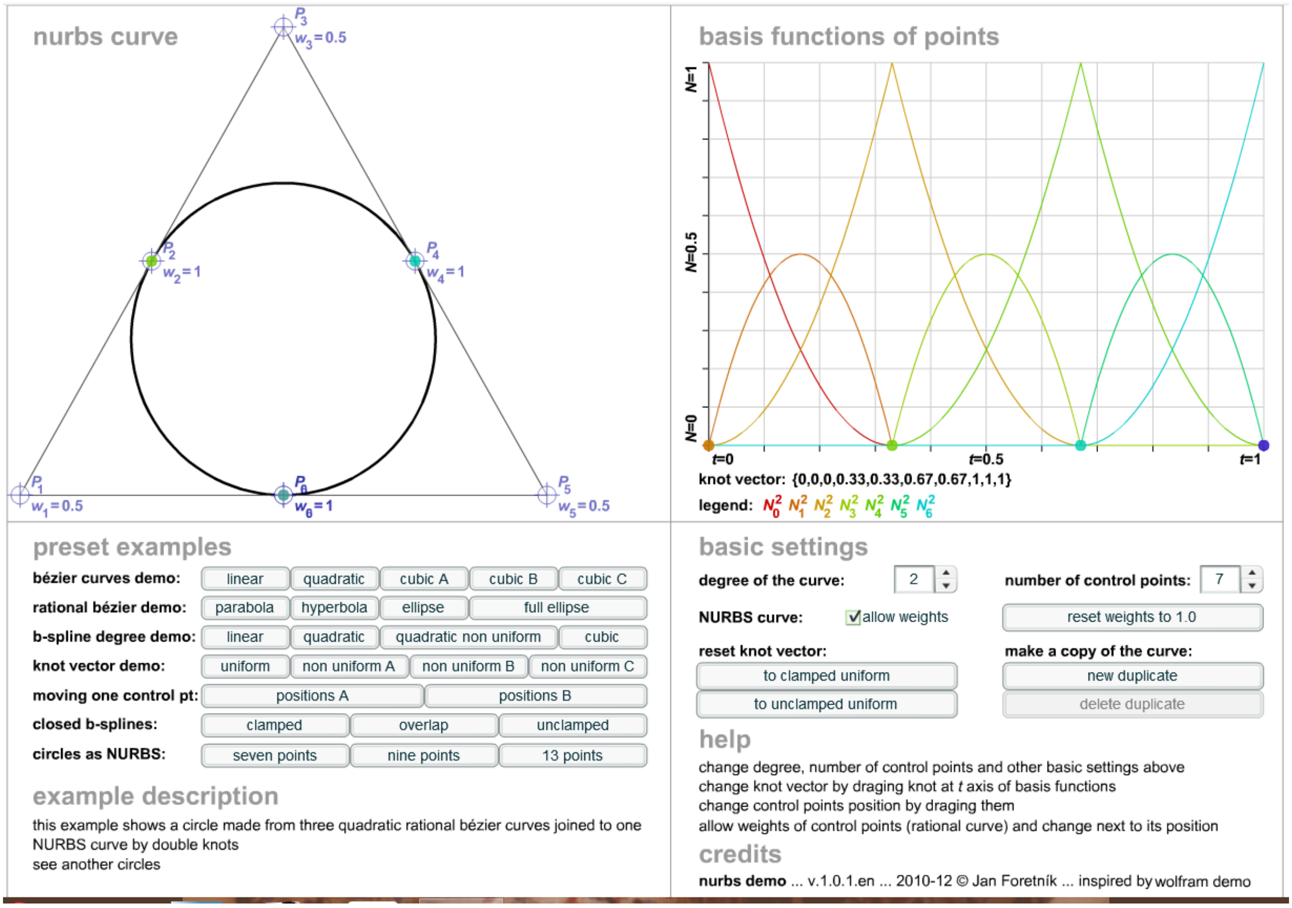
Observació: l'arxiu NURBS-en.swf que thas descarrgat, es pot obrir anant a l'adreça https://ruffle.rs/demo/ i seleccionant-lo en la pestanya "Local SWF: Select File".

Per descriure una corba NURBS, hem de determinar: el grau, els punts de control amb el vector de pesos associats i el vector dels nusos (knot-vector) que descriurà els trams de la corba.

A més en una NURBS es verifica la relació: $\boxed{n+m=p}$, on n=grau, m = #trams, p = #punts-control.

Recordeu que una corba NURBS és una generalització de les B-splines i les Bézier ja que: una NURBS amb tots els pesos iguals és una B-spline, i que una B-spline amb un sol tram és una corba Bézier.

Exercici 1 (Disseny de còniques (cercles) amb NURBS)



Qüestions:

1. En la figura s'ha aconseguit un cercle sencer amb una NURBS. Digueu quin és el seu grau, el nombre de punts de control, el vector de pesos associats i el vector dels nusos (knot-vector).
2. Com s'aconsegueix que la corba passi pel primer i per l'últim punt de control?
3. Com s'aconsegueix que la corba sigui tancada?

4. Què s'aconsegueix repetint tants cops com el grau de la corba un nus intern?

5. Quants trams té la corba? Per què hi ha dos trams que no es veuen?

6. Comproveu que el pes dels vèrtexs del triangle val $\cos(\alpha/2)$, on α és l'angle que formen dels costats incidents.

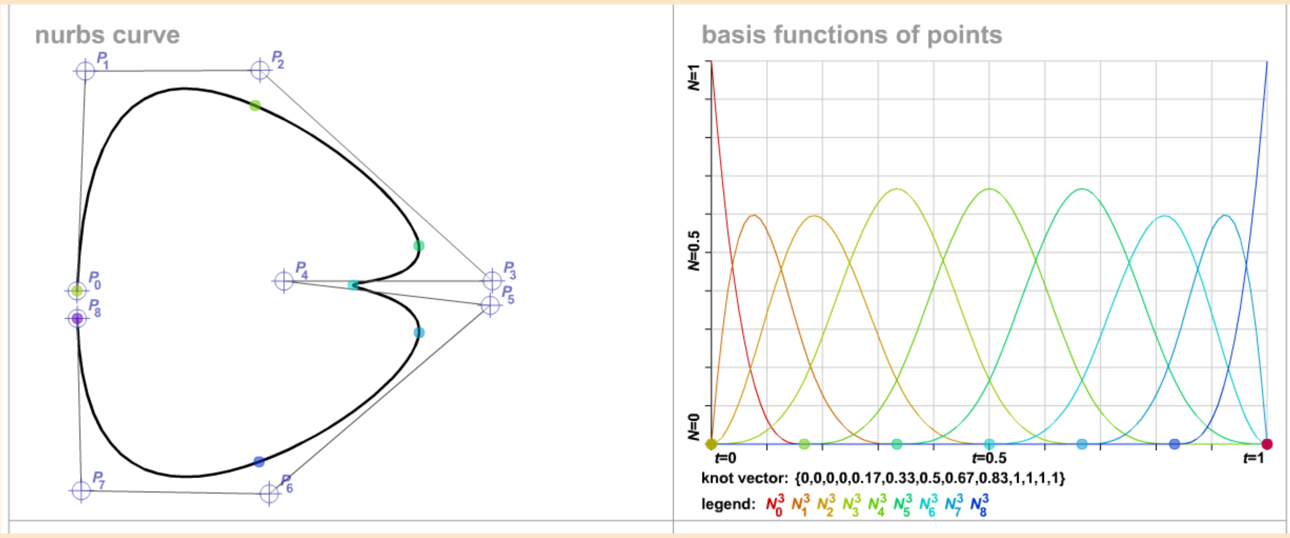
Exercici 2 (Disseny d'una corba amb NURBS)

Anem a fer el disseny d'una lletra, la "B", fent servir NURBS.

1ª aproximació

Escollim una corba NURBS de grau 3, amb 9 punts de control i el vector uniforme de nusos següent:

knot-vector=(0,0,0,0, 0.17, 0.33, 0.5, 0.67, 0.83, 1,1,1,1)



Si identifiquem P0 amb P8 aconseguim una corba tancada.

Qüestions:

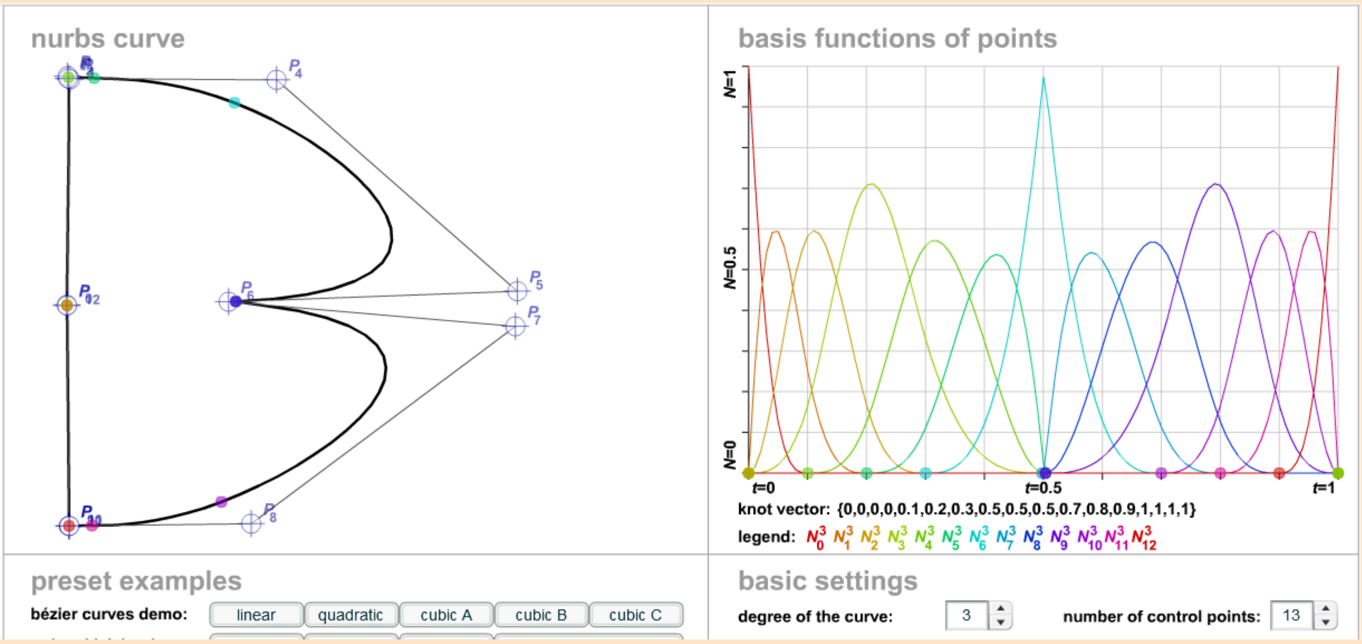
1. Quants trams té la corba de la figura?

2. Observeu que el primer i últim nus (t=0, t=1) estan repetits 4 cops, és a dir, $n+1$ cops donat que $n=3$ és el grau. Què s'aconsegueix amb aquesta repetició de nusos (no interns)?

2ª aproximació

Farem que la corba passi per algun punt de control intern. Per aconseguir-ho, repetirem alguns punts de control (en lloc de 9 punts en farem servir 13 comptant les repeticions). També farem repetició de nusos interns.

knot-vector=(0,0,0,0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.5, 0.5, 0.7, 0.8, 0.9, 1,1,1,1)



Qüestions:

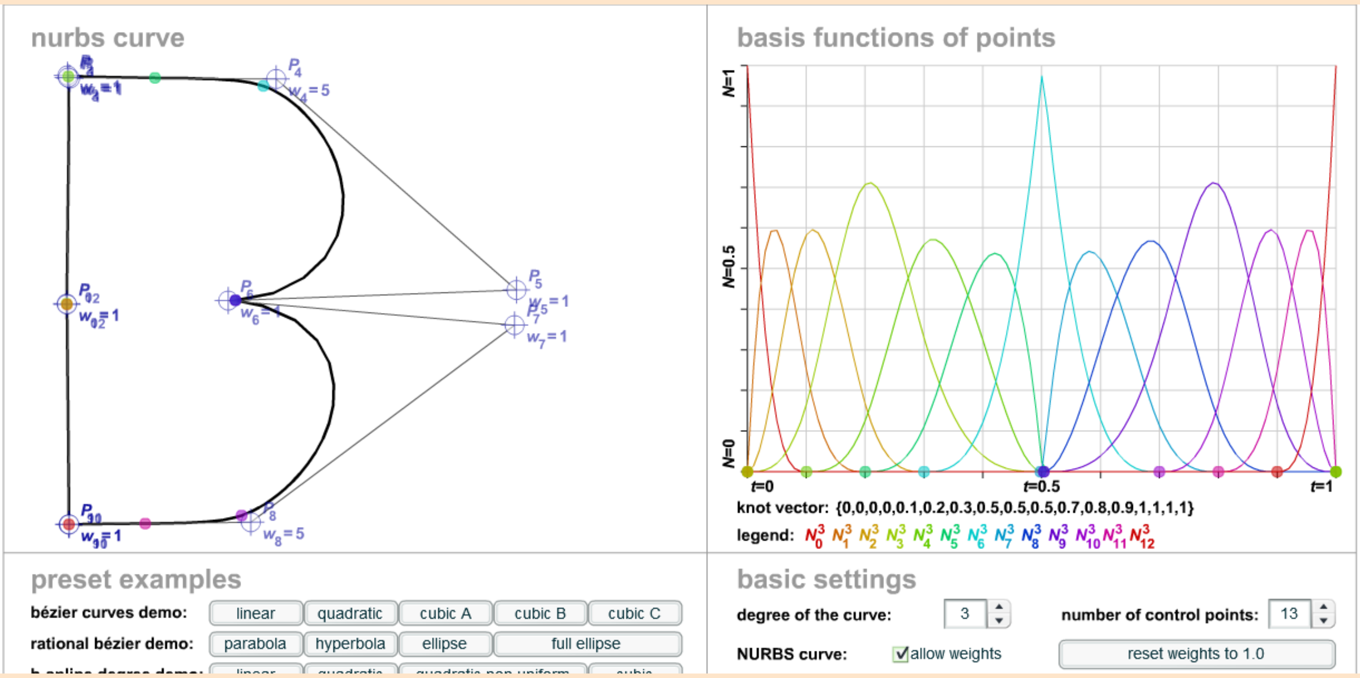
1. Quants trams té la corba de la figura?
2. Quins nusos estan repetits? Indiqueu quants cops estan repetits i que s'aconseguiex en cada cas.
3. Observeu que P0 està identificat amb P12. Quins altres punts s'han identificat i, per tant, estan repetits? Indiqueu quants cops i el resultat de fer-ho.

3ª aproximació

Partim de l'aproximació 2, és a dir, una NURBS de grau 3, 13 punts de control i el vector uniforme de nusos:

knot-vector=(0,0,0,0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.5, 0.5, 0.7, 0.8, 0.9, 1,1,1,1)

Ara per acabar de moldejar la corba, li indiquem a l'aplicatiu que assignem pesos (altrament tots els punts tenen el mateix pes igual a 1). En la figura, al costat de cada punt de control li podem dir quin és el pes que volem.



Qüestions:

1. Quin és el vector de pesos de la corba de la figura?
2. Què passa quan augmentem el pes associat a un punt de control? I si el disminuïm?
3. Què passa si multipliquem tots els pesos per la mateixa constant?

Fes servir l'aplicatiu per dissenyar una altra lletra (o figura lliure) i documenta com l'has obtingut.

PRÀCTICA 8: Superfícies

Alguns tipus de superfícies: reglades, de revolució i tubulars,...
Superficies de Bézier i continuïtat G^1 per a la unió.

Depenent de la propietat en què ens fixem podem obtenir diferents classificacions de les superfícies. Aquí mencionem alguns tipus.

- **Superfícies minimals**

  Si un filferro tancat, corbat a l'espai, s'introdueix en un líquid sabonós, en treure'l s'obté una pel·lícula. A causa de la tensió superficial del líquid, aquesta pel·lícula és una superfície en equilibri.

  És una superfície d'àrea mínima, entre totes les que tenen la mateixa vora (el filferro). Es pot demostrar que aquesta propietat és equivalent al fet que la curvatura mitjana H sigui nul·la. A les superfícies amb aquesta propietat se'n diu superfícies minimales.

  Exemples de superfícies minimals són l'*helicoide* (escala de caragol, exemple de superfície reglada) i el *catenoide* (superfície de revolució de la catenària).

- **Superfícies desenvolupables**

  Un cas particular de superfície reglada és la desenvolupable. Intuïtivament una superfície és desenvolupable si es pot construir a partir d'un full de paper, desenvolupant la superfície fins a obtenir una superfície plana. Exemples de superfícies desenvolupables són el *con* i el *cilindre*.

  Una condició necessària i suficient perquè una superfície sigui localment desenvolupable és que la curvatura gaussiana d'aquesta superfície sigui idènticament nul·la.

- **Superfícies (no) orientables**

  De forma intuïtiva, l'orientabilitat d'una superfície té a veure amb les seves cares. Si peguem els extrems d'una cinta allargada s'obté una superfície amb dues cares (l'exterior i la interior de la banda) i, per tant, orientable. Però si abans de pegar els extrems es dóna mitja volta a un d'ells s'obté una *banda de Möbius* que és una superfície no orientable.

  La majoria de les superfícies són orientables. Dos exemples de superfícies no orientables són el *pla projectiu* i l'*ampolla de Klein*.

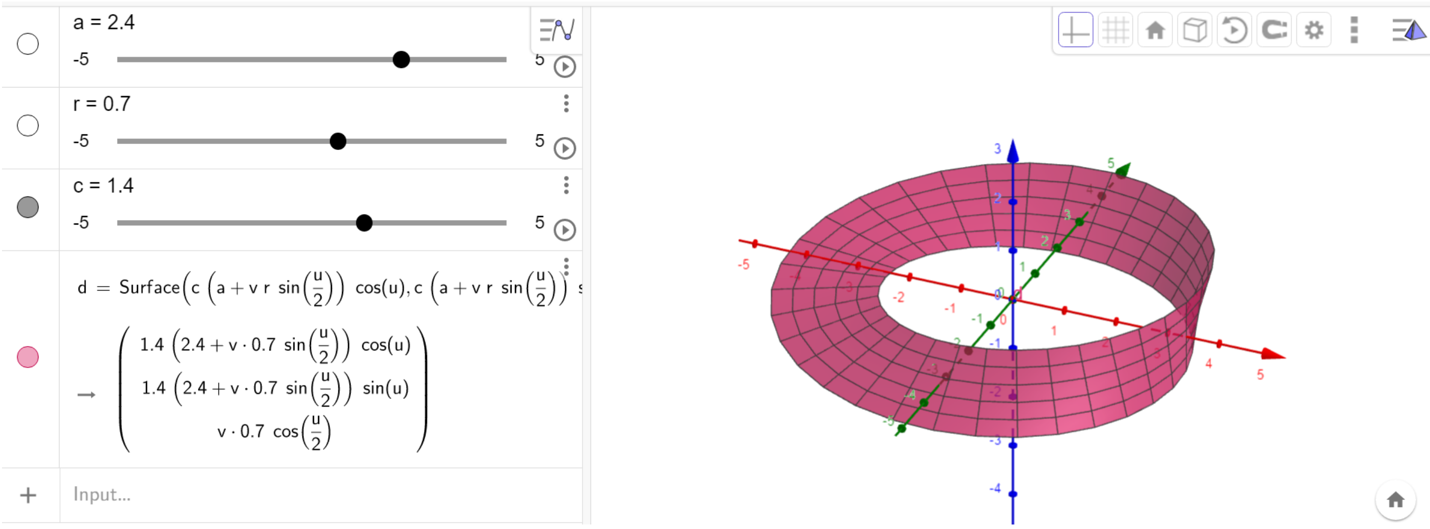
Exercici 1 (Superfície no orientable. Banda de Möbius)

La parametrització d'una banda de Möbius és:

Surface$(c(a + vr\sin(u/2))\cos(u),\ c(a + vr\sin(u/2))\sin(u), vr\cos(u/2), u, 0, 2\pi, v, -1, 1)$

Definiu els lliscadors: a per a la longitud de la cinta, r per a l'amplada i c el radi.

1. Experimenteu amb els lliscadors.
2. Comproveu que la cinta té només una cara recorrent la banda des d'un punt qualsevol fins a tornar a ell.



Exercici 2 (Superfície reglada)

Definim dues corbes parametritzades sobre el mateix interval. La superfície s'obté en considerar els segments que uneixen punts d'igual paràmetre d'ambdues corbes (interpolació lineal).

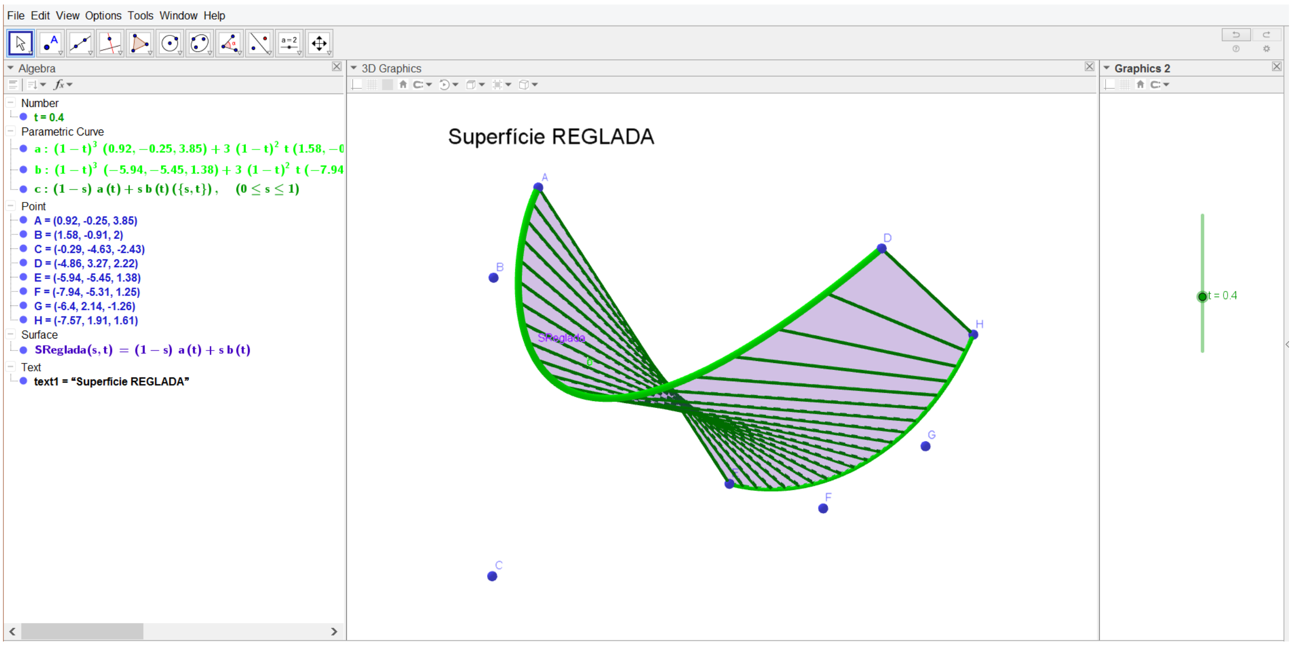
En l'exercici següent utilitzarem dues Beziers de grau 3.

A $\mathbb{R}^3$:
En la vista gràfica de $\mathbb{R}^3$, dibuixem els punts de control de les dues corbes de Bézier: A, B, C, D i E, F, G, H.
A l'input escrivim:

a=Curve$((1-t)^3A + 3(1-t)^2tB + 3(1-t)t^2C + t^3D, t, 0, 1)$
b=Curve$((1-t)^3E + 3(1-t)^2tF + 3(1-t)t^2G + t^3H, t, 0, 1)$

$\boxed{\text{SReglada=Surface}((1-s)a(t) + sb(t), s, 0, 1, t, 0, 1)}$

Aquesta és una superfície reglada perquè està formada pels segments que uneixen els punts d'igual valor del paràmetre t en ambdues corbes.
Si volem veure aquests segments, construïm un **lliscador** per al paràmetre t en la vista gràfica de $\mathbb{R}^2$. I per a cada valor de t el segment és la corba:
Curve(SReglada(s, t), s, 0, 1)
Si en les propietats del lliscador posem animation, i en les propietats de la corba que acabem de crear posem trace on, veurem de forma animada aquests segments.



Exercici 3 (Superfície reglada. Helicoide)

A $\mathbb{R}^3$, l'helicoide és la superfície formada per les infinites rectes que uneixen els punts d'una hèlix circular amb els del seu eix central i són perpendiculars a aquest eix.

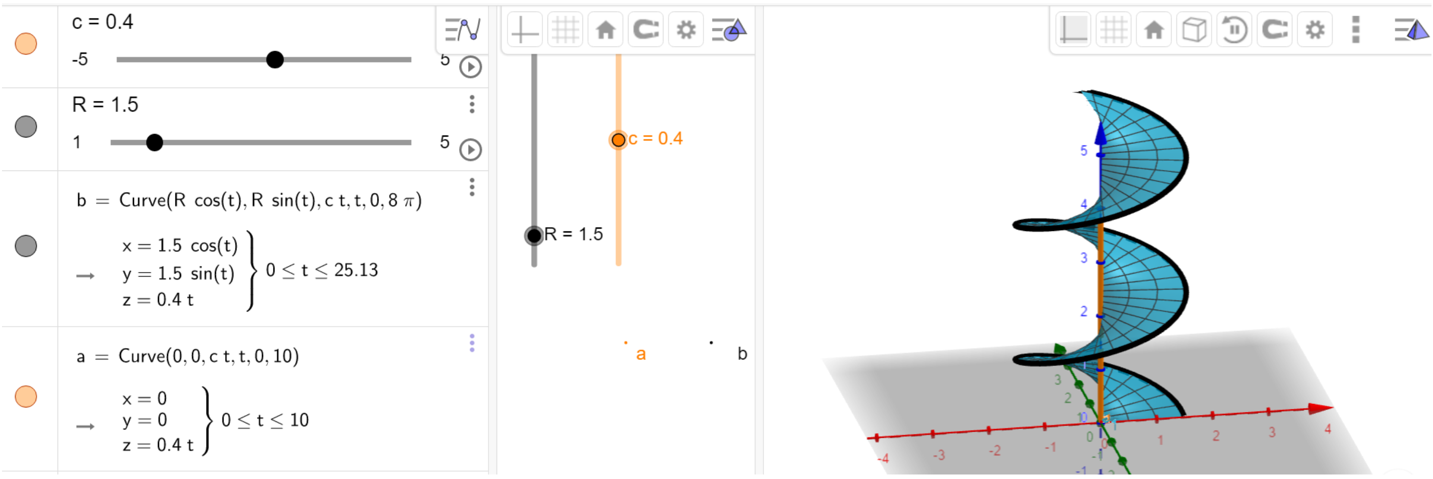
Considereu l'hèlix donada per:

$\mathrm{Curve}(R\cos(t), R\sin(t), ct, t, 0, 8\pi)$

Que gira al voltant de l'eix z.

$\mathrm{Curve}(0, 0, ct, t, 0, 10)$

A partir d'aquestes corbes obteniu l'helicoide.



Superfície de revolució

- La corba **generatriu** és la que gira al voltant d'un eix per generar la superfície

  $\boxed{\gamma(t) = (f(t), 0, g(t)),\ t \in (a,b),\ s \in (0, 2\pi)}$

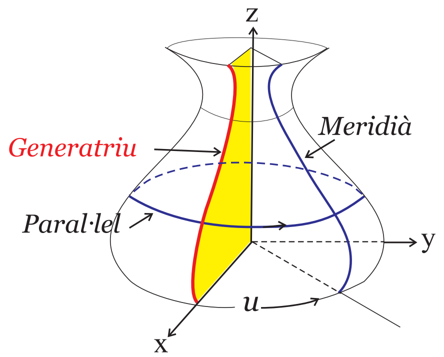
  corba regular plana, inclosa al pla $\{y = 0\}$; l'eix de gir és OZ.

- La **superfície de revolució** obtinguda es parametritza com:

$$\boxed{\sigma(s,t) = (f(t)\cos s, f(t)\sin s, g(t)),\ t \in (a,b),\ s \in (0, 2\pi)}$$

Corbes coordenades:

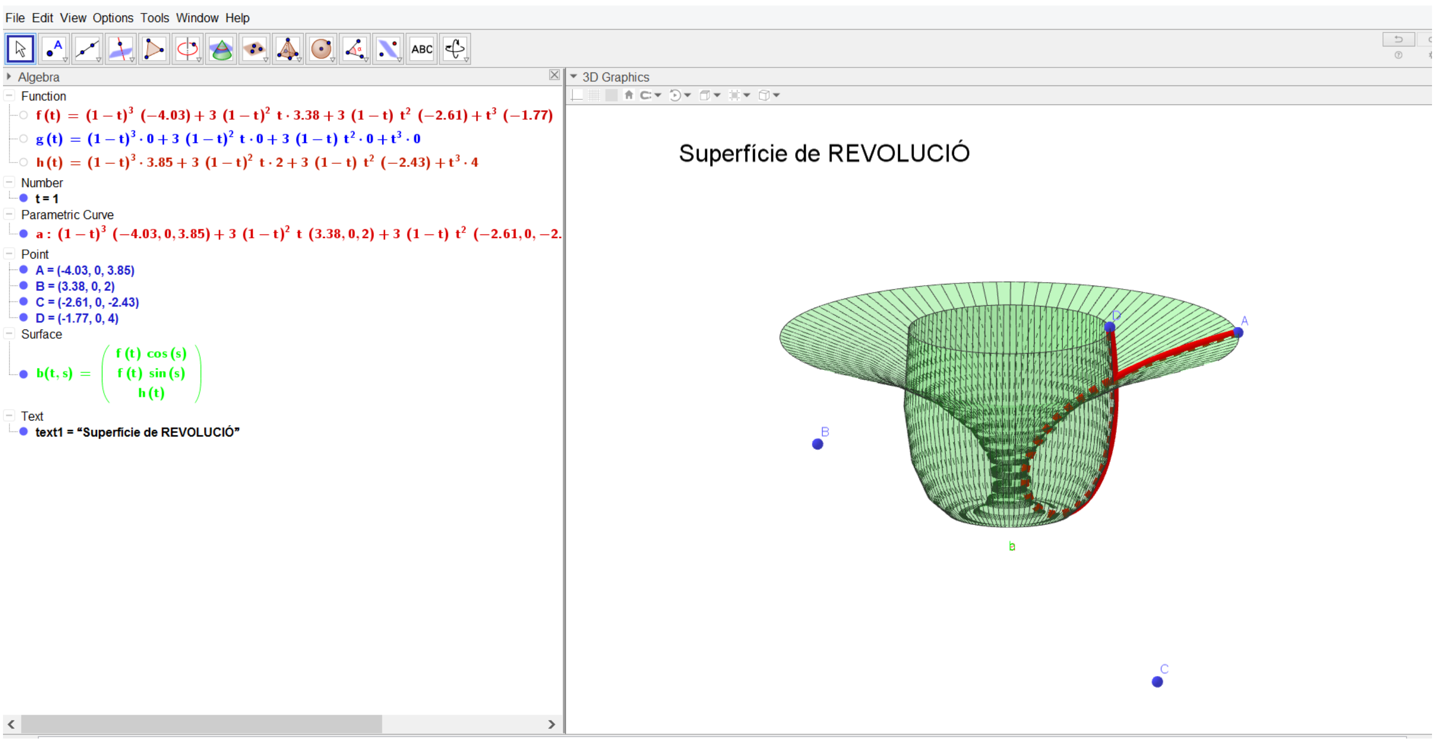
$*$ Els **meridians**, $\sigma(s_0, t)$.
$*$ Els **paral·lels**, $\sigma(s, t_0)$.



Exercici 4 (Superfície de revolució)

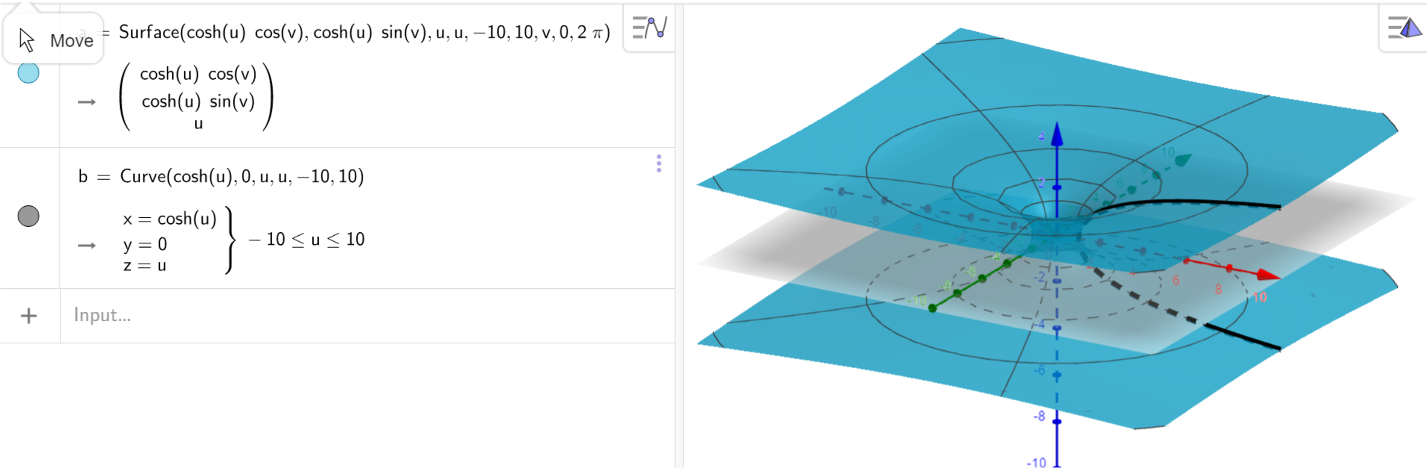
Farem girar una corba de Bézier de grau 3, situada al pla $y = 0$, al voltant de l'eix OZ, per obtenir una superfície de revolució.

A $\mathbb{R}^3$:
A l'input escrivim:
Els 4 punts de control dins del pla $y = 0$ (segona coordenada nul·la): A, B, C i D.
a=Curve($(1-t)^3A + 3(1-t)^2tB + 3(1-t)t^2C + t^3D, t, 0, 1$)
Però volem les coordenades de la corba. Per obtenir-les fem:
f(t)=x(a)
g(t)=y(a)
h(t)=z(a)
Ara ja podem definir la superfície de revolució:
S=$\boxed{\text{Surface}(f(t)\cos(s), f(t)\sin(s), h(t), t, 0, 1, s, 0, 2\pi)}$



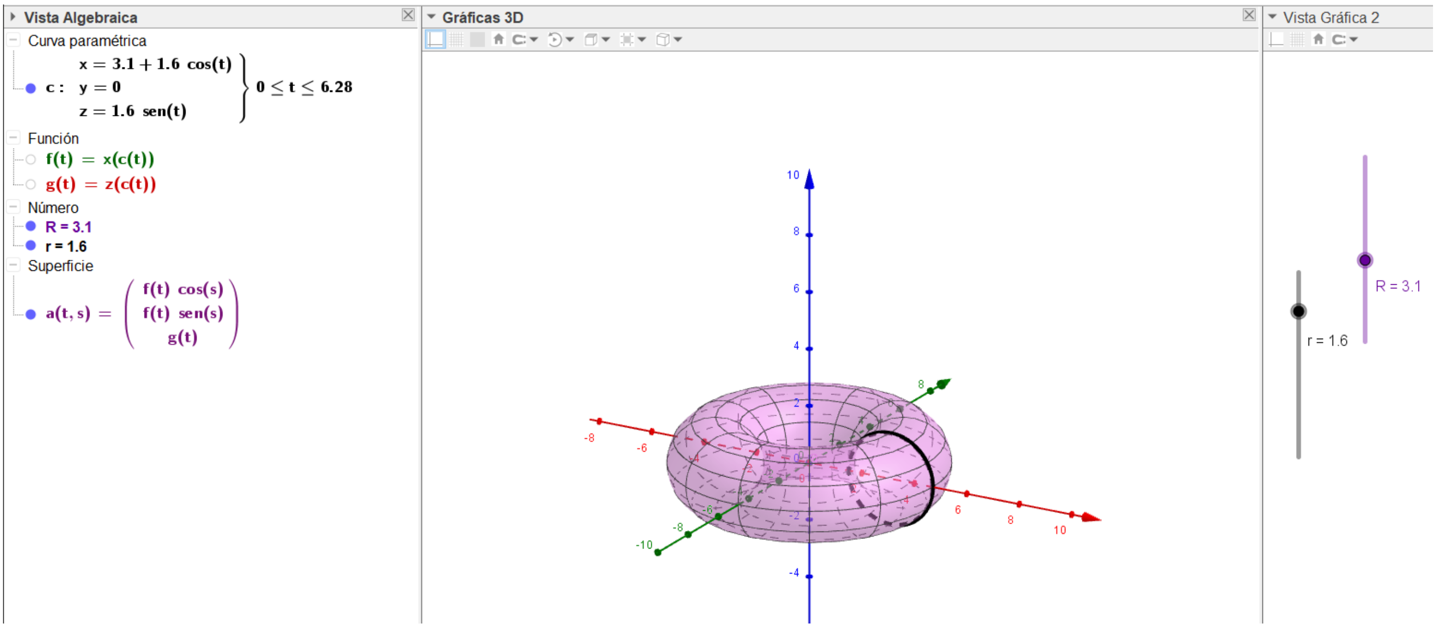
Exercici 5 (Superfície de revolució. Catenoide)

Considereu la catenària situada al pla $y = 0$ de parametrització:
$\gamma(u) = (\cosh u, 0, u), \quad -10 \leq u \leq 10$
Feu girar la catenària al voltant de l'eix OZ per obtenir la catenoide, superfície de revolució.



Exercici 6 (Superfície de revolució. Tor)

1. Considereu la circumferència c(t)=$(R + r\cos(t), 0, r\sin(t))$, on $R \geq r > 0$. Descriviu en quin pla se situa, quins són el centre i radi de la mateixa.
2. Dibuixeu l'anterior circumferència amb la instrucció *Curve* però creeu primer un parell de lliscadors amb valors positius per als paràmetres R i r, i poseu r com a valor mínim de R.
3. Ara gireu-la al voltant de l'eix OZ, creant la corresponent superfície de revolució. Quina és la superfície que obteniu?



Superfície tubular

Partim d'una corba directriu que jugarà el paper que té l'eix en les superfícies de revolució. Els punts de la corba seran els centres de les circumferències generatrius de radi constant (R) i que se situen en el pla format pels vectors normal $n(t)$ i binormal $b(t)$, associats al punt de la corba $a(t)$ (pla perpendicular al vector tangent de la corba).

$$a(t) = (f(t), g(t), h(t)),\ t \in [a, b]$$

aleshores la superfície tubular és:

$$\boxed{S(t, s) = a(t) + R\cos(s)n(t) + R\sin(s)b(t),\ t \in [a, b], s \in [0, 2\pi]}$$

Farem servir la mateixa corba de la pràctica 3, exercici 3 (Triedre de Frenet).

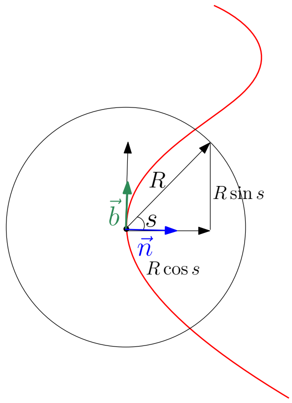
Recordeu que:

Triedre de Frenet: És una referència afí ortonormal de $\mathbb{R}^3$, adaptada a cada punt $P = \alpha(t_0)$ d'una corba (regular) a l'espai i formada pels corresponents vectors tangent, binormal i normal.

$$\vec{t}(t_0) = \frac{\alpha'(t_0)}{||\alpha'(t_0)||}$$

$$\vec{b}(t_0) = \frac{\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)}{||\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)||}$$

$$\vec{n}(t_0) = \vec{b}(t_0) \times t(t_0)$$



Exercici 7 (Superfície tubular)

A $\mathbb{R}^3$:

$f(t) = (1/3)(\sin(3t) - t\cos(3t))$
$g(t) = (1/3)(\cos(3t) - t\sin(3t))$
$h(t) = t$

a=Curve($f(s), g(s), h(s), s, 0, 15\,pi$)

Per definir P, punt genèric sobre la corba, necessitem un **lliscador** pel paràmetre **t**. El farem servir també per calcular les derivades.

$P = (f(t), g(t), h(t))$

vt =Vector($(f'(t), g'(t), h'(t))$)

ut =UnitVector(vt) és el vector tangent ancorat a l'origen.

$vt2$ =Vector($(f''(t), g''(t), h''(t))$)

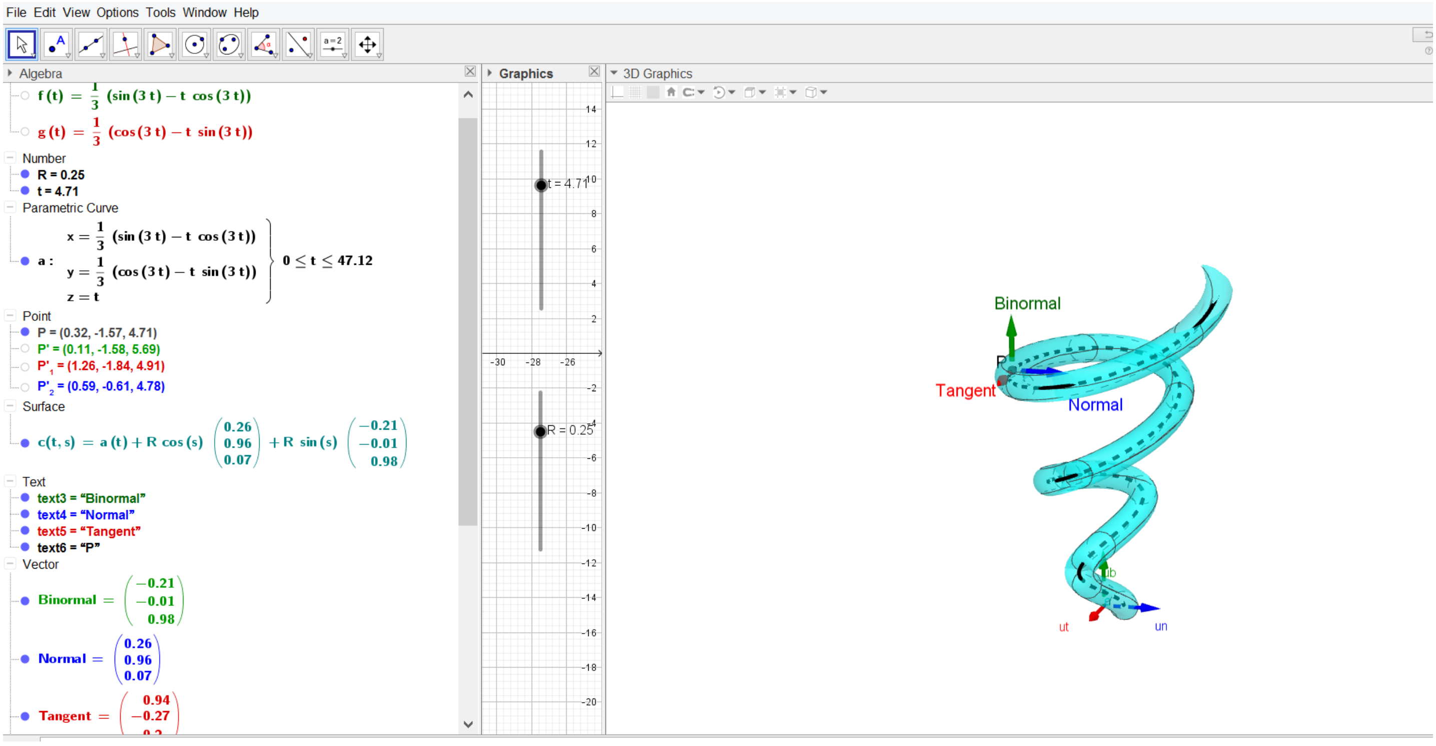
ub =UnitVector(Cross($vt, vt2$)) és el vector binormal ancorat a l'origen.

un=UnitVector(Cross(ub, ut)) és el vector normal ancorat a l'origen.

Ara clicant la icona de **vector des d'un punt**, seleccionarem en la vista gràfica el punt P, i després un vector que serà ub, o un, o ut segons volguem crear el vector binormal, normal o tangent, respectivament. Al fer-ho crearà els punts P', o P_2', o P_1' que seran els extrems dels vectors del triedre (referència sobre P), i apareixeran aquests vectors en la vista algebraica. Els hi podeu canviar el nom per Binormal, Normal i Tangent.

1. **Binormal**=Vector(P, P')
2. **Normal**=Vector(P, P_2')
3. **Tangent**=Vector(P, P_1')

Stubular=$\boxed{\text{Surface}(a(t) + R\cos(s)\text{Normal}+R\sin(s)\text{Binormal}, t, 0, 15\,pi, s, 0, 2\,pi)}$



Qüestions

1. Per a la circumferencia c(t)=$(r\cos(t), r\sin(t), 0)$,

   el vector binormal és $\vec{b}(t) = (0, 0, 1)$ i el normal és $\vec{n}(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$.

   Trobeu la parametrització de la superfície tubular.

   Indicació: construïu una circumferència $d(s)$ de radi r i centre un punt arbitrari de $c(t)$ i situada en el pla normal per aquest punt, és a dir, amb vectors directors $b(t)$ i $n(t)$:

   $d(s) = (0, r\cos(s), r\sin(s)) * (0, \vec{n}(t), \vec{b}(t))^T = r\cos(s)\vec{n}(t) + r\sin(s)\vec{b}(t)$, $0 \leq s \leq 2\pi$.

   Després la superfície serà: $c(t) + d(s)$.

2. Quina superfície obteniu?

Superficies de Bézier

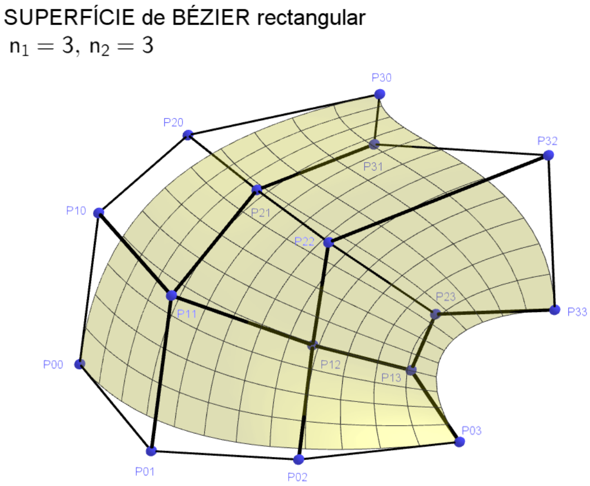
Les superfícies de Bézier estan controlades per malles de punts i es poden escriure:

$$\boxed{\sigma(s,t) := \sum_{i=0}^{n_1}\left(\sum_{j=0}^{n_2}\cdot B_j^{n_2}(t)P_{ij}\right)\cdot B_i^{n_1}(s), \quad s,t\in[0,1]}$$

$$\boxed{\sigma(s,t) := \sum_{j=0}^{n_2}\left(\sum_{i=0}^{n_1}\cdot B_i^{n_1}(s)P_{ij}\right)\cdot B_j^{n_2}(t), \quad s,t\in[0,1]}$$

Si fixem $t=t_0$, $\gamma(t)=\sigma(s,t_0) := \sum_{i=0}^{n_1}\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n_2}\cdot B_j^{n_2}(t_0)P_{ij}\right)}_{\text{punts de control}}\cdot B_i^{n_1}(s)$, $t\in[0,1]$ s'obtenen *corbes de Bézier* de grau n_1.

Si fixem $s=s_0$, $\gamma(s)=\sigma(s_0,t) := \sum_{j=0}^{n_2}\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n_1}\cdot B_i^{n_1}(s_0)P_{ij}\right)}_{\text{punts de control}}\cdot B_j^{n_2}(t)$, $s\in[0,1]$ s'obtenen *corbes de Bézier* de grau n_2.



Exercici 8 (Superfície de Bézier rectangular de bigrau $n_1=2$, $n_2=2$.)

A $\mathbb{R}^3$:

Dibuixem els punts $P00, P10, P20, P01, P11, P21, P02, P12$ i $P22$ en la vista gràfica.

A l'input escrivim:

a=Curve($(1-t)^2P00+2(1-t)tP10+t^2P20, t, 0, 1$) punts de control $Pi0$, $i=0,1,2$
b=Curve($(1-t)^2P01+2(1-t)tP11+tP21, t, 0, 1$) $Pi1$, $i=0,1,2$
c=Curve($(1-t)^2P02+2(1-t)tP12+t^2P22, t, 0, 1$) $Pi2$, $i=0,1,2$

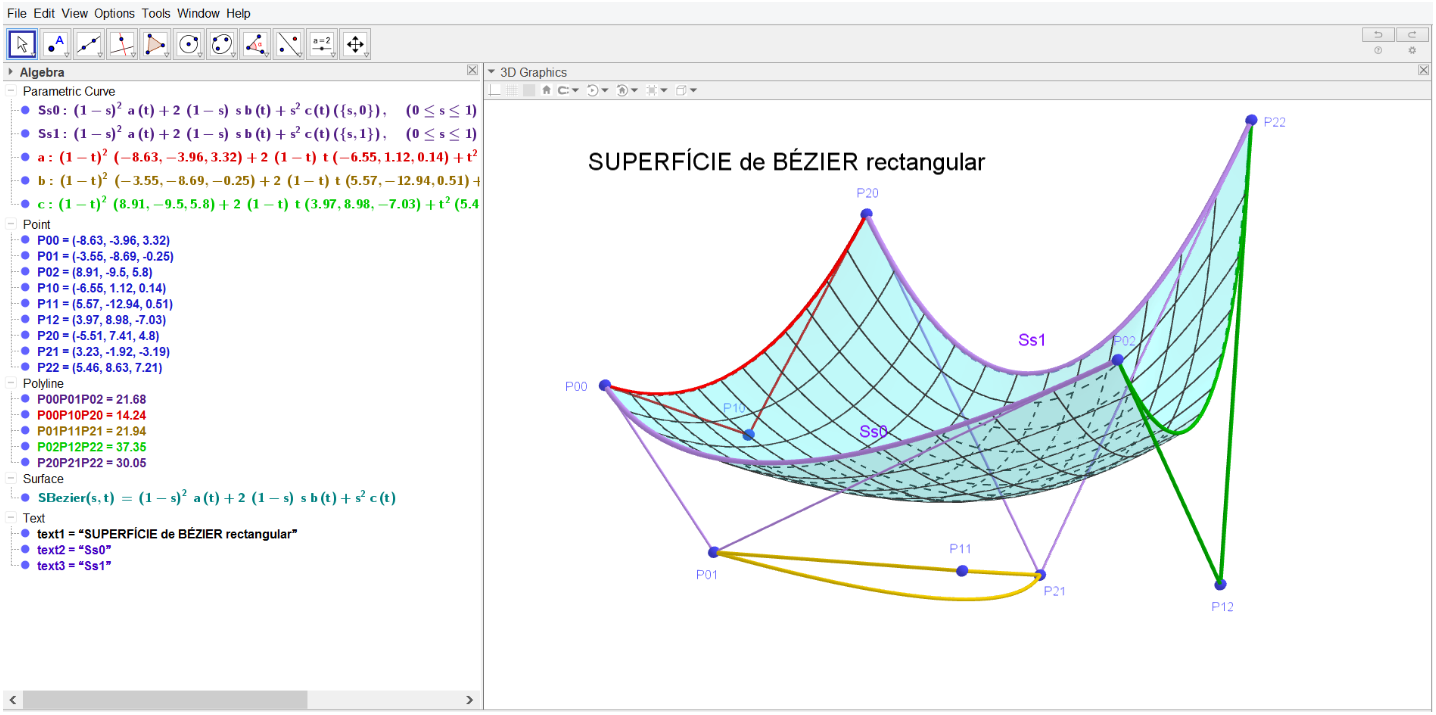
Si volem que es vegin els polígons de control, anem al menú de la vista gràfica en $\mathbb{R}^2$ i seleccionem la icona de polyline. Després marquem els punts acabant amb el que hem començat. Això és equivalent a fer servir a l'input la instrucció Poplyline:

P00P10P20=Polyline(P00, P10, P20)
P00P10P20=Polyline(P01, P11, P21)
P02P12P22=Polyline(P02, P12, P22)

SBezier= $\boxed{\text{Surface}((1-s)^2a(t)+2(1-s)sb(t)+s^2c(t), s, 0, 1, t, 0, 1)}$

Observeu que la superfície té quatre vores. Dues d'elles són a i c, les altres dues s'obtenen fixant t en l'expressió de la superfície, concretament per a $t=0$ i $t=1$:

Ss0=Curve(SBezier(s, 0), s, 0, 1)
Ss1=Curve(SBezier(s, 1), s, 0, 1)



Exercici 9 (Superfície de Bézier rectangular de bigrau $n_1 = 3$, $n_2 = 2$)

A $\mathbb{R}^3$:
Dibuixem els punts $P00, P10, P20, P01, P11, P21, P02, P12$,$P22$,$P30$,$P31$ i $P32$ en la vista gràfica.

A l'input escrivim:

Les corbes de grau 2 següents:

a=Curve($(1-t)^2P00 + 2(1-t)tP01 + t^2P02, t, 0, 1$) punts de control $P0i$, $i = 0, 1, 2$
b=Curve($(1-t)^2P10 + 2(1-t)tP11 + t^2P12, t, 0, 1$) $P1i$, $i = 0, 1, 2$
c=Curve($(1-t)^2P20 + 2(1-t)tP21 + t^2P22, t, 0, 1$) $P2i$, $i = 0, 1, 2$
d=Curve($(1-t)^2P30 + 2(1-t)tP31 + t^2P32, t, 0, 1$) $P3i$, $i = 0, 1, 2$

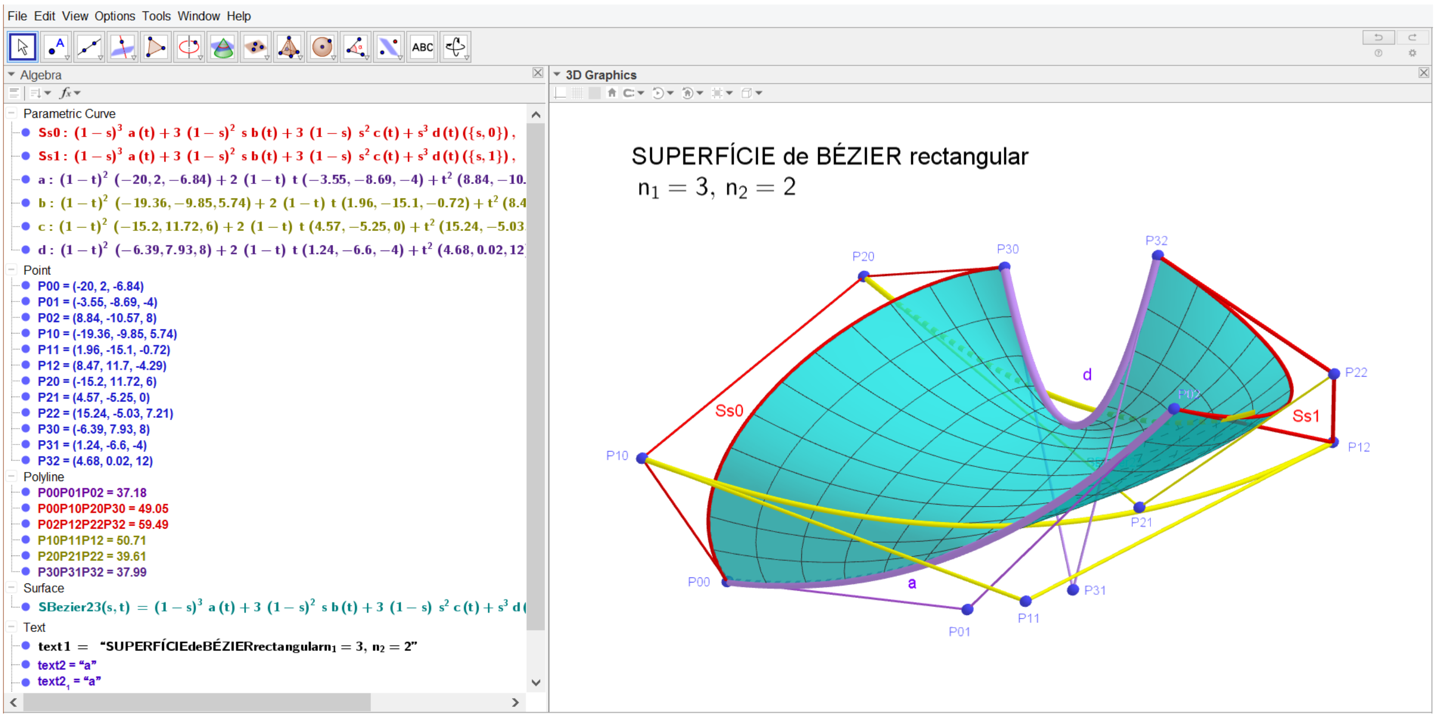
Si volem que es vegin els polígons de control, anem al menú de la vista gràfica en $\mathbb{R}^2$ i seleccionem la icona de polyline. Després marquem els punts acabant amb el que hem començat. Això és equivalent a fer servir a l'input la instrucció Poplyline:

P00P01P02=Polyline(P00, P01, P02)
P10P11P12=Polyline(P10, P11, P12)
P20P21P22=Polyline(P20, P21, P22)
P30P31P32=Polyline(P30, P31, P32)

SBezier23= $\boxed{\text{Surface}((1-s)^3a(t) + 3(1-s)^2sb(t) + 3(1-s)s^2c(t) + s^3d(t), s, 0, 1, t, 0, 1)}$

Observeu que la superfície té quatre vores. Dues d'elles són a i d, les altres dues s'obtenen fixant t en l'expressió de la superfície, concretament per a $t = 0$ i $t = 1$:

Ss0=Curve(SBezier23(s, 0), s, 0, 1)
Ss1=Curve(SBezier23(s, 1), s, 0, 1)

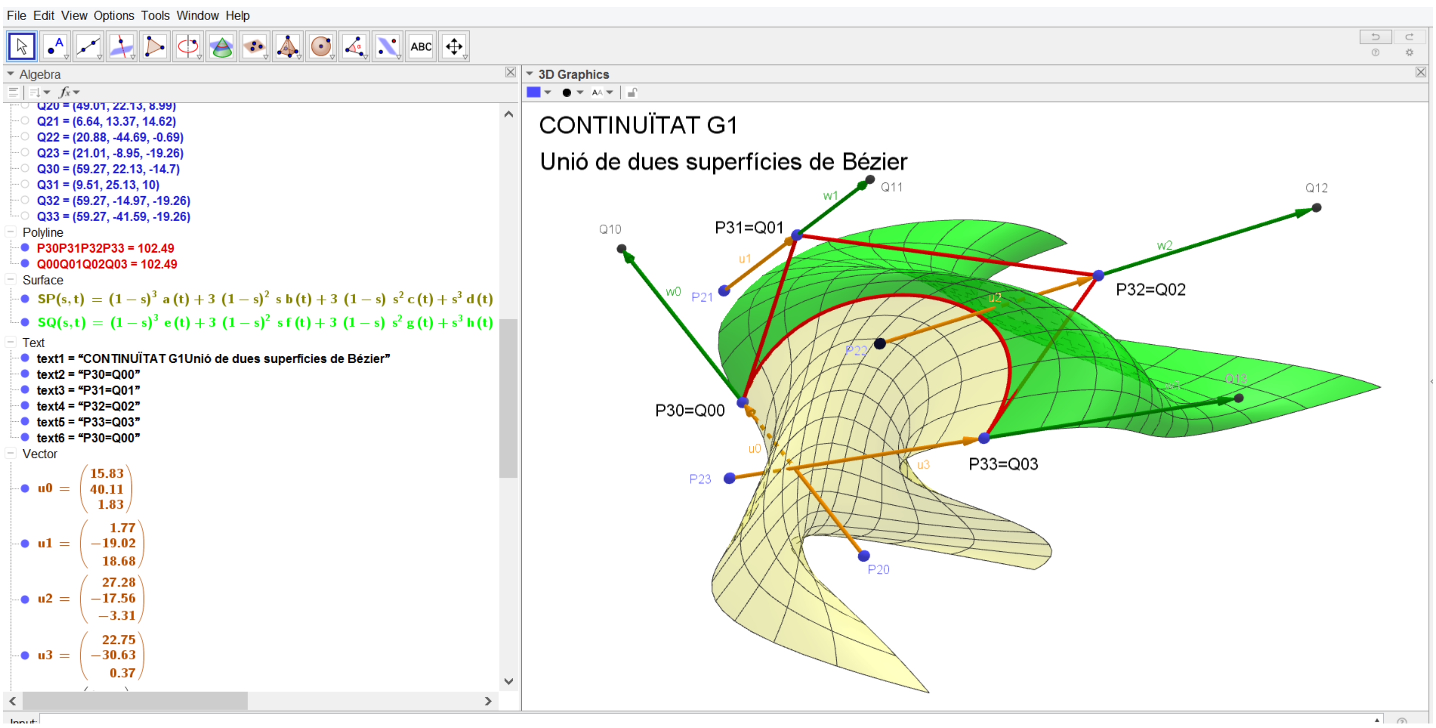


Qüestions:

Feu una superfície de Bézier rectangular de bigrau $n_1 = 3$, $n_2 = 3$.

Exercici 10 (Continuïtat $G1$ per a la unió de superfícies de Bézier)

Farem dues superficie de Bézier rectangulars de bigrau $n_1 = 3$, $n_2 = 3$ unides amb continuïtat $G1$.



A $\mathbb{R}^3$:
En la vista gràfica de $\mathbb{R}^3$, dibuixem els punts per a la malla de la primera superfície:
$P00, P10, P20, P30, P01, P11, P21, P31, P02, P12, P22, P32, P03, P13, P23$ i $P33$.

A l'input escrivim:

Les quatre corbes de grau 3 següents: (a i d són dues de les quatre vores)
a=Curve($(1-t)^3P00+3(1-t)^2tP01+3(1-t)t^2P02+t^3P03, t, 0, 1$) p. de control $P0i$, $i=0,\cdots,3$
b=Curve($(1-t)^3P10+3(1-t)^2tP11+3(1-t)t^2P12+t^3P13, t, 0, 1$) $P1i$, $i=0,\cdots,3$
c=Curve($(1-t)^3P20+3(1-t)^2tP21+3(1-t)t^2P22+t^3P23, t, 0, 1$) $P2i$, $i=0,\cdots,3$
d=Curve($(1-t)^3P30+3(1-t)^2tP31+3(1-t)t^2P32+t^3P33, t, 0, 1$) $P3i$, $i=0,\cdots,3$

SP=$\boxed{\text{Surface}((1-s)^3a(t)+3(1-s)^2sb(t)+3(1-s)s^2c(t)+s^3d(t), s, 0, 1, t, 0, 1)}$

Farem servir d com a corba d'unió (és l'única que hem deixat visible en la figura).

Ara construïm la segona superfície però tenint en compte que han de quedar unides amb continuïtat $G1$. És a dir, en la vora d'unió, els punts d'ambdues superfícies han de coincidir ($Q00=P30,\cdots$) i també els respectius vectors tangents ($Q10-Q00=P30-P20,\cdots$).

$Q00=P30$, $Q01=P31$, $Q02=P32$, $Q03=P33$,

v0=Vector($P30-P20$)
v1=Vector($P31-P21$)
v2=Vector($P32-P22$)
v3=Vector($P33-P23$)

$Q10=Q00+v0$, $Q11=Q01+v1$, $Q12=Q02+v2$, $Q13=Q03+v3$

La resta de punts, $Q20, Q21, Q22, Q23, Q30, Q31, Q32, Q33$, els que volgueu i ja tindrem la malla de la nova superfície.
Ara construïm les corbes següents: (una de les vores ja la tenim, i és d, l'altra serà h)

f=Curve($(1-t)^3Q10+3(1-t)^2tQ11+3(1-t)t^2Q12+t^3Q13, t, 0, 1$) p. de control $Q1i$, $i=0,\cdots,3$
g=Curve($(1-t)^3Q20+3(1-t)^2tQ21+3(1-t)t^2Q22+t^3Q23, t, 0, 1$) $Q2i$, $i=0,\cdots,3$
h=Curve($(1-t)^3Q30+3(1-t)^2tQ31+3(1-t)t^2Q32+t^3Q33, t, 0, 1$) $Q3i$, $i=0,\cdots,3$

SQ=$\boxed{\text{Surface}((1-s)^3d(t)+3(1-s)^2sf(t)+3(1-s)s^2g(t)+s^3h(t), s, 0, 1, t, 0, 1)}$

Si volem que es vegi algun polígon de control, anem al menú de la vista gràfica en $\mathbb{R}^2$ i seleccionem la icona de polyline. Després marquem els punts acabant amb el que hem començat. Això és equivalent a fer servir a l'input la instrucció Poplyline:

P30P31P32=Polyline(P30, P31, P32, P33)
Per visualitzar la continuïtat $G1$, acabem de construir els vectors tangents:

v4=Vector($Q10-Q00$)
v5=Vector($Q11-Q01$)
v6=Vector($Q12-Q02$)
v7=Vector($Q11-Q01$)
v8=Vector($Q13-Q03$)

Un cop definits els vectors v_i, els ancorem sobre els punts de control on tenen l'origen (u_i en la figura). Anem al menú de la vista gràfica de $\mathbb{R}^2$, seleccionem la icona de vector des d'un punt i marquem el punt de control i el corresponent vector ($P20$ i v0, $\cdots$, $Q00$ i v4, $\cdots$).

Exercici 11 (Superfícies offset)

Donada una superfície, les superfícies offset són aquelles que s'obtenen desplaçant una distància constant (l'offset) els punts de la superfície donada en la direcció normal a la superfície.

Donada la superfície $A(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$, on s i t són paràmetres, el vector normal de la superfície en un punt $P = A(s_0, t_0)$, es defineix com:

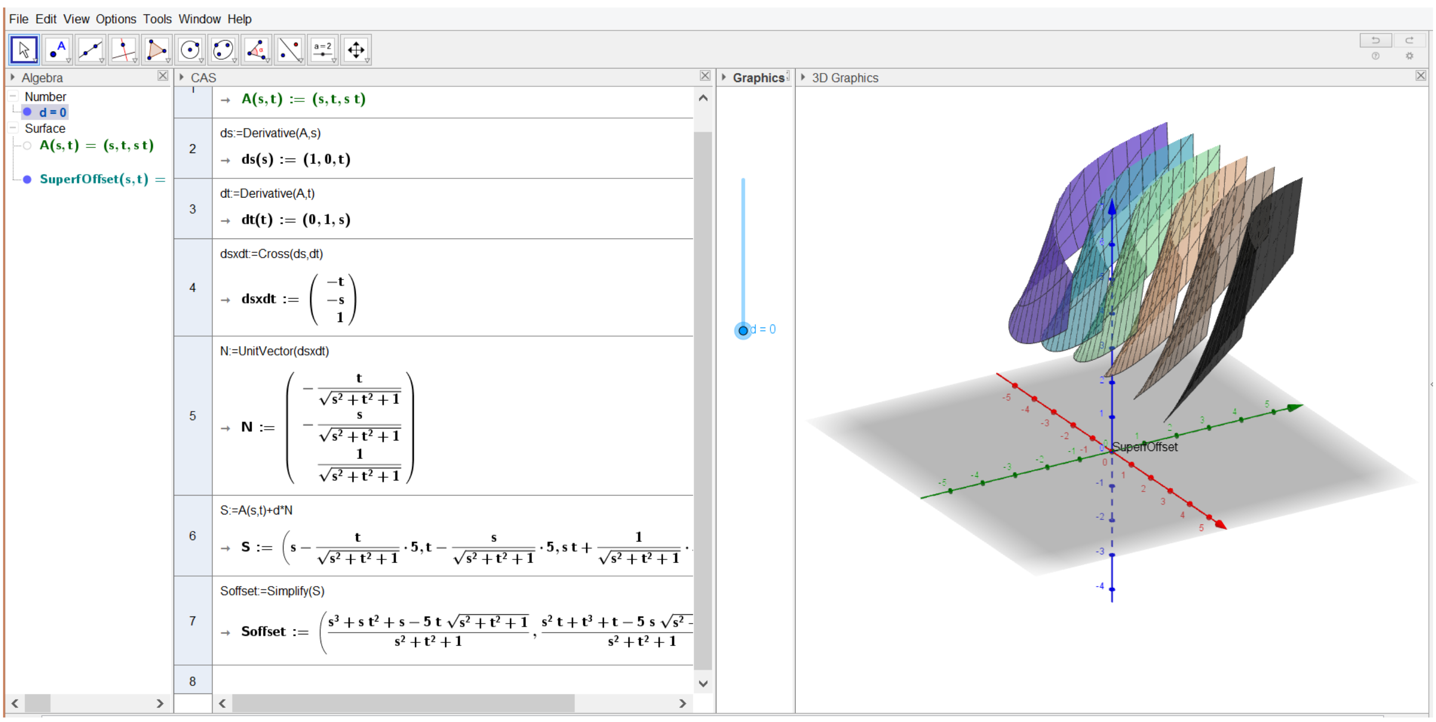
$$\boxed{\vec{N}(s_0,t_0) = \frac{\vec{T}_s(s_0,t_0) \times \vec{T}_t(s_0,t_0)}{||\vec{T}_s(s_0,t_0) \times \vec{T}_t(s_0,t_0)||}}$$

on $\vec{T}_s = (\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s})$ i $\vec{T}_t = (\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t})$ són els vectors tangents principals.

Anem a construir les superfícies offset de la superfície $z = xy$. Obrirem la vista CAS per fer els càlculs.

En la vista CAS escrivim:
A(s,t):=(s,t,s*t) superfície
ds:=Derivative(A,s) vector tangent principal.
dt:=Derivative(A,t) vector tangent principal.
Ja podem definir el vector normal principal , N:
dsxdt:=Cross(ds,dt)
N:=UnitVector(dsxdt)
Definim les superfícies offset:
S:= $\boxed{\text{A(s,t)+d*N}}$ on d es el paràmetre que defineix la distància entre una superfície i la següent.
Observeu que en CAS no importa si encara no hem definit el lliscador per a la d.
Per últim, simplifiquem l'expressió donada en S:
Simplify(S)
Si marquem el resultat d'aquest últim pas ens dóna l'expressió simplificada en la línea següent:
$((s^3+st^2+s-5tsqrt(s^2+t^2+1))/(s^2+t^2+1), (s^2t+t^3+t-5ssqrt(s^2+t^2+1))/(s^2+t^2+1), (s^3t+st^3+st+5sqrt(s^2+t^2+1))/(s^2+t^2+1))$

A l'input escrivim:
SuperfOffset=Surface(···,s,1,5,t,1,5) copiant en els punts suspensius l'última línea de CAS.
Podem abans crear el **lliscador** per a la **d** o es crearà quan executem la instrucció de l'input.
Si volem veure totes les superfícies alhora, amb el botó dret del ratolí i marquem "trace on"en les propietats de la superfície (SuperOffset).



Qüestions:

Troveu superfícies offset a partir de la superfície $z = \cos(x + y)$. Per obtenir diferents colors podeu fer que en les propietats avançades de la superfície els colors depenguin del lliscador.

GD Geometria per al disseny
Pràctiques

2022-23 Q2 EEBE-UPC Mercè Claverol 10

PRÀCTICA 9: Voronois

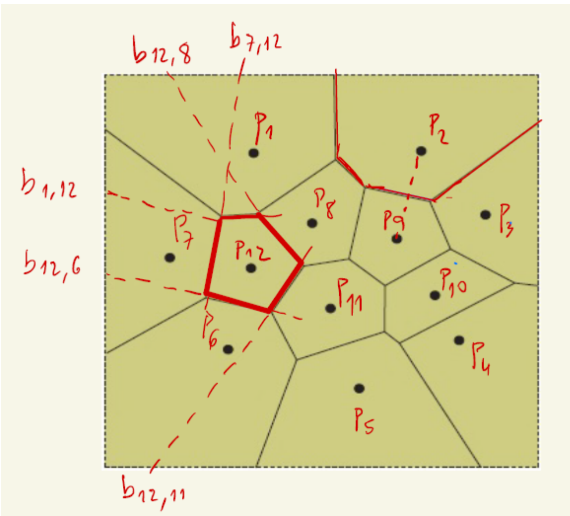
Triangulació de Delaunay. Diagrama de Voronoi. Diagrames de Voronoi d'ordre superior.

El diagrama de Voronoi és una de les eines més importants per resoldre problemes de proximitat. És un recurs fonamental dins de la Geometria Computacional. A més, té moltes aplicacions en diversos àmbits científics, tècnics i artístics.

Donat un conjunt de punts S en el pla euclidi, el seu diagrama de Voronoi, DV(S), és la descomposició del pla en regions formades pels punts més propers a cadascun dels punts de S. Cadascuna d'aquestes regions té doncs, un punt associat (el punt de S més proper) i és una cara (fitada o no) del diagrama de Voronoi.

La cara associada al punt $p_i \in S$ s'obté com la intersecció dels semiplans $h(p_i, p_j)$, que contenen a p_i i estan definits pels bisectors $b_{p_i p_j}$, de p_i amb cadascun dels altres punts p_j de S. Per tant, resulta una regió poligonal convexa (que pot ser no fitada).

$$V(p_i) = \bigcap_{j=1, j\neq i}^{n} h(p_i, p_j)$$



Diem que els punts de S estan en posició general si no hi ha 3 alineats ni 4 cocirculars; altrament, són casos degenerats.

- Un punt q és vèrtex de $DV(S)$ si i només si el cercle màxim buit centrat en q conté tres (o més, si és un cas degenerat) punts de S a la seva frontera. Cada vèrtex té doncs, tres arestes incidents, si els punts de S estan en posició general.

- El bisector de dos punts de S defineix una aresta del $DV(S)$ si i només si existeix un punt q sobre aquesta bisectriu tal que el cercle màxim buit centrat en q conté només a aquests dos punts a la seva frontera.

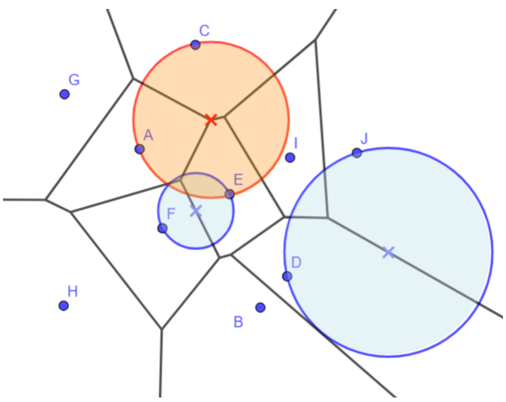
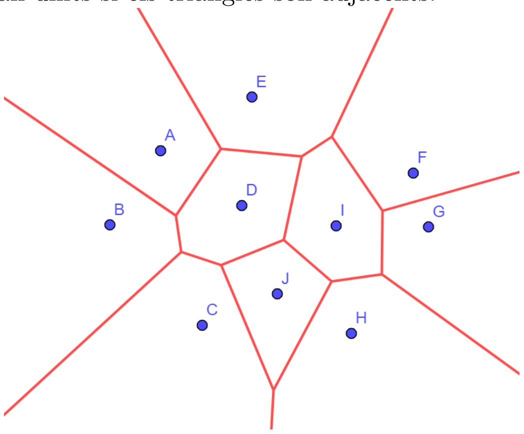


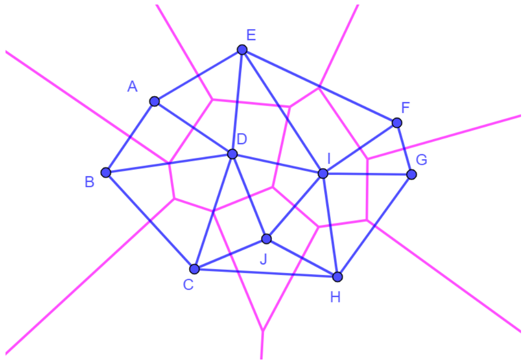
Figura 1: Cada vèrtex és el centre d'un cercle amb només tres punts de S a la frontera (cercle taronja). Cada punt d'una aresta és centre d'un cercle amb només dos punts de S a la frontera (cercles blaus).

Triangulació de Delaunay

El diagrama de Voronoi d'un conjunt de punts, $DV(S)$ i la triangulació de Delaunay $DT(S)$ són **grafs duals**. Cada triangle de la TD(S) es correspon amb un vèrtex del DV(S) que és el centre del cercle circumscrit al triangle. Dos vèrtexs estan units si els triangles són adjacents.



$DV(S)$



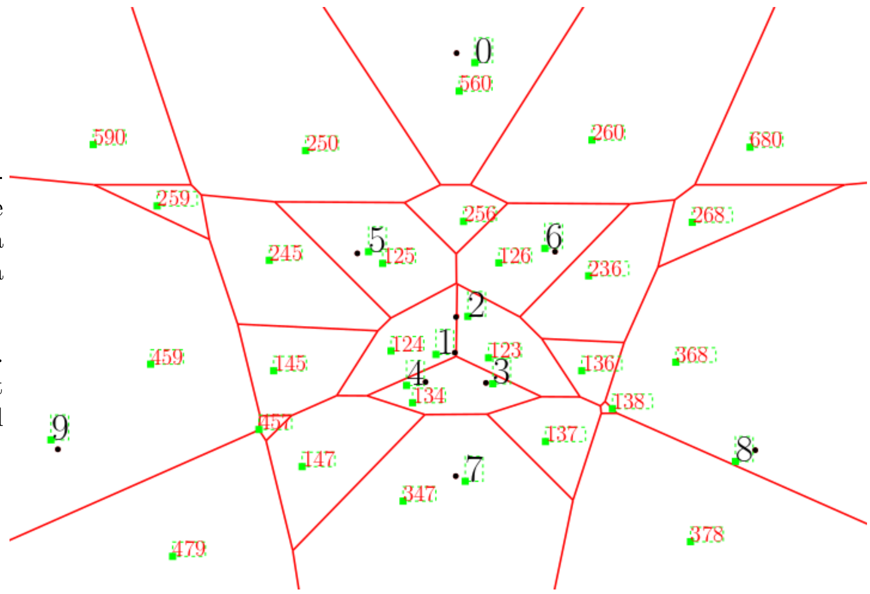
$DT(S)$ (blau)

- La triangulació de Delaunay $TD(S)$ maximitza els angles interiors dels triangles evitant triangles massa fins.
- Els cercles que circumscriuen un triangle de $TD(S)$ no contenen punts de S en el seu interior.
- Si un cercle passant per dos punts de S no conté cap altre en el seu interior, el segment que uneix els dos punts és una aresta de la $DT(S)$.

Diagrames de Voronoi d'ordre superior

El diagrama de Voronoi (també diagrama de Voronoi d'ordre 1) es generalitza a diagrames d'ordre superior $DV_k(S)$, amb $1 \leq k \leq n-1$. El diagrama de Voronoi d'ordre k, $DV_k(S)$, descomposa el pla en regions associades als k veïns més propers.

En la figura, es mostra $V_3(S)$, on $S = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Cada cara del diagrama té associat un subconjunt tres punts de S, els tres més propers a qualsevol punt de la cara.



Exercici 1 (Casos degenerats)

Quan els punts de S estan en posició general, els vèrtexs del diagrama tenen grau 3 (3 arestes incidents). Esbrineu com són els diagrames en els casos degenerats.

1. En la vista gràfica del Geogebra introdueix dos conjunts de punts: un d'**alineats** i un altre de **cocirculars**.
2. Crea dues llistes, $L1$ i $L2$, amb els alineats i els cocirculars, respectivament.
3. Aplica la instrucció Voronoi a cadascuna de les llistes: Voronoi($L1$), Voronoi($L2$)

   En el cas de $L1$, el programa no resol. Dedueix com ha de ser el diagrama de Voronoi en aquest cas.

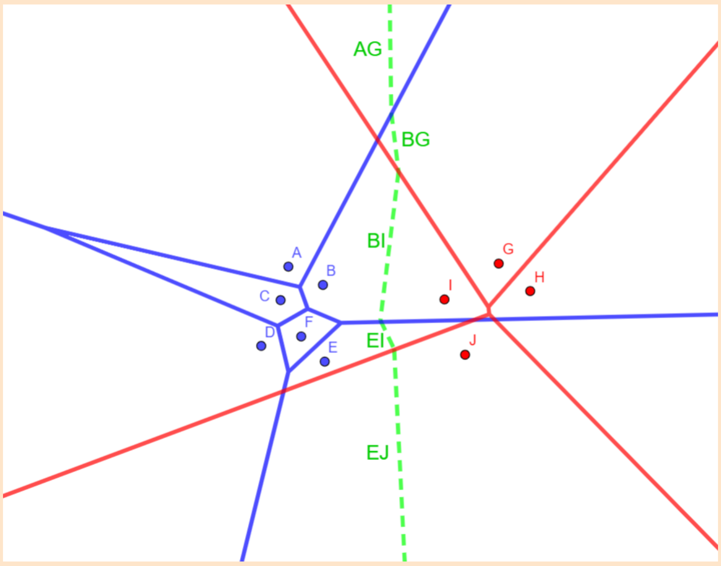
   Descriu també com és en el cas dels punts cocirculars.

Exercici 2 (Diagrama de Voronoi)

Hi ha diferents mètodes per a la construcció del diagrama de Voronoi d'un conjunt de punts. En aquest exercici treballarem el mètode de

dividir i vèncer

Ho farem amb Geogebra.



1. En la vista gràfica introdueix un conjunt de punts en posició general. Separa els punts en dos subconjunts, crean dues llistes ($L1$ i $L2$). Fes el Voronoi de cadascuna de les llistes: Voronoi($L1$), Voronoi($L2$)

2. Obtindrem una poligonal formada per trossos de bisectors:

   (a) Dibuixa el bisector (en la figura AG) dels dos punts amb ordenada més gran de cadacuna de les llistes (fes servir la icona de *perpendicular bisector*).

   (b) Recorre el bisector de dalt a baix fins a intersecar algun dels diagrames. Quan això passi, busca un nou bisector entre dos punts: en lloc dels dos d'abans, has d'intercanviar només el punt associat a la regió que deixes pel associat a la regió en la que entres (en la figura, vas de la regió del A a la del B, per tant, intercanvies A per B, és a dir, passes del bisector AG al BG).

   (c) Repeteix el procés fins que no hi hagi més talls amb l'últim bisector considerat.

3. Per últim, retallem arestes a banda i banda de la poligonal obtinguda: eliminem la part dreta de les arestes del diagrama de l'esquerra i la part esquerra de les arestes del diagrama de la dreta. El resultat obtingut és el diagrama de Voronoi del conjunt total de punts, $DV(L1 \cup L2)$.

Qüestions:

1. Suposa que has de traçar el desplaçament d'un robot entre dos grups d'obstacles, quina seria la millor trajectòria?

2. Suposa que el teu conjunt de punts representa les ubicacions d'hospitals en una ciutat. Ara volem trobar el millor lloc per ubicar un nou hospital dins del terreny delimitat pels hospitals que ja hi ha, però el més lluny possible de qualsevol d'ells. És a dir, el nou hospital ha de **maximitzar la mínima distància** a un altre hospital. On el posaries?

Exercici 3 (Triangulació de Delaunay)

En la vista gràfica del Geogebra introdueix un conjunt de punts en posició general (és a dir, no 3 alineats, ni 4 cocirculars). Crea una llista de nom L amb els punts.

1. Fes l'envolupant convexa dels punts amb la instrucció ConvexHull(L).

   Triangula l'interior amb triangles poc regulars (algun allargat).

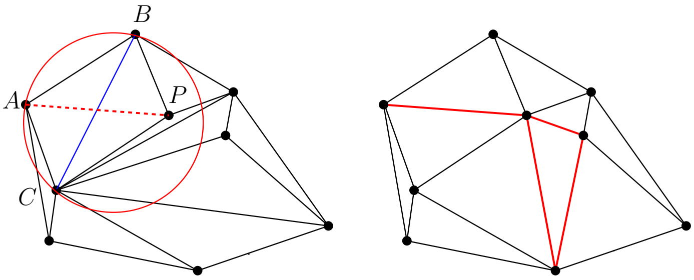
2. Fes l'exploració dels triangles passant un cercle pels seus vèrtexs:

   (a) Si no conté cap punt, passa al triangle adjacent.

   (b) Si conté un punt P al seu interior, tal que P és el vèrtex d'un triangle que comparteix aresta amb l'explorat i ambdós triangles formen un quadrilàter convex, fes un flip, és a dir, canvia l'aresta compartida (que és una diagonal) per l'altra diagonal del quadrilàter. Afegeix els nous triangles a la llista per explorar.

3. Si no queden triangles per explorar, el resultat és la $DT(S)$.

   Comprova-ho aplicant la instrucció DelaunayTriangulation(L).



(a) (b)

Figura 2: (a) Triangulació de S (conjunt de 9 punts), i flip de l'aresta BC per AP (intercanvi de diagonals en el quadrilàter de vèrtexs A, B, C, P). (b) Per al mateix conjunt de punts S, la triangulació de Delaunay, $TD(S)$.

Exercici 4 (Diagrames de Voronoi d'ordre superior)

Anem a treballar amb l'Ipe. Utilitzarem diferentes capes ("layers"); a la barra de dalt hi ha la icona per crear-les. Recorda que només podem treballar dins d'una capa quan aquesta està activa (color groc). Si no ho està, s'activa fent doble clic amb el ratolí sobre el seu nom.

1. En la primera capa: pinta un conjunt de punts, que direm S, en posició general (és a dir, no 3 alineats, ni 4 cocirculars). Canvia el nom de la capa que surt per defecte, per exemple, díga-li punts.
2. Crea una nova capa amb el nom de DV1 i posa-la activa. Si deixes marcada (no activa) la capa dels punts, podràs marcar-los amb el ratolí i bucar i clicar en les *ipelets* l'opció de *Voronois diagrams, Voronoi diagram*.
3. Repeteix el procés amb dues capes més, una DV2 i una altra DV3, clicant en *ipelets* dins de *Voronois diagrams* l'opció *Order 2-Voronoi diagram* i *3-Voronoi diagram*, respectivament.
4. Crea una nova capa amb el nom de punts-etiqueta. En aquesta capa activa, còpia els punts i posa'ls nom (1,2,...).

Qüestions:

1. Quins punts estan associats a cares no fitades de $DV_1(S)$?
2. En la capa $DV1$, escull una regió R_i, associada a un dels punts, i. Crea una nova capa AUX amb tots els punts llevat del i i troba el seu diagrama de Voronoi $DV(S \setminus \{i\})$. Observa la intersecció $R_i \cap DV(S \setminus \{i\})$ marcant les dues capes $DV1$ i AUX, i dibuixa-la en una nova capa que serà la que estigui activa. Observa que has obtingut la part del $DV_2(S)$ que està dins de la regió R_i del $DV_1(S)$ (estàs obtenint informació de qui serà el segon punt més proper). Si repeteixes el procés en totes les regions de $DV_1(S)$, obtens tot $DV_2(S)$.
3. Escull una regió del $DV_2(S)$ i esbrina quins són els dos punts més propers a ella. Ara fes el mateix que a l'apartat anterior però fent el diagrama de Voronoi de tots els punts llevat d'aquests dos.
4. Descriu com obtenir el diagrama $DV_k(S)$ a partir del $DV_{k-1}(S)$.

Exercici 5 (El Diagrama de Voronoi del punt més llunyà)

1. En la primera capa posa un conjunt de punts S, en posició general.
2. Crea una segona capa amb els punts etiquetats.
3. En una tercera capa activa, visualitza els punts i marca'ls per aplicar la ipelet de Voronoi diagram *Furthest-point Voronoi diagram*.

Qüestions:

1. Comprova que el *Furthest-point Voronoi diagram* és el diagrama de Voronoi d'ordre $n-1$, on n és el nombre total de punts del conjunt. Situat en una de les regions del diagrama i fes un cercle que contingui $n-1$ punts, observant quin és el punt de S que ha quedat fora. Si canvies el centre de punt però no de regió, el punt de S que queda fora sempre és el mateix: és el punt de S que qualsevol punt de la regió té més llunyà (punt que associarem a aquesta cara del diagrama).
2. Fes una llista amb els punts associats a cada cara del *Furthest-point Voronoi diagram* i comprova que són els de l'envolupant convexa del conjunt de punts S.
3. Suposa que els punts representen la localització de supermercats en una ciutat. Ara volem buscar el millor lloc on col·locar un magatzem de suministrament per a tots ells, és a dir, trobar el centre d'un cercle amb radi mínim d'entre tots els cercles que recobreixin a tots els punts. On trobar el centre del **cercle recobridor de radi mínim**?