

# Od primjera do modela

DANIELA BEROŠ<sup>1</sup>, MILENA ČULAV MARKIČEVIĆ<sup>2</sup>,  
ZLATKO LOBOR<sup>3</sup> I IVANA MARTINIĆ<sup>4</sup>

U okviru međunarodnoga projekta TIME (Teachers' Inquiry in Mathematics Education) upoznali smo se s metodom profesionalnog razvoja poznatom kao *Studija nastavnog sata* (eng. *Lesson Study*). Jedan ciklus *Studije nastavnog sata* uključuje identificiranje i proučavanje problema u poučavanju, planiranje nastavnog sata, izvođenje i kolegijalno promatranje osmišljenog sata te sustavnu raspravu na kraju. Sve smo faze planirali i izvodili zajedno, kao tim, imajući svo vrijeme na umu zadane ciljeve nastavnog sata.

Tema naše druge studije nastavnog sata bila je *Udaljenost i kut* u sklopu geometrije prostora u drugom razredu srednje škole.

Više o samome projektu može se naći na mrežnoj stranici: <https://time-project.eu/>.

## Motivacija i ciljevi

Prema našim iskustvima, učenici često imaju poteškoća s definiranjem osnovnih pojmova u stereometriji, vizualizacijom geometrijskog problema i primjenom definicija na samo rješavanje problema. Nismo bili zadovoljni načinom na koji se ova tema obično uvodi u školskim udžbenicima pa smo odlučili učenicima dati priliku da sami otkriju važne definicije, umjesto da reproduciraju već postojeće formalne definicije.

Ciljano znanje ovoga sata bilo je *defniranje osnovnih pojmova iz stereometrije* kao što su udaljenost i kut, sa širim ciljevima: *razumijevanje napisanih definicija, izrada odgovarajućeg manipulativnog modela na temelju zadane definicije i rješavanje problema iz stvarnog života*.

Radionicu smo osmislili dinamično, s puno izmjena aktivnosti i uz završnu izradu manipulativnog modela od ponuđenih materijala. Zanimalo nas je koliko će definicije učenika biti slične formalnim definicijama koje nalazimo u udžbenicima, hoće li biti točne, koliko će precizno učenici zapisati svoje definicije te hoće li biti moguće

---

<sup>1</sup>Daniela Beroš, V. gimnazija, Zagreb

<sup>2</sup>Milena Čulav Markičević, V. gimnazija, Zagreb

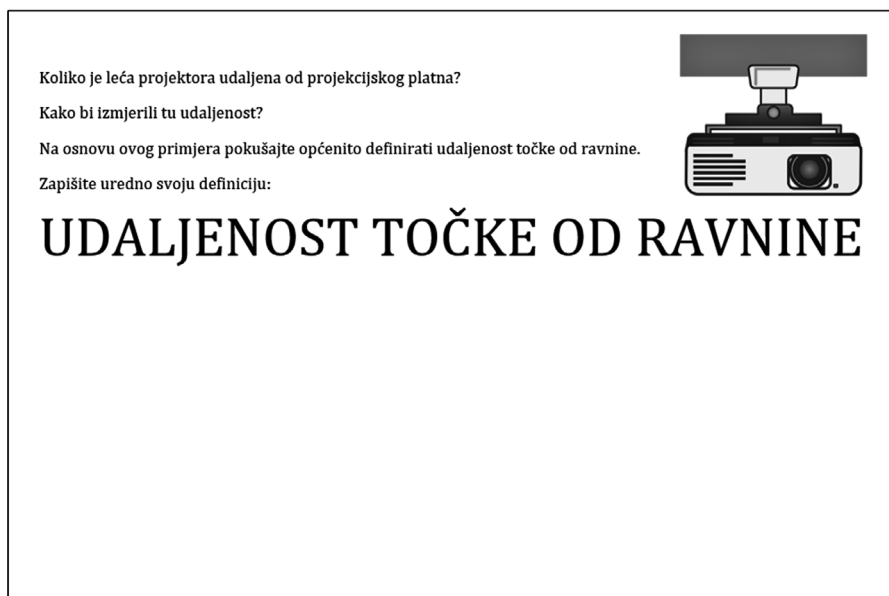
<sup>3</sup>Zlatko Lobor, V. gimnazija, Zagreb

<sup>4</sup>Ivana Martinić, V. gimnazija, Zagreb

na osnovi tuđe definicije napraviti odgovarajuće modele. Ponajviše nas je zanimalo hoće li ova radionica pomoći učenicima da pravilno primjenjuju definicije pri budućem rješavanju problema iz stereometrije.

## Tijek radionice

Planirano trajanje radionice je 80 minuta. Razredni odjel podijeljen je na dva jednaka dijela, a zatim svaka polovica u tri skupine po četvero učenika (u idealnom slučaju). Svaka skupina na početku dobiva radni list (formata A3) koji ih navodi da sami, na temelju primjera iz neposrednog okruženja, definiraju jedan od pojmova: *Udaljenost točke od ravnine*, *Kut između pravca i ravnine*, *Kut između dvije ravnine*. Kako bismo učenicima pomogli vizualizirati problem, koristili smo primjere iz njihove učionice. Po jedna skupina iz svake polovice razreda radi na istom pojmu. Za ovaj smo dio sata planirali oko 15 minuta.



Slika 1. Primjer radnog lista - Udaljenost točke od ravnine

Slijede zadatci za svih šest skupina.

### 1) UDALJENOST TOČKE OD RAVNINE

#### Skupina 1a:



Koliko je leća projektora udaljena od projekcijskog platna?

Kako biste izmjerili tu udaljenost?

Na osnovi ovog primjera pokušajte općenito definirati udaljenost točke od ravnine.

### Skupina 1b:



Koliko je žarulja rasvjetnog tijela udaljena od poda?

Kako biste izmjerili tu udaljenost?

Na osnovi ovog primjera pokušajte općenito definirati udaljenost točke od ravnine.

## 2) KUT IZMEĐU PRAVCA I RAVNINE

### Skupina 2a:

Koliki kut zatvara noga stolca na kojemu sjedite s podom?

Kako biste izmjerili taj kut?

Na osnovi ovog primjera pokušajte općenito definirati kut između pravca i ravnine.



### Skupina 2b:



Koliki kut zatvara olovka s papirom dok pišete?

Kako biste izmjerili taj kut?

Na osnovi ovog primjera pokušajte općenito definirati kut između pravca i ravnine.

## 3) KUT IZMEĐU DVIJU RAVNINA

### Skupina 3a:

Otvorite bilježnicu pod kutom od  $60^\circ$ .

Kako biste izmjerili taj kut?

Na osnovi ovog primjera pokušajte općenito definirati kut između dviju ravnina.



### Skupina 3b:



Otvorite okno prozora pod kutom od  $30^\circ$ .

Kako biste izmjerili taj kut?

Na osnovi ovog primjera pokušajte općenito definirati kut između dviju ravnina.

Nakon prve faze, skupine unutar iste polovice razreda rotiraju svoje radove na način da svaka skupina dobije novi pojam. Sada je zadatak svake skupine pročitati definiciju koju su dobili od susjedne skupine i napraviti potrebne prilagodbe kako bi definicija bila točnija, jasnija i/ili preciznija. Novu, poboljšanu, definiciju čitko zapisuju flomasterom na drugom, praznom papiru A3 formata. Za to ponovno imaju oko 15 minuta.

Nakon popravljivanja definicije, skupine posljednji put rotiraju uratke unutar iste polovice razreda. Sada susjednoj skupini predaju samo papir s definicijom. Na ovaj način svaka se skupina u nekom trenutku susrela sa svim danim pojmovima. Posljednji je zadatak za skupine napraviti manipulativni model, isključivo temeljen na definiciji koju su upravo dobili od susjedne skupine. Trebaju pažljivo pročitati, razumjeti i vizualizirati definiciju koju su osmislili i korigirali drugi učenici. Za učenike smo osigurali različite vrste materijala: karton, kuglice od stiropora, štapove različitih veličina, ljepilo, konop, škarice...

Nakon još 20 zabavnih i kreativnih minuta po jedan učenik iz svake skupine dolazi pred razred kako bi predstavio definiciju koju su dobili i model koji su na temelju nje izradili. Dvije skupine koje su se bavile istim pojmom predstavljaju jedna za drugom. Definiciju pričvrste magnetima na ploču s lijeve, odnosno desne strane, ostavljajući na sredini ploče mjesta za formalnu definiciju koju će nastavnik postaviti nakon njihova predstavljanja. U ovom trenutku nastavnik vodi raspravu o definicijama koje se nalaze na ploči – dvjema koje su osmislili učenici i jednoj formalnoj definiciji: *Opisuju li učeničke definicije dobar pojam? Može li definicija biti jasnija? Odgovara li model definiciji? Ima li nedostataka? Jesmo li se sjetili svih posebnih slučajeva?* Ovo ponavljamo za svaki pojam. Važno je što svi učenici mogu ravnopravno sudjelovati u raspravi budući da je svatko u nekom trenutku razmišljao o svakom od tri pojma i njihovim definicijama.



Slika 2. Nastavnik vodi raspravu o definicijama i modelima – Kut između pravca i ravnine

## Promatranje nastavnog sata

Nakon što su dobili radni list na početku sata, učenici su počeli istraživati problem promatrajući objekte iz svog primjera. Pomicali su stolce, otvarali i zatvarali prozore i svoje udžbenike, gledali u leću projektor... Bilo je potrebno naglasiti učenicima da rješenje konkretnog zadatka ne treba zapisivati na radni list, već samo definiciju do koje ih je dovelo. Ipak, definicije nekih skupina sadržavale su pojmove i primjere vezane uz njihov zadatak. Općenito, konkretne situacije bile su učenicima

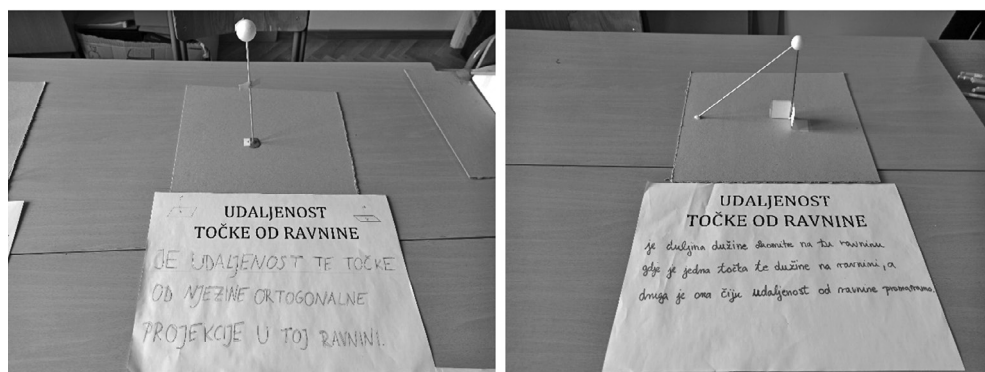
korisne i davale im poticaj da osmisle svoju definiciju. Neki su učenici imali zanimljiva pitanja: *Jesu li pravci u trodimenzionalnom prostoru? Jesu li zidovi okomiti na pod?*

Skupine koje su trebale napisati definiciju udaljenosti točke od ravnine napravile su to prije ostalih, dok su skupine koje su se bavile kutom između dviju ravnina imale najteži zadatak i stoga im je trebalo malo više vremena. Ovog problema bili smo svjesni i prije održavanja sata, no zaključili smo da će se ukupna količina posla za skupine izjednačiti budući da se svaka skupina susretne sa svakim pojmom u nekoj fazi radionice.

Neke su se skupine u fazi korigiranja definicija borile s razumijevanjem napisanog i tako iskusile važnost preciznog izražavanja u matematici i osvijestile kakvu razliku u sadržaju može napraviti tek nekoliko riječi.

Najzanimljiviji i najzabavniji dio sata bez sumnje je bio izrada modela. Učenici su bili iskreno iznenađeni količinom materijala koja im je ponuđena te mogućnošću da budu kreativni u izradi modela, što je aktivnost koja nije uobičajena u srednjoj školi. Bilo je lijepo vidjeti ih kako se zabavljaju i uspješno surađuju kao tim.

Evo nekoliko primjera učeničkih radova.



Slika 3. Primjeri učeničkih radova: Udaljenost točke od ravnine



Slika 4. Primjeri učeničkih radova: Kut između pravca i ravnine



Slika 5. Primjeri učeničkih radova: Kut između dviju ravnina

Najzahtjevnija faza za nastavnika je faza validacije u kojoj treba pažljivo čitati učeničke definicije i voditi raspravu o njihovoj točnosti, potpunosti i preciznosti. Treba i usporediti opisuje li model odgovarajuću definiciju ili je skupina model izradila „po osjećaju” i prema prethodnom znanju. Evo par „nezgodnih” definicija o kojima je važno raspraviti u danom trenutku:

- Udaljenost točke od ravnine: *Duljina dužine okomite na tu ravninu gdje je jedna točka te dužine na ravnini, a druga je ona čiju udaljenost od ravnine promatramo.*
- Kut između pravca i ravnine: *Ako pravac prolazi kroz ravninu, on će s njom zatvarati 4 kuta iz jednog gledišta kojih ima beskonačno mnogo. Od ta 4 kuta nasuprotni su vršni, a susjedni suplementarni. Ako je pravac paralelan s ravninom kuta nema, a ako leži na ravnini, tada je kut koji zatvaraju  $180^\circ$ .*
- Kut između dviju ravnina: *Kut koji zatvaraju ortogonalne projekcije pravaca dviju ravnina na treću okomitu ravninu.*

Nakon svake od četiri održane radionice prikupili smo povratne informacije učenika. Ovo su neke od njih:

- *Naučio sam novu nastavnu jedinicu na zanimljiv način, pa sam je bolje razumio.*
- *Iznenadila me jednostavnost ovih definicija.*
- *Iznenadilo me da smo kao skupina došli do definicija koje su bile prilično točne.*
- *Bio sam iznenađen koliko smo učinkoviti i koliko su te definicije logične i jednostavne.*
- *Iznenadio sam se kako je zabavno.*
- *Naučio sam kako bolje funkcionirati u timskom okruženju.*
- *Iznenadio me uspjeh moje skupine u danim okolnostima.*
- *Iznenadilo me koliko je bilo izazovno razumjeti definicije druge skupine.*

Bili smo jako zadovoljni njihovim razmišljanjima i komentarima te zaključili da su naši ciljevi postignuti. Ostaje nam vidjeti hoće li im ova radionica pomoći da pravilno primjenjuju definicije pri budućem rješavanju problema.

## Rasprava i zaključci

Na samom početku rada na projektu identificirali smo *Geometriju prostora* i *Logaritamsku skalu*, o kojoj smo već pisali, kao zahtjevne teme kojima bismo željeli dati novo ruho. Kroz razgovor i razmjenu iskustava zaključili smo da je najizazovnije samo uvođenje definicija. U prvoj smo se verziji željeli baviti s pet definicija – okomitost pravca i ravnine, okomitost ravnina te tri ranije navedene definicije. Smanjili smo broj na tri jer nam se činilo da za svih pet ne bi bio dovoljan jedan blok sat i da bi učenici bili zasićeni pa od šume ne bi vidjeli drveće. Također, prvotno smo željeli smisliti priče koje bi ih motivirale da zaista trebaju i žele izmjeriti ili izračunati te udaljenosti ili kutove. No, zaključili smo da su nam za daljnji rad bitne definicije i njihova vizualizacija pa smo primjere postavili u tu ulogu. Pokazalo se da priče nisu nedostajale, učenici su bili motivirani izabranim jednostavnim primjerima iz neposredne okoline. Naime, razmišljajući o raznim primjerima poput kosog tornja u Pisi ili zastave na pročelju zgrade, zaključili smo da bi najbolje bilo kada bi se ti primjeri već nalazili u učionici kako bi ih učenici mogli odmah iskoristiti.

Radionicu držimo vrlo uspješnom – većina skupina uspjela je ispravno definirati svoje pojmove, iako neke definicije nisu bile precizne i nedostajala su im određena zapažanja i zaključci. Bila je to izvrsna prilika da nastavnik komentira njihov rad, naglašavajući važnost preciznog definiranja i ljepotu jednostavnosti, kako su to i naši učenici istaknuli u povratnim informacijama.

Bilo je zanimljivo vidjeti kako su sve skupine zaista uživale u izradi modela i bile iskreno iznenađene kada su shvatile da je većina njihovih definicija točna. Svih šest skupina doživjelo je poteškoće i izazove u razumijevanju tuđe definicije, budući da su učenici stavljeni u ulogu recenzenta. Uvidjeli su potrebu korištenja preciznog matematičkog jezika, što je bilo jako poučno za njih. Na kraju su imali izazovan zadatak napraviti model temeljen na tuđoj definiciji – opet nešto što obično ne rade, a doprinosi boljem razumijevanju.

Primijetili smo da je nekim skupinama u određenoj fazi trebalo više vremena od drugih s obzirom da je neke pojmove bilo teže definirati ili prikazati modelom od drugih. No, budući da je svaka skupina imala priliku raditi na sve tri definicije u nekom trenutku, ukupna dinamika nije poremećena te su na kraju sve skupine imale podjednaku količinu posla. Praznog hoda tijekom rada nije bilo – grupe su vrijeme uštedeno na razmišljanju uložile u uljepšavanje definicija i modela.

Ovu ćemo radionicu nastaviti izvoditi i s budućim generacijama, a raduje nas vidjeti kako će ona doprinijeti rješavanju problema u kojima se koriste obrađene definicije. Nadamo se da će poboljšati učeničko razmišljanje i zaključivanje, i nama nastavnicima dati dobru referentnu točku u nastavnim jedinicama koje su pred nama.

Iako se projekt bliži kraju, odlučili smo kao tim nastaviti sa *Studijom nastavnog sata* i svake školske godine osmisliti, izvesti, analizirati i prilagoditi jednu nastavnu temu. Odlučili smo više surađivati, zajednički planirati i istraživati, i tako ostvariti samu bit ovoga projekta – osnažiti nastavnike da rastu zajedno.