PEMODELAN MATEMATIKA PELAKU PELECEHAN SEKSUAL DENGAN HUKUM TINDAK PIDANA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna
Memperoleh Gelar Sarjana S1 Matematika

Diajukan oleh:

Dyah Ayu Srilinangkung

NIM. 1808046031

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO SEMARANG

TAHUN 2022

PEMODELAN MATEMATIKA PELAKU PELECEHAN SEKSUAL DENGAN HUKUM TINDAK PIDANA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh Gelar Sarjana S1 Matematika

Diajukan oleh:

Dyah Ayu Srilinangkung

NIM. 1808046031

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO SEMARANG

TAHUN 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : Dyah Ayu Srilinangkung

NIM : 1808046031

Jurusan : Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul:

PEMODELAN MATEMATIKA PELAKU PELECEHAN SEKSUAL DENGAN HUKUM TINDAK PIDANA

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 26 Desember 2022

Yang menyatakan

Dyah Ayu Srilinangkung

NIM: 1808046031

LEMBAR PENGESAHAN

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka Ngaliyan Semarang
Telp.024-7601295 Fax.7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul	: **Pemodelan Matematika Pelaku Pelecehan Seksual dengan Hukum Tindak Pidana**
Penulis	: Dyah Ayu Srilinangkung
NIM	: 1808046031
Jurusan	: Matematika

Telah diajukan dalam sidang tugas akhir oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 30 Desember 2022

DEWAN PENGUJI

Ketua Sidang,	Sekretaris Sidang,
Yolanda Norasia, M.Si.	**Eva Khoirun Nisa, S.Si., M.Si.**
NIP. 199409232019032011	NIP. 198701022019032010
Penguji Utama I,	Penguji Utama II,
Yulia Romadiastri, S.Si., M.Sc.	**Emy Siswanah, M.Sc.**
NIP. 198107152005012008	NIP. 198702022011012014
Pembimbing I,	Pembimbing II,
Aini Fitriyah, S.Pd., M.Sc.	**Zulaikha, M.Si.**
NIP. 198909292019032021	NIP. 19920409201903207

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UIN WALISONGO
SEMARANG
REPUBLIK INDONESIA

NOTA DINAS

Semarang, 21 Desember 2022

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan, dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:Pemodelan Matematika Pelaku Pelecehan Seksual dengan Hukum Tindak Pidana
Penulis	: Dyah Ayu Srilinangkung
NIM	: 1808046031
Jurusan	: Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diajukan dalam sidang munaqosah.

Wassalamu'alaikum wr. Wb

Pembimbing I,

Aini Fitriyah, M. Sc
NIP. 19890929 201903 2 021

NOTA DINAS

Semarang, 21 Desember 2022

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan, dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:Pemodelan Matematika Pelaku Pelecehan Seksual dengan Hukum Tindak Pidana
Penulis	: Dyah Ayu Srilinangkung
NIM	: 1808046031
Jurusan	: Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diajukan dalam sidang munaqosah.

Wassalamu'alaikum wr. wb

Pembimbing II,

Zulaikha, M. Si

NIP. 19920409 201903 207

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmanirrohhiim

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarokatuhu

Puji syukur atas kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir skripsi ini. Sholawat serta salam dihaturkan kepada Nabi besar Muhammad SAW, seorang suri tauladan dan panutan bagi umat manusia di bumi ini.

Syukur alhamdulillah penulis ucapkan karena telah menyelesaikan skripsi yang berjudul *"Pemodelan Matematika Pelaku Pelecehan Seksual dengan Hukum Tindak Pidana"* sebagai syarat untuk memperoleh Gelar Sarjana Matematika. Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih sangat sederhana untuk dikatakan sebuah skripsi, sehingga saran dan kritik sangat penulis harapkan dari para pembaca. Meski begitu, penullis berharap bahwa tulisan ini dapat memberikan manfat bagi para pembaca yang nantinya berniat untuk meneruskan dan mengembangkan penelitian ini.

Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan pengarahan, bimbingan, semangat, serta bantuan yang sangat berarti bagi penulis sehingga skripsi ini dapat penulis selesaikan dengan baik, maka dlam kesempatan ini dengan kerendahan hati dan rasa hormat penulis haturkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. H. Ismail, M.Ag., selaku ketua Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
2. Ibu Emy Siswanah, M.Sc., selaku ketua jurusan Matematika UIN Walisongo Semarang.
3. Bapak Aunur, M.Pd., selaku sekretaris jurusan Matematika UIN Walisongo Semarang.
4. Ibu Siti Maslihah, M.Si., selaku wali dosen penulis.
5. Ibu Aini Fitriyahh, M.Sc., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan waktu dan arahannya sehingga skripsi dapat selesai.
6. Ibu Zulaikha, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan waktu dan arahannya sehingga skripsi dapat selesai.
7. Segenap dosen, pegawai, dan seluruhh civitas akademika lingkungan UIN Walisongo Semarang terkhusus dosen Matematika.
8. Ibunda tercinta Rima Dwi Yunihandari dan Almarhum ayahanda Agus Karsono atas kepercayaan, jerih payah serta pengorbanan tanpa pamrih, yang doanya selalu

menyertai dalam perjalanan studi penulis. Semoga selalu dalam lindungan Allah SWT, Aamiin.

9. Adik-adik penulis yaitu Rabing Bariq Bagaskara dan Rosita Anggoro Kasih atas dukungan dan segala tingkah yang mengibur.
10. Keluarga besar Soeparman Sosrodimulyo dan keluarga besar Mawardi yang sudah memberi segala do’a dan dukungan yang sangat bagi penulis.
11. Kawan-kawan Novi Ridho Pangestuti, Aisha Ilham Fatihah, Ikhda Gustin Nurisyafaqoh, Della Refni, serta Ayub Almahmudi atas segala dukungan, semangat, dan kesediaannya untuk mendengar segala ocehan penulis.
12. Kawan-kawan pondok Riri Rahmasari, Nurlaila Handayani, Maylani Milujeng, Elfira Lathifatul, dan Akmalia Muchlis atas semangat untuk berjuang bersama dari tempat masing-masing.
13. Teman-teman Matematika 2018 atas kebersamaan selama menjalani proses perkuliahan.
14. Seluruh anggota NCT, terkhusus Jaehyun Jung, Taeyong Lee, Doyoung Kim, dan Jeno Lee yang menjadi inspirasi bagi penulis untuk lebih bersemangat meraih yang diinginkan.

15. Anak-anak kontrakan Yuni Frazwanti, Firis Tsania Hudaya, Nurrahayu Agustina yang senantiasa membantu dan memberikan ruang untuk penulis
16. Seluruh pihak yang turut membantu penyelesaian skripsi yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya.

Hanya ucapan terima kasih yang dapat penulis sampaikan. Semoga segala bantuan dan do’a yang telah diberikan dapat menjadi catatan amal kebaikan dihadapan Allah SWT. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat benar-benar bermanfaat bagi semua pihak.

Semarang, 21 Desember 2022

Penulis

Dyah Ayu Srilinangkung

ABSTRAK

Penelitian ini membahas mengenai pemodelan matematika pelaku pelecehan seksual dengan adanya hukum tindak pidana. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka. Seluruh populasi dikelompokkan menjadi empat sub populasi, yaitu individu yang berpotensi menjadi pelaku pelecehan seksual atau *Potential* (P), individu pelaku pelecehan seksual yang belum diberi hukuman atau *Harassment Prepetitor* (H), individu pelaku pelecehan seksual yang diberikan hukuman pidana atau *Criminal* (C), dan individu pelaku pelecehan yang telah berhenti atau *Quit* (Q). Hasil analisa menunjukkan bahwa model memiliki dua titik ekuilibrium, yaitu titik kuilibrium bebas pelaku pelecehan seksual $P_0 = (1,0,0,0)$ dan titik ekuilibrium endemik $P_1 = (P^*, H^*, C^*, Q^*)$. Berdasarkan model dan titik ekuilibrium, ditentukan bilangan reproduksi dasar (R_0). Analisis kestabilan bebas pelaku pelecehan seksual akan stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$, artinya tidak terdapat penyebaran perilaku pelaku pelecehan seksual, dan ketika $R_0 > 1$, artinya terdapat penyebaran perilaku pelecehan seksual.

Kata Kunci: Model matematika, pelecehan seksual, hukum pidana, titik ekuilibrium, analisis kestabilan

DAFTAR ISI

PERNYATAAN KEASLIAN iii

LEMBAR PENGESAHAN iv

NOTA DINAS v

NOTA DINAS vi

KATA PENGANTAR vii

ABSTRAK xi

DAFTAR ISI xii

DAFTAR TABEL xv

DAFTAR GAMBAR xvi

DAFTAR LAMPIRAN xvii

BAB I PENDAHULUAN 1

A. Latar Belakang 1

B. Rumusan Masalah 5

C. Tujuan Penelitian 6

D. Manfaat Penelitian 6

E. Batasan Masalah 7

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 8

A. Model Matematika 8

B. Model SIR 10

C. Persamaan Diferensial 13

D. Sistem Persamaan Diferensial 15

1. Sistem Persamaan Diferensial Linier 16

2. Sistem Persamaan Diferensial Non Linier 17

E. Titik Ekuilibrium 18

F. Nilai Eigen dan Vektor Eigen 19

G. Linieritas 21

H. Bilangan Reproduksi Dasar 23

I. Kestabilan Titik Ekuilibrium 24

J. Kriteria Routh Hurwitz 26

K. Hukum Pidana 27

L. Pelecehan Seksual 29

M. Kajian Terdahulu 31

BAB III METODOLOGI PENELITIAN 46

A. Metode Penelitian 46

B. Prosedur Penelitian 46

BAB IV PEMBAHASAN 49

A. Model Matematika Pelaku Pelecehan Seksual dengan Hukum Tindak Pidana 49

B. Titik Ekuilibrum dan Bilangan Reproduksi Dasar Model Matematika Pelaku Pelecehan Seksual dengan Hukum Tindak Pidana 54

C. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium 63

D. Simulasi Numerik 91

BAB V PENUTUP 99

A. Kesimpulan 99

B. Saran.. 100

DAFTAR PUSTAKA.. 101

LAMPIRAN.. 107

DAFTAR RIWAYAT HIDUP.. 110

DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1 Jenis Kestabilan dari Titik Ekuilibrium..................26
Tabel 2. 2 Daftar Variabel Model Penyebaran Penyalahgunaan Narkoba Kelompok Individu yang Direhabilitasi..33
Tabel 2. 3 Daftar Parameter-parameter Model Penyebaran Penyalahgunaan Narkoba Kelompok Individu yang Direhabilitasi..34
Tabel 2. 4 Tabel Variabel Model Matematika Populasi Perokok pada Daerah yang Menerapkan Denda......................36
Tabel 2. 5 Daftar Parameter-parameter Model Matematika Populasi Perokok pada Daerah yang Menerapkan Denda....36
Tabel 2. 6 Daftar Parameter Model Matematika Dinamika Populasi Perokok dengan Faktor Edukasi dan Candy Treatment...41
Tabel 2. 7 Daftar Parameter Model Penyebaran Pengguna Narkoba dengan Faktor Edukasi..44
Tabel 4. 1 Daftar Variabel-variabel..51
Tabel 4. 2 Daftar Parameter-parameter....................................51
Tabel 4. 3 Nilai-nilai Parameter...92
Tabel 4. 4 Nilai-nilai Parameter...95

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Diagram Model SIR 11
Gambar 2. 2 Diagram Transfer Model Penyebaran Penyalahgunaan Narkoba Kelompok Individu yang Direhabilitasi 32
Gambar 2. 3 Diagram Skematik Model Matematika (Denda Faktor Utama) 37
Gambar 2. 4 Diagram Skematik Model Matematika (Denda Bukan Faktor Utama) 38
Gambar 2. 5 Diagram Model Penyebaran Pengguna Narkoba dengan Faktor Edukasi 43
Gambar 3. 1 Diagram Alur Penelitian 48
Gambar 4. 1 Diagram Transfer Model Matematika Pelaku Pelecehan Seksual dengan Hukum Tindak Pidana 52
Gambar 4. 2 Grafik dinamika saat $R0 < 1$ 93
Gambar 4. 3 Grafik dinamika saat $R0 > 1$ 96

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1: Program Simulasi Numerik Model Matematika Pelaku Pelecehan Seksual dengan Hukum Tindak Pidana 107

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Manusia diciptakan dengan mempunyai hawa nafsu, dan cara mengendalikan nafsu adalah salah satu hal yang sangat penting. Belakangan ini, pelecehan seksual kerap terjadi di berbagai daerah Indonesia. Kejadian seperti inilah yang membuat masyarakat merasa was-was dan khawatir mengenai keamanan bagi diri mereka. Pelecehan seksual termasuk dalam pelanggaran atas kejahatan kesusilaan yang bukan hanya menjadi masalah suatu negara, melainkan masalah hukum dari seluruh negara yang ada di dunia yang merupakan masalah global (Sumera, 2013). Peristiwa pelecehan seksual atau dalam bahasa Inggris yaitu *sexual harassment* dapat diartikan dengan perilaku yang mengandung unsur seksual, ditandai dengan pendekatan fisik yang mengandung maksud seksual, atau komentar-komentar seksual yang tidak pantas untuk dikatakan maupun didengar dan tidak diinginkan oleh orang yang menerima perlakuan tersebut (Suprihatin & Azis, 2020).

Ruang lingkup dari pelecehan seksual tidak hanya terbatas dari pelecehan seksual yang berupa fisik seperti sentuhan yang menjurus ke arah seks, namun dapat berupa pelecehan secara verbal seperti kata-kata yang menyinggung dan tidak membuat nyaman, atau secara isyarat seperti siulan atau tatapan dan gerakan ke arah seks (Effendi, 2019). Menurut survei pelecehan di ruang publik yang dilaksanakan oleh Koalisi Ruang Publik Aman (KRPA), bentuk pelecehan verbal sebesar 60%, pelecehan fisik sebesar 24%, dan pelecehan visual sebesar 15% (Aman, 2019). Menurut Catatan Tahunan Komnas Perempuan Tahun 2020, kekerasan terhadap perempuan pada ranah publik sebesar 21% (1.731 kasus) dengan kekerasan seksual yang paling menonjol sebesar 35% (962 kasus), terdiri dari kasus perkosaan sebanyak 229 kasus, pelecehan seksual sebanyak 181 kasus, persetubuhan sebanyak 5 kasus, pencabulan sebanyak 166 kasus, dan sisanya merupakan kasus percobaan kekerasan seksual dan pemerkosaan lainnya.

Kekerasan, eksploitasi, dan pelecehan seksual tidak memandang korban, bukan hanya menimpa wanita dewasa namun juga dapat terjadi pada lelaki, bahkan hingga anak dibawah umur. Kejahatan seksual tidak hanya terjadi di tempat tertentu yang memberi peluang manusia saling berkomunikasi, namun dapat terjadi di lingkungan keluarga (Aleng, 2020). Belakangan ini media sosial tengah diramaikan dengan berita mengenai seorang guru yang sekaligus pemilik yayasan yang melakukan kekerasan seksual terhadap beberapa muridnya, bahkan diantara beberapa korban terdapat murid yang melahirkan anak hingga dua kali, dan kekerasan seksual ini terjadi dalam waktu yang sudah cukup lama (Yunus & Fathorrahman, 2022). Kasus pelecehan lainnya yang sedang menjadi perhatian yaitu kasus yang terjadi di salah satu perguruan tinggi. Kasus pelecehan ini dilakukan oleh seorang dosen dan korbannya merupakan mahasiswi. Pelecehan seksual terhadap anak didik seperti contoh diatas misalnya, dapat mengancam dan menghambat prestasi atau pencapaian akademik dari sang murid (Virgitasari & Irawan, 2022). Pelaku pelecehan seksual dan pelaku kejahatan kesusilaan tidak hanya didominasi oleh mereka yang berasal dari golongan ekonomi menengah maupun bawah, bahkan bukan yang berekonomi kurang atau tidak berpendidikan, melainkan dapat berasal dari semua strata sosial baik strata terendah bahkan hingga strata tertinggi (Sumera, 2013).

Konstitusi Negara Republik Indonesia menyatakan bahwasannya negara Indonesia merupakan negara yang berdasar pada hukum, sebab itulah hukum sangat berperan penting dalam kehidupan bernegara dan juga berbangsa. Seluruh warga negara Indonesia harus menjadikan hukum sebagai pedoman agar kehidupan dapat menjadi lebih tertib (Yunus & Fathorrahman, 2022). Dalam KUHP tidak terdapat istilah pelecehan seksual, melainkan tindak pidana kejahatan kesusilaan yang meliputi perkosaan dan pencabulan. Praktik penegakan hukum pelecehan seksual secara fisik selama ini diterapkan dengan menggunakan Pasal 281 dan Pasal 289 mengenai pencabulan, namun terbatas hanya hanya pada pelecehan yang berupa fisik, sejauh ini pasal mengenai pelecehan verbal belum diatur dalam hukum pidana Indonesia, namun penegakan hukum terhadap pelecehan seksual secara verbal dapat menggunakan pasal 315 mengenai penghinaan ringan (Effendi, 2019).

Perkembangan teknologi dan ilmu matematika dapat memudahkan manusia guna melakukan simulasi terhadap permasalahan kompleks yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari, digunakan untuk mengukur suatu fenomena yang terjadi di alam semesta ini (Ndii, 2018). Salah satu cabang dari perkembangan ilmu matematika ialah model matematika. Model matematika dapat menjadi salah satu solusi dari sekian banyak permasalahan dalam kehidupan (Aswan, 2018). Model matematika digunakan untuk menggambarkan suatu permasalahan fenomena dunia nyata dalam bahasa matematis, maka diharapkan dengan dimodelkannya suatu fenomena atau masalah dapat mempermudah dalam memahami masalah tersebut (Kurniawati & Rosyidi, 2019).

Permasalahan pelecehan seksual yang kerap terjadi di masyarakat cukup meresahkan. Upaya pencegahan yang dapat dilakukan pemerintah adalah dengan memberi hukuman yang setimpal bagi pelaku pelecehan. Dalam penelitian ini akan membahas perilaku kriminal dengan kasus pelecehan seksual, yaitu mengenai model matematika pelaku pelecehan seksual dengan hukum tindak pidana guna lebih memahami peristiwa pelecehan seksual yang terjadi.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan di atas, dapat dirumuskan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana bentuk model matematika pelaku pelecehan seksual dengan hukum tindak pidana?
2. Bagaimana titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekuilibrium dari model matematika pelaku pelecehan seksual dengan hukum tindak pidana?

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini, yaitu:

1. Membentuk model matematika pelaku pelecehan seksual dengan hukum tindak pidana.
2. Menentukan titik ekuilibrium serta kestabilan titik ekuilibrium dari model matematika pelaku pelecehan seksual dengan hukum tindak pidana.

D. Manfaat Penelitian

Manfaat penelititan ini adalah:

1. Bagi Mahasiswa

   Hasil penelitian ini diharapkan menambah pengetahuan mengenai pemodelan matematika.
2. Bagi Peneliti Selanjutnya

   Hasil penelitian ini diharapkan dapat dijadikan sumber referensi bagi peneliti selanjutnya, terutama yang terdapat kaitannya mengenai pemodelan matematika.

3. Bagi Pemerintah

   Hasil penelitian ini diharap dapat menjadi pertimbangan untuk mengambil kebijakan dalam meningkatkan keamanan dan menekan angka korban pelecehan.

E. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini adalah objek yang akan dimodelkan dalam penelitian, yaitu:

1. Terdapat empat populasi, yaitu populasi yang berpotensi menjadi pelaku pelecehan seksual, populasi pelaku pelecehan seksual, populasi pelaku pelecehan yang diberikan hukuman, serta populasi pelaku pelecehan seksual yang telah berhenti.
2. Populasi bersifat tertutup sehingga tidak terdapat populasi yang bermigrasi.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Model Matematika

Kata ‘model’ dapat dimaksudkan sebagai ‘tiruan’ yang menyerupai kenyataan. Model matematika dari suatu fenomena merupakan ekspresi matematika yang diturunkan dari suatu fenomena tersebut. Model matematika digunakan guna merepresentasikan menjelaskan karakteristik fenomena yang dimodelkan. Dalam menurunkan suatu model matematika, akan melibatkan asumsi-asumsi, pendekatan, maupun pembatasan berdasarkan observasi terhadap fenomena yang sesungguhnya. Asumsi dan pendekatan tersebut dilakukan guna mempelajari fenomena tersebut secara sederhana (Ndii, 2018).

Secara umum terdapat tiga langkah guna menerapkan matematika guna mempelajari suatu fenomena:

1. Pemodelan matematika suatu fenomena atau perumusan masalah.

   Guna menerjemahkan data atau informasi yang ada mengenai suatu fenomena masalah nyata menjadi suatu model matematika. Data dapat diperoleh melalui ekperimen, pengamatan di industri atau kehidupan sehari-hari.

2. Kesimpulan matematika.

   Setelah memperoleh model matematika, mencari solusi dari model tersebut dengan metode matematika yang sesuai. Solusi matematika ini seringkali dinyatakan dalam fungsi matematika, grafik, atau angka.

3. Interpretasi solusi

   Dalam matematika terapan, solusi matematika yang berbentuk fungsi matematika, grafik, dan angka tersebut tidak berarti banyak jika solusinya tidak menjelaskan masalah awalnya.

Macam model dapat dibedakan menjadi beberapa model, yaitu model ikonik, model analog, model simbolik. Penelitian ini merupakan pemodelan matematika yang termasuk ke dalam bentuk model simbolik. Model simbolik adalah model yang menggambarkan sifat karakteristik objek yang dimodelkan menggunakan lambang atau simbol (Cahyono, 2013).

B. Model SIR

Model epidemiologi umumnya berfokus pada dinamika dari perpindahan karakter antara individu ke individu, populasi ke populasi, bahkan negara ke negara (Toaha, Khaeruddin, & A.R, 2014). Model epidemi yang sederhana yaitu model epidemi berbasis model SIR. Model SIR diperkenalkan pertama kalinya oleh W. O. Kermack dan Mc. Kendrick pada tahun 1972, didalam model tersebut populasi manusia dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok yang rentan atau *Suspectible* (S), kelompok yang terinfeksi atau *Infected* (I), dan kelompok yang sembuh atau *Recovered* (R) (Iswanto, 2012).

Model epidemi SIR diasumsikan sebagai berikut:

S = jumlah individu rentan pada populasi saat waktu t

I= jumlah individu yang terinfeksi pada populasi saat waktu t

R = jumlah individu sembuh pada populasi saat waktu t

r = laju penularan dari individu rentan menjadi individu yang terinfeksi

a = laju kesembuhan dari individu yang terinfeksi menjadi individu yang sembuh

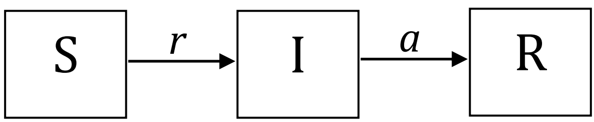
Berdasarkan asumsi tersebut, model epidemi tersebut dapat dituliskan kedalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -rSI$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI$$

$$\frac{dR}{dt} = aI$$

Sistem persamaan diferensial terebut dapat diinterpretasikan seperti dalam **Gambar 2.1 Diagram Model SIR** berikut (Tjolleng, Komalig, & Prang, 2013):



Gambar 2. 1 Diagram Model SIR

Pengembangan model SIR dapat berupa penambahan asumsi dan parameter atau penambahan kompertemen. Salah satu contoh pengembangan model SIR dengan penambahan asumsi dan parameter adalah dengan menambah asumsi adanya kelahiran dan kematian alami, dan salah satu contoh pengembangan model SIR dengan menambahkan kompartemen adalah dengan menambah kompartemen kelompok yang terinfeksi namun belum menunjukkan gejala dan belum dapat menularkan atau *Exposed* (E) sehingga bentuk model SIR menjadi bentuk model SEIR (Manaqib, 2021).

Contoh 2.1: Pemodelan matematika SIRI pada penyebaran penyakit tifus di Sulawesi Selatan (Side, Zaki, & Sartika, 2021).

Pada penelitian ini terdapat beberapa asumsi guna memodelkan penyakit tifus:

1. Terdapat kematinan dan kelahiran dalam populasi.
2. Setiap individu yang lahir akan menjadi kelompok rentan.
3. Setiap individu yang terdeteksi akan menjadi terinfeksi.
4. Masa inkubasi penyakit tifus (singkat) 7-12 hari.
5. Individu yang sudah sembuh dapat kembali terinfeksi sebab kurang menjaga kesehatan. Bakteri yang terdapat di dalam tubuh belum sepenuhnya mati, tetapi dalam kondisi dorman aktif ketika sistem kekebalan tubuh menurun maka bakteri tersebut bisa aktif kembali sehingga akan kembali terkena penyakit tifus. Faktor penyebab turunnya kekebalan tubuh adalah kelelahan atau istirahat yang kurang.

Keterangan variabel dan parameter:

S(t) : Jumlah individu rentan pada populasi saat waktu t

I(t) : Jumlah individu terinfeksi pada populasi saat waktu t

R(t) : Jumlah individu sembuh pada populasi saat waktu t

C : Laju kelahiran

μ : Laju kematian alami

β : Laju penularan penyakit

α : Laju kesembuhan penyakit

ε : Laju individu yang kembali terinfeksi

Berdasarkan asumsi, maka model penyakit tifus dapat dituskan dalam bentuk sistem persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dS}{dt} = C - (\mu + \beta)S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S + \varepsilon R - (\mu + \alpha)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - (\mu + \varepsilon)R$$

C. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang menyatakan hubungan antara suatu variabel tak bebas beserta turunannya terhadap variabel bebas, dengan satu atau lebih turunan dari variabel tersebut tersebut.

Bentuk umum persamaan diferensial orde n adalah sebagai berikut

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (2.1)$$

yang menyatakan adanya keterikatan antara variabel bebas x dengan variabel tak bebas y beserta turunannya dalam bentuk persamaan yang identik nol. Beberapa referensi menuliskan persamaan tersebut dalam bentuk $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$.

Klasifikasi persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu (Murtafi'ah & Apriandi, 2018):

1. Persamaan Diferensial Biasa

   Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan hanya pada satu peubah atau bergantung hanya pada satu variabel bebas.

2. Persamaan Diferensial Parsial

   Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan dierensial yang melibatkan atau bergantung pada dua bahkan lebih varibel bebas.

Dalam suatu persamaan diferensial, terdapat beberapa istilah didalamnya, antara lain yaitu orde yang merupakan turunan tertinggi dalam sebuah persamaan diferensial, dan derajat yaitu pangkat dari turunan tertinggi dalam persamaan diferensial.

Contoh 2.2

$(y')^2 + x + 4y = 0$ merupakan suatu persamaan diferensial berorde 1 dan berderajat 2.

Dalam suatu persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial parsial atau persamaan diferensial biasa, dapat digolongkan menjadi persamaan diferensial linier dan persamaan diferensial tak linier. Suatu persamaan diferensial dikatakan linier jika tidak terdapat perkalian antar variabel tak bebas dan turunannya. Jika tidak memenuhi syarat ini, maka disebut sebagai persamaan diferensial tak linier.

Persamaan diferensial linear biasanya dapat dituliskan dalam bentuk berikut

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = F(x) \quad (2.2)$$

Jika bentuk persamaan tidak seperti persamaan (2.2) maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial tak linier (Waluyo, 2006).

D. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan kumpulan lebih dari satu persamaan diferensial. Secara sistematis, dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\dot{x}(t) = f(x,t) \tag{2.3}$$

dengan

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix},$$

$$f(x,t) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan variabel tak bebas dan t merupakan variabel bebas. Jika ruas kanan dari sistem $\dot{x}(t) = f(x,t)$, variabel t dinyatakan secara eksplisit, maka sistem (2.3) disebut sistem otonomus dan dapat ditulis secara sistematis sebagai

$$\dot{x}(t) = f(x) \tag{2.5}$$

Berdasarkan kelinierannya sistem persamaan dibagi menjadi dua, yaitu:

1. Sistem Persamaan Diferensial Linier

   Pada persamaan (2.4), jika masing-masing fungsi merupakan fungsi linier dari variabel bebas t dan variabel terikat $x_1, x_2, \dots, x_n$, maka sistem tersebut merupakan sistem persamaan diferensial linier. Variabel bebas t dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) \\
&\quad + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) \\
&\quad + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) \\
&\quad + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Dapat ditulis dalam bentuk :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t) \tag{2.7}$$

Contoh 2.3: Sistem Persamaan Diferensial Linier

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + 4y$$

2. Sistem Persamaan Diferensial Non Linier

   Sistem persamaan diferensial non linier merupakan suatu sistem persamaan yang terdiri lebih dari satu persamaan yang saling terkait.

   Pada persamaan (2.4), jika masing-masing fungsi merupakan fungsi non linier dari variabel bebas t dan variabel terikat $x_1, x_2, \dots, x_n$, maka sistem tersebut merupakan sistem persamaan diferensial linier (Manaqib, 2021).

Contoh 2.4: Sistem Persamaan Diferensial Non Linier

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_1x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4{x_1}^2 + x_1x_2$$

E. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium atau titik kesetimbangan merupakan titik yang nilainya tidak akan berubah terhadap waktu, atau dapat dikatakan titik ekuilibrium adalah solusi yang tetap konstan meskipun waktu berganti.

Definisi 2.1: Diberikan suatu persamaan sistem $\dot{x} = f(x)$, yang memiliki solusi dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Suatu vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut titik ekuilibrium (Manaqib, 2021).

Contoh 2.5: (Cara mencari titik ekuilibrium)

Diberikan sistem persamaan diferensial non linier, maka tentukan titik kesetimbangannya dari persamaan berikut

$$\dot{x} = -3x + x^2 - xy$$

$$\dot{y} = -5y + xy$$

Berdasarkan definisi, maka $\dot{x} = \dot{y} = 0$

$$-5y + xy = 0$$

$$y(-5 + x) = 0$$

$$y = 0 \text{ dan } x = 5$$

Apabila $y = 0$, maka

$$-3x + x^2 - xy = 0$$

$$-3x + x^2 - x(0) = 0$$

$$x(-3 + x) = 0$$

$$x = 0 \text{ dan } x = 3$$

Apabila $x = 5$, maka

$$-3(5) + (5)^2 - (5)y = 0$$

$$-15 + 25 = 5y$$

$$y = 2$$

Maka didapatkan titik ekuilibriumnya, yaitu (0,0), (3,0), dan (5,2).

F. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen dapat digunakan guna mengetahui kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial. Misalkan A merupakan sebuah matriks $n \times n$. Bilangan real λ disebut nilai eigen dari matriks A jika terdapat vektor tak nol x di R^n yang memenuhi persamaan $Ax = \lambda x$. Vektor tak nol x yang memenuhi persamaan $Ax = \lambda x$ disebut vektor eigen matriks A yang berkorespondensi dengan nilai eigen λ (Wijayanti, Wahyuni, & Susanti, 2015).

Guna mencari nilai eigen dari matriks A berukuran $n \times n$, persamaan $Ax = \lambda x$, dapat dituliskan menjadi

$$Ax = \lambda Ix$$
$$Ax - \lambda Ix = 0$$
$$(A - \lambda I)x = 0$$

Supaya λ dapat menjadi nilai eigen, maka paling tidak terdapat satu solusi tak nol dari persamaan $(A - \lambda I)x = 0$. Persamaan $(A - \lambda I)x = 0$ memiliki solusi tak nol, jika dan hanya jika $\det(\lambda I - A) = 0$ atau $\det(A - \lambda I) = 0$ yang disebut persamaan karakteristik dari matriks A (Andari, 2017).

Contoh 2.6:

Terdapat vektor eigen $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dan persamaan berikut:

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 4$$

Dapat dibuat dalam bentuk matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sehingga

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

Diperoleh

$$\lambda = 2 \text{ dan } \lambda = 3$$

Nilai eigen dari persamaan diatas adalah $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 3$

G. Linieritas

Linierisasi adalah proses untuk mentransformasi sistem persamaan diferensial tak linier menjadi bentuk sistem persamaan diferensial linier. Hasil linierisasi ini digunakan untuk melihat kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial. Teknik pelinieran untuk menganalisis kestabilan tersebut dapat menggunakan konsep matriks Jacobian. Jika diberikan suatu sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$ dengan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, maka pada suatu titik $\bar{x}$ diberikan matriks Jacobi seperti dibawah ini (Syari'ah & Prawoto, 2022):

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Definisi 2.2: Titik ekuilibrium ($\bar{x}$) disebut titik ekuilibrium *hyperbolic* jika tidak terdapat nilai eigen dari $Jf(\bar{x})$ yang memiliki bagian real nol (Wiggins, 2003).

Teorema 2.1: Diberrikan sebuah matriks Jacobian dengan λ_i adalah nilai eigen dari matriks Jacobian tersebut dan Re (λ_i) adalah bagian real dari λ_i, maka (Iswanto, 2012):

1. Jika untuk setiap Re (λ_i) matriks Jacobian adalah negatif, maka titik ekuilibrium ($\bar{x}$) stabil asimtotik lokal.
2. Jika terdapat salah satu Re (λ_i) matriks Jacobian adalah positif, maka titik ekuilibrium ($\bar{x}$) tidak stabil.

Contoh 2.7:

Diketahui suatu sistem persamaan diferensial. Tentukan kestabilan dari sistem persamaan berikut menggunakan matriks Jacobian

$$\dot{x} = 1 - y, \dot{y} = x^2 - y^2$$

Titik tetap diperoleh dengan membuat $\dot{x} = \dot{y} = 0$ dan diperoleh titik tetap $(x, y) = (-1,1)$ dan $(x, y) = (1,1)$. Misal $\dot{x} = f(x, y)$ dan $\dot{y} = g(x, y)$, maka turunan dari f dan g terhadap x dan y dinotasikan dengan f_x, g_x dan

f_y, g_y. Dapat dibentuk matriks Jacobiannya sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2x & -2y \end{bmatrix}$$

Pada titik $(-1,1)$, nilai eigen yang diperoleh dari matriks tersebut adalah

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$$

Diperoleh $\lambda = -1 \pm \sqrt{3}$

Karena salah satu bagian real nilai eigen positif, maka titik ekuilibrium $(-1,1)$ tidak stabil. Namun pada titik tetap (1,1), nilai eigen dari matriks tersebut

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

Diperoleh $\lambda = -1 \pm i$

Karena bagian riil nilai eigen tersebut negatif, maka titik ekuilibrium tersebut stabil (Ndii, 2018).

H. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar merupakan nilai yanag menentukan banyaknya populasi rentan yang menjadi individu terinfeksi yang disebabkan oleh individu terinfeksi. Lambang dari bilangan reproduksi dasar yaitu R_0 (Side, Zaki, & Sartika, 2021). Terdapat beberapa kemungkinan kondisi dari bilangan reproduksi dasar R_0, yaitu (Nurfadilah, Fardinah, & Hikmah, 2021):

1. Apabila $R_0 < 1$, artinya rata-rata setiap individu yang terinfeksi akan menularkan penyakit pada kurang satu individu yang rentan, maka penyakit tidak menyebar.
2. Apabila $R_0 > 1$, artinya rata-rata setiap individu yang terinfeksi akan menularkan penyakit pada lebih dari satu individu yang rentan, maka penyakit akan menyebar.
3. Apabila $R_0 = 1$, artinya rata-rata individu yang terinfeksi akan menularkan penyakit pada tepat satu individu rentan, maka penyakit akan menetap.

I. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Kestabilan titik ekuilibrium digunakan untuk melihat perilaku solusi dari suatu persamaan diferensial. Terdapat beberapa sifat kestabilan yang akan dijelaskan pada subbab ini. Jika suatu sistem stabil, saat terdapat pertubasi pada sistem tersebut maka kecil kemungkinan terjadi perubahan pada perilaku dari solusi sistem.

Definisi 2.3 (Olsder & Woude, 2003) Diberikan suatu persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$ yang memiliki solusi $x(t, x_0)$ dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan:

1. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, kemudian $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.
2. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ disebut stabil asimtotik lokal apabila titik ekuilibrium stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t\to\infty}\|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$, asalkan $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$.
3. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan tidak stabil apabila tidak memenuhi definisi 1 tidak terpenuhi.

Sifat kestabilan lokal dari suatu titik ekuilibrium dapat diketahui melalui pelinieran dari titik ekuilibrium tersebut dengan menggunakan matriks Jacobian, sedangkan untuk kestabilan global dari suatu sistem dapat dicari berdasarkan titik ekuilibrium yang berkestabilan lokal.

Definisi 2.4 (Putra, Sukatik, & Nita, 2016): Titik ekuilibrium dikatakan stabil asimtotik global jika untuk sebarang nilai awal $x(t_0)$, maka setiap solusi pada sistem persamaan diferensial dengan t sampai tak hingga menuju ke titik ekulibrium.

Berdasarkan nilai persamaan akar-akar karakteristik terdapat beberapa kemungkinan jenis kestabilan titik ekuilibrium. Berikut merupakan jenis kestabilan dari titik ekuilibrium dapat digolongkan pada **Tabel 2.1** Jenis Kestabilan dari Titik Ekuilibrium (Boyce & DiPrima, 2009)

Tabel 2. 1 Jenis Kestabilan dari Titik Ekuilibrium

Nilai Akar Persamaan Karakteristik	Bentuk	Kestabilan
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Titik pelana	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Simpul atau spiral	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Simpul atau spiral	Stabil asimtotik
$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\mu, \alpha > 0$	Spiral	Tidak stabil
$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\mu, \alpha < 0$	Spiral	Stabil asimtotik
$\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\mu$	Titik pusat atau spiral	Tidak dapat ditentukan

J. Kriteria Routh Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz digunakan untuk mengidentifikasi kestabilan lokal dari suatu sistem persamaan diferensial. Kriteria Routhh Hurwitz dapat digunakan ketika nilai eigen pada suatu matriks A merupakan akar persamaan karakteristik polinomial.

Teorema 2.2: Diberikan sebuah polinomial

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Yang mana koefisien a_i merupakan sebuah konstanta riil dan $i = 1,2,\ldots,n$. Maka matriks Routh-Hurwitz didefinisikan menggunakan koefisien a_i dari persamaan karakteristik (Ndii, 2018).

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix},$$

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimana $a_j = 0$ jika $j > n$. Jika semua akar dari polinomial $P(\lambda)$ merupakan negatif jika dan hanya jika determinan dari seluruh matriks Routh-Hurwitz adalah positif:

$$Det\ H_j > 0, j = 1,2,3,\ldots,n.$$

K. Hukum Pidana

Pengertian hukum pidana secara sederhana adalah hukum yang didalamnya memuat mengenai peraturan-peraturan yang mengandung suatu larangan dan keharusan terhadap pelanggar dari hukum tersebut, yang diancam dengan hukuman berupa siksa badan. Tujuan pokok dari dibentuknya hukum pidana yaitu guna melindungi kepentingan masyarakat sebagai suatu kolektivitas dari perbuatan-perbuatan yang merugikan bahkan hingga mengancamnya baik yang dilakukan perorangan maupun berupa kelompok. Kepentingan masyarakat tersebut berupa ketertiban, kedamaian, ketenangan kehidupan masyarakat (Gunadi & Efendi, 2014).

Kejahatan dalam bidang kesusilaan merupakan kejahatan tentang hal yang berhubungan menyangkut masalah seksual. Pada kitab Undang-undang Hukum Pidana (KUHP), kejahatan mengenai kesusilaan diatur pada Bab XVI Buku II dengan judul "Kejahatan Terhadap Kesusilaan" (Sumera, 2013).

a. Kejahatan melanggar kesusilaan diatur dalam Pasal 281.
b. Kejahatan mengenai perzinahan diatur dalam Pasal 284.
c. Kejahatan perkosaan untuk bersetubuh diatur dalam Pasal 285.

d. Kejahatan persetubuhan dengan perempuan di luar perkawinan yang dalam keadaan tidak sadarkan diri atau tidak berdaya diatur dalam Pasal 286.
e. Kejahatan persetubuhan dengan perempuan di luar perkawinan yang belum berusia 15 tahun diatur dalam Pasal 287.
f. Kejahatan perbuatan cabul diatur dalam Pasal 289.

Sedangkan penegakan hukum untuk pelecehan seksual secara verbal, diatur dalam Pasal 315 mengenai penghinaaan ringan (Effendi, 2019).

L. Pelecehan Seksual

Pelecehan seksual adalah suatu bentuk perilaku yang mengandung unsur seksual yang tidak diinginkan oleh objek dari pelecehan seksual, permintaan dari pelaku pelecehan untuk melakukan perbuatan seksual baik dalam bentuk lisan maupun dalam bentuk fisik yang dapat terjadi di ruang publik. Indonesia merupakan salah satu negara yang darurat akan perbuatan pelecehan sehingga membuat masyarakat merasa terancam (Kartika & Najemi, 2020).

Ruang lingkup pelecehan seksual cukup luas. Terdapat beberapa jenis pelecehan seksual, antara lain pelecehan seksual secara fisik seperti sentuhan yang hanya diinginkan oleh satu pihak menjurus ke arah seks seperti meraba, mencium, dan hal lainnya dengan tatapan penuh nafsu, pelecehan seksual secara lisan seperti kata-kata yang tidak diinginkan dan menyinggung mengenai penampilan, pelehan seksual yang tersurat seperi suatu gambar yang menunjukkan tentang pornografi, serta komentar-komentar yang melecehkan yang ada di media sosial, pelecehan secara isyarat seperti gerakan yang menunjukkan ke arah seks, dan pelecehan emosional seperti menghina, mencela yang bersifat seksual, dan ajakan-ajakan yang tidak diinginkan (Effendi, 2019).

Majunya ilmu dan teknologi pada zaman ini, perkembangan kependudukan masyarakat, juga perubahan sosial yang ada di lingkungan masyarakat saat ini memberikan dampak tersendiri terhadap modus, sifat, intensitas, bahkan motif kejahatan. Terdapat banyak faktor baik secara langsung atau tak langsung turut memberi warna dalam timbulnya tindak kejahatan kekerasan (Kristiani, 2014). Jika seorang pelaku kejahatan kekerasan dilihat melalui faktor internal, yaitu yang disebabkan oleh kepribadian individu yang kurang baik, atau bahkan pernah menjadi salah satu korban dari kejahatan pelecehan seksual. Dan faktor pemicu lainnya dipengaruhi oleh lingkungan sekitar dari sang pelaku, karena majunya teknologi sehingga akses untuk melihat video porno lebih bebas diakses dan berakibat penikmat konten porno tersebut suka berimajinasi dengan kegiatan seksual yang diinginkan mereka (Tamara & Budyatmojo, 2016).

Menurut Ratna Batara Munti, unsur yang penting dari pelecehan seksual adalah penolakan atau ketidakinginan pada segala sesuatu bentuk perhatian yang bersifat seksual, sebab jika perbuatan yang dilakukan tidak dikehendaki oleh sang penerima, maka perbuatan yang dilakukan dapat dikategorikan sebagai pelecehan seksual (Effendi, 2019).

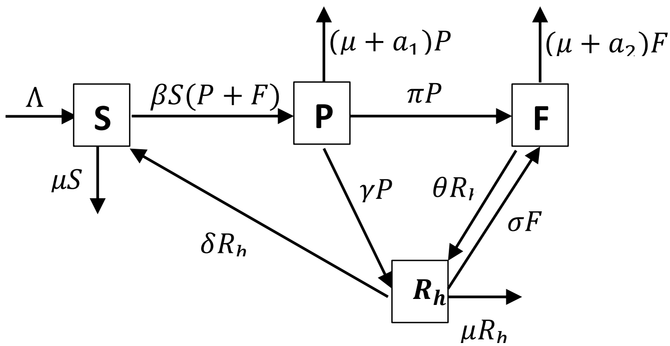
M. Kajian Terdahulu

Beberapa penelitian yang membahas mengenai model terkait kriminalitas diantaranya adalah:

1. Penelitian yang berjudul "Analisis Dinamik Penyebaran Penyalahgunaan Narkoba Kelompok Individu yang Direhabilitasi" pada tahun 2020 oleh Siti Khasanah. Penelitian ini membahas mengenai model penyebaran penyalahgunaan narkoba dengan membagi populasi manusia (N) menjadi empat kelas, yaitu kelas individu yang rentan terhadap

narkoba (S), kelas individu ketergantungan psikologis, kelas individu kertergantungan fisik (F), dan kelas individu ketergantungan narkoba yang direhabilitasi (R). Berdasarkan penelitian tersebut, diperoleh hasil yaitu selain program rehabilitasi terhadap individu yang menyalahgunakan narkoba, seharusnya terdapat kontrol pada kontak efektif sehingga tidak terjadi peningkatan pada individu ketergantungan psikologis ataupun individu ketergantungan fisik.

Model matematika dalam penelitian tersebut dapat diinterpretasikan seperti **Gambar 2.2** berikut.



Gambar 2. 2 Diagram Transfer Model Penyebaran Penyalahgunaan Narkoba Kelompok Individu yang Direhabilitasi

Model matematika yang dibentuk merupakan sistem persamaan diferensial dapat dilihat pada sistem dibawah:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \beta S(P + F) + \delta R_h$$

$$\frac{dP}{dt} = \beta S(P + F) - (\pi + \gamma + \mu + a_1)P$$

$$\frac{dF}{dt} = \pi P - (\sigma + \mu + a_2)F + \theta R_h$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma P + \sigma F - (\theta + \mu + \delta)R_h$$

Tabel 2. 2 Daftar Variabel Model Penyebaran Penyalahgunaan Narkoba Kelompok Individu yang Direhabilitasi

Variabel	Keterangan	Syarat
$N(t)$	Total populasi manusia pada waktu t	$N(t) \geq 0$
$S(t)$	Banyak individu yang rentan menyalahgunakan narkoba pada saat t	$S(t) \geq 0$
$P(t)$	Banyak individu yang keterganttungan psikologis pada saat t	$P(t) \geq 0$
$F(t)$	Banyak individu yang ketergantungan fisik pada saat t	$F(t) \geq 0$
$R_h(T)$	Banyak individu ketergantungan narkoba dalam masa pengobatan (rehabilitasi) pada saat t	$R_h(T) \geq 0$

Tabel 2. 3 Daftar Parameter-parameter Model Penyebaran Penyalahgunaan Narkoba Kelompok Individu yang Direhabilitasi

Parameter	Keterangan	Syarat
Λ	Laju rekruitmen individu usia 10-59 taun dalam populasi yang rentan menggunakan narkoba.	$\Lambda > 0$
μ	Laju kematian alami dari populasi (per satuan waktu).	$\mu > 0$
β	Proporsi tingkat kontak efektif yang membuat orang rentan kontak dengan ketergantungan pskologi maupun ketergantungan fisik.	$\beta > 0$
π	Proporsi tingkat transformasi dari ketergantungan psikologis menjadi ketergantungan fisik (persatuan tahun).	$\pi > 0$
γ	Proporsi tingkat perawatan ketergantungan psikologis (per tahun).	$\gamma > 0$
σ	Proporsi tingkat perawatan ketergantungan fisik (per tahun).	$\sigma > 0$
a_1	Laju konstan kematian karena overdosis narkoba pada kelas ketergantungan psikologis (per tahun).	$a_1 \geq 0$
a_2	Laju konstan kematian karena overdosis narkoba pada kelas ketergantungan fisik (per tahun).	$a_2 \geq 0$
θ	Laju konstan ketergantungan narkoba yang direhabilitasi ke kelas	$\theta > 0$

Parameter	Keterangan	Syarat
	fisik (per tahun).	
δ	Peluang ketergantungan narkoba yang sudah direhabilitasi kembali rentan menyalahgunakan narkoba (per tahun).	$\delta \geq 0$

Persamaan dengan penelitian yaitu membentuk model dengan empat sub populasi dan terdapat sub populasi penanganan. Perbedaan dengan penelitian ini yaitu adanya penambahan sub populasi *Recovered* atau sub populasi sembuh.

2. Penelitian yang berjudul "Model Matematika Populasi Perokok pada Daerah yang Menerapkan Denda" pada tahun 2018 oleh Ramadhani Trihartanto, Supriyono, dan Muhammad Kharis. Penelitian ini membahas mengenai perilaku perokok dengan membagi populasi manusia (N) menjadi empat kelas, yaitu kelas perokok potensial pada waktu t (P), kelas perokok aktif pada waktu t (S), kelas perokok yang berhenti sementara (Q_t), kelas perokok yang berhenti permanen (Q_p). Berdasarkan penelitian tersebut diperoleh hasil berupa dua model yaitu model dengan denda sebagai faktor utama dan model dengan denda bukan sebagai faktor utama. Berdasarkan kedua model, diperoleh kesimpulan hasil bahwa guna

menghilangkan populasi perokok aktif diperlukan usaha dengan menekan laju kontak antara kelas potensial perokok dengan kelas perokok aktif.

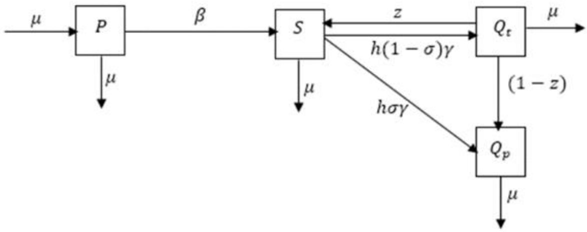
Tabel 2. 4 Tabel Variabel Model Matematika Populasi Perokok pada Daerah yang Menerapkan Denda

Variabel	Keterangan	Syarat
$P(t)$	Proporsi populasi perokok potensial pada waktu *t.*	$P(t) \geq 0$
$S(t)$	Proporsi populasi perokok aktif pada waktu *t.*	$S(t) \geq 0$
$Q_t(t)$	Individu pelaku pelecehan seksual yang diberi hukum pidana (*Criminal*).	$Q_t(t) \geq 0$
$Q_p(t)$	Individu pelaku pelecehan seksual yang telah berhenti (*Quit*).	$Q_p(t) \geq 0$

Tabel 2. 5 Daftar Parameter-parameter Model Matematika Populasi Perokok pada Daerah yang Menerapkan Denda

Parameter	Keterangan	Syarat
μ	Laju rekruitmen dan laju kematian pada populasi.	$\beta \geq 0$
β	Laju kontak antara perokok aktif dan perokok potensial.	$\gamma \geq 0$
h	Laju efektivitas dengan yang dikenakan pada perokok aktif.	$\delta \geq 0$
γ	Laju individu yang berhenti merokok.	$\alpha \geq 0$
z	Proporsi individu yang berhenti merokok untuk kembali merokok.	$\sigma \geq 0$

Parameter	Keterangan	Syarat
σ	Proporsi perokok aktif yang berhenti merokok secara permanen.	$\mu \geq 0$



Gambar 2. 3 Diagram Skematik Model Matematika (Denda Faktor Utama)

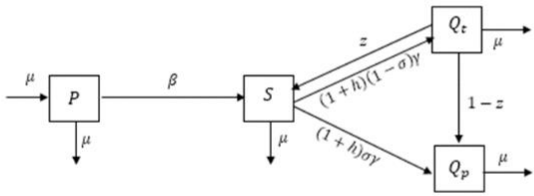
Model matematika dengan denda sebagai faktor utama diberikan pada sistem dibawah ini.

$$\frac{dP}{dt} = \mu - \mu P - \beta PS$$

$$\frac{dS}{dt} = -(\mu + h\gamma)S + \beta PS + zQ_t$$

$$\frac{dQ_t}{dt} = -(\mu + 1)Q_t + h(1 - \sigma)\gamma S$$

$$\frac{dQ_p}{dt} = -\mu Q_p + h\sigma\gamma S + (1 - z)Q_t$$



Gambar 2. 4 Diagram Skematik Model Matematika (Denda Bukan Faktor Utama)

Model matematika dengan denda bukan sebagai faktor utama diberikan pada sistem dibawah ini.

$$\frac{dP}{dt} = \mu - \mu P - \beta PS$$

$$\frac{dS}{dt} = -(\mu + (1+h)\gamma)S + \beta PS + zQ_t$$

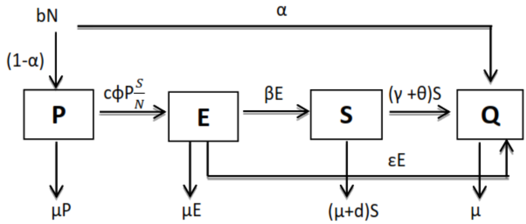
$$\frac{dQ_t}{dt} = -(\mu + 1)Q_t + (1+h)(1-\sigma)\gamma S$$

$$\frac{dQ_p}{dt} = -\mu Q_p + (1+h)\sigma\gamma S + (1-z)Q_t$$

Persamaan dengan penelitian ini yaitu membentuk model dengan empat sub populasi dan terdapat sub populasi *Suspectible* atau sub populasi yang rentan, sub populas *Infected* atau sub populasi yang terinfeksi, dan sub populasi *Recovered* atau sub populasi yang sembuh. Perbedaan dengan penelitian ini yaitu penanganan terhadap sub populasi *Infected* atau sub populasi yang terinfeksi dengan menambahkan sub populasi baru.

3. Penelitian yang berjudul "Model Matematika Dinamika Populasi Perokok dengan Faktor Edukasi dan *Candy Treatment*" yang dilakukan oleh Anissa Wijayanti, Sutriany Nteseo, Nur Aini, dan Dennynatalis Taha. Penelitian ini membahas mengenai dinamika populasi merokok dengan mempertimbangkan faktor edukasi dan pengobatan berupa terapi permen (*Candy Treatment*) dengan membagi populasi menjadi empat kelompok, yaitu kelompok individu potensial merokok (P), kelompok individu perokok ringan yang merokok dalam jumlah sedikit (E), kelompok individu perokok berat yang sering merokok dalam jumlah yang banyak (S), dan kelompok individu yang sehat atau telah berhenti merokok (Q). Berdasarkan penelitian tersebut, diperoleh hasil yaitu dengan meningkatkan edukasi kepada seluruh masyarakat dan meningkatkan efektivitas terapi permen, maka R_0 akan semakin kecil menunjukkan berkurangnya

epidemi pada populasi sehingga pertambahan populasi yang merokok dapat dicegah.



Gambar 3. 1 Model Matematika Dinamika Populasi Perokok dengan Faktor Edukasi dan *Candy Treatment*

Model matematika dinamika populasi perokok dengan faktor edukasi dan *candy treatment* dijelaskan pada sistem dibawah.

$$\frac{dp}{dt} = (1 - a)b - c\phi ps - \mu p$$

$$\frac{de}{dt} = c\phi ps - (\beta + \varepsilon + \mu)e$$

$$\frac{ds}{dt} = \beta e - (\gamma + \theta + \mu + d)s$$

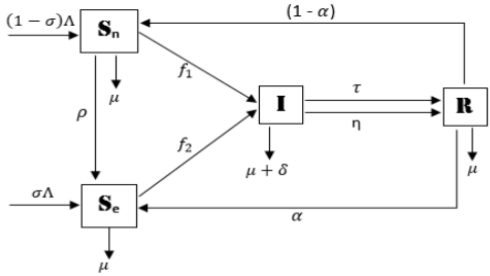
$$\frac{dq}{dt} = \alpha b - \varepsilon e + (\gamma + \theta)s - \mu q$$

Tabel 2. 6 Daftar Parameter Model Matematika Dinamika Populasi Perokok dengan Faktor Edukasi dan *Candy Treatment*

Parameter	Keterangan
b	Tingkat kelahiran.
μ	Tingkat kematian alami.
d	Tingkat kematian karena penyakit yang ditimbulkan oleh rokok.
α	Faktor edukasi berupa penyuluhan kesehatan.
θ	Terapi permen.
c	Terjadinya kontak/interaksi dengan individu perokok.
ϕ	Tingkat perubahan individu rentan menjadi perokok ringan.
β	Tingkat perubahan perokok ringan menjadi perokok berat.
ε	Tingkat kesembuhan perokok ringan.
γ	Tingkat kesembuhan perokok berat.

Persamaan dengan penelitian ini yaitu membentuk model dengan empat sub populasi dan terdapat sub populasi *Suspectible* atau sub populasi yang rentan, sub populas *Infected* atau sub populasi yang terinfeksi, dan sub populasi *Recovered* atau sub populasi yang sembuh. Perbedaan dengan penelitian ini yaitu penanganan terhadap sub populasi *Infected* atau sub populasi yang terinfeksi dengan menambahkan sub populasi baru.

4. Penelitian yang berjudul "Analisis Kestabilan Model Penyebaran Pengguna Narkoba dengan Faktor Edukasi" pada tahun 2019 oleh Moh. Rizal Husain, Nurwan, dan Resmawan. Penelitian ini membahas mengenai model matematika penyebaran pengguna narkoba dengan memberikan edukasi seperti penyuluhan dampak penyalahgunaan narkoba atau sosialiasai kepada populasi rentan. Penelitian ini membagi populasi menjadi empat kelompok, yaitu kelompok yang rentan menggunakan narkoba tanpa edukasi (S_n), kelompok yang rentan menggunakan narkoba dengan edukasi (S_e), kelompok pengguna narkoba (I), dan kelompok yang sudah berhenti menggunakan narkoba (R). Berdasarkan penelitian tersebut, diperoleh hasil bahwa semakin besar laju edukasi yang diberikan maka akan semakin bertambah jumlah kelompok rentan menggunakan narkoba dengan edukasi sehingga mengakibatkan jumlah kelompok rentan tanpa edukasi berkurang.



Gambar 2. 5 Diagram Model Penyebaran Pengguna Narkoba dengan Faktor Edukasi

Sistem persamaan model penyebaran pengguna narkoba dengan faktor edukasi:

$$\frac{dS_n}{dt} = (1-\sigma)\Lambda - \frac{\beta_1 S_n I}{N} - (\rho + \mu)S_n + (1-\alpha)R$$

$$\frac{dS_e}{dt} = \sigma\Lambda + \rho S_n - \frac{\beta_2 S_e I}{N} - \mu S_e + \alpha R$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta_1 S_n I}{N} + \frac{\beta_2 S_e I}{N} - (\tau + \eta + \mu + \delta)I$$

$$\frac{dR}{dt} = (\tau + \eta)I - (\mu + 1)R$$

$$N = S_n + S_e I + R$$

Tabel 2. 7 Daftar Parameter Model Penyebaran Pengguna Narkoba dengan Faktor Edukasi

Parameter	Keterangan
Λ	Laju rekuitmen untuk menjadi individu rentan.
σ	Proporsi individu rekuitmen baru yang diberi edukasi.
μ	Laju kematian alami pada setiap populasi.
δ	Laju kematian akibat penyakit yang disebabkan narkoba.
ρ	Laju perpindahan populasi rentan tanpa edukasi mendapatkan edukasi.
β_1	Laju infeksi populasi pengguna narkoba pada populasi rentan tanpa edukasi.
β_2	Laju infeksi populasi pengguna narkoba pada populasi rentan dengan edukasi.
τ	Laju perpindahan populasi pengguna narkoba menjadi populasi yang telah berhenti menggunakan narkoba.
η	Laju populasai pengguna narkoba mendapat rehabilitasi.
α	Laju perpindahan populasi yang telah berhenti menggunakan narkoba kembali menjadi populasi rentan dengan edukasi.

Persamaan dengan penelitian ini yaitu membentuk model dengan empat sub populasi dan terdapat sub populasi *Suspectible* atau sub populasi yang rentan, sub populas *Infected* atau sub populasi yang terinfeksi, dan sub populasi *Recovered* atau sub populasi yang sembuh. Perbedaan dengan penelitian ini yaitu penanganan terhadap sub populasi *Infected* atau sub populasi yang terinfeksi dengan menambahkan sub populasi baru.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

A. Metode Penelitian

Penelitian ini termasuk dalam metode studi literatur atau penelitian kepustakaan. Penelitian kepustakaan merupakan serangkaian kegiatan yang dilakukan guna membaca, mengumpulkan, mengolah, dan menyimpulkan bahan penelitian (Wijoyo, Devi, Ariyanto, & Sunarsi, 2021). Penelitiannya dilakukan dengan mencermati, menelaah, mendalami, dan mengidentifikasi segala pengetahuan dan informasi yang ada di dalam kepustakaan, seperti bacaan, buku referensi, dan hasil penelitian lain.

B. Prosedur Penelitian

Guna menjawab permasalahan yang ada, maka akan digunakan prosedur penelitian dalam menentukan model, yaitu sebagai berikut:

1. Studi Literatur

   Pada tahap ini merupakan tahap untuk mengumpulkan teori dengan studi literatur guna mengidentifikasi masalah pelecehan seksual. Referensi dapat berupa buku, jurnal, paper, tugas akhir, maupun artikel terkait tentang pelecehan seksual.

2. Menentukan asumsi awal dan variabel

   Setelah mengumpulkan teori, kemudian menentukan asumsi dan juga variabel yang akan digunakan saat memodelkan permasalahan pelecehan seksual.

3. Membentuk model matematika

   Asumsi dan variabel yang diperoleh pada tahap sebelumnya, digunakan untuk membuat model matematika pelaku pelecehan seksual.

4. Menentukan titik ekulibrium serta kestabilan titik ekuilibrium pada model

   Pada tahap ini, setelah memperoleh persamaan dari model matematika, selanjutnya yaitu menentukan titik ekuilibrium dan kestabilan dari titik ekuilibrium pada model.

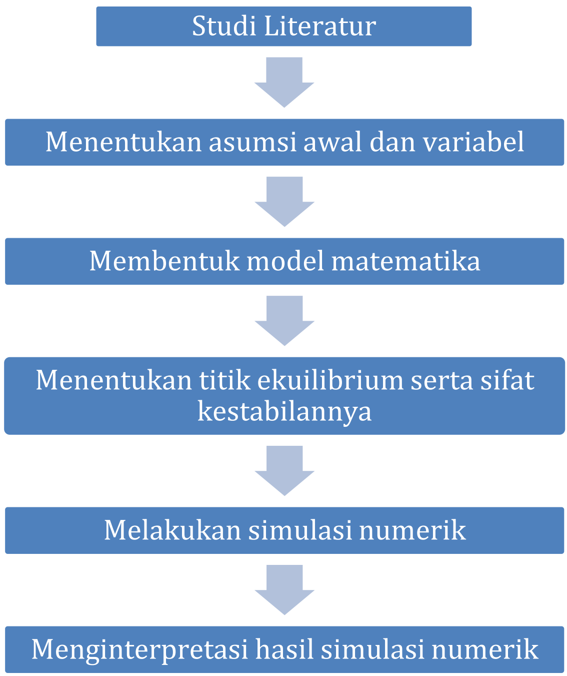
5. Melakukan simulasi numerik pada model

   Berdasarkan model yang diperoleh, selanjutnya melakukan simulasi numerik pada model matematika pelaku pelecehan seksual.

6. Menginterpretasi hasil simulasi numerik

   Melakukan analisis terhadap hasil yang diperoleh dari simulasi numerik yang telah dilakukan kemudian menarik kesimpulan dari hasil pembahasan sebelumnya.

Prosedur penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini disajikan dalam **Gambar 3.1** Diagram Alur Penelitian berikut :



Gambar 3. 2 Diagram Alur Penelitian

BAB IV
PEMBAHASAN

Pada bab ini, membahas mengenai model matematika pelaku pelecehan seksual dengan hukum tindak pidana dan analisis dinamik model meliputi menentukan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan titik ekuilibrium, dan simulasi numerik.

A. Model Matematika Pelaku Pelecehan Seksual dengan Hukum Tindak Pidana

Pada model matematika ini, populasi dibagi menjadi empat sub populasi, yaitu individu yang berpotensi menjadi pelaku pelecehan seksual atau *Potential* (P), individu pelaku pelecehan seksual yang belum diberi hukuman atau *Harassment Prepetitor* (H), individu pelaku pelecehan seksual yang diberikan hukuman pidana atau *Criminal* (C), dan individu pelaku pelecehan yang telah berhenti atau *Quit* (Q).

Berikut ini merupakan asumsi-asumsi yang digunakan dalam membentuk model matematika pelaku pelecehan seksual dengan hukum tindak pidana:

a Populasi bersifat konstan.

b Populasi dibedakan menjadi empat sub populasi , yaitu individu yang berpotensi menjadi pelaku pelecehan seksual (*Potential*), individu pelaku pelecehan seksual yang belum diberi hukuman (*Harassment Prepetitor*), individu pelaku pelecehan seksual yang diberikan hukuman pidana (*Criminal*), dan individu pelaku pelecehan yang telah berhenti (*Quit*).

c Individu yang melakukan pelecehan seksual dapat dikenai hukuman sehingga menjadi individu yang diberi hukuman pidana.

d Individu yang melakukan pelecehan seksual dapat berhenti dengan sendirinya sebab sudah memiliki kontrol diri dan dapat bersyukur.

e Individu yang diberi hukuman pidana dapat menjadi individu pelaku pelecehan seksual yang telah berhenti.

f Individu pelaku pelecehan seksual yang telah berhenti dapat kembali menjadi individu yang rentan melakukan pelecehan seksual kembali jika dirasa hukuman yang diterima tidak membuat jera.

g Penularan perilaku pelecehan seksual dapat terjadi disebabkan interaksi atau contoh dari pelaku pelecehan seksual terhadap individu yang berpotensi.

Berikut ini pendefinisian variabel dan parameter yang digunakan dalam model matematika pelaku pelecehan seksual dengan hukum tindak pidana dapat dilihat pada **Tabel 4.1** dan **Tabel 4.2** berikut:

Tabel 4. 1 Daftar Variabel-variabel

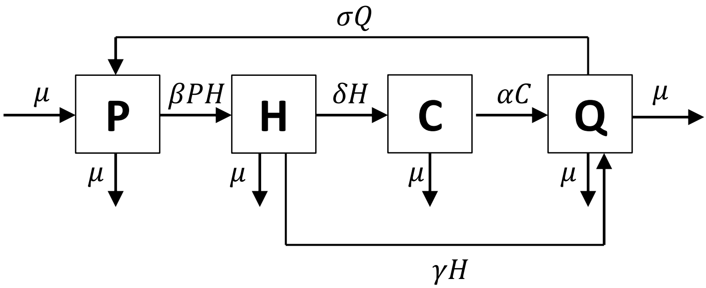
Variabel	Keterangan	Syarat
$P(t)$	Individu yang berpotensi menjadi pelaku pelecehan seksual (*Potential*)	$P(t) \geq 0$
$H(t)$	Individu pelaku pelecehan seksual yang belum diberikan hukum pidana (*Harassement Prepetitor*)	$H(t) \geq 0$
$C(t)$	Individu pelaku pelecehan seksual yang diberi hukum pidana (*Criminal*)	$C(t) \geq 0$
$Q(t)$	Individu pelaku pelecehan seksual yang telah berhenti (*Quit*)	$Q(t) \geq 0$

Tabel 4. 2 Daftar Parameter-parameter

Parameter	Keterangan	Syarat
β	Laju interaksi individu $P(t)$ dengan individu $H(t)$	$\beta \geq 0$
γ	Laju individu $H(t)$ menjadi individu $Q(t)$ sebab memiliki kontrol diri dan dapat bersyukur	$\gamma \geq 0$
δ	Laju individu $H(t)$ menjadi individu $C(t)$	$\delta \geq 0$
α	Laju individu $C(t)$ menjadi individu $Q(t)$ sebab merasa jera dengan hukuman yang diterima	$\alpha \geq 0$
σ	Laju individu $Q(t)$ menjadi	$\sigma \geq 0$

Parameter	Keterangan	Syarat
	individu *P(t)* sebab merasa tidak jera dengan hukum yang diterima	
μ	Laju kelahiran dan kematian alami	$\mu \geq 0$

Berdasarkan asumsi-asumsi, variabel, dan parameter, maka dibentuk diagram dari model matematika pelaku pelecehan seksual dengan hukum tindak pidana pada **Gambar 4.1** berikut:



Gambar 4. 1 Diagram Transfer Model Matematika Pelaku Pelecehan Seksual dengan Hukum Tindak Pidana

Model matematika yang dibentuk berupa sistem persamaan diferensial dapat dilihat pada persamaan diferensial (4.1)-(4.4)

$$\frac{dP}{dt} = \mu - \beta PH + \sigma Q - \mu P \quad (4.1)$$

$$\frac{dH}{dt} = \beta PH - \delta H - \gamma H - \mu H \quad (4.2)$$

$$\frac{dC}{dt} = \delta H - \alpha C - \mu C \tag{4.3}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha C + \gamma H - \sigma Q - \mu Q \tag{4.4}$$

Penjelasan pada persamaan (4.1) yaitu laju pertumbuhan sub populasi P mengalami penambahan jumlah berdasarkan adanya kelahiran alami serta individu yang merasa tidak jera dengan hukum yang diterima kembali menjadi individu P, serta mengalami pengurangan jumlah berdasarkan adanya kematian alami dari sub populasi P dan adanya interaksi antara individu P dengan individu H.

Penjelasan pada persamaan (4.2) yaitu laju pertumbuhan sub populasi H mengalami penambahan jumlah berdasarkan adanya interaksi antara individu P dengan individu H, dan mengalami pengurangan jumlah berdasarkan adanya individu H yang berubah menjadi individu pada sub populasi C dan Q, serta adanya kematian alami dari sub populasi H.

Penjelasan pada persamaan (4.3) yaitu laju pertumbuhan sub populasi C mengalami penambahan jumlah dari individu H yang berubah menjadi individu C, serta mengalami pengurangan jumlah berdasarkan individu C yang berubah menjadi individu Q dan adanya kematian alami dari sub populasi C.

Penjelasan pada persamaan (4.4) yaitu laju pertumbuhan sub populasi Q mengalami penambahan jumlah berdasarkan adanya individu C dan H yang berubah menjadi individu Q, serta mengalami pengurangan jumlah berdasarkan adanya individu yang merasa tidak jera dengan hukum yang diterima kembali menjadi individu P dan adanya kematian alami dari sub populasi Q.

B. Titik Ekuilibrum dan Bilangan Reproduksi Dasar Model Matematika Pelaku Pelecehan Seksual dengan Hukum Tindak Pidana

Berdasarkan persamaan (4.1)-(4.4) dicari titik ekuilibriumnya dengan membuat ruas kanan persamaan (4.1)-(4.4) menjadi nol, sehingga diperoleh sistem (4.5) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&\mu - \beta PH + \sigma Q - \mu P = 0 \\
&\beta PH - \delta H - \gamma H - \mu H = 0 \\
&\delta H - \alpha C - \mu C = 0 \\
&\alpha C + \gamma H - \sigma Q - \mu Q = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Persamaan 3 dari sistem (4.5) menjadi,

$$\delta H - \alpha C - \mu C = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \delta H - (\alpha + \mu)C = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \mu)C = \delta H$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{\delta H}{\alpha+\mu} \tag{4.6}$$

Persamaan 4 dari sistem (4.5)

$$\alpha C + \gamma H - \sigma Q - \mu Q = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha C + \gamma H - (\sigma + \mu)Q = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sigma + \mu)Q = \alpha C + \gamma H$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{\alpha C+\gamma H}{(\sigma+\mu)} \tag{4.7}$$

Subtitusikan persamaan (4.6) ke persamaan (4.7) diperoleh

$$Q = \frac{\alpha C + \gamma H}{(\sigma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{\alpha \left(\frac{\delta H}{\alpha+\mu}\right) + \gamma H}{(\sigma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{\frac{\alpha\delta H}{\alpha+\mu} + \gamma H}{(\sigma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{\alpha\delta H + (\alpha + \mu)\gamma H}{(\alpha + \mu)(\sigma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{\alpha\delta+(\alpha+\mu)\gamma}{A} H \tag{4.8}$$

dengan $A = (\alpha + \mu)(\sigma + \mu)$

Subtitusi persamaan (4.8) ke persamaan 1 diperoleh

$$\mu - \beta PH + \sigma Q - \mu P = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu + \sigma Q - (\beta H + \mu)P = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu + \sigma \left(\frac{\alpha\delta H + (\alpha + \mu)\gamma H}{A} \right) - (\beta H + \mu)P = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu A + \sigma(\alpha\delta H + (\alpha + \mu)\gamma H) - AP(\beta H + \mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{\mu A+\sigma H(\alpha\delta+(\alpha+\mu)\gamma)}{A(\beta H+\mu)} \tag{4.9}$$

Subtitusikan persamaan (4.9) ke persamaan 2 diperoleh

$$\beta PH - \delta H - \gamma H - \mu H = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta PH - (\delta + \gamma + \mu)H = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(\frac{\mu A + \sigma H(\alpha\delta + (\alpha+\mu)\gamma)}{A(\beta H + \mu)}\right)H - (\delta + \gamma + \mu)H = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta\big(\mu A + \sigma H(\alpha\delta + (\alpha+\mu)\gamma)\big)H - A(\beta H + \mu)(\delta + \gamma + \mu)H}{A(\beta H + \mu)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Big(\beta\big(\mu A + \sigma H(\alpha\delta + (\alpha+\mu)\gamma)\big) - A(\beta H + \mu)(\delta + \gamma + \mu)\Big)H = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta\big(\mu A + \sigma H(\alpha\delta + (\alpha+\mu)\gamma)\big) - A(\beta H + \mu)(\delta + \gamma + \mu)$$

$$= 0 \vee H = 0 \qquad (4.10)$$

diperoleh

$\beta\big(\mu A + \sigma H(\alpha\delta + (\alpha+\mu)\gamma)\big) - A(\beta H + \mu)(\delta + \gamma + \mu) = 0$ atau $H = 0$, dengan $A = (\alpha + \mu)(\sigma + \mu)$

a. Titik ekuilibrium bebas pelaku pelecehan seksual

   Berdasarkan (4.10), untuk mencari titik ekuilibrium bebas pelaku pelecehan seksual maka diambil kasus ketika $H = 0$

   Dari persamaan (4.9) diperoleh

$$P = \frac{\mu A + \sigma(0)(\alpha\delta + (\alpha+\mu)\gamma)}{A(\beta(0) + \mu)}$$

$$P = 1 \qquad (4.11)$$

   Dari persamaan (4.6) diperoleh

$$C = \frac{\delta(0)}{\alpha + \mu}$$

$$C = 0 \qquad (4.12)$$

Dari persamaan (4.8) diperoleh

$$Q = \frac{\alpha\delta + (\alpha + \mu)\gamma}{A}(0)$$

$$Q = 0 \tag{4.13}$$

Dengan demikian diperoleh titik ekuilibrium bebas pelaku pelecehan seksual

$$P_0 = (P, H, C, Q) = (1,0,0,0). \tag{4.14}$$

b. Bilangan reproduksi dasar

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan matriks generasi selanjutnya (*Next Generation Matrix*) dari persamaan (4.1)-(4.4). Pada model ini, sub populasi yang terinfeksi adalah sub populasi individu pelaku pelecehan seksual yang belum diberi hukuman atau *Harassment Prepetitor* (H), dan kelas individu pelaku pelecehan seksual yang diberikan hukuman pidana atau *Criminal* (C), sehingga persamaan diferensial yang digunakan sebagai berikut:

$$\frac{dH}{dt} = \beta PH - \delta H - \gamma H - \mu H$$

$$\frac{dC}{dt} = \delta H - \alpha C - \mu C$$

Selanjutnya melakukan pelinieran terhadap kelas individu yang terinfeksi pada titik ekuilibrium bebas pelaku pelecehan seksual, maka diperoleh matriks Jacobian dari persamaan $\frac{dH}{dt}$ dan $\frac{dC}{dt}$, yaitu:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial\left(\frac{dH}{dt}\right)}{\partial H} & \frac{\partial\left(\frac{dH}{dt}\right)}{\partial C} \\ \frac{\partial\left(\frac{dC}{dt}\right)}{\partial H} & \frac{\partial\left(\frac{dC}{dt}\right)}{\partial C} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta P - (\delta + \gamma + \mu) & 0 \\ \delta & -(\alpha + \mu) \end{bmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{bmatrix} \beta - (\delta + \gamma + \mu) & 0 \\ \delta & -(\alpha + \mu) \end{bmatrix}$$

Dekomposisi matriks $J(P_0)$ menjadi $J(P_0) = F - V$, yaitu:

$$F = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} (\delta + \gamma + \mu) & 0 \\ -\delta & (\alpha + \mu) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan V, diperoleh V^{-1}:

$$V^{-1} = \frac{1}{(\delta + \gamma + \mu)(\alpha + \mu)} \begin{bmatrix} (\alpha + \mu) & 0 \\ \delta & \delta + \gamma + \mu \end{bmatrix}$$

Menghitung R_0 dengan $R_0 = \rho(FV^{-1})$

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha + \mu) & 0 \\ \delta & \delta + \gamma + \mu \end{bmatrix} \frac{1}{(\delta + \gamma + \mu)(\alpha + \mu)}$$

$$= \frac{1}{(\delta + \gamma + \mu)(\alpha + \mu)} \begin{bmatrix} \beta(\alpha + \mu) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta}{(\delta+\gamma+\mu)} \tag{4.15}$$

c. Titik ekuilibrium endemik

Berdasarkan (4.10) untuk mencari titik ekuilibrium endemik, maka diambil kasus ketika $\beta\big(\mu A + \sigma H(\alpha\delta + (\alpha+\mu)\gamma)\big) - A(\beta H + \mu)(\delta + \gamma + \mu) = 0$

Diperoleh

$$H = \frac{\mu A(\beta - (\delta+\gamma+\mu))}{\beta(A(\delta+\gamma+\mu) - (\alpha\delta + (\alpha+\mu)\gamma)\sigma)} \qquad (4.16)$$

Hitung $\beta(A(\delta+\gamma+\mu) - (\alpha\delta + (\alpha+\mu)\gamma)\sigma)$,

dengan $A = (\alpha+\mu)(\sigma+\mu)$

$\beta((\alpha+\mu)(\sigma+\mu)(\delta+\gamma+\mu) - (\alpha\delta + (\alpha+\mu)\gamma)\sigma)$

$\Leftrightarrow \beta((\alpha+\mu)(\sigma+\mu)(\delta+\gamma+\mu) - (\alpha\delta + (\alpha+\mu)\gamma)\sigma)$

$\Leftrightarrow \beta((\alpha+\mu)(\sigma+\mu)(\delta+\gamma+\mu) - \alpha\delta\sigma - (\alpha+\mu)\gamma\sigma)$

$\Leftrightarrow \beta((\alpha+\mu)((\sigma+\mu)(\delta+\gamma+\mu) - \gamma\sigma) - \alpha\delta\sigma)$

$\Leftrightarrow \beta((\alpha+\mu)(\sigma\delta + \sigma\gamma + \sigma\mu + \mu\delta + \mu\gamma + \mu^2 - \gamma\sigma)$
$-\alpha\delta\sigma)$

$\Leftrightarrow \beta((\alpha+\mu)(\sigma\delta + \sigma\mu + \mu\delta + \mu\gamma + \mu^2) - \alpha\delta\sigma)$

$\Leftrightarrow \beta(\alpha\sigma\delta + \alpha\mu\sigma + \alpha\delta\mu + \alpha\gamma\mu + \alpha\mu^2 + \mu\sigma\delta + \mu^2\sigma$
$+\mu^2\delta + \mu^2\gamma + \mu^3 - \alpha\delta\sigma)$

$\Leftrightarrow \beta(\alpha\mu(\sigma+\delta+\gamma+\mu) + \mu(\sigma\delta + \sigma\mu + \mu\delta + \mu\gamma$
$+\mu^2))$

$\Leftrightarrow \beta\mu(\alpha(\sigma+\delta+\gamma+\mu) + \mu(\sigma+\delta+\gamma+\mu) + \sigma\delta)$

maka diperoleh

$$H^* = \frac{\mu A(\beta - (\delta+\gamma+\mu))}{\beta\mu((\alpha+\mu)(\sigma+\delta+\gamma+\mu) + \sigma\delta)}$$

$$\Leftrightarrow H^* = \frac{A(\beta-(\delta+\gamma+\mu))}{\beta D} \tag{4.17}$$

dengan $A = (\alpha + \mu)(\sigma + \mu)$, dan $D = ((\alpha + \mu)(\sigma + \delta + \gamma + \mu) + \sigma\delta)$

Diketahui persamaan 2 dari sistem (4.5)

$$\beta PH - (\delta + \gamma + \mu)H = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta PH = (\delta + \gamma + \mu)H$$

$$\Leftrightarrow \beta P = (\delta + \gamma + \mu) \tag{4.18}$$

$$\Leftrightarrow P^* = \frac{(\delta+\gamma+\mu)}{\beta} \tag{4.19}$$

Berdasarkan perolehan bilangan reproduksi dasar pada (4.12), yaitu

$$R_0 = \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)}$$

$$\beta = R_0(\delta + \gamma + \mu) \tag{4.20}$$

Subtitusikan (4.17) ke (4.16) maka diperoleh

$$\Leftrightarrow P^* = \frac{(\delta+\gamma+\mu)}{R_0(\delta+\gamma+\mu)} \tag{4.21}$$

Diketahui persamaan 3 dari sistem (4.5)

$$\delta H - \alpha C - \mu C = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta H - (\alpha + \mu)C = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \mu)C = \delta H$$

$$\Leftrightarrow C^* = \frac{\delta H^*}{\alpha+\mu} \tag{4.22}$$

Diketahui persamaan 4 dari sistem (4.5)

$$\alpha C + \gamma H - \sigma Q - \mu Q = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha C + \gamma H - (\sigma + \mu)Q = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sigma + \mu)Q = \alpha C + \gamma H$$

$$\Leftrightarrow Q^* = \frac{\alpha C^* + \gamma H^*}{(\sigma+\mu)} \tag{4.23}$$

Subtitusikan persamaan (4.22) ke persamaan (4.23)

$$Q^* = \frac{\alpha C^* + \gamma H^*}{(\sigma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow Q^* = \frac{\alpha\left(\frac{\delta H}{\alpha+\mu}\right) + \gamma H}{(\sigma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow Q^* = \frac{\frac{\alpha\delta H^*}{\alpha+\mu} + \gamma H^*}{(\sigma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow Q^* = \frac{\alpha\delta H^* + (\alpha + \mu)\gamma H^*}{(\alpha + \mu)(\sigma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow Q^* = \frac{\alpha\delta + (\alpha+\mu)\gamma}{A} H^* \tag{4.24}$$

dengan $A = (\alpha + \mu)(\sigma + \mu)$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium endemik $P_1 = (P^*, H^*, C^*, Q^*)$ dengan

$$P^* = \frac{(\delta + \gamma + \mu)}{R_0(\delta + \gamma + \mu)}$$

$$H^* = \frac{A(\beta - (\delta + \gamma + \mu))}{\beta D}$$

$$C^* = \frac{\delta H^*}{\alpha + \mu}$$

$$Q^* = \frac{\alpha\delta + (\alpha + \mu)\gamma}{A} H^*$$

C. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

Analisis kestabilan titik ekuilibrium model dilakukan dengan membentuk matriks Jacobian terlebih dahulu dan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh melalui pelinieran. Matriks Jacobian dari sistem (4.1) adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta H - \mu & -\beta P & 0 & \sigma \\ \beta H & \beta P - (\delta + \gamma + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(\alpha + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & -(\sigma + \mu) \end{bmatrix}$$

Misalkan $a_1 = (\delta + \gamma + \mu)$, $a_2 = (\alpha + \mu)$, dan

$a_3 = (\sigma + \mu)$, matriks Jacobian sistem (4.1) menjadi

$$J = \begin{bmatrix} -\beta H - \mu & -\beta P & 0 & \sigma \\ \beta H & \beta P - a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -a_2 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & -a_3 \end{bmatrix} \qquad (4.25)$$

a. Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Pelaku Pelecehan Seksual

Berdasarkan dengan mensubtitusikan titik ekuilibrium bebas pelaku pelecehan seksual $P_0 = (P, H, C, Q) = (1,0,0,0)$, ke dalam matriks Jacobian (4.21) diperoleh matriks $J(P_0)$ sebagai berikut:

$$J(P_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta & 0 & \sigma \\ 0 & \beta - a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & -a_3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mencari nilai eigen matriks $J(P_0)$

$$\det[\lambda I - J(P_0)] = 0$$

$$\Leftrightarrow det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu & -\beta & 0 & \sigma \\ 0 & \beta - a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & -a_3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow det\left(\begin{bmatrix} \lambda + \mu & \beta & 0 & -\sigma \\ 0 & \lambda - \beta + a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & \lambda + \alpha_2 & 0 \\ 0 & -\gamma & -\alpha & \lambda + a_3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda+\mu & \beta & 0 & -\sigma \\ 0 & \lambda-\beta+a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & \lambda+\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\gamma & -\alpha & \lambda+a_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\mu)\begin{vmatrix} \lambda-\beta+a_1 & 0 & 0 \\ -\delta & \lambda+\alpha_2 & 0 \\ -\gamma & -\alpha & \lambda+\alpha_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\mu)\left(\lambda-\beta+a_1\begin{vmatrix} \lambda+\alpha_2 & 0 \\ -\alpha & \lambda+\alpha_3 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+\delta\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & \lambda+\alpha_3 \end{vmatrix} - \gamma\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \lambda+\alpha_2 & 0 \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\mu)\Big((\lambda-\beta+a_1)\big((\lambda+\alpha_2)(\lambda+\alpha_3)\big)\Big) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\mu)\big((\lambda-\beta+a_1)(\lambda^2+\lambda a_3+\lambda a_2+a_2a_3)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\mu)(\lambda^3+\lambda^2a_3+\lambda^2a_2+\lambda a_2a_3-\lambda^2\beta-\lambda\beta a_3$$

$$-\lambda\beta a_2-\beta a_2a_3+\lambda^2a_1+\lambda a_1a_3+\lambda a_1a_2$$

$$+a_1a_2a_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\mu)(\lambda^3+(a_3+a_2+a_1-\beta)\lambda^2+(a_2a_3+a_1a_3+$$

$$a_1a_2-\beta a_3-\beta a_2)\lambda+a_1a_2a_3-\beta a_2a_3) = 0 \quad (4.26)$$

Berdasarkan persamaan (4.26), diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\mu$ yang bernilai negatif, dan nilai eigen yang lain merupakan akar-akar persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^3 + (a_3 + a_2 + a_1 - \beta)\lambda^2 + (a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2 - \beta a_3 - \beta a_2)\lambda + a_1 a_2 a_3 - \beta a_2 a_3 = 0 \quad (4.27)$$

Persamaan (4.27) diatas dapat disederhanakan menjadi

$$b_0 \lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0 \quad (4.28)$$

dengan

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = a_3 + a_2 + a_1 - \beta$$

$$b_2 = a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2 - \beta a_3 - \beta a_2$$

$$b_3 = a_1 a_2 a_3 - \beta a_2 a_3$$

Untuk mencari nilai eigen dari persamaan karakteristik (4.28) dapat dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh Hurwitz. Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz λ_1, λ_2, dan λ_3 akan bernilai negatif apabila $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0$ dan $b_1 b_2 - b_3 > 0$.

1) Akan ditunjukkan $b_1 > 0$.

$$\begin{aligned} b_1 &= a_3 + a_2 + a_1 - \beta \\ &= a_1 \left(\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} + 1 - \frac{\beta}{a_1} \right) \end{aligned}$$

$$= a_1\left(\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} + 1 - R_0\right) > 0$$

Terbukti bahwa $b_1 > 0$ jika $R_0 < 1$.

2) Akan ditunjukkan $b_2 > 0$.

$$b_2 = a_2a_3 + a_1a_3 + a_1a_2 - \beta a_3 - \beta a_2$$

$$= a_1a_2\left(\frac{a_2a_3}{a_1a_2} + \frac{a_1a_3}{a_1a_2} + 1 - \frac{\beta a_3}{a_1a_2} - \frac{\beta a_2}{a_1a_2}\right)$$

$$= a_1a_2\left(\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + 1 - \frac{R_0a_1a_3}{a_1a_2} - \frac{R_0a_1a_2}{a_1a_2}\right)$$

$$= a_1a_2\left(\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + 1 - \frac{R_0a_3}{a_2} - R_0\right)$$

$$= a_1a_2\left(\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + 1 - R_0\left(\frac{a_3}{a_2} + 1\right)\right) > 0$$

Terbukti bahwa $b_2 > 0$ jika $R_0 < 1$.

3) Akan ditunjukkan $b_3 > 0$.

Perhatikan jika $R_0 < 1$, maka

$$R_0 = \frac{\beta}{a_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{a_1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \beta < a_1$$

$$\Leftrightarrow a_1 - \beta > 0$$

Berdasarkan perhitungan diatas, maka

$$b_3 = a_1a_2a_3 - \beta a_2a_3$$

$$= a_2a_3(a_1 - \beta) > 0$$

Terbukti bahwa $b_3 > 0$ jika $R_0 < 1$.

4) Akan ditunjukkan $b_1 b_2 - b_3 > 0$.

Perhatikan jika $R_0 < 1$, maka

$$R_0 = \frac{\beta}{a_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{a_1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \beta < a_1$$

$$\Leftrightarrow a_1 - \beta > 0$$

Berdasarkan perhitungan diatas, maka

$$b_1 b_2 - b_3 =$$

$$(a_3 + a_2 + a_1 - \beta)(a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2 - \beta a_3$$
$$-\beta a_2) - (a_1 a_2 a_3 - \beta a_2 a_3)$$
$$= (a_3 + a_2 + (a_1 - \beta))(a_2 a_3 + (a_1 - \beta)(a_3 + a_2))$$
$$- (a_1 - \beta) a_2 a_3$$
$$= (a_3 + a_2)\big(a_2 a_3 + (a_1 - \beta)(a_3 + a_2)\big) + (a_1 - \beta)$$
$$\big(a_2 a_3 + (a_1 - \beta)(a_3 + a_2)\big) - (a_1 - \beta) a_2 a_3$$
$$= (a_3 + a_2)\big(a_2 a_3 + (a_1 - \beta)(a_3 + a_2)\big) + (a_1 - \beta) a_2 a_3$$
$$+(a_1 - \beta)^2 (a_3 + a_2) - (a_1 - \beta) a_2 a_3$$
$$= (a_3 + a_2)\big(a_2 a_3 + (a_1 - \beta)(a_3 + a_2)\big)$$
$$+(a_1 - \beta)^2 (a_3 + a_2) > 0$$

Terbukti bahwa $b_1 b_2 - b_3 > 0$ apabila $R_0 < 1$.

Telah ditunjukkan $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 0$ dan $b_1 b_2 - b_3 > 0$ apabila $R_0 < 1$ yang mengakibatkan semua nilai eigen pada persamaan (4.28) memilki nilai real negatif sehingga kestabilan pada titik ekuilibrium bebas pelaku pelecehan seksual stabil asimtotik lokal apabila $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika apabila $R_0 > 1$.

b. Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Berdasarkan dengan mensubtitusikan titik ekuilibrium endemik $P_1 = (P^*, H^*, C^*, Q^*)$, ke dalam matriks Jacobian (4.21) diperoleh matriks $J(P_1)$ sebagai berikut:

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} -\beta H^* - \mu & -\beta P^* & 0 & \sigma \\ \beta H^* & \beta P^* - a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -a_2 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & -a_3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mencari nilai eigen $J(P_1)$

$$\det[\lambda I - J(P_1)]$$

$$\Leftrightarrow det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\beta H^* - \mu & -\beta P^* & 0 & \sigma \\ \beta H^* & \beta P^* - a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -a_2 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & -a_3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow det\begin{bmatrix} \lambda + \beta H^* + \mu & \beta P^* & 0 & -\sigma \\ -\beta H^* & \lambda - \beta P^* + a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & \lambda + a_2 & 0 \\ 0 & -\gamma & -\alpha & \lambda + a_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \beta H^* - \mu)\begin{vmatrix} \lambda - \beta P^* + a_1 & 0 & 0 \\ -\delta & \lambda + a_2 & 0 \\ -\gamma & -\alpha & \lambda + a_3 \end{vmatrix}$$

$$+\beta H^* \begin{vmatrix} \beta P^* & 0 & -\sigma \\ -\delta & \lambda + a_2 & 0 \\ -\gamma & -\alpha & \lambda + a_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \beta H^* - \mu)(\lambda - \beta P^* + a_1)(\lambda + a_2)(\lambda + a_3) +$$
$$\beta H^*\big((\beta P^*)(\lambda + a_2)(\lambda + a_3) - \alpha\delta\sigma - (\lambda + a_2)\sigma\gamma\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \beta H^* - \mu)\big((\lambda - \beta P^* + a_1)(\lambda^2 + \lambda a_3 + \lambda a_2$$
$$+a_2 a_3)\big) + \beta H^*(\beta P^*(\lambda^2 + \lambda a_3 + \lambda a_2 + a_2 a_3) - \lambda\sigma\gamma$$
$$-a_2\sigma\gamma - \alpha\delta\sigma) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \beta H^* - \mu)(\lambda^3 + \lambda^2 a_3 + \lambda^2 a_2 + \lambda a_2 a_3 - \lambda^2 \beta P^*$$
$$-\lambda\beta P^* a_3 - \lambda\beta P^* a_2 - \beta P^* a_2 a_3 + \lambda^2 a_1 + \lambda a_1 a_3$$
$$+\lambda a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3) + \beta H^*(\lambda^2\beta P^* + \lambda a_3 \beta P^* + \lambda a_2 \beta P^*$$
$$+a_2 a_3 \beta P^* - \lambda\sigma\gamma - a_2\sigma\gamma - \alpha\delta\sigma) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \beta H^* - \mu)(\lambda^3 + (a_3 + a_2 + a_1 - \beta P^*)\lambda^2 + (a_2 a_3 +$$
$$a_1 a_3 + a_1 a_2 - \beta P^* a_3 - \beta P^* a_2)\lambda + a_1 a_2 a_3$$
$$-\beta P^* a_2 a_3) + \beta H^*(\beta P^* \lambda^2 + (a_3 \beta P^* + a_2 \beta P^* - \sigma\gamma)\lambda$$
$$+a_2 a_3 \beta P^* - a_2\sigma\gamma - \alpha\delta\sigma) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^4 + (a_3 + a_2 + a_1 - \beta P^*)\lambda^3 + (a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2$$
$$-\beta P^* a_3 - \beta P^* a_2)\lambda^2 + (a_1 a_2 a_3 - \beta P^* a_2 a_3)\lambda +$$
$$\lambda^3 \beta H^* + ((a_3 + a_2 + a_1 - \beta P^*)\beta H^*)\lambda^2 + \big((a_2 a_3 +$$
$$a_1 a_3 + a_1 a_2 - \beta P^* a_3 - \beta P^* a_2)\beta H^*)\lambda + (a_1 a_2 a_3$$
$$-\beta P^* a_2 a_3)\beta H^* + \lambda^3 \mu + \big((a_3 + a_2 + a_1 - \beta P^*)\mu)\lambda^2$$
$$+\big((a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2 - \beta P^* a_3 - \beta P^* a_2)\mu\big)\lambda +$$
$$+(a_1 a_2 a_3 - \beta P^* a_2 a_3)\mu + \beta P^* \beta H^* \lambda^2 + ((a_3 \beta P^*$$
$$+a_2 \beta P^* - \sigma\gamma)\beta H^*)\lambda + a_2 a_3 \beta P^* \beta H^* - a_2 \sigma\gamma\beta H^*$$

$-\alpha\delta\sigma\beta H^*) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^4 + [(a_3+a_2 + a_1 - \beta P^*) + (\beta H^* + \mu)]\lambda^3 + [(a_2 a_3 +$
$a_1 a_3 + a_1 a_2 - \beta P^* a_3 - \beta P^* a_2) + (a_3+a_2 + a_1$
$-\beta P^*)(\beta H^* + \mu) + \beta P^* \beta H^*]\lambda^2 + [(a_1 a_2 a_3 - \beta P^* a_2 a_3)$
$+(a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2 - \beta P^* a_3 - \beta P^* a_2)(\beta H^* + \mu)$
$+(a_3 \beta P^* + a_2 \beta P^* - \sigma\gamma)\beta H^*]\lambda + [(a_1 a_2 a_3 - \beta P^* a_2 a_3)$
$(\beta H^* + \mu) + (a_2 a_3 \beta P^* - a_2 \sigma\gamma - \alpha\delta\sigma)\beta H^*] = 0$ (4.29)

Persamaan (4.26) diatas dapat disederhanakan menjadi

$$b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0 \quad (4.30)$$

dengan

$b_0 = 1$

$b_1 = (a_3+a_2 + a_1 - \beta P^*) + (\beta H^* + \mu)$

$b_2 = (a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2 - \beta P^* a_3 - \beta P^* a_2)$
$\quad +(a_3+a_2 + a_1 - \beta P^*)(\beta H^* + \mu) + (\beta P^* \beta H^*)$

$b_3 = (a_1 a_2 a_3 - \beta P^* a_2 a_3) + (a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2 - \beta P^* a_3$
$\quad -\beta P^* a_2)(\beta H^* + \mu) + (a_3 \beta P^* + a_2 \beta P^* - \sigma\gamma)\beta H^*$

$b_4 = (a_1 a_2 a_3 - \beta P^* a_2 a_3)(\beta H^* + \mu) + a_2 a_3 \beta P^* \beta H^*$
$\quad -a_2 \sigma\gamma\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*$

Untuk mencari nilai eigen dari persamaan karakteristik (4.30) dapat dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh Hurwitz. Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz λ_1, λ_2, λ_3, dan λ_4 akan bernilai negatif apabila $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 0$, $b_1 b_2 - b_3 > 0$, dan $b_1 b_2 b_3 - {b_3}^2 - {b_1}^2 b_4 > 0$.

1) Akan ditunjukkan $b_1 > 0$.

$b_1 = a_3 + a_2 + a_1 - \beta P^* + \beta H^* + \mu$

Perhatikan jika $R_0 > 1$, maka

$$R_0 = \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)} > 1$$

$$\Leftrightarrow \beta > (\delta + \gamma + \mu)$$

$$\Leftrightarrow \beta - (\delta + \gamma + \mu) > 0$$

Diketahui (4.18) yaitu $\beta P^* = \delta + \gamma + \mu = a_1$, dan perhatikan (4.17) yaitu

$$H^* = \frac{A(\beta - (\delta + \gamma + \mu))}{\beta D} > 0$$

dengan $A = (\alpha + \mu)(\sigma + \mu)$, $D = ((\alpha + \mu)(\sigma + \delta + \gamma + \mu) + \sigma\delta)$, dan $\beta - (\delta + \gamma + \mu) > 0$

Subtitusi (4.14) ke b_1

$$\begin{aligned} b_1 &= a_3 + a_2 + a_1 - \beta P^* + \beta H^* + \mu \\ &= a_3 + a_2 + a_1 - a_1 + \beta H^* + \mu \\ &= a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu > 0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $b_1 > 0$ dengan $H > 0$ jika $R_0 > 1$.

2) Akan ditunjukkan $b_2 > 0$.

$$\begin{aligned} b_2 &= (a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2 - \beta P^* a_3 - \beta P^* a_2) \\ &\quad + (a_3 + a_2 + a_1 - \beta P^*)(\beta H^* + \mu) + (\beta P^* \beta H^*) \\ &= (a_2 a_3 + a_1(a_2 + a_3) - \beta P^*(a_2 + a_3)) + (a_3 \\ &\quad + a_2 + a_1 - \beta P^*)(\beta H^* + \mu) + (\beta P^* \beta H^*) \end{aligned}$$

Perhatikan jika $R_0 > 1$, maka

$$R_0 = \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)} > 1$$

$$\Leftrightarrow \beta > (\delta + \gamma + \mu)$$

$$\Leftrightarrow \beta - (\delta + \gamma + \mu) > 0$$

dan perhatikan (4.17)

$$H^* = \frac{A(\beta - (\delta + \gamma + \mu))}{\beta D} > 0$$

dengan $A = (\alpha + \mu)(\sigma + \mu)$, $D = ((\alpha + \mu)(\sigma + \delta + \gamma + \mu) + \sigma\delta)$, dan $\beta - (\delta + \gamma + \mu) > 0$

Subtitusi (4.18) yaitu $\beta P^* = \delta + \gamma + \mu = a_1$ ke b_2

$$b_2 = (a_2 a_3 + a_1(a_2 + a_3) - \beta P^*(a_2 + a_3)) + (a_3 + a_2 + a_1 - \beta P^*)(\beta H^* + \mu) + (\beta P^* \beta H^*)$$

$$= (a_2 a_3 + a_1(a_2 + a_3) - a_1(a_2 + a_3)) + (a_3 + a_2 + a_1 - a_1)(\beta H^* + \mu) + (a_1 \beta H^*)$$

$$= a_2 a_3 + (a_3 + a_2)(\beta H^* + \mu) + (a_1 \beta H^*)$$

Terbukti bahwa $b_2 > 0$ dengan $H^* > 0$ jika $R_0 > 1$.

3) Akan ditunjukkan $b_3 > 0$.

$$b_3 = (a_1 a_2 a_3 - \beta P^* a_2 a_3) + (a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2 - \beta P^* a_3 - \beta P^* a_2)(\beta H^* + \mu) + (a_3 \beta P^* + a_2 \beta P^* - \sigma\gamma)\beta H^*$$

$$= ((a_1 - \beta P^*) a_2 a_3) + (a_2 a_3 + a_1(a_2 + a_3) - \beta P^*(a_2 + a_3))(\beta H^* + \mu) + (a_3 \beta P^* + a_2 \beta P^* - \sigma\gamma)\beta H^*$$

Perhatikan jika $R_0 > 1$, maka

$$R_0 = \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)} > 1$$

$$\Leftrightarrow \beta > (\delta + \gamma + \mu)$$

$$\Leftrightarrow \beta - (\delta + \gamma + \mu) > 0$$

dan perhatikan (4.17)

$$H^* = \frac{A(\beta - (\delta + \gamma + \mu))}{\beta D} > 0$$

dengan $A = (\alpha + \mu)(\sigma + \mu)$, $D = ((\alpha + \mu)(\sigma + \delta + \gamma + \mu) + \sigma\delta)$, dan $\beta - (\delta + \gamma + \mu) > 0$

Subtitusi (4.18) yaitu $\beta P^* = \delta + \gamma + \mu = a_1$ ke b_3

$$\begin{aligned} b_3 &= \big((a_1 - \beta P^*)a_2 a_3\big) + +(a_2 a_3 + a_1(a_2 + a_3) \\ &\quad -\beta P^*(a_2 + a_3))(\beta H^* + \mu) + (a_3 \beta P^* + a_2 \beta P^* \\ &\quad -\sigma\gamma)\beta H^* \\ &= \big((a_1 - a_1)a_2 a_3\big) + (a_2 a_3 + a_1(a_2 + a_3) \\ &\quad -a_1(a_2 + a_3))(\beta H^* + \mu) + (a_3 a_1 + a_2 a_1 - \sigma\gamma)\beta H^* \\ &= (a_2 a_3)(\beta H^* + \mu) + (a_3 a_1 + a_2 a_1 - \sigma\gamma)\beta H^* \\ &= (a_2 a_3)(\beta H^* + \mu) + a_2 a_1 \beta H^* + (a_3 a_1 - \sigma\gamma)\beta H^* \\ &= (a_2 a_3)(\beta H^* + \mu) + a_2 a_1 \beta H^* + ((\sigma + \mu)(\delta + \gamma + \mu) \\ &\quad -\sigma\gamma)\beta H^* \\ &= (a_2 a_3)(\beta H^* + \mu) + a_2 a_1 \beta H^* + (\sigma\delta + \sigma\gamma + \sigma\mu + \mu\delta \\ &\quad +\mu\gamma + \mu^2 - \sigma\gamma)\beta H^* \end{aligned}$$

$= (a_2a_3)(\beta H^* + \mu) + a_2a_1\beta H^* + (\sigma\delta + \sigma\mu + \mu\delta + \mu\gamma$

$+\mu^2)\beta H^*$

Terbukti bahwa $b_3 > 0$ dengan $H^* > 0$ jika $R_0 > 1$.

4) Akan ditunjukkan $b_4 > 0$.

$b_4 = (a_1a_2a_3 - \beta P^*a_2a_3)(\beta H^* + \mu) + a_2a_3\beta P^*\beta H^*$

$-a_2\sigma\gamma\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*$

$= ((a_1 - \beta P^*)a_2a_3)\ (\beta H^* + \mu) + (a_2a_3\beta P^*\beta H^*$

$-a_2\sigma\gamma\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*$

Perhatikan jika $R_0 > 1$, maka

$$R_0 = \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)} > 1$$

$$\Leftrightarrow \beta > (\delta + \gamma + \mu)$$

$$\Leftrightarrow \beta - (\delta + \gamma + \mu) > 0$$

dan perhatikan (4.17)

$$H^* = \frac{A(\beta - (\delta + \gamma + \mu))}{\beta D} > 0$$

dengan $A = (\alpha + \mu)(\sigma + \mu)$, $D = ((\alpha + \mu)(\sigma + \delta + \gamma + \mu) + \sigma\delta)$, dan $\beta - (\delta + \gamma + \mu) > 0$

Subtitusi (4.18) $\beta P^* = \delta + \gamma + \mu = a_1$ ke b_4

$b_4 = ((a_1 - \beta P^*)a_2a_3)\ (\beta H^* + \mu) + a_2a_3\beta P^*\beta H^*$

$-a_2\sigma\gamma\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*$

$= ((a_1 - a_1)a_2a_3)\ (\beta H^* + \mu) + a_2a_3a_1\beta H^*$

$-a_2\sigma\gamma\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*$

$$= a_2a_3a_1\beta H^* - a_2\sigma\gamma\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*$$
$$= (a_3a_1 - \sigma\gamma)a_2\,\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*$$
$$= ((\sigma + \mu)(\delta + \gamma + \mu) - \sigma\gamma)\,a_2\,\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*$$
$$= (\sigma\delta + \sigma\gamma + \sigma\mu + \mu\delta + \mu\gamma + \mu^2 - \sigma\gamma)a_2\,\beta H^*$$
$$-\sigma\delta\alpha\beta H^*$$
$$= (\sigma\delta + \sigma\mu + \mu\delta + \mu\gamma + \mu^2)\,a_2\,\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*$$
$$= (\sigma\mu + \mu\delta + \mu\gamma + \mu^2)a_2\,\beta H^* + \sigma\delta a_2\,\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*$$
$$= ((\sigma\mu + \mu\delta + \mu\gamma + \mu^2)a_2 + \sigma\delta a_2 - \sigma\delta\alpha)\beta H^*$$
$$= ((\sigma\mu + \mu\delta + \mu\gamma + \mu^2)(\alpha + \mu) + \sigma\delta(\alpha + \mu) - \sigma\delta\alpha)\beta H^*$$
$$= ((\sigma\mu + \mu\delta + \mu\gamma + \mu^2)(\alpha + \mu) + \sigma\delta\alpha + \sigma\delta\mu - \sigma\delta\alpha)$$
$$\beta H^*$$
$$= \big((\sigma\mu + \mu\delta + \mu\gamma + \mu^2)(\alpha + \mu) + \sigma\delta\mu\big)\beta H^* > 0$$

Terbukti bahwa $b_4 > 0$ dengan $H^* > 0$ jika $R_0 > 1$.

5) Akan ditunjukkan $b_1b_2 - b_3 > 0$.

$b_1b_2 - b_3 =$

$$(a_3 + a_2 + a_1 - \beta P^* + \beta H^* + \mu)((a_2a_3 + a_1a_3 + a_1a_2$$
$$-\beta P^*a_3 - \beta P^*a_2) + (a_3 + a_2 + a_1 - \beta P^*)(\beta H^* + \mu)$$
$$+\beta P^*\beta H^*) - ((a_1a_2a_3 - \beta P^*a_2a_3) + (a_2a_3 + a_1a_3$$
$$+a_1a_2 - \beta P^*a_3 - \beta P^*a_2)(\beta H^* + \mu) + (a_3\beta P^* + a_2\beta P^*$$
$$-\sigma\gamma)\beta H^*)$$
$$= (a_3 + a_2 + a_1 - \beta P^* + \beta H^* + \mu)((a_2a_3 + a_1(a_2 + a_3)$$
$$-\beta P^*(a_2 + a_3)) + (a_3 + a_2 + a_1 - \beta P^*)(\beta H^* + \mu)$$
$$+\beta P^*\beta H^*) - \Big(\big((a_1 - \beta P^*)a_2a_3\big) + (a_2a_3 + a_1(a_2 + a_3)$$

$-\beta P^*(a_2+a_3))(\beta H^* + \mu) + (a_3\beta P^* + a_2\beta P^* - \sigma\gamma)\beta H^*)$

Perhatikan jika $R_0 > 1$, maka

$$R_0 = \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)} > 1$$

$$\Leftrightarrow \beta > (\delta + \gamma + \mu)$$

$$\Leftrightarrow \beta - (\delta + \gamma + \mu) > 0$$

Dan perhatikan (4.17)

$$H^* = \frac{A(\beta - (\delta + \gamma + \mu))}{\beta D} > 0$$

dengan $A = (\alpha + \mu)(\sigma + \mu)$, $D = ((\alpha + \mu)(\sigma + \delta + \gamma + \mu) + \sigma\delta)$, dan $\beta - (\delta + \gamma + \mu) > 0$

Subtitusi (4.18) $\beta P^* = \delta + \gamma + \mu = a_1$ ke $b_1 b_2 - b_3$

$$b_1 b_2 - b_3 =$$

$$(a_3+a_2 + a_1 - \beta P^* + \beta H^* + \mu)((a_2 a_3 + a_1(a_2+a_3)$$
$$-\beta P^*(a_2+a_3)) + (a_3+a_2 + a_1 - \beta P^*)(\beta H^* + \mu)$$
$$+\beta P^*\beta H^*) - \Big(\big((a_1 - \beta P^*)a_2 a_3\big) + (a_2 a_3 + a_1(a_2+a_3)$$
$$-\beta P^*(a_2+a_3))(\beta H^* + \mu) + (a_3\beta P^* + a_2\beta P^* - \sigma\gamma)\beta H^*)$$
$$= (a_3+a_2 + a_1 - a_1 + \beta H^* + \mu)((a_2 a_3 + a_1(a_2+a_3)$$
$$-a_1(a_2+a_3)) + (a_3+a_2 + a_1 - a_1)(\beta H^* + \mu)$$
$$+a_1\beta H^*) - \Big(\big((a_1 - a_1)a_2 a_3\big) + (a_2 a_3 + a_1(a_2+a_3)$$
$$-a_1(a_2+a_3))(\beta H^* + \mu) + (a_3 a_1 + a_2 a_1 - \sigma\gamma)\beta H^*)$$

$= (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2a_3 + (a_3+a_2)(\beta H^* + \mu) + a_1\beta H^*)$

$-(a_2a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3a_1 + a_2a_1 - \sigma\gamma)\beta H^*)$

$= (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2a_3 + (a_3+a_2)(\beta H^* + \mu) + a_1\beta H^*)$

$-a_2a_3(\beta H^* + \mu) - (a_3+a_2)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\, \beta H^*$

$= (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2a_3) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_3+a_2)$

$(\beta H^* + \mu)+(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) - a_2a_3(\beta H^* + \mu)$

$-(a_3+a_2)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\, \beta H^*$

$= (a_3+a_2)(a_2a_3) + (\beta H^* + \mu)(a_2a_3) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$

$(a_3+a_2)(\beta H^* + \mu) + (a_3+a_2)(a_1\beta H^*) + (\beta H^* + \mu)$

$(a_1\beta H^*) - a_2a_3(\beta H^* + \mu) - (a_3+a_2)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\, \beta H^*$

$= (a_3+a_2)(a_2a_3) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_3+a_2)(\beta H^* + \mu)$

$+(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\, \beta H^* > 0$

Terbukti bahwa $b_1b_2 - b_3 > 0$ dengan $H^* > 0$ jika $R_0 > 1$.

6) Akan ditunjukkan $b_1b_2b_3 - {b_3}^2 - {b_1}^2b_4 > 0$.

$b_1b_2b_3 - {b_3}^2 - {b_1}^2b_4 =$

$((a_3+a_2 + a_1 - \beta P^*) + (\beta H^* + \mu))((a_2a_3 + a_1a_3 +$

$a_1a_2 - \beta P^*a_3 - \beta P^*a_2) + (a_3+a_2 + a_1 - \beta P^*)(\beta H^* +$

$\mu) + (\beta P^*\beta H^*))\big((a_1a_2a_3 - \beta P^*a_2a_3) + (a_2a_3 + a_1a_3 +$

$a_1a_2 - \beta P^*a_3 - \beta P^*a_2)(\beta H^* + \mu) + (a_3\beta P^* + a_2\beta P^* -$

$\sigma\gamma)\beta H^*) - \big((a_1a_2a_3 - \beta P^*a_2a_3) + (a_2a_3 + a_1a_3 +$

$a_1a_2 - \beta P^*a_3 - \beta P^*a_2)(\beta H^* + \mu) + (a_3\beta P^* + a_2\beta P^* -$

$\sigma\gamma)\beta H^*)^2 - ((a_3+a_2 + a_1 - \beta P^*) + (\beta H^* +$

$\mu))^2\big((a_1a_2a_3 - \beta P^*a_2a_3)(\beta H^* + \mu) + a_2a_3\beta P^*\beta H^* -$

$a_2\sigma\gamma\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*\big)$

Perhatikan jika $R_0 > 1$

$$R_0 = \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)} > 1$$

$$\Leftrightarrow \beta > (\delta + \gamma + \mu)$$

$$\Leftrightarrow \beta - (\delta + \gamma + \mu) > 0$$

dan (4.17)

$$H^* = \frac{A(\beta - (\delta + \gamma + \mu))}{\beta D} > 0$$

dengan $A = (\alpha + \mu)(\sigma + \mu)$, $D = ((\alpha + \mu)(\sigma + \delta + \gamma + \mu) + \sigma\delta)$, dan $\beta - (\delta + \gamma + \mu) > 0$

Subtitusi (4.18) ke $b_1b_2b_3 - {b_3}^2 - {b_1}^2b_4$

$$\begin{aligned}
&= (a_3 + a_2 + a_1 - a_1 + \beta H^* + \mu)(a_2a_3 + a_1a_3 + a_1a_2 \\
&\quad -a_1a_3 - a_1a_2 + (a_3 + a_2 + a_1 - a_1)(\beta H^* + \mu) \\
&\quad +a_1\beta H^*)(a_1a_2a_3 - a_1a_2a_3 + (a_2a_3 + a_1a_3 + a_1a_2 \\
&\quad -a_1a_3 - a_1a_2)(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1\beta H^* \\
&\quad -\sigma\gamma\beta H^*) \\
&\quad -(a_1a_2a_3 - a_1a_2a_3 + (a_2a_3 + a_1a_3 + a_1a_2 - a_1a_3 \\
&\quad -a_1a_2)(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)^2 \\
&\quad -(a_3 + a_2 + a_1 - a_1 + \beta H^* + \mu)^2\big((a_1a_2a_3 - a_1a_2a_3) \\
&\quad (\beta H^* + \mu) + a_2a_3a_1\beta H^* - a_2\sigma\gamma\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*\big)
\end{aligned}$$

$= (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2 a_3 +(a_3+a_2)(\beta H^* + \mu)$
$+a_1 \beta H^*)(a_2 a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1 \beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)$
$-(a_2 a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1 \beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)^2$
$-(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)^2(a_2 a_3 a_1 \beta H^* - a_2\sigma\gamma\beta H^*$
$-\sigma\delta\alpha\beta H^*)$

$b_1 b_2 b_3 - {b_3}^2 - {b_1}^2 b_4 > 0 \Leftrightarrow b_3(b_1 b_2 - b_3) - {b_1}^2 b_4 > 0$

Diperoleh

$b_1 b_2 - b_3 =$
$(a_3+a_2)(a_2 a_3) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_3+a_2)(\beta H^* + \mu)$
$+(\beta H^* + \mu)(a_1 \beta H^*) + \ \sigma\gamma\ \beta H^*$

$(b_1 b_2 - b_3)b_3 - {b_1}^2 b_4 =$
$[(a_3+a_2)(a_2 a_3) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_3+a_2)(\beta H^* + \mu)$
$+(\beta H^* + \mu)(a_1 \beta H^*) + \ \sigma\gamma\ \beta H^*](a_2 a_3(\beta H^* + \mu) +$
$(a_3 + a_2)a_1 \beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) - (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)^2$
$(a_2 a_3 a_1 \beta H^* - a_2\sigma\gamma\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*)$
$= [(a_3+a_2)(a_2 a_3)+(\beta H^* + \mu)(a_1 \beta H^*) + \ \sigma\gamma\ \beta H^*]$
$(a_2 a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1 \beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)$
$+[(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_3+a_2)(\beta H^* + \mu)](a_2 a_3(\beta H^*$
$+\mu) + (a_3 + a_2)a_1 \beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) - (a_3+a_2 + \beta H^*$
$+\mu)^2(a_2 a_3 a_1 \beta H^* - a_2\sigma\gamma\beta H^* - \sigma\delta\alpha\beta H^*)$
$= [(a_3+a_2)(a_2 a_3)+(\beta H^* + \mu)(a_1 \beta H^*) + \ \sigma\gamma\ \beta H^*]$
$(a_2 a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1 \beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)$
$+(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)[(a_3+a_2)(\beta H^* + \mu)(a_2 a_3(\beta H^*$

$+\mu) + (a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)$

$-(a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2 a_3 a_1 \beta H^* - a_2 \sigma\gamma\beta H^*$

$-\sigma\delta\alpha\beta H^*)]$

$= [(a_3 + a_2)(a_2 a_3) + (\beta H^* + \mu)(a_1 \beta H^*) + \ \sigma\gamma\ \beta H^*]$

$(a_2 a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)$

$+(a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)[(a_3 + a_2)(\beta H^* + \mu)(a_2 a_3(\beta H^*$

$+\mu) + (a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) - (a_3 + a_2 + \beta H^*$

$+\mu)(a_2 a_3 a_1 \beta H^*) + (a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2 \sigma\gamma\beta$

$+\sigma\delta\alpha\beta H^*)]$

$= [(a_3 + a_2)(a_2 a_3) + (\beta H^* + \mu)(a_1 \beta H^*) + \ \sigma\gamma\ \beta H^*]$

$(a_2 a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)$

$+(a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)[(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)$

$(a_2 a_3\beta H^* + a_2 a_3\mu + a_3 a_1\beta H^* + a_2 a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)$

$+(a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2\sigma\gamma\beta + \sigma\delta\alpha\beta H^*)$

$-(a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2 a_3 a_1 \beta H^*)]$

$= [(a_3 + a_2)(a_2 a_3) + (\beta H^* + \mu)(a_1 \beta H^*) + \ \sigma\gamma\ \beta H^*]$

$(a_2 a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)$

$+(a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)[(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)$

$(a_2 a_3\beta H^* + a_2 a_3\mu + a_3 a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) +$

$(a_3\beta H^* + a_3\mu)(a_2 a_1\beta H^*) + (a_2\beta H^*$

$+a_2\mu)(a_2 a_1\beta H^*) + (a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)$

$(a_2\sigma\gamma\beta + \sigma\delta\alpha\beta H^*) - (a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)$

$(a_2 a_3 a_1\beta H^*)]$

$= [(a_3 + a_2)(a_2 a_3) + (\beta H^* + \mu)(a_1 \beta H^*) + \ \sigma\gamma\ \beta H^*]$

$$(a_2a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)$$
$$+(a_3{+}a_2 + \beta H^* + \mu)[(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)$$
$$(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu + a_3a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) +$$
$$(a_3{+}a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2\sigma\gamma\beta + \sigma\delta\alpha\beta H^*)$$
$$+a_3a_2a_1\beta H^{*2} + a_3a_2a_1\mu\beta H^*$$
$$+(a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_1\beta H^*) - a_2{a_3}^2a_1\beta H^*$$
$$-{a_2}^2a_3a_1\beta H^* - a_2a_3a_1\beta H^{*2} - a_2a_3a_1\mu\beta H^*$$
$$= [(a_3{+}a_2)(a_2a_3){+}(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \ \sigma\gamma\ \beta H^*]$$
$$(a_2a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)$$
$$+(a_3{+}a_2 + \beta H^* + \mu)[(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)$$
$$(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu + a_3a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) +$$
$$(a_3{+}a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2\sigma\gamma\beta + \sigma\delta\alpha\beta H^*)$$
$$+(a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_1\beta H^*) - a_2{a_3}^2a_1\beta H^*$$
$$-{a_2}^2a_3a_1\beta H^*]$$
$$= [(a_3{+}a_2)(a_2a_3)](a_2a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1\beta H^*$$
$$-\sigma\gamma\beta H^*) + [(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \ \sigma\gamma\ \beta H^*]$$
$$(a_2a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)$$
$$+(a_3{+}a_2 + \beta H^* + \mu)[(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)$$
$$(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu + a_3a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) +$$
$$(a_3{+}a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2\sigma\gamma\beta + \sigma\delta\alpha\beta H^*)$$
$$+(a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_1\beta H^*)] - (a_3{+}a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$[a_2{a_3}^2a_1\beta H^* + {a_2}^2a_3a_1\beta H^*]$$
$$= (a_2{a_3}^2 + {a_2}^2a_3)(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu + a_3a_1\beta H^*$$
$$a_2a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + [(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \ \sigma\gamma\ \beta H^*]$$

$$(a_2a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)$$
$$+(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)[(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)$$
$$(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu + a_3a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) +$$
$$(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2\sigma\gamma\beta H^* + \sigma\delta\alpha\beta H^*)$$
$$+(a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_1\beta H^*)] - a_2{a_3}^3a_1\beta H^*$$
$$-{a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* - a_2{a_3}^2a_1\beta {H^*}^2 - a_2{a_3}^2a_1\mu\beta H^*$$
$$-{a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* - {a_2}^3a_3a_1\beta H^* - {a_2}^2a_3a_1\beta {H^*}^2$$
$$-{a_2}^2a_3a_1\mu\beta H^*$$
$$= {a_2}^2{a_3}^3\beta H^* + {a_2}^2{a_3}^3\mu + a_2{a_3}^3a_1\beta H^* + {a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^*$$
$$-a_2{a_3}^2\sigma\gamma\beta H^* + {a_2}^3{a_3}^2\beta H^* + {a_2}^3{a_3}^2\mu$$
$$+{a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* + {a_2}^3a_3a_1\beta H^* - {a_2}^2a_3\sigma\gamma\beta H^*$$
$$+[(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\,\beta H^*](a_2a_3(\beta H^* + \mu)$$
$$+(a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$[(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu$$
$$+a_3a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_2\sigma\gamma\beta H^* + \sigma\delta\alpha\beta H^*) + (a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_1\beta H^*)]$$
$$-a_2{a_3}^3a_1\beta H^* - {a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* - a_2{a_3}^2a_1\beta {H^*}^2$$
$$-a_2{a_3}^2a_1\mu\beta H^* - {a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* - {a_2}^3a_3a_1\beta H^*$$
$$-{a_2}^2a_3a_1\beta {H^*}^2 - {a_2}^2a_3a_1\mu\beta H^*$$
$$= {a_2}^2{a_3}^3\beta H^* + {a_2}^2{a_3}^3\mu - a_2{a_3}^2\sigma\gamma\beta H^* + {a_2}^3{a_3}^2\beta H^*$$
$$+{a_2}^3{a_3}^2\mu + {a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* - {a_2}^2a_3\sigma\gamma\beta H^*$$
$$+[(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\,\beta H^*](a_2a_3(\beta H^* + \mu)$$
$$+(a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$

$$[(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu$$
$$+a_3a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_2\sigma\gamma\beta H^* + \sigma\delta\alpha\beta H^*) + (a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_1\beta H^*)]$$
$$-a_2{a_3}^2a_1\beta H^{*2} - a_2{a_3}^2a_1\mu\beta H^* - {a_2}^3a_3a_1\beta H^*$$
$$-{a_2}^2a_3a_1\beta H^{*2} - {a_2}^2a_3a_1\mu\beta H^*$$
$$= {a_2}^2{a_3}^3\beta H^* + {a_2}^2{a_3}^3\mu - a_2{a_3}^2\sigma\gamma\beta H^* + {a_2}^3{a_3}^2\beta H^*$$
$$+{a_2}^3{a_3}^2\mu + {a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* - {a_2}^2a_3\sigma\gamma\beta H^*$$
$$+[(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\, \beta H^*](a_2a_3(\beta H^* + \mu)$$
$$+(a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$[(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu$$
$$+a_3a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_2\sigma\gamma\beta H^* + \sigma\delta\alpha\beta H^*)] + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$[(a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_1\beta H^*)] - a_2{a_3}^2a_1\beta H^{*2}$$
$$-a_2{a_3}^2a_1\mu\beta H^* - {a_2}^3a_3a_1\beta H^* - {a_2}^2a_3a_1\beta H^{*2}$$
$$-{a_2}^2a_3a_1\mu\beta H^*$$
$$= {a_2}^2{a_3}^3\beta H^* + {a_2}^2{a_3}^3\mu - a_2{a_3}^2\sigma\gamma\beta H^* + {a_2}^3{a_3}^2\beta H^*$$
$$+{a_2}^3{a_3}^2\mu + {a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* - {a_2}^2a_3\sigma\gamma\beta H^*$$
$$+[(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\, \beta H^*](a_2a_3(\beta H^* + \mu)$$
$$+(a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$[(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu$$
$$+a_3a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_2\sigma\gamma\beta H^* + \sigma\delta\alpha\beta H^*)] + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$\left({a_2}^2a_1\beta H^{*2} + {a_2}^2a_1\mu\beta H^*\right) - a_2{a_3}^2a_1\beta H^{*2}$$

$$-a_2{a_3}^2a_1\mu\beta H^* - {a_2}^3a_3a_1\beta H^* - {a_2}^2a_3a_1\beta H^{*2}$$
$$-{a_2}^2a_3a_1\mu\beta H^*$$
$$= {a_2}^2{a_3}^3\beta H^* + {a_2}^2{a_3}^3\mu - a_2{a_3}^2\sigma\gamma\beta H^* + {a_2}^3{a_3}^2\beta H^*$$
$$+{a_2}^3{a_3}^2\mu + {a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* - {a_2}^2a_3\sigma\gamma\beta H^*$$
$$+[(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\,\beta H^*](a_2a_3(\beta H^* + \mu)$$
$$+(a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$[(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu$$
$$+a_3a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_2\sigma\gamma\beta H^* + \sigma\delta\alpha\beta H^*)] + (a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$\left({a_2}^2a_1\beta H^{*2} + {a_2}^2a_1\mu\beta H^*\right) + {a_2}^2a_3a_1\beta H^{*2}$$
$$+{a_2}^2a_3a_1\mu\beta H^* - a_2{a_3}^2a_1\beta H^{*2} - a_2{a_3}^2a_1\mu\beta H^*$$
$$-{a_2}^3a_3a_1\beta H^* - {a_2}^2a_3a_1\beta H^{*2} - {a_2}^2a_3a_1\mu\beta H^*$$
$$= {a_2}^2{a_3}^3\beta H^* + {a_2}^2{a_3}^3\mu - a_2{a_3}^2\sigma\gamma\beta H^* + {a_2}^3{a_3}^2\beta H^*$$
$$+{a_2}^3{a_3}^2\mu + {a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* - {a_2}^2a_3\sigma\gamma\beta H^*$$
$$+[(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\,\beta H^*](a_2a_3(\beta H^* + \mu)$$
$$+(a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$[(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu$$
$$+a_3a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_2\sigma\gamma\beta H^* + \sigma\delta\alpha\beta H^*)] + (a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$\left({a_2}^2a_1\beta H^{*2} + {a_2}^2a_1\mu\beta H^*\right) - a_2{a_3}^2a_1\beta H^{*2}$$
$$-a_2{a_3}^2a_1\mu\beta H^* - {a_2}^3a_3a_1\beta H^*$$
$$= {a_2}^2{a_3}^3\beta H^* + {a_2}^2{a_3}^3\mu - a_2{a_3}^2\sigma\gamma\beta H^* + {a_2}^3{a_3}^2\beta H^*$$
$$+{a_2}^3{a_3}^2\mu + {a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* - {a_2}^2a_3\sigma\gamma\beta H^*$$

$$+[(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\, \beta H^*](a_2a_3(\beta H^* + \mu)$$
$$+(a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu$$
$$+a_3a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2\sigma\gamma\beta H^* + \sigma\delta\alpha\beta H^*)$$
$$+(a_2 + \beta H^* + \mu)\left({a_2}^2a_1\beta H^{*2} + {a_2}^2a_1\mu\beta H^*\right)$$
$$-a_2{a_3}^2a_1\beta H^{*2} - a_2{a_3}^2a_1\mu\beta H^* - {a_2}^3a_3a_1\beta H^*$$
$$= {a_2}^2{a_3}^3\beta H^* + {a_2}^2{a_3}^3\mu - a_2{a_3}^2\sigma\gamma\beta H^* + {a_2}^3{a_3}^2\beta H^*$$
$$+{a_2}^3{a_3}^2\mu + {a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* - {a_2}^2a_3\sigma\gamma\beta H^*$$
$$+[(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\, \beta H^*](a_2a_3(\beta H^* + \mu)$$
$$+(a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu$$
$$-\sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_3a_1\beta H^*)$$
$$+(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_2\sigma\gamma\beta H^*)$$
$$+(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(\sigma\delta\alpha\beta H^*)$$
$$+(a_2 + \beta H^* + \mu)\left({a_2}^2a_1\beta H^{*2} + {a_2}^2a_1\mu\beta H^*\right)$$
$$-a_2{a_3}^2a_1\beta H^{*2} - a_2{a_3}^2a_1\mu\beta H^* - {a_2}^3a_3a_1\beta H^*$$
$$= {a_2}^2{a_3}^3\beta H^* + {a_2}^2{a_3}^3\mu - a_2{a_3}^2\sigma\gamma\beta H^* + {a_2}^3{a_3}^2\beta H^*$$
$$+{a_2}^3{a_3}^2\mu + {a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* - {a_2}^2a_3\sigma\gamma\beta H^*$$
$$+[(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\, \beta H^*](a_2a_3(\beta H^* + \mu)$$
$$+(a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_3\beta H^* + a_3\mu + a_2\beta H^* + a_2\mu)(a_2a_3\beta H^* + a_2a_3\mu$$

$-\sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$
$(a_3{}^2 a_1 \beta H^{*2} + a_3{}^2 a_1 \mu\beta H^* + a_3 a_1 a_2 \beta H^{*2}$
$+a_3 a_1 a_2 \mu\beta H^*)$
$+(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_3 a_2 \sigma\gamma\beta H^* + a_2{}^2 \sigma\gamma\beta H^*$
$+a_2 \sigma\gamma\beta H^{*2} + a_2 \sigma\gamma\mu\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$
$(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(\sigma\delta\alpha\beta H^*) + (a_2 + \beta H^* + \mu)$
$\left(a_2{}^2 a_1 \beta H^{*2} + a_2{}^2 a_1 \mu\beta H^*\right) - a_2 a_3{}^2 a_1 \beta H^{*2}$
$-a_2 a_3{}^2 a_1 \mu\beta H^* - a_2{}^3 a_3 a_1 \beta H^*$
$= a_2{}^2 a_3{}^3 \beta H^* + a_2{}^2 a_3{}^3 \mu - a_2 a_3{}^2 \sigma\gamma\beta H^* + a_2{}^3 a_3{}^2 \beta H^*$
$+a_2{}^3 a_3{}^2 \mu + a_2{}^2 a_3{}^2 a_1 \beta H^* - a_2{}^2 a_3 \sigma\gamma\beta H^*$
$+[(\beta H^* + \mu)(a_1 \beta H^*) + \sigma\gamma\, \beta H^*](a_2 a_3(\beta H^* + \mu)$
$+(a_3 + a_2) a_1 \beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)$
$(a_3 \beta H^* + a_3 \mu + a_2 \beta H^* + a_2 \mu)(a_2 a_3 \beta H^* + a_2 a_3 \mu$
$-\sigma\gamma\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_3{}^2 a_1 \beta H^{*2}$
$+a_3{}^2 a_1 \mu\beta H^*) + (a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_3 a_1 a_2 \beta H^{*2}$
$+a_3 a_1 a_2 \mu\beta H^*) + (a_3+a_2)(a_3 a_2 \sigma\gamma\beta H^* + a_2{}^2 \sigma\gamma\beta H^*$
$+a_2 \sigma\gamma\beta H^{*2} + a_2 \sigma\gamma\mu\beta H^*) + (\beta H^* + \mu)(a_3 a_2 \sigma\gamma\beta H^*$
$+a_2{}^2 \sigma\gamma\beta H^* + a_2 \sigma\gamma\beta H^{*2} + a_2 \sigma\gamma\mu\beta H^*)$
$+(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(a_3+a_2 + \beta H^* + \mu)(\sigma\delta\alpha\beta H^*)$
$+(a_2 + \beta H^* + \mu)\left(a_2{}^2 a_1 \beta H^{*2} + a_2{}^2 a_1 \mu\beta H^*\right)$
$-a_2 a_3{}^2 a_1 \beta H^{*2} - a_2 a_3{}^2 a_1 \mu\beta H^* - a_2{}^3 a_3 a_1 \beta H^*$
$= a_2{}^2 a_3{}^3 \beta H^* + a_2{}^2 a_3{}^3 \mu - a_2 a_3{}^2 \sigma\gamma\beta H^* + a_2{}^3 a_3{}^2 \beta H^*$
$+a_2{}^3 a_3{}^2 \mu + a_2{}^2 a_3{}^2 a_1 \beta H^* - a_2{}^2 a_3 \sigma\gamma\beta H^*$

$$+[(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\, \beta H^*](a_2a_3(\beta H^* + \mu)$$
$$+(a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*) + (a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_2{a_3}^2\beta H^{*2} + a_2{a_3}^2\mu\beta H^* + {a_2}^2a_3\beta H^{*2} + {a_2}^2a_3\mu\beta H^*$$
$$+a_2{a_3}^2\mu\beta H^* + a_2{a_3}^2\mu^2 + {a_2}^2a_3\mu\beta H^* + {a_2}^2a_3\mu^2)$$
$$-(a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)(a_3\sigma\gamma\beta H^{*2} + a_3\sigma\gamma\mu\beta H^*$$
$$+a_2\sigma\gamma\beta H^{*2} + a_2\sigma\gamma\mu\beta H^*) + (a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$({a_3}^2a_1\beta H^{*2} + {a_3}^2a_1\mu\beta H^*) + (a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_3a_1a_2\beta H^{*2} + a_3a_1a_2\mu\beta H^*) + {a_3}^2a_1a_2\beta H^{*2}$$
$$+{a_3}^2a_1a_2\mu\beta H^* + (a_3 + a_2)({a_2}^2\sigma\gamma\beta H^* + a_2\sigma\gamma\beta H^{*2}$$
$$+a_2\sigma\gamma\mu\beta H^*) + {a_3}^2a_2\sigma\gamma\beta H^* + a_3{a_2}^2\sigma\gamma\beta H^*$$
$$+(\beta H^* + \mu)(a_3a_2\sigma\gamma\beta H^* + {a_2}^2\sigma\gamma\beta H^* + a_2\sigma\gamma\beta H^{*2}$$
$$+a_2\sigma\gamma\mu\beta H^*) + (a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)(\sigma\delta\alpha\beta H^*) + (a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$\left({a_2}^2a_1\beta H^{*2} + {a_2}^2a_1\mu\beta H^*\right) - a_2{a_3}^2a_1\beta H^{*2}$$
$$-a_2{a_3}^2a_1\mu\beta H^* - {a_2}^3a_3a_1\beta H^*$$
$$= {a_2}^2{a_3}^3\beta H^* + {a_2}^2{a_3}^3\mu + {a_2}^3{a_3}^2\beta H^* + {a_2}^3{a_3}^2\mu$$
$$+{a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^* + [(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\, \beta H^*]$$
$$(a_2a_3(\beta H^* + \mu) + (a_3 + a_2)a_1\beta H^* - \sigma\gamma\beta H^*)$$
$$+(a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)\,(a_2{a_3}^2\beta H^{*2} + a_2{a_3}^2\mu\beta H^*$$
$$+{a_2}^2a_3\beta H^{*2} + {a_2}^2a_3\mu\beta H^* + a_2{a_3}^2\mu\beta H^* + a_2{a_3}^2\mu^2$$
$$+{a_2}^2a_3\mu\beta H^* + {a_2}^2a_3\mu^2) + (a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$({a_3}^2a_1\beta H^{*2} + {a_3}^2a_1\mu\beta H^* - a_3\sigma\gamma\beta H^{*2} - a_3\sigma\gamma\mu\beta H^*)$$
$$-(a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)\left(a_2\sigma\gamma\beta H^{*2} + a_2\sigma\gamma\mu\beta H^*\right)$$

$$+(a_2+\beta H^*+\mu)(a_3a_1a_2\beta H^{*2}+a_3a_1a_2\mu\beta H^*)$$
$$+(a_3+a_2)({a_2}^2\sigma\gamma\beta H^*+a_2\sigma\gamma\beta H^{*2}+a_2\sigma\gamma\mu\beta H^*)$$
$$+(\beta H^*+\mu)(a_3a_2\sigma\gamma\beta H^*+{a_2}^2\sigma\gamma\beta H^*+a_2\sigma\gamma\beta H^{*2}$$
$$+a_2\sigma\gamma\mu\beta H^*)+(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)(a_3+a_2+\beta H^*$$
$$+\mu)(\sigma\delta\alpha\beta H^*)+(a_2+\beta H^*+\mu)$$
$$\left({a_2}^2a_1\beta H^{*2}+{a_2}^2a_1\mu\beta H^*\right)-{a_2}^3a_3a_1\beta H^*$$
$$={a_2}^2{a_3}^3\beta H^*+{a_2}^2{a_3}^3\mu+{a_2}^3{a_3}^2\beta H^*+{a_2}^3{a_3}^2\mu$$
$$+{a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^*+[(\beta H^*+\mu)(a_1\beta H^*)+\sigma\gamma\,\beta H^*]$$
$$(a_2a_3(\beta H^*+\mu)+(a_3+a_2)a_1\beta H^*-\sigma\gamma\beta H^*)$$
$$+(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)\,(a_2{a_3}^2\beta H^{*2}+a_2{a_3}^2\mu\beta H^*$$
$$+{a_2}^2a_3\beta H^{*2}+{a_2}^2a_3\mu\beta H^*+a_2{a_3}^2\mu\beta H^*+a_2{a_3}^2\mu^2$$
$$+{a_2}^2a_3\mu\beta H^*+{a_2}^2a_3\mu^2)+(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)$$
$$[(a_3\beta H^{*2}+a_3\mu\beta H^*)(\sigma\delta+\sigma\mu+\mu\delta+\mu\gamma+\mu^2)]$$
$$-(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)\left(a_2\sigma\gamma\beta H^{*2}+a_2\sigma\gamma\mu\beta H^*\right)$$
$$+(a_2+\beta H^*+\mu)(a_3a_1a_2\beta H^{*2}+a_3a_1a_2\mu\beta H^*)$$
$$+(\beta H^*+\mu)(a_3a_2\sigma\gamma\beta H^*)+(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)$$
$$({a_2}^2\sigma\gamma\beta H^*+a_2\sigma\gamma\beta H^{*2}+a_2\sigma\gamma\mu\beta H^*)$$
$$+(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)(\sigma\delta\alpha\beta H^*)$$
$$+(a_2+\beta H^*+\mu)\left({a_2}^2a_1\beta H^{*2}+{a_2}^2a_1\mu\beta H^*\right)$$
$$-{a_2}^3a_3a_1\beta H^*$$
$$={a_2}^2{a_3}^3\beta H^*+{a_2}^2{a_3}^3\mu+{a_2}^3{a_3}^2\beta H^*+{a_2}^3{a_3}^2\mu$$
$$+{a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^*+[(\beta H^*+\mu)(a_1\beta H^*)+\sigma\gamma\,\beta H^*]$$
$$(a_2a_3(\beta H^*+\mu)+(a_3+a_2)a_1\beta H^*-\sigma\gamma\beta H^*)$$

$$+(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)\,(a_2{a_3}^2\beta H^{*2}+a_2{a_3}^2\mu\beta H^*$$
$$+{a_2}^2a_3\beta H^{*2}+{a_2}^2a_3\mu\beta H^*+a_2{a_3}^2\mu\beta H^*+a_2{a_3}^2\mu^2$$
$$+{a_2}^2a_3\mu\beta H^*+{a_2}^2a_3\mu^2)+(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)$$
$$[(a_3\beta H^{*2}+a_3\mu\beta H^*)(\sigma\delta+\sigma\mu+\mu\delta+\mu\gamma+\mu^2)]$$
$$+(a_2+\beta H^*+\mu)(a_3a_1a_2\beta H^{*2}+a_3a_1a_2\mu\beta H^*)$$
$$+(\beta H^*+\mu)(a_3a_2\sigma\gamma\beta H^*)+(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)$$
$$({a_2}^2\sigma\gamma\beta H^*+a_2\sigma\gamma\beta H^{*2}+a_2\sigma\gamma\mu\beta H^*-a_2\sigma\gamma\beta H^{*2}$$
$$-a_2\sigma\gamma\mu\beta H^*)+(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)$$
$$(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)(\sigma\delta\alpha\beta H^*)+(a_2+\beta H^*+\mu)$$
$$\left({a_2}^2a_1\beta H^{*2}+{a_2}^2a_1\mu\beta H^*\right)-{a_2}^3a_3a_1\beta H^*$$
$$={a_2}^2{a_3}^3\beta H^*+{a_2}^2{a_3}^3\mu+{a_2}^3{a_3}^2\beta H^*+{a_2}^3{a_3}^2\mu$$
$$+{a_2}^2{a_3}^2a_1\beta H^*+[(\beta H^*+\mu)(a_1\beta H^*)+\sigma\gamma\,\beta H^*]$$
$$(a_2a_3(\beta H^*+\mu)+(a_3+a_2)a_1\beta H^*-\sigma\gamma\beta H^*)$$
$$+(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)\,(a_2{a_3}^2\beta H^{*2}+a_2{a_3}^2\mu\beta H^*$$
$$+{a_2}^2a_3\beta H^{*2}+{a_2}^2a_3\mu\beta H^*+a_2{a_3}^2\mu\beta H^*$$
$$+a_2{a_3}^2\mu^2+{a_2}^2a_3\mu\beta H^*+{a_2}^2a_3\mu^2)$$
$$+(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)[(a_3\beta H^{*2}+a_3\mu\beta H^*)$$
$$(\sigma\delta+\sigma\mu+\mu\delta+\mu\gamma+\mu^2)]+(a_2+\beta H^*+\mu)$$
$$(a_3a_1a_2\beta H^{*2}+a_3a_1a_2\mu\beta H^*)+(\beta H^*+\mu)$$
$$(a_3a_2\sigma\gamma\beta H^*)+(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)$$
$$({a_2}^2\sigma\gamma\beta H^*)+(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)$$
$$(a_3+a_2+\beta H^*+\mu)(\sigma\delta\alpha\beta H^*)+(a_2+\beta H^*+\mu)$$
$$\left({a_2}^2a_1\beta H^{*2}+{a_2}^2a_1\mu\beta H^*\right)-{a_2}^3a_3a_1\beta H^*$$

$$= (\beta H^* + \mu)\left(a_2{}^2 a_3{}^3 + a_2{}^3 a_3{}^2 + a_3 a_2 \sigma\gamma\beta H^*\right)$$
$$+[(\beta H^* + \mu)(a_1\beta H^*) + \sigma\gamma\, \beta H^*](a_2 a_3(\beta H^* + \mu)$$
$$+a_2 a_1 \beta H^* + (\sigma\delta + \sigma\mu + \mu\delta + \mu\gamma + \mu^2)\beta H^*)$$
$$+(a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)[(a_2 a_3{}^2 \beta H^{*2} + a_2 a_3{}^2 \mu\beta H^*$$
$$+a_2{}^2 a_3 \beta H^{*2} + a_2{}^2 a_3 \mu\beta H^* + a_2 a_3{}^2 \mu\beta H^* + a_2 a_3{}^2 \mu^2$$
$$+a_2{}^2 a_3 \mu\beta H^* + a_2{}^2 a_3 \mu^2 + a_3 \mu\beta H^*)(\sigma\delta + \sigma\mu + \mu\delta$$
$$+\mu\gamma + \mu^2) + a_2{}^2 \sigma\gamma\beta H^* + (a_3 + a_2 + \beta H^* + \mu)$$
$$(\sigma\delta\alpha\beta H^*)] + (a_2 + \beta H^* + \mu)(a_3 a_1 a_2 \beta H^{*2}$$
$$+a_3 a_1 a_2 \mu\beta H^* + a_2{}^2 a_1 \beta H^{*2} + a_2{}^2 a_1 \mu\beta H^*)$$
$$+a_2{}^2 a_3{}^2 a_1 \beta H^* - a_2{}^3 a_3 a_1 \beta H^* > 0$$

Jadi $b_1 b_2 b_3 - b_3{}^2 - b_1{}^2 b_4 > 0$ dengan $H^* > 0$ jika $R_0 > 1$, dan $a_2{}^2 a_3{}^2 a_1 \beta H^* > a_2{}^3 a_3 a_1 \beta H^*$.

Telah ditunjukkan $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0, b_4 > 0$, $b_1 b_2 - b_3 > 0$, dan $b_1 b_2 - b_3{}^2 - b_1{}^2 b_4 > 0$ berakibat semua nilai eigen pada persamaan (4.30) memilki nilai real negatif sehingga kestabilan pada titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal apabila $R_0 > 1$ dan tidak stabil apabila apabila $R_0 < 1$.

D. Simulasi Numerik

Simulasi model akan dilakukan menggunakan Matlab R2013a yang dilakukan terhadap titik ekuilibrium bebas pelaku pelecehan seksual (P_0) dan titik ekuilibrium endemik (P_1).

a. Simulasi Keadaan Bebas Pelaku Pelecehan

Simulasi numerik keadaan bebas pelaku pelecehan seksual dilakukan dengan menggunakan asumsi nilai awal (Wijayanti, Nteseo, Aini, & Toaha, 2020) populasi yang berpotensi menjadi pelaku pelecehan seksual yaitu $P(1)$=500, populasi pelaku pelecehan seksual yang belum di hukum atau $H(1)$=350, populasi pelaku pelecehan seksual yang diberikan hukuman atau $C(1)$=0, dan populasi pelaku pelecehan seksual yang sudah berhenti $Q(1)$=295. Penelitian ini dianalisis menggunakan nilai parameter yang tertera pada **Tabel 4.3** berikut:

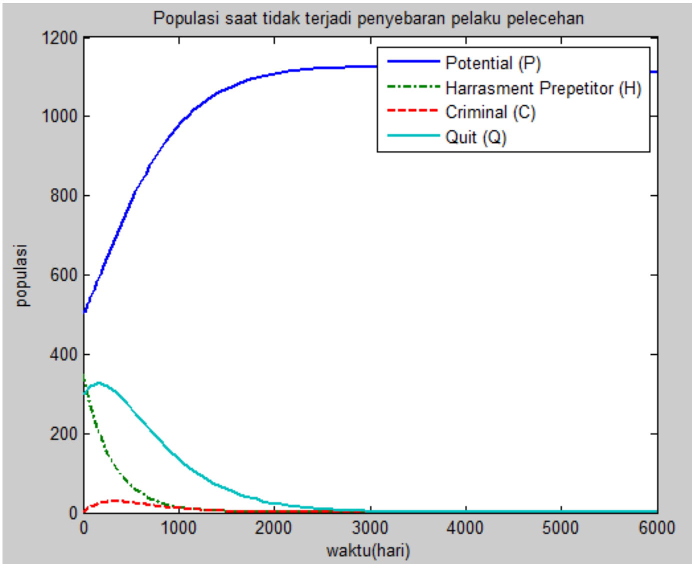
Tabel 4. 3 Nilai-nilai Parameter

Parameter	Nilai	Satuan	Keterangan
β	0.00000007	Perhari	Asumsi
γ	0.003	Perhari	(Lemecha & Feyissa, 2018)
δ	0.0007	Perhari	(Lemecha & Feyissa, 2018)
σ	0.0021	Perhari	(Fantaye & Birhanu, 2022)
α	0.003	Perhari	(Lemecha & Feyissa, 2018)
μ	0.0000005	Perhari	Asumsi

Berdasarkan pada **Tabel 4.3** yang memuat parameter, maka diperoleh bilangan reproduksi dasar berdasarkan persamaan (4.15), yaitu:

$$R_0 = \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)} = 0{,}00069965 < 1$$

Simulasi keadaan bebas pelaku pelecehan seksual ditunjukkan dengan Matlab R2013a dengan interval waktu 0 sampai 6000.



Gambar 4. 2 Grafik dinamika saat $R_0 < 1$

Pada **Gambar 4.2** terlihat bahwa laju pertumbuhan populasi yang berpotensi menjadi pelaku pelecehan seksual (P) mengalami kenaikan sebab individu yang merasa tidak jera dengan hukuman yang diberikan kembali menjadi individu yang berpotensi menjadi pelaku pelecehan seksual serta penambahan dari laju kelahiran dan stabil di titik tersebut. Populasi pelaku pelecehan seksual yang belum di hukum (H) mengalami penurunan hingga nol yang mengindikasikan bahwa pelaku pelecehan seksual akan hilang ketika mencapai keadaan setimbang pada waktu t tertentu. Populasi pelaku pelecehan seksual yang diberikan hukuman (C) mengalami kenaikan hingga mencapai titik tertentu, namun setelahnya mengalami penurunan sebab tidak ada penambahan individu populasi pelaku pelecehan seksual yang belum di hukum (H) yang berubah menjadi individu populasi pelaku pelecehan seksual yang diberikan hukuman (C). Populasi pelaku pelecehan seksual yang sudah berhenti (Q) mengalami kenaikan hingga mencapai titik tertentu, namun setelahnya mengalami penurunan sebab tidak ada penambahan individu populasi pelaku pelecehan seksual yang diberikan hukuman (C) atau individu populasi pelaku pelecehan seksual yang belum di hukum (H) yang berubah menjadi individu populasi pelaku pelecehan seksual yang sudah berhenti (Q).

Berdasarkan gambar tersebut, titik ekuilibrium bebas pelaku pelecehan seksual $P_0 = (1,0,0,0)$ bersifat stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$ dan pada saat t

6000, artinya tidak terdapat penyebaran pelaku pelecehan seksual dalam populasi.

b. Simulasi Keadaan Endemik

Simulasi numerik keadaan endemik pelaku pelecehan seksual dilakukan dengan menggunakan asumsi nilai awal populasi (Wijayanti, Nteseo, Aini, & Toaha, 2020) yang berpotensi menjadi pelaku pelecehan seksual yaitu $P(1)$=5000, populasi pelaku pelecehan seksual yang belum di hukum atau $H(1)$=4000, populasi pelaku pelecehan seksual yang diberikan hukuman atau $C(1)$=0, dan populasi pelaku pelecehan seksual yang sudah berhenti $Q(1)$=0. Penelitian ini dianalisis menggunakan nilai parameter yang tertera pada **Tabel 4.4** berikut:

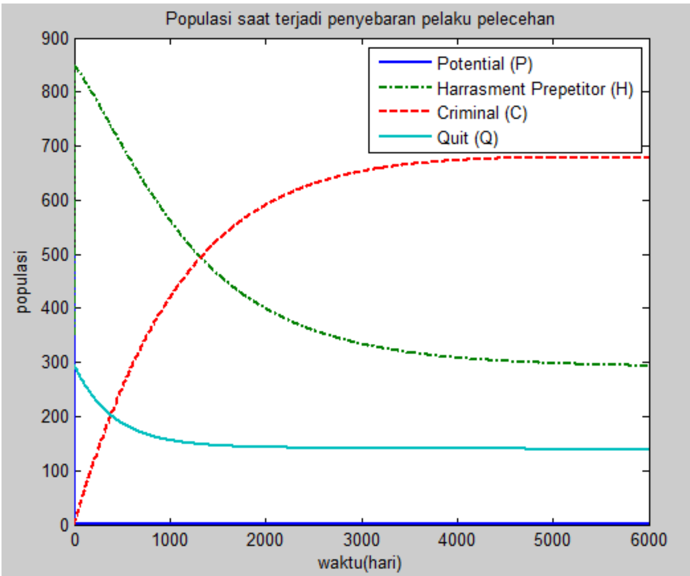
Tabel 4. 4 Nilai-nilai Parameter

Parameter	Nilai	Satuan	Keterangan
β	0.023	Perhari	(Islam, Parvin, & Biswas, 2022)
γ	0.0003	Perhari	(Lemecha & Feyissa, 2018)
δ	0.0007	Perhari	(Lemecha & Feyissa, 2018)
σ	0.0021	Perhari	(Fantaye & Birhanu, 2022)
α	0.0003	Perhari	(Lemecha & Feyissa, 2018)
μ	0.0000005	Perhari	Asumsi

Berdasarkan **Tabel 4.4** yang memuat parameter, maka diperoleh bilangan reproduksi dasar berdasarkan persamaan (4.15), yaitu:

$$R_0 = \frac{\beta}{(\delta + \gamma + \mu)} = 22{,}988505 > 1$$

Simulasi keadaan endemik ditunjukkan denga Matlab R2013a dengan interval waktu 0 sampai 6000.



Gambar 4. 3 Grafik dinamika saat $R_0 > 1$

Pada **Gambar 4.3** terlihat bahwa laju pertumbuhan populasi yang berpotensi menjadi pelaku pelcehan seksual (P) mengalami penurunan dan tidak mengalami perubahan sebab individu populasi yang berpotensi menjadi pelaku pelcehan seksual (P) telah berubah menjadi individu pada populasi pelaku pelecehan seksual yang belum di hukum (H). Laju pertumbuhan individu populasi pelaku pelecehan seksual yang belum di hukum (H) mengalami penurunan hingga tidak mengalami perubahan atau dalam keadaan setimbang pada waktu t tertentu sebab individu pada populasi pelaku pelecehan seksual yang belum di hukum (H) dapat berubah menjadi individu populasi pelaku pelecehan seksual yang diberikan hukuman (C) atau individu populasi pelaku pelecehan seksual yang sudah berhenti (Q). Laju pertumbuhan populasi pelaku pelecehan seksual yang diberikan hukuman (C) mengalami kenaikan hingga tidak mengalami perubahan atau setimbang pada waktu t tertentu sebab individu populasi pelaku pelecehan seksual yang belum di hukum (H) yang telah menjadi individu populasi pelecehan seksual yang diberikan hukuman (C). Laju pertumbuhan populasi pelaku pelecehan seksual yang sudah berhenti (Q) mengalami penurunan hingga tidak mengalami perubahan atau setimbang pada waktu t tertentu sebab individu populasi pelaku pelecehan seksual yang sudah berhenti

(Q), namun belum merasa jera dengan hukuman yang diberikan kembali menjadi individu yang berpotensi menjadi pelaku pelecehan seksual (P) .

Berdasarkan gambar tersebut, titik ekuilibrium endemik $P_1 = (P^*, H^*, C^*, Q^*)$ bersifat stabil asimtotik lokal ketika $R_0 > 1$ dan pada saat t 6000, artinya terdapat penyebaran pelaku pelecehan seksual dalam populasi.

BAB V
PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, diperoleh kesimpulan, yaitu:

1. Model matematika pelaku pelecehan seksual dengan hukum tindak pidana sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = \mu - \beta PH + \sigma Q - \mu P$$

$$\frac{dH}{dt} = \beta PH - \delta H - \gamma H - \mu H$$

$$\frac{dC}{dt} = \delta H - \alpha C - \mu C$$

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha C + \gamma H - \sigma Q - \mu Q$$

2. Model matematika pelaku pelecehan seksual dengan hukum tindak pidana mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas pelaku pecehan seksual $P_0 = (P, H, C, Q) = (1,0,0,0)$, dan titik ekuilibrium endemik $P_1 = (P^*, H^*, C^*, Q^*) = \left(\frac{(\delta+\gamma+\mu)}{R_0(\delta+\gamma+\mu)}, \frac{A(\beta-(\delta+\gamma+\mu))}{\beta D}, \frac{\delta H^*}{\alpha+\mu}, \frac{\alpha\delta+(\alpha+\mu)\gamma}{A} H^*\right)$ dengan $A = (\alpha + \mu)(\sigma + \mu)$, $D = ((\alpha + \mu)(\sigma + \delta + \gamma + \mu) + \sigma\delta)$ serta diperoleh bilangan reproduksi dasar $R_0 = \frac{\beta}{(\delta+\gamma+\mu)}$. Berdasarkan analisis kestabilan titik

ekuilibrium yang dilakukan, diperoleh hasil sebagai berikut:

a. Jika $R_0 < 1$ maka titik P_0 stabil asimtotik lokal.
b. Jika $R_0 > 1$ maka titik P_1 stabil asimtotik lokal.

Berdasarkan simulasi numerik pada pembahasan sebelumnya, diperoleh hasil bahwa ketika $R_0 < 1$ maka pelaku pelecehan seksual tidak akan tersebar dengan kata lain pelaku pelecehan seksual akan menghilang dari populasi untuk waktu yang akan datang. Ketika $R_0 > 1$ maka terjadi penyebaran pelaku pelecehan seksual dengan kata lain pelaku pelecehan akan tetap ada pada populasi untuk waktu yang akan datang.

B. Saran

Penelitian ini membahas mengenai pembentukan model matematika pelaku pelecehan seksual dengan hukum tindak pidana, untuk peneliti selanjutnya dapat melakukan modifikasi dengan mengembangkan model, dan memberi perlakuan yang berbeda pada model.

DAFTAR PUSTAKA

Adhiguna, K., & Pujiyanta, A. (2014). Aplikasi Bantu Untuk Menentukan Nilai Eigen dan Vektor Eigen Berrbasis Multimedia. *Jurnal Sarjana Teknik Informatika*, Vol 2 Nomor 1.

Aleng, C. A. (2020). Sanksi Hukum TerhadapPelecehan Seksual Secara Verbal. *Lex Crimen*, Vol 10 No 2.

Aman, K. R. (2019). *About Us: The Coalition for Safe Public Space (KRPA)*. Diambil kembali dari The Coalition for Safe Public Space Web site: http://ruangaman.org/survei2019/

Andari, A. (2017). *Aljabar Linear Elementer.* Malang: UB Express.

Aswan. (2018). Pembatasan Dinamika Merokok dengan Menggunakan Pendekatan Model Matematika, Makassar: FST UIN Alauddin Makassar.

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). *Elementary Diferential Equations and Boundary Value Problem.* New york: United Statof Americae.

Braurer, F., Driessche, P. v., & Wu, J. (2008). *Mathematical Epidemiology.* Canada: Springer.

Cahyono, E. (2013). *Pemodelan Matematika.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Effendi, E. (2019). Pelecehan Seksual dan Penafsiran Perbuatan Cabul dalam Hukum Pidana Indonesia. *Jurnal IlmuHukum: Fakultas Hukum Universitas Riau*, Vol 8 No2.

Fantaye, A. K., & Birhanu, Z. K. (2022). Matematical Model and Analysis of Corruption Optimal Control. *Journal of Applied Mathematics*, 16.

Gunadi, I., & Efendi, J. (2014). *Cepat dan Mudah Memahami Hukum Pidana.* Jakarta: PT Fajar Interpratama Mandiri.

Hermawan, S., & Amirullah. (2016). *Metode Penelitian Bisnis Pendekatan Penelitian Kuantitatif dan Kualitatif.* Malang: Media Nusa Creative.

Islam, K. N., Parvin, T., & Biswas, M. H. (2022). Dynamic Optimization Aplied to a Criminological Model For Reducing The Spread of Societal Corruption. *Oringinal Article Science and Engineering*, 832-844.

Iswanto, R. J. (2012). *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Kartika, Y., & Najemi, A. (2020). Kebijakan Hukum Perbuatan Pelecehan Seksual (Catcalling) dalam Perspektif Hukum Pidana. *Journal of Criminal Low*, Vol 1 No 2.

Kristiani, N. M. (2014). Kejahatan Kekerasan Seksual (Perkosaan) Ditinjau dari Perspektif Kriminologi. *Jurnal Magister Hukum Udayana*, Vol 7 No 3.

Kurniawati, I., & Rosyidi, A. H. (2019). Profil Pemodelan Matematika Siswa SMP Dalam Menyelesaikan Masalah Pada Materi Fungsi Linear. *Ilmiah Pendidikan Matematika*, Vol 8 No 2.

Lemecha, L., & Feyissa, S. (2018). Mathematics Modeling and Analysis of Corruption Dynamics. *Ethiopian Journal of Science and Sustainable Development*.

Manaqib, M. (2021). *Pemodelan Matematika.* Jakarta: UIN Syarif Hidayatulah.

Murtafi'ah, W., & Apriandi, D. (2018). *Persamaan Diferensial dan Aplikasinya.* Madiun: UNIPMA Press.

Ndii, M. Z. (2018). *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, dan Numerik.* Sleman: Penerbit Deepublish (Grup Penerbitan CV BUDI UTAMA).

Nurfadilah, Fardinah, & Hikmah. (2021). Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Ispa. *Journal of Mathematics; Theory and Applications*.

Olsder, G. J., & Woude, J. W. (1998). *Mathematical System Theory.* Netherlands: Delft Blue Print.

Putra, R. T., Sukatik, & Nita, S. (2016). Kestabilan Model Epidemi SEIR dengan Matriks Hurwitz. *Poli Rekayasa*, Vol 11 No 2.

Radja, J. B., & Ndii, M. Z. (2022). Simulasi Numerik Model Matematika untuk Menganalisis Relasi Antara Korupsi dan Dinamika Penyebaran Penyakit Menular. *Jambura Journal of Biomathematics*, Vol 3 no 1.

Saparwadi, L. (2011). Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Heroin Dalam Model Sistem Persamaan Diferensial. *Beta*, 133-150.

Side, S., Zaki, A., & Sartika. (2021). Pemodelan Matematika SIRI pada Penyebaran Penyakit Tifus di Sulawesi Selatan. *Journal of Mathetics, Computations, and Statistics*, 55-65.

Siti K. (2020). Analisis Dinamik Model Penyebaran Penyalahgunaan Narkoba Kelompok Individu yang Direhabilitasi, Semarang: FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Sumera, M. (2013). Perbuatan Kekerasan/Pelecehan Seksual Terhadap Perempuan. *Lex et Socieatis*, Vol 1 No 2.

Suprihatin, & Azis, A. M. (2020). Pelecehan Seksual Pada Jurnalis Perempuan di Indonesia. *Jurnal Studi Gender*, Vol 13 No 2.

Syari'ah, I., & Prawoto, B. P. (2022). Analisis Model Perilaku Perokok dengan Adanya Faktor Kekambuhan Merokok. *Jurnal Ilmiah Matematika*, Vol 10 No 02.

Tamara, A. L., & Budyatmojo, W. (2016). Kajian Kriminologi Terhadap Pelaku Pelecehan Seksual yang Dilakukan Oleh Wanita Terhadap Pria. *Recidive*, Vol 5 No 3.

Tjolleng, A., Komalig, H. A., & Prang, J. D. (2013). Dinamika Perkembangan HIV/AIDS di Sulawesi Utara Menggunakan Model Persamaan Diferensial Nonlinier SIR (Suspectible, Infectious and Recovered). *Jurnal Ilmiah Sains* , Vol 13 no 1.

Toaha, S., Khaeruddin, & A.R, M. (2014). Model SIR untuk Penyebaran Penyakit Flu Burung. *Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi*, Vol 10 no 2.

Trihartanto, R., Supriyono, & Muhammad Kharis. (2018). Model Matematika Populasi Perokok pada Daerah yang Menerapkan Denda. *UNNES Journal of Mathematics*, 1-17.

Virgitasari, A., & Irawan, A. D. (2022). Pelecehan Seksual Terhadap Korban Ditinjau dari Permendikbud Nomor 30 Tahun 2021. *Media Of Law And Sharia*, Vol 3 Issue 2.

Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* New York: Springer-Verlag New York, Inc.

Wijayanti, A. D., Nteseo, S., Aini, N., & Toaha, D. (2020). Model Matematika Dinamika Populasi Perokok dengan Faktor Edukasi dan Candy Treatment. 1-8.

Wijayanti, A. D., Nteseo, S., Aini, N., & Toaha, D. (t.thn.). Model Matematika Dinamika Populasi Perokok dengan Faktor Edukasi dan Candy Treatment. 1-8.

Wijayanti, I. E., Wahyuni, S., & Susanti, Y. (2015). *Dasar-Dasar Aljabar Linear.* Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

Wijoyo, H., Devi, W. S., Ariyanto, A., & Sunarsi, D. (2021). The Role of Regular Tax Functions in the Pandemic Period Covid-19 at Pekanbaru. *Terapan informatika Nusantara*, Vol 1 No 10.

Yunus, A., & Fathorrahman. (2022). Kejahatan Seksual Terhadap Anak. *Jurnal Hukum*, Vol 2 No 1.

LAMPIRAN

Lampiran 1: Program Simulasi Numerik Model Matematika Pelaku Pelecehan Seksual dengan Hukum Tindak Pidana

1. Program simulasi numerik ketika tidak terjadi penyebaran perilaku pelaku pelecehan seksual

   Pendefinisian model

```
function [dx] = harrasment( t,x )
global mu beta delta gamma sigma alpha;
dx=zeros(4,1);
dx(1)=mu-(beta*x(1)*x(2))+(sigma*x(4))-
(mu*x(1));
dx(2)=(beta*x(1)*x(2))-(delta*x(2))-
(gamma*x(2))-(mu*x(2));
dx(3)=(delta*x(2))-(alpha*x(3))-(mu*x(3));
dx(4)=(alpha*x(3))+(gamma*x(2))-
(sigma*x(4))-(mu*x(4));
end
```

   Program utama

```
clear;
clc;
%Nilai Parameter
global mu beta delta gamma sigma alpha;
mu=0.000005;
beta=0.0000007;
delta=0.0007;
gamma=0.003;
sigma=0.0021;
alpha=0.003;
[t,x]=ode45('harrasment',[0 6000],[500 350 0
295]);

figure (1)
plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'-.',t,x(:,3),'--
',t,x(:,4),'-','LineWidth',2);
```

```
xlabel('waktu(hari)');
ylabel('populasi');
legend('Potential (P)','Harrasment
Prepetitor (H)','Criminal (C)','Quit (Q)');
title('Populasi saat tidak terjadi
penyebaran pelaku pelecehan');
```

2. Program simulasi numerik ketika terjadi penyebaran perilaku pelaku pelecehan seksual

   Pendefinisian model

```
function [dx] = harrasment( t,x )
global mu beta delta gamma sigma alpha;
dx=zeros(4,1);
dx(1)=mu-(beta*x(1)*x(2))+(sigma*x(4))-
(mu*x(1));
dx(2)=(beta*x(1)*x(2))-(delta*x(2))-
(gamma*x(2))-(mu*x(2));
dx(3)=(delta*x(2))-(alpha*x(3))-(mu*x(3));
dx(4)=(alpha*x(3))+(gamma*x(2))-
(sigma*x(4))-(mu*x(4));
end
```

   Program utama

```
clear;
clc;
%Nilai Parameter
global mu beta delta gamma sigma alpha;
mu=0.000005;
beta=0.023;
delta=0.0007;
gamma=0.0003;
sigma=0.0021;
alpha=0.0003;
[t,x]=ode45('harrasment',[0 6000],[500 350 0
295]);

figure (1)
```

```
plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'-.',t,x(:,3),'--
',t,x(:,4),'-','LineWidth',2);
xlabel('waktu(hari)');
ylabel('populasi');
legend('Potential (P)','Harrasment
Prepetitor (H)','Criminal (C)','Quit (Q)');
title('Populasi saat terjadi penyebaran
pelaku pelecehan');
```

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

Nama Lengkap	: Dyah Ayu Srilinangkung
Tempat Tanggal Lahir	: Yogyakarta, 30 Juli 1999
Alamat	: Jl. Diponegoro Gg. V No. 51, Sitimulyo, Cepu, Jawa Tengah
Nomor HP	: 085228420717
E-mail	: ilinangkung37@gmail.com

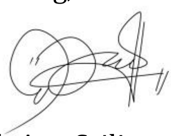
B. Riwayat Pendidikan

Pendidikan Formal:

1. SDN 06 Cepu lulus tahun 2011
2. Pondok Modern Darussalam Gontor Putri Kampus 1 Ngawi lulus tahun 2017

Pendidikan Non Formal: -

Semarang, 26 Desember 2022



Dyah Ayu Srilinangkung

NIM. 1808046031