UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática
Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Tesis Doctoral

SIGNIFICADOS ATRIBUIDOS POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COSTA RICA AL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Yosenith González Flores

Granada, 2023

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Yosenith González Flores
ISBN: 978-84-1117-974-4
URI: https://hdl.handle.net/10481/84390

Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática
Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Tesis Doctoral

SIGNIFICADOS ATRIBUIDOS POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COSTA RICA AL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección del Dr. Juan Francisco Ruiz Hidalgo y la Dra. Ana Belén Montoro Medina, del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Yosenith González Flores, para optar por el grado de Doctora en Ciencias de la Educación en la línea Educación Matemática.

Fdo.: Yosenith González Flores

VºBº de los directores

Fdo.: Dr. Juan Francisco Ruiz Hidalgo　　　　Fdo.: Dra. Ana Belén Montoro Medina

La doctoranda **Yosenith González Flores** y los directores de la tesis el **Dr. Juan Francisco Ruiz Hidalgo** y la **Dra. Ana Belén Montoro Medina** garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por la doctoranda bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

En Granada, a 14 de julio de 2023

Doctoranda:

Fdo.: Yosenith González Flores

Directores de la Tesis:

Fdo.: Dr. Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Fdo.: Dra. Ana Belén Montoro Medina

Este trabajo de tesis doctoral se realizó dentro del grupo de Investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada*, del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM193). Además, se realizó en el marco de dos proyectos financiados por el Ministerio de Ciencia y Tecnología de España: el Proyecto I+D+I PCG2018-095765-B-100, titulado “Competencia profesional del profesor en formación inicial y educación STEM” y el proyecto PID2021-128261NB-I00, “Proyectos de Educación STEAM y aprendizaje escolar”, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER Una manera de hacer Europa.

A mi esposo Christian que siempre me
apoya en todo lo que me propongo.
Esto es de ambos ¡MI AMOR!

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, deseo expresar mi más profundo agradecimiento a mis directores Juan Francisco Ruiz Hidalgo y Ana Belén Montoro Medina, por su guía durante todo este tiempo. Gracias por el compromiso con el trabajo, por su paciencia y comprensión que tuvieron conmigo en todo momento. Por todo el conocimiento que compartieron conmigo y por esa calidez y cercanía que siempre mantuvieron a pesar de la distancia física que nos separaba y que nunca fue un obstáculo para trabajar. Gracias por siempre tener las palabras adecuadas que me alentaban a seguir trabajando. Me siento afortunada y feliz de haber vivido este proceso en su compañía.

También, deseo agradecer a los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática, por compartir su conocimiento y contribuir de a mi formación académica.

Y mi más profundo agradecimiento para mi esposo Christian Alfaro Carvajal, por su apoyo en todo momento, su amor, paciencia y palabras que me animaban a continuar trabajando, para culminar con éxito este proceso de formación.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Esta memoria de tesis doctoral pretende caracterizar los significados expresados por estudiantes universitarios cuando se les pregunta por el concepto de límite de una función en un punto. Esta caracterización se realiza en dos momentos diferentes y considerando dos niveles de complejidad cognitiva. En un nivel elemental nos centramos en la caracterización de los hechos matemáticos que los estudiantes expresan, las representaciones que utilizan, las aplicaciones que sugieren y los modos de uso del término límite. En segundo nivel de complejidad, nos centramos en describir los razonamientos sobre el límite que evidencian los estudiantes.

El sustento teórico de nuestro estudio corresponde con la noción de significado de un contenido matemático escolar, el cual ha sido ampliamente estudiado y desarrollado en educación matemática por distintos autores. Concretamente, en nuestra investigación empleamos la noción de significado desde una perspectiva semántica planteada por Rico (Rico, 2012; Rico, 2013; 2016a; Rico, 2016b), constituida por tres componentes: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos y los modos de uso. Dentro de este marco del significado de un contenido matemático escolar, los razonamientos se ubican el campo procedimental de la estructura conceptual. Para caracterizar los razonamientos que evidencian los estudiantes en la resolución de tareas matemáticas asociadas al concepto de límite, usamos una actualización del modelo de Toulmin (1958) que proponen Reid y Knipping (2010) y Stylianides (2007) para la educación Matemática. Dicho modelo requiere conocer determinados resultados propios de los límites y la continuidad, por lo que nuestro marco teórico también incluye un apartado matemático en el que hemos anotado definiciones, teoremas y ejemplos relacionados con el concepto matemático de límite de una función.

Metodológicamente, este trabajo se enmarca dentro de las investigaciones de diseño mixto, de alcance exploratorio y descriptivo (Cohen et al., 2018; Hernández et al., 2014). Diseñamos dos cuestionarios semánticos (Matthewson, 2004) que nos permitieron recoger información sobre las ideas que tienen los estudiantes sobre límite en dos momentos diferentes: al principio de su instrucción y después de la misma. Los documentos analizados corresponden a producciones escritas proporcionadas por 218 estudiantes de la asignatura Cálculo I de distintas titulaciones de la Universidad Nacional de Costa Rica. El método de análisis de los datos se realizó a través de un análisis de contenido, un análisis *cluster* jerárquico y un análisis *cluster* no jerárquico de k-Medias con una iteración.

Los datos se organizaron usando un sistema de categorías adaptado de investigaciones previas (Fernández-Plaza et al., 2013b; González-Flores et al., 2021) que, a su vez, utilizan referentes clásicos (p.e., Blázquez y Ortega, 1998; Cornu, 2002; Cottrill et al., 1996; Monaghan, 1991; Sfard, 1991). Este primer sistema de categorías nos permitió caracterizar los significados expresados por los estudiantes usando elementos de un primer nivel de complejidad cognitiva. Adicionalmente, elaboramos otro sistema de categorías basado en los cuatro elementos del modelo de Toulmin adaptado a la educación Matemática por Reid y Knipping (2010) y tres elementos que propone Stylianides (2007) para describir los razonamientos realizados por los estudiantes. Por último, consideramos 3 tipos de errores matemáticos y para ello nos basamos en lo que exponen Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza (2013). Para este último sistema de categoría realizamos de manera inductiva modalidades de respuesta de los estudiantes. Estos sistemas de categorías nos permiten describir los significados del concepto de límite que expresan los estudiantes de forma ágil y precisa.

En cuanto a los resultados, tenemos que al límite lo describen mayoritariamente las nociones de objeto y proceso, lo representan usando representaciones gráficas cartesianas y lo interpretan o usan mediante términos de posición relativa, subrayando aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad.

La mayor diferencia que observamos durante la enseñanza del concepto de límite y después de la enseñanza de este concepto es el nivel de detalle en cada una de las respuestas a las preguntas de los cuestionarios. Durante la enseñanza del límite, las respuestas de los estudiantes tienen un gran nivel de detalle, tanto en las definiciones, en las representaciones y en los términos y modos de uso que brindan, sin embargo, posterior a la enseñanza las respuestas son muy escuetas y disminuye la variedad de elementos en cada una de ellas. Otro detalle digno de resaltar es que durante la enseñanza del límite una gran mayoría de

estudiantes evidencian aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad, mientras que posterior a la enseñanza, casi no están presente en sus respuestas.

Esas características nos permiten organizar a los estudiantes en cuatro grupos o perfiles por similitud: significado ingenuo, significado representado gráficamente, significado enriquecido, significado representado no gráficamente. Estas agrupaciones, además, nos permiten comparar los significados expresados por los estudiantes en los dos momentos, antes y después de la formación: los resultados no son concluyentes, pero se observa que un gran número de estudiantes (40%) no cambian su perfil de respuesta, esto es, manifiestan el mismo significado durante y después de su formación.

En cuanto a los razonamientos, en las modalidades de respuesta de cada una de las ocho componentes consideradas, observamos variedad en las justificaciones y en los modos de argumentar que brindan los estudiantes en la resolución de tareas matemáticas vinculadas al concepto de límite.

Concluimos que el sistema de categorías que hemos elaborado es muy completo y novedoso, ya que a pesar de que se basa está en estudios previos, mejora ampliamente las categorías que han propuesto otros autores, lo que nos permitió analizar las definiciones, las representaciones, las intuiciones, los términos y los modos de uso del concepto de límite que brindan los estudiantes, en dos momentos distintos de su formación.

Realizamos una comparación del significado desde un primer nivel de complejidad cognitiva, al puntualizar en los hechos, propiedades, términos, palabras, representaciones, términos y modos de uso del límite, y nos dimos cuenta del cambio del significado que evidencian los estudiantes durante la enseñanza de este concepto y posterior a la misma.

El análisis de los razonamientos que hemos realizado lo consideramos atinado e innovador, dado que desconocemos investigaciones en esta línea; creemos que puede ser pionero para futuros estudios relacionados. A partir del análisis de los razonamientos nos introducimos en un nivel de mayor complejidad cognitiva en el marco del significado de un contenido matemático escolar.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo describimos el planteamiento de la investigación. Presentamos primero una introducción de nuestro estudio, en el que brindamos una pincelada del mismo; seguidamente describimos la estructura de la tesis, en la que explicamos cómo está organizado cada capítulo; en tercer lugar, se encuentran algunos de los antecedentes de nuestro trabajo; para finalmente, delimitar el problema de investigación presentando los objetivos propuestos para esta tesis.

1.1 INTRODUCCIÓN

Los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral tienen gran importancia dentro de la investigación en la Educación Matemática (Jacques y Viol, 2020). Particularmente, el concepto matemático de Límite ha sido objeto de investigación en educación matemática desde los trabajos pioneros de David Tall y Solomon Vinner (Tall, 1980; Tall y Vinner, 1981) y continúa en la actualidad (González-Flores et al., 2021; Güçler, 2013; Przenioslo, 2004). Uno de los motivos de este interés es que se trata de un elemento central dentro del análisis matemático, concretamente es el fundamento de la teoría de la aproximación, de la continuidad y del cálculo diferencial e integral (Cornu, 2002; Kidron, 2014). El interés también puede ser debido a que se trata de un elemento incluido en muchos currículos escolares (p.e. Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Pero sin duda, la razón principal de este interés en investigar sobre límites se debe a la complejidad del concepto de límite y las dificultades para su enseñanza y aprendizaje (Cornu, 2002), que provoca que diversos autores realicen investigaciones para profundizar en los diferentes aspectos vinculados a su comprensión (p.e., Kidron y Tall, 2014; Swinyard, 2011; Tall y Katz, 2014). Debido a la estrecha relación entre comprensión y significado (Thompson, 2016), uno de los aspectos en los que se centran algunas investigaciones es en los significados que expresan estudiantes de secundaria y universidad.

En efecto, autores como Blázquez (1999, 2000), Fernández-Plaza et al. (2013b), Monaghan (1991) o Williams (1991) han determinado que los estudiantes poseen una noción intuitiva del límite y lo describen con términos tales como tender, aproximar, alcanzar, rebasar y límite… Asimismo, señalan que algunos docentes de matemáticas emplean estos mismos términos en sus clases y, por tanto, sus estudiantes los usan con un sentido cotidiano que dista del significado matemático asociado a la definición. No obstante, otros autores como Sierra et al. (2000) plantean que algunas concepciones y términos que emplean los estudiantes pueden relacionarse con concepciones epistemológicas que en su momento fueron planteadas por matemáticos como Jean le Rond D'Alembert, que afirmaba que el límite no se puede alcanzar, y Augustin Louis Cauchy, para quien era alcanzable.

Según distintos autores existen dificultades asociadas a la noción de límite. Tall (1980) y Tall y Vinner (1981) indican que la transición entre la definición informal y formal del límite puede generar muchos conflictos en los estudiantes. Específicamente, se pueden trasladar propiedades implícitas de la noción informal a la formal tales como considerar al límite como un proceso dinámico y no con un número. Asimismo, se presentan conflictos como la resistencia a aceptar la no existencia del límite, la incomprensión de que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto, la incorrecta interpretación de los límites laterales, las manipulaciones algebraicas erróneas de las leyes de las funciones, el asumir que el cálculo del límite es siempre por sustitución y las dificultades para pasar de un sistema de representación a otro. Con respecto a esto último, cabe destacar que hay estrechas relaciones entre los sistemas de representación utilizados por los docentes y los utilizados por los estudiantes (Blázquez y Ortega, 1998; Blázquez y Ortega, 2001; Palomino et al., 2009; Romero, 1997; Vrancken et al., 2006).

Preocupados por estas investigaciones y continuando el trabajo comenzado en el grupo de investigación FQM193 de la Universidad de Granada, este trabajo pretende caracterizar los significados atribuidos por estudiantes universitarios de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) al concepto de límite de una función en un punto. Para ello nos propusimos describir y compararlos significados del concepto de límite de una función en un punto que manifiestan estudiantes universitarios durante su enseñanza y posterior a su enseñanza.

El fundamento teórico de nuestra investigación corresponde al concepto de significado de un contenido matemático escolar, el cual ha sido investigado y profundizado en educación matemática por distintos autores tales como Steinbring (1997, 2006), Vergnaud (2009, 2013), Kilpatrick et al. (2005), Thompson (2013, 2016), Thompson y Milner (2019), o Byerley y Thompson (2017). Concretamente para nuestro estudio empleamos la noción de significado desde una perspectiva semántica planteada por Rico (Rico, 2012; Rico, 2013; 2016a; Rico, 2016b).

Las tres componentes del significado de un contenido matemático escolar que consideramos en nuestro estudio son: la estructura conceptual, dividida en campo conceptual, campo procedimental y en campo actitudinal; los sistemas de representación; y, el sentido y los modos de uso (Fernández-Plaza, 2016; Rico,1997). Concretamente, con respecto a la estructura conceptual, nos centramos en el análisis de hechos y razonamientos, que pertenecen al campo conceptual y procedimental respectivamente; y, dentro del sentido, en los términos y modos de uso y las situaciones.

Para obtener información acerca del significado que tienen los estudiantes del concepto de límite, elaboramos dos cuestionarios semánticos de elicitación directa (Matthewson, 2004) con preguntas de respuesta abierta que se administrarían a los estudiantes durante la enseñanza del concepto de límite y posterior a su enseñanza.

El cuestionario 1 consta de cuatro tareas que permiten indagar sobre el significado del concepto de límite, en un primer nivel de complejidad cognitiva, pues se realizó cuando los estudiantes ya habían tenido su primera toma de contacto con el concepto de límite. Dichas tareas nos proporcionarían datos para analizar aspectos de las tres componentes del significado. El cuestionario 2 amplía dicho análisis para incluir los razonamientos de los estudiantes al aplicar dicho concepto. Estos razonamientos tienen mayor nivel de complejidad cognitiva, por lo que solo se preguntaron tras finalizar la enseñanza del concepto de límite y de los conceptos de continuidad y derivabilidad. En definitiva, se diseñaron 5 tareas: las dos primeras tareas suponen pequeñas modificaciones de las tareas del cuestionario 1; las otras tres, piden a los estudiantes resolver un límite dado o establecer algún vínculo del concepto de límite con el de continuidad y el de derivabilidad.

El primer contacto con el concepto de límite en Costa Rica se produce en la Universidad, y más concretamente, en la asignatura de Cálculo I, que se imparte en Biología, Cartografía y Diseño Digital, Comercio y Negocios Internacionales, Enseñanza de las Ciencias, Enseñanza de las Matemáticas, Economía, Administración, Ingeniería en Química Industrial, Ingeniería en Gestión Ambiental, Ingeniería en Sistemas de Información, Ingeniería en Ciencias Forestales, Ingeniería en Topografía, Castro y Geodesia, Ingeniería en Bioprocesos Industriales de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA). Para nuestro estudio, se contó con la colaboración de todo el profesorado que imparte dicha asignatura, permitiéndonos administrar los cuestionarios en los grupos en los que la impartía durante y tras la enseñanza del límite. En este sentido, los datos analizados se corresponden con las producciones escritas de los 218 estudiantes que estuvieron presentes en el primer momento, durante la enseñanza del tema de límites, y en el segundo momento, después de la enseñanza de dicho tema.

Una herramienta primordial en nuestra investigación es el análisis de contenido (Cohen et al., 2018; Krippendorf, 2004). De hecho, una parte importante del trabajo realizado consistió en la construcción y validación de un sistema de categorías que permite analizar las definiciones y representaciones que utilizan los estudiantes para explicar el concepto de límite (González-Flores et al., 2021; González-Flores et al., 2022a; González-Flores et al., 2022b; González-Flores et al., en prensa). Este sistema de categorías es una adaptación del utilizado por Fernández-Plaza et al. (2013b) que, a su vez, utilizan referentes clásicos (p.e., Blázquez y Ortega, 1998; Cornu, 2002; Cottrill et al., 1996; Monaghan, 1991; Sfard, 1991). Esa validación está publicada por González-Flores et al. (2021) en la revista UNICIENCIA.

Una vez diseñado y validado el sistema de categorías, realizamos un análisis pormenorizado de las producciones de los estudiantes y describimos de manera general las características presentes en los significados de los estudiantes.

Encontramos que, durante la enseñanza del concepto de límite, al menos tres cuartas partes de los estudiantes manifiestan aspectos estructurales, ya que describen el límite como objeto y como proceso; representan gráficamente dicho concepto, aunque un poco menos de la mitad de los estudiantes utilizan otras representaciones; presentan aspectos de sentido, como es considerar que el límite es alcanzable, pero no rebasable. La mayoría de los estudiantes utilizan términos de posición relativa y casi la mitad indican situaciones en la que se pueden utilizar.

Después de la enseñanza del concepto de límite, al igual que ocurría durante su primer acercamiento a dicho concepto, considerar el límite como un objeto y un proceso son los aspectos que aparecen con mayor frecuencia en los estudiantes, lo que nos parece natural porque son categorías clásicas. Sin embargo, el porcentaje ha descendido. Esto también ocurre con las representaciones, si bien en el descenso no se aprecia influencia en el tipo de representación. También se aprecia un descenso notable en las menciones a aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad. En general, los aspectos de sentido son menos frecuentes, siendo las categorías más usadas los términos de posición relativa y las situaciones pues aproximadamente la mitad de los estudiantes los evidencian. Es un hecho que, tras la enseñanza del concepto de límite, los estudiantes disminuyen el uso de vocabulario, brindando respuestas más escuetas que no necesariamente son más atinadas.

Tras analizar descriptivamente los datos obtenidos, consideramos muy interesante establecer perfiles de significado dentro de los estudiantes, para lo que nos valemos del análisis *cluster* jerárquico. Este análisis de conglomerados nos permite establecer cuatro perfiles de significado con las respuestas que brindaron los estudiantes durante la enseñanza del concepto de límite.

Los estudiantes del *cluster* 1 evidencian un significado ingenuo, ya que manifiestan pocos aspectos de los elementos de significado, salvo las categorías Límite como objeto y Representación gráfica, y en menor medida exhiben la categoría Límite como proceso y los aspectos de no alcanzabilidad. Consideramos que se trata de respuestas razonables ya que son estudiantes sin formación previa sobre el concepto o comenzando su formación en el tema.

Los estudiantes del *cluster* 2, y del *cluster* 4 evidencian significados muy similares, ya que perciben el carácter dual del límite, como proceso y como objeto, hacen referencia a las variables x e y, y ven el límite como algo alcanzable pero no rebasable. La principal diferencia entre ellos es que los estudiantes del *cluster* 2 representan dicho significado gráficamente, mientras que los estudiantes del *cluster* 4 lo hacen utilizando otras representaciones.

Los estudiantes del *cluster* 3, son los que evidencian más categorías de análisis, ya que aprecian la dualidad del límite como un objeto y como un proceso, referencian y coordinan las variables independientes y dependientes de la función, usan términos de posición relativa para referir al límite, la representación gráfica sobresale como la más usada y además aluden a que para que el límite exista debe ser el mimo por izquierda y por derecha. Este *cluster* el más rico en estructura, representaciones y en sentido, por lo que lo que apreciamos que se trata de un significado enriquecido que tienen los estudiantes.

Pero, ¿el significado que manifiesta un estudiante durante la enseñanza del concepto de límite es el mismo tras completar su formación en este tema o cambia? Como expectativa ingenua se esperaría que los significados expresados tras la formación fueran más ricos que los primeros. Una forma de abordar esta cuestión consiste en ver si los estudiantes mantienen el perfil inicial de significado. Realizar un análisis *cluster* jerárquico a los resultados del segundo momento nos arrojaría perfiles difícilmente comparables con los datos iniciales. Por ello, lo que hicimos para hacer posible dicha comparación fue utilizar los centroides de cada *cluster* procedentes del primer análisis y calcular, para la respuesta de cada estudiante tras la enseñanza, el centroide más cercano, determinando así el conglomerado al que pertenecería. Esto lo hicimos con un análisis *cluster* no jerárquico de k-Medias con una sola iteración.

Los resultados de esta comparación muestran que hay diversidad de comportamientos, aunque un gran número de estudiantes, poco menos de la mitad, no cambian su perfil de respuesta, es decir, mantienen el mismo significado durante la enseñanza del concepto de límite como después de la enseñanza. Sin embargo, como cabía esperar, el *cluster* 1, caracterizado por un tener un significado ingenuo del concepto de límite, fue el que más estudiantes abandonó lo que nos parece sensato ya que un cambio a cualquiera de los otros perfiles supone un enriquecimiento de su significado, después de la enseñanza del concepto de límite.

En síntesis, hemos realizado un análisis de contenido exhaustivo de las respuestas de los estudiantes a cuestionarios de preguntas abiertas tanto en su primer acercamiento al concepto de límite como tras la enseñanza de este concepto y otros relacionados con él. Posteriormente, se han utilizado herramientas de análisis estadístico para sintetizar esta información y obtener perfiles de estudiantes durante la enseñanza del límite y para ubicar a los estudiantes en estos perfiles al finalizar su enseñanza. Es decir, esta parte del estudio combina técnicas propias de análisis cualitativo y cuantitativo.

Como hemos mencionado anteriormente, otro de los objetivos de nuestro trabajo constiste en el análisis de los razonamientos utilizados por los estudiantes al responder a tareas de cálculo de límite o de vinculación de este concepto con el de continuidad y derivabilidad. Los razonamientos se ubican el campo procedimental de la estructura conceptual y tienen un nivel de complejidad cognitiva superior al de los hechos, por lo que solo se recogió información al finalizar su enseñanza. Para su estudio utilizamos la actualización del modelo de Toulmin que proponen Reid y Knipping (2010) en la que indican que un argumento se compone de cuatro partes: la afirmación, los datos, la garantía o justificación, y el respaldo. También consideramos las tres componentes de un argumento que plantea Stylianides (2007): el elemento matemático empleado, el modo de argumentar y el modo de representarlo. No obstante, para poder comprender algunos de los razonamientos de los estudiantes consideramos necesario contemplar los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al resolver las tareas propuestas sobre aplicación del concepto de límite.

Las justificaciones que brindan los estudiantes en los razonamientos utilizados para calcular el límite de una función en un punto son: si los límites laterales son finitos e iguales entonces el límite existe, si los límites laterales son finitos y no son iguales entonces el límite no existe, evalúan el límite y obtienen la forma $0/0$ por lo que transforman la fracción en otra equivalente que les permita evaluar nuevamente el límite, aplican La Regla de L'Hopital al derivar el numerador y el denominador de la fracción dada y evalúan en la fracción resultante.

Por otro lado, al seleccionar la representación gráfica de una función dada, de la que se pide calcular previamente el límite en un punto. Algunos de los elementos matemáticos a los que prestan atención los estudiantes son: por un crecimiento sin límite, refiriéndose a las imágenes que crecen sin límite o a que el límite crece a números positivos; porque tiene una asíntota o tiene asíntotas, en algunas ocasiones especifican que es vertical; o porque el límite es infinito, aquí los estudiantes dicen que el límite tiende, es, se acerca, va hacia, da infinito, o dicen que tiende a más infinito y a menos infinito, lo hacen tanto de forma verbal como simbólica.

Por último, encontramos distintos modos de argumentar cuando relacionan el concepto de límite con el de continuidad y derivabilidad como, por ejemplo: si existe el límite de una función en un punto entonces la función está definida en dicho punto y además su imagen coincide con el valor del límite, si existe el límite de una función en un punto entonces la función es continua en ese punto, o si existe el límite de una función en un punto entonces la derivada de la función existe en ese punto.

Entre las conclusiones más destacadas del trabajo tenemos que, mejoramos las caracterizaciones previas para analizar las respuestas de los estudiantes sobre límite. El sistema de categorías que hemos elaborado es completamente novedoso, ya que si bien es cierto se sustenta de investigaciones previas, mejora las categorías que han propuesto otros autores, lo que permite analizar definiciones, representaciones, intuiciones, términos y modos de uso del concepto de límite, por esta razón también lo consideramos muy completo. Se puso a prueba con las producciones de todos los estudiantes de la UNA de la asignatura de Cálculo I que asistieron en los dos momentos que tuvo lugar la recogida de datos: durante la enseñanza del concepto de límite y posterior a su enseñanza.

El análisis de los razonamientos sobre el concepto de límite consideramos que es innovador, dado que no conocemos estudios en esta línea. Este análisis nos permitió adentrarnos en otro nivel de profundidad cognitiva del significado de un contenido matemático escolar, en este caso con el concepto de límite.

Comparamos dos momentos de instrucción y concluimos que la instrucción afecta el significado del concepto de límite que tienen los estudiantes, ya que menos de la mitad se mantienen en el mismo perfil de significado que tenían durante la enseñanza del concepto de límite.

Finalmente, los estudiantes evidenciaron tanto durante la enseñanza del concepto de límite, como después, las categorías Límite como objeto (LO), Límite como proceso (LP), Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR) y Aspectos de no alcanzabilidad (NA). Las categorías LO y LP surgen de los estudios de Cottrill et al. (1996), Fernández-Plaza et al.

(2013b), Sfard, (1991) y Tall (1980) y las categorías ANR y NA provienen de las investigaciones de Cornu (2022), Fernández-Plaza et al. (2013b) y Monaghan (1991).

1.2 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA DE TESIS

Con el propósito de facilitar la lectura de esta memoria de tesis, pasamos a describir la organización de cada uno de los 5 capítulos en que está estructurada.

El primer capítulo, de planteamiento de la investigación, ha comenzado con una introducción extensa a la tesis. Tras ese primer apartado, el capítulo continúa con la revisión de la literatura afín a nuestro estudio, que hemos organizado en tres subapartados: estudios sobre el concepto de límite, estudios sobre el significado de contenidos matemáticos escolares y estudios sobre el significado del concepto de límite. Para finalizar, se exponen los objetivos de la investigación.

El segundo capítulo corresponde a la fundamentación teórica. Enmarcamos nuestro estudio en el significado de los contenidos matemáticos escolares. Para ello, ahondamos en la relación del significado y la comprensión, luego continuamos con el significado desde la filosofía y desde la educación matemática, para terminar en el significado de un contenido matemático escolar. Posteriormente, dedicamos un apartado a los razonamientos que se evidencian al resolver tareas matemáticas. Para finalizar, hemos incluido un apartado matemático con las definiciones, teoremas y ejemplos de la mayoría de los conceptos matemáticos involucrados en este trabajo ya que lo consideramos necesario para poder entender el análisis de los razonamientos de los estudiantes.

El tercer capítulo detalla la metodología que hemos seguido en nuestra investigación. En este, proporcionamos detalles sobre los sujetos que participaron en nuestro estudio y su selección, los instrumentos de investigación y su implementación, los sistemas de categorías que utilizamos para analizar las respuestas de los estudiantes, así como los métodos de análisis de los datos.

El cuarto capítulo describe los resultados, que se organizan en 4 apartados. El primero de ellos corresponde a los significados iniciales del concepto de límite, el segundo atañe a los significados que permanecen después de la enseñanza del concepto de límite, el tercero compete a la comparación de los momentos y, finalmente, el cuarto corresponde a los razonamientos asociados al concepto de límite.

Y el quinto, y último capítulo, realizamos una discusión y análisis de los resultados y los vinculamos con los objetivos de investigación, explicitamos los aportes de nuestro estudio, las limitaciones encontradas y las futuras líneas de investigación.

1.3 ANTECEDENTES

En este apartado presentamos una síntesis de estudios sobre el concepto de límite, sobre el significado de contenidos matemáticos escolares y sobre el significado del concepto de límite. Nos hemos centrado en las investigaciones que hemos considerados más relevantes y más recientes.

1.3.1 ESTUDIOS SOBRE EL CONCEPTO DE LÍMITE

El concepto de límite es un concepto matemático ampliamente estudiado desde la educación matemática. Hay investigaciones sobre las concepciones del límite en estudiantes de secundaria y de universidad en las que se evidencia que muchos tienen una noción intuitiva del límite y lo asocian a algo inalcanzable. Para describirlo utilizan términos tales como *rebasar*, *aproximar*, *alcanzar*, *tender*, y *límite*. En algunos casos, estos términos son empleados en clase por los docentes, y los estudiantes los usan con un sentido cotidiano que no necesariamente coincide con el significado matemático (Blázquez,1999; Blázquez, 2000; Estrella, 2015; Fernández-Plaza, 2015; Monaghan, 1991; Williams, 1991).

En algunos casos, estas concepciones y los términos empleados por los estudiantes pueden relacionarse con concepciones históricas planteadas por matemáticos tales como D'Alembert que afirmaba que el límite no se puede alcanzar y Cauchy para quien es alcanzable (Sierra et al., 2000). Aunque los estudiantes puedan tener una noción intuitiva y personal sobre el límite, a partir de tales nociones algunos son capaces de reconstruir de manera asistida la definición formal (Swinyard, 2011). Los estudiantes pueden utilizar la noción de límite de forma intuitiva o cada vez más formal. En este sentido, Sánchez (2012) propone criterios para decidir si un usuario de una definición de límite finito de una función en un punto utiliza el pensamiento matemático elemental o al avanzado.

La transición entre la definición informal y formal del límite puede generar muchos conflictos en los estudiantes. Específicamente, se pueden trasladar propiedades implícitas de la noción informal a la formal tales como considerar al límite como un proceso dinámico y no con un número (Tall, 1980; Tall y Vinner, 1981).

Existen dificultades asociadas a la noción de límite como la resistencia a aceptar la notación decimal periódica cuando el periodo es nueve para un número entero y a aceptar la no existencia del límite, lo que genera asignaciones incorrectas para su valor. Asimismo, se presentan conflictos como la incomprensión de que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto, la incorrecta interpretación de los límites laterales, las manipulaciones algebraicas erróneas de las leyes de las funciones, el asumir que el cálculo del límite es siempre por sustitución, las dificultades para pasar de un sistema de representación a otro y que hay estrechas relaciones entre los sistemas utilizados por los docentes y los sistemas de representación utilizados por los estudiantes (Blázquez y Ortega, 1998; Blázquez y Ortega, 2001; Palomino et al., 2009; Romero, 1997; Vrancken et al., 2006).

Algunas de las concepciones de los alumnos respecto al límite de procesos infinitos tienen su origen en obstáculos epistemológicos tales como *el carácter definido o indefinido* del límite puesto que consideran que se puede calcular de forma precisa o solo se pueden brindar aproximaciones; la *actitud finitista* según lo cual se niega el infinito o se considera que lo infinito no está acotado o la *actitud infinitista* que admiten el carácter infinito tanto en procesos no acotados como en acotados y finalmente las posturas *empiricistas* que sostienen que todo procedimiento matemático es una construcción temporal y personal (un algoritmo) (Sierpinska, 1987).

Algunas definiciones del concepto de límite en el ámbito escolar pueden ser informales y, por tanto, presentar indicios de imprecisión y subjetividad, en otros casos, pueden ser formales y rigurosas, con un nivel mayor de abstracción, por tal razón, no tan apropiadas para los estudiantes de secundaria y de los primeros cursos universitarios (Blázquez et al., 2009; Blázquez et al., 2006).

Existen propuestas alternativas a las definiciones informales y formales tradicionales del concepto de límite que superen los vicios de imprecisión y subjetividad en el caso de las informales y los excesos de rigor en las formales. En este sentido, Blázquez y Ortega (2002) presentaron una definición rigurosa, con menos formalismo y más dinámica para los estudiantes. Blázquez et al. (2006) contrastaron con estudiantes la conceptualización métrica de límite, dada por Weierstrass, con la conceptualización dada anteriormente por Blázquez y Ortega (2002) y determinaron que los estudiantes comprendieron mejor la última, quizás porque es menos abstracta, es fácil de recordar y es más simple para aplicar. Por su parte, Bokhari y Yushau (2006) reestructuraron la definición usual de límite (ε, δ) e introdujeron una definición alternativa denominada *Local (L, e)-aproximación de una función de una variable*.

Por otro lado, la definición de límite permite observar la presencia de fenómenos de aproximación. Dichos fenómenos se han delimitado en el currículo mediante el estudio de libros de texto, en las producciones de los estudiantes y profesores de matemáticas en formación inicial, asimismo, tales fenómenos se han relacionado con sistemas de representación y el Pensamiento Matemático Avanzado (Claros, 2010; Claros et al., 2007). Algunos de los fenómenos vinculados al concepto de límite son los conceptos de asíntota horizontal, derivada e integral (Jiménez, 2017; Kidron, 2011; Serrano, 2017; Vargas, 2017).

1.3.2 ESTUDIOS SOBRE EL SIGNIFICADO DE CONTENIDOS MATEMÁTICOS ESCOLARES

Esta temática es estudiada desde hace ya algunos años, sin embargo, la revisión de la literatura nos muestra que no hay gran variedad de trabajos que aborden el significado que los contenidos matemáticos que tienen los estudiantes o docentes.

Hay trabajos que profundizan en cómo hacer que las matemáticas tengan un mayor significado o sentido para los estudiantes, como el trabajo de Khalloufi-Mouha y Smida (2012), donde observaron el impacto del Cabri en una experiencia didáctica que introduce la noción de función trigonométrica a través de la articulación de los dominios geométrico y funcional. Puntualmente, este estudio se centra en las potencialidades que brindan las herramientas Arrastrar, Medir y Trazar como mediadores semióticos. También exploran el papel de la situación “una cuerda en una rueda” en los procesos de creación de significado de las funciones trigonométricas de los estudiantes.

Existen estudios cuyo foco de interés está en los significados atribuidos a los contenidos matemáticos, es decir, cómo se interpretan y se entienden. Un ejemplo es el de Montiel et al. (2009) quienes utilizaron el Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática (EOS) para analizar el concepto matemático de diferentes sistemas de coordenadas, así como algunas situaciones y acciones de estudiantes universitarios relacionadas con estos sistemas de coordenadas; es decir, utilizaron el EOS para determinar el significado matemático que tienen los alumnos al desplazarse entre distintos sistemas de coordenadas. Asimismo, Burns-Childers y Vidakovic (2017) realizaron un estudio, basado en la teoría APOS (acción-proceso-objeto-esquema), sobre la comprensión estudiantes de primer año de cálculo sobre la relación entre el concepto de vértice de una función cuadrática y el concepto de derivada. Exploraron los significados personales de los estudiantes sobre el vértice, incluidos los conceptos erróneos, junto con la comprensión de los estudiantes para resolver problemas relacionados con la derivada de una función cuadrática.

Finalmente, encontramos trabajos más afines a la línea de trabajo que hemos desarrollado en nuestro estudio. Por ejemplo, Byerley y Thompson (2017) indagaron sobre los significados de pendiente, medida y tasa de cambio de profesorado de matemáticas de secundaria. La mayoría de los docentes transmitieron principalmente significados aditivos y formulados para la pendiente y la tasa de cambio en los elementos escritos. Fueron pocos los que transmitieron que una tasa de cambio compara los tamaños relativos de los cambios en dos cantidades. También Thompson y Milner (2019) ahondaron en los significados y formas de pensar de los docentes en el tema de funciones en las interacciones cotidianas con los estudiantes, cuando les preguntan: ¿Qué significa f en $f(x)$? El estudio se realizó con estudiantes de secundaria y preparatoria y maestros de matemáticas de escuelas secundarias.

De igual manera, Vargas et al. (2020) estudian el significado que el profesorado de matemáticas atribuye al concepto de derivada. Estos autores se enfocan en describir el significado que se manifiesta en los libros de texto mediante el análisis de las tareas que proponen. Para ello analizan las tareas para el tema de derivadas por cinco libros de texto utilizados en España para 1º de Bachillerato a través del método del análisis de contenido y un sistema de categorías basado en el análisis didáctico, observaron un claro predominio de tareas algorítmicas, en las que se da más importancia a las reglas de derivación que al propio concepto y su significado.

También estos mismos autores, en el estudio Vargas et al. (2023), profundizaron en el significado de los conceptos matemáticos escolares a través de su análisis semántico. Concretamente, este trabajo tuvo como objetivo principal describir y caracterizar el significado de la derivada de una función en un punto expresada por futuro profesorado de matemáticas. Utilizaron un marco semántico, en el que el significado se compone de estructura conceptual, sistemas de representación y sentido y modos de uso. Analizaron las respuestas de 37 futuros docentes a preguntas sobre la definición, los requisitos y el concepto estructural de las derivadas. También exploraron el sentido y uso atribuido por los participantes a este concepto matemático. A partir de los resultados construyeron al menos cinco perfiles de significados para las derivadas. Los hallazgos más destacados incluyeron el predominio de la interpretación geométrica del concepto y la falta de mención de los elementos y requisitos esenciales para la definición de derivada por parte de los participantes.

También Martín-Fernández et al. (2019) ahondaron en el significado de los conceptos matemáticos escolares a través de su análisis semántico, para lo que eligieron las nociones trigonométricas de seno y coseno de un ángulo. En el estudio participaron estudiantes de secundaria entre 16 y 17 años y recoge la variedad de nociones y elementos emergentes relacionados con los conceptos trigonométricos que intervienen al responder sobre las categorías de significado que se han preguntado. Los temas aportan diversidad de significados, interpretados y estructurados por categorías semánticas. Estos significados subrayan diferentes interpretaciones del seno y el coseno, según los temas inferidos, como la longitud, la razón, el ángulo y el cálculo de una magnitud.

1.3.3 ESTUDIOS SOBRE EL SIGNIFICADO DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Como lo mencionamos previamente, existen estudios que abordan el significado que los contenidos matemáticos que tienen los estudiantes o docentes y estudios que profundizan en el concepto de límite. En este apartado presentamos los estudios que localizamos cuyo propósito es ahondar en el significado del concepto de límite que tienen los estudiantes.

Arce y Ortega (2015) realizaron un estudio donde analizaron las notas que los estudiantes toman en sus cuadernos durante la introducción del concepto de límite de una función. Las exposiciones de los docentes fueron personales y de naturaleza intuitiva. Examinaron qué elementos deciden anotar los estudiantes, cómo y qué aspectos del significado del concepto de límite quedan reflejados, para lo que usaron el marco de Rico (2012, 2013) y dos descomposiciones genéticas del concepto. Detectaron una transcripción mucho mayor de los ejemplos en aulas donde no hay una definición general intuitiva del concepto, así como bastantes anotaciones centradas en una única variable y que sólo inducen un movimiento, sin especificar la aproximación ni la tendencia a ningún valor.

López et al. (2013) realizaron un estudio en el identificaron características de la construcción del significado de límite de una función en estudiantes de bachillerato a través de un experimento de enseñanza utilizando una descomposición genética (APOE) del concepto de límite de una función integrando recursos informáticos. Los resultados indican que la trayectoria está determinada por la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en diferentes tipos de funciones.

Fernández-Plaza et al. (2013a, 2013c) investigaron los diferentes usos que estos estudiantes hacen de términos como: acercarse, tender, alcanzar, superar y límite, que describen las nociones básicas relacionadas con el concepto de límite finito de una función en un punto. Usaron un análisis conceptual para inferir los significados que los estudiantes asocian con estos términos específicos en relación con el uso efectivo de los términos en sus respuestas.

Estos mismos autores, en el estudio Fernández-Plaza et al. (2015) analizaron las concepciones de los estudiantes de bachillerato acerca del concepto de límite finito de una función en un punto a partir de su representación gráfica. También este estudio detecta concepciones particulares, tales como la necesidad de que exista la imagen de una función en un punto para discutir acerca de su límite en dicho punto. Asimismo, detectan un equilibrio entre argumentos plenamente coherentes y los incoherentes con la definición individual.

De todos, el estudio de estos autores más cercano al nuestro es Fernández-Plaza et al. (2013b), en el que describieron e interpretaron las definiciones de estudiantes de bachillerato sobre el concepto de límite finito de una función en un punto en términos de aspectos estructurales, compilados y sintetizados de investigaciones previas. Para ello, plantearon nueve categorías: tipo de objeto/proceso, vinculación entre límite e imagen, descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función, referencia explícita a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico, evaluación en el punto (sustitución directa), tabla de valores, condiciones de lateralidad y doble convergencia, aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad, reproducción de la definición de referencia. Destacan, dentro de sus resultados, la riqueza de significado de las definiciones que brindan los estudiantes pues denotan el carácter no alcanzable y no rebasable atribuido al límite y su consideración dual como objeto o proceso.

Este trabajo fue nuestro punto de partida, ya que tomamos algunas de sus categorías de análisis de respuestas, otras las adaptamos y elaboramos algunas nuevas. En este estudio las categorías las evidencian los estudiantes en las definiciones del concepto de límite; en nuestro estudio, vemos nuestro sistema de categorías en las definiciones, en las representaciones y en los términos y modos de uso del concepto de límite que expresan los estudiantes.

1.4 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA Y PROPÓSITO DE LA INVESTIGACIÓN

La problemática expuesta y la revisión de la literatura, nos hace plantearnos una serie de interrogantes, como, por ejemplo: ¿Cuál es el significado que tienen los estudiantes durante la enseñanza del concepto de límite? ¿Cuál es el significado que tienen los estudiantes después de la enseñanza de dicho concepto? ¿Cambia o evoluciona tras el proceso de formación? ¿Es posible establecer uno o varios perfiles del significado del límite según la concepción que tienen los estudiantes respecto al tema?

Para responder a estas preguntas, nos planteamos como objetivo general:

OG. Caracterizar los significados atribuidos por estudiantes universitarios de la Universidad Nacional de Costa Rica al concepto de límite de una función en un punto.

Puesto que se trata de un objetivo muy amplio, nos planteamos como objetivos específicos los siguientes:

OE1. Describir el significado del concepto de límite de una función en un punto que manifiestan estudiantes universitarios durante su enseñanza.

OE2. Establecer perfiles de significado del concepto de límite de una función en un punto que manifiestan estudiantes universitarios durante su enseñanza.

OE3. Identificar los razonamientos que emplean los estudiantes en la resolución de tareas matemáticas que involucran el concepto de límite con posterioridad a su enseñanza.

OE4. Vincular el concepto de límite con los conceptos de continuidad y derivabilidad en los razonamientos que emplean los estudiantes en la resolución de tareas matemáticas que involucran estos conceptos con posterioridad a la enseñanza de dichos conceptos.

OE5. Describir y agrupar los significados del concepto de límite de una función en un punto que manifiestan estudiantes universitarios tras su enseñanza.

OE6. Comparar los significados del concepto de límite de una función en un punto, que manifiestan los estudiantes durante y tras la enseñanza del tema de límites.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este capítulo describimos los pilares teóricos en los que se fundamenta la tesis doctoral. Como hemos manifestado en el planteamiento del problema y detallado en los objetivos, la tesis tiene varios elementos que la estructuran: la noción de significado de un contenido matemático, el concepto de límite de una función en un punto y cómo los estudiantes expresan esos significados a través de sus producciones escritas. El elemento central de este marco teórico es la noción de significado que, según distintos autores, está íntimamente relacionada con la comprensión de un concepto matemático, en este caso, el concepto de límite de una función en un punto.

Este capítulo está compuesto de cinco apartados: en primer lugar, situamos el trabajo en un marco curricular en el que las nociones matemáticas tienen su propio espacio, para lo que introducimos el análisis didáctico. Después, subrayamos la importancia de profundizar en el significado en educación matemática por la íntima relación entre éste y comprensión. A continuación, profundizamos en la noción de significado de un contenido matemático escolar, abordando el significado desde distintas perspectivas para, finalmente, concretar qué entendemos por significado y qué elementos vamos a utilizar para caracterizarlo. Como uno de los elementos singulares de significado, los razonamientos asociados a los contenidos matemáticos han recibido especial atención en la literatura en educación matemática, por lo que les dedicamos un epígrafe específico. Finalmente, en un último apartado, profundizamos en el concepto de límite, sus propiedades y resultados necesarios para seguir el discurso, sin tratar de desarrollarlo como si este documento fuese un libro de cálculo infinitesimal.

2.1. MARCO CURRICULAR Y ANÁLISIS DIDÁCTICO

El concepto de límite forma parte de las matemáticas escolares y, aunque no aparece de manera homogénea en los currículos escolares de todos los países, es considerado como el elemento conceptual clave para el paso del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado.

Entendemos currículo como cualquier

> plan de formación cuya determinación viene dada por unos sujetos a quienes hay que formar; las finalidades formativas que se pretenden y las necesidades a las que se quiere atender; la institución, el personal y los recursos con los que se lleva a cabo la formación; el tipo de formación que se quiere proporcionar: las normas y códigos, los valores, los conocimientos y capacidades, las habilidades y técnicas, las actitudes y destrezas; finalmente, el sistema de evaluación del plan de formación, determinado por unos criterios e instrumentos (Rico, 2013, p. 20).

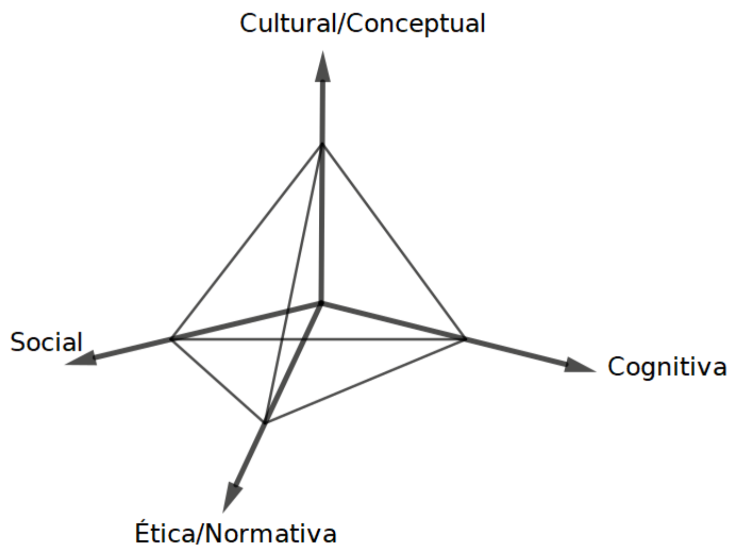
Como se observa en su definición, un currículo contiene los principios ideológicos, pedagógicos y psicopedagógicos que se van desarrollando a través de diferentes niveles de concreción, desde la legislación educativa general hasta la práctica en el aula (Rico y Ruiz-Hidalgo, 2018). Estos principios se organizan en dimensiones —cultural/conceptual, cognitiva, ético/formativa y social— que, a su vez, responden a las preguntas: ¿qué es el conocimiento?, ¿qué es el aprendizaje?, ¿qué es la enseñanza?, y ¿en qué consisten los logros de aprendizaje? (Figura 2.1).

Estas dimensiones, a su vez, se pueden segmentar en organizadores que, con los respectivos elementos que los caracterizan, proporcionan un sistema de clasificación que permite analizar y sintetizar el contenido matemático objeto de estudio (Rico y Ruiz-Hidalgo, 2018).

El foco de la memoria, el significado del concepto de límite, la sitúa en la dimensión cultural/conceptual del currículo, cuyo propósito principal es el de profundizar en los significados de los contenidos matemáticos escolares.

Figura 2.1.

Dimensiones curriculares (Rico, 1997, p. 28).



En este contexto curricular, el instrumento que elegimos para fundamentar el trabajo es el análisis didáctico (Rico et al., 2013; Rico y Moreno, 2016; Rico y Ruiz-Hidalgo, 2018), que contempla las dimensiones, los organizadores y los elementos descriptores necesarios para profundizar en el estudio del significado de la noción de límite. El análisis didáctico surgió originariamente como método para la organización, diseño y ejecución de la planificación en matemáticas escolares y, con su repetido uso en la investigación, se ha consolidado como marco teórico sólido para situar, fundamentar e interpretar investigaciones en didáctica de la matemática. Se considera un método para profundizar, estructurar y clarificar los contenidos curriculares desde un punto de vista de la planificación y la implementación (Rico y Ruiz-Hidalgo, 2018).

La dimensión cultural/conceptual del currículo tiene su reflejo en la fase del análisis didáctico denominada análisis de significado, con la que se pretende describir los elementos que componen el significado de los contenidos matemáticos escolares (Rico y Moreno, 2016).

2.2. SIGNIFICADO

La noción de significado ha sido y sigue siendo clave en diversos ámbitos de conocimiento como la lingüística, la filosofía, o la psicología, siendo estos dos últimas las que más influencia han tenido en la consideración de significado en educación matemática.

2.2.1. SIGNIFICADO EN FILOSOFÍA

La filosofía es una de las disciplinas que se ha interesado por la noción de significado. Ludwig Wittgenstein se inspiró en la tradición platónica para introducir en 1953 "Investigaciones Filosóficas", texto en el que plantea el significado como una teoría de referencia y, desde entonces, la teoría del significado como teoría refinada de la referencia se ha desarrollado en múltiples direcciones (Kilpatrick et al., 2005; Skovsmose, 2005).

Gottlob Frege, en 1892, hizo la distinción entre *Sinn*, o sentido, que alude al significado de manera cualitativa y experiencial y *Bedeutung*, o referencia, que denota los aspectos referenciales del significado. Además, Frege sugirió que el *Sinn* de una declaración se interpreta como el contenido de lo que afirma la declaración, mientras que la *Bedeutung* de una declaración es su valor de verdad, donde solo existen dos valores de verdad, falso y verdadero. Por ejemplo, el *Sinn* de "rojo" se describe como las propiedades de ser rojo y la *Bedeutung* de rojo puede interpretarse como el conjunto de cosas rojas. El trabajo de Frege influyó fundamentalmente en las interpretaciones posteriores de la lógica y las matemáticas. La psicología y campos relacionados abrieron la exploración del significado en términos de *Sinn*, mientras que la lógica y la filosofía de las matemáticas se ocupaban del significado de conceptos y declaraciones en términos de *Bedeutung* (Kilpatrick et al., 2005; Skovsmose, 2005).

Wittgenstein presentó una idea distinta a la de Frege en la discusión del significado, pues sugirió que podría entenderse en términos de su uso. Esta interpretación amplía la idea de lo que puede ser el significado, ya que muchas otras entidades además de los conceptos y las declaraciones tienen usos. Si el uso significa significado, entonces el alcance de las teorías del significado podría, por ejemplo, incorporar gestos, actos y actividades. Esto lleva a la teoría del discurso, que muestra cómo las discusiones sobre el significado pueden convertirse en una forma de reflexionar sobre la actividad humana en un contexto social (Kilpatrick et al., 2005; Skovsmose, 2005).

2.2.2. SIGNIFICADO EN PSICOLOGÍA. SIGNIFICADO Y COMPRENSIÓN

"El concepto fundamental de la psicología humana es el de significado, así como los procesos y transacciones que se dan en la construcción de los significados" (Bruner, 1990, p. 47). Con esta afirmación, Bruner destaca el papel del significado en la psicología.

Entre las distintas perspectivas, destacamos la visión de Piaget y García (1991) para los que los significados derivan de la asimilación de los objetos a los esquemas del sujeto. Esta visión de significado como asimilación o creación o consolidación de esquemas mentales, deriva en una íntima relación entre significado y comprensión (Sierpinska, 1990; Dummett,1991; Thompson, 2016). De hecho, "lo que entendemos por comprensión y por significado está lejos de ser obvio o claro, a pesar de ser dos términos centrales en toda discusión sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel" (Pimm, 1995, p. 3).

Para Sierpinska (1990) "comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto. Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión" (p. 27). "La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos" (p. 35). Por su parte, para Dummett (1991) "una teoría del significado es una teoría de la comprensión; esto es, aquello de lo que una teoría del significado tiene que dar cuenta es lo que alguien conoce cuando conoce el lenguaje, esto es, cuando conoce los significados de las expresiones y oraciones del lenguaje" (p. 372).

Según Thompson (2016), comprender lo que una persona desea manifestar brinda más información sobre su forma de pensar que entender lo que creen que es verdad. La comprensión en el momento se refiere a lo que una persona entiende de algo dicho, escrito o hecho en el momento de comprenderlo; y el significado en el momento es el espacio de implicaciones existente en el momento de la comprensión. Asimismo, una comprensión estable es el resultado de una asimilación a un esquema; y el significado estable es el espacio de implicaciones que resulta de haber asimilado a un esquema. Dichos esquemas se consideran como "totalidades organizadas [de acciones y operaciones] cuyos elementos internos se implican mutuamente" (Piaget, 1952, p. 405). En síntesis, centrarse en los significados de un concepto matemático permite entender la forma en la es comprendido (Thompson et al., 2014; Thompson, 2016).

Construir un significado requiere construir y utilizar repetidamente las operaciones (formas de pensar) cuya organización constituye ese significado. Los significados más utilizables son aquellos que están ricamente conectados con la acción de las imágenes y que se vinculan con otros significados (Thompson, 2013). El significado de una persona en una situación es lo que le viene a la mente inmediatamente junto con lo que está listo para venir a la mente a continuación. La naturaleza implicativa de los significados está en el corazón de la noción de esquema de Piaget (Piaget y Garcia, 1991; Thompson, 2016).

2.2.3. SIGNIFICADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Cuando consideramos el significado desde la óptica de la educación matemática, la reflexión se vuelve más específica. Así, por un lado, se puede decir que una actividad tiene significado como parte del currículo, mientras que los estudiantes pueden interpretar que la misma no tiene ningún significado. Por otra parte, la discusión sobre si el significado tiene que ver con la referencia o el uso es conceptual y no se explica fácilmente por tales medios (Kilpatrick, et al., 2005). La investigación sobre significado en educación matemática ha utilizado en ocasiones perspectivas filosóficas y en otras psicológicas; de todas, destacamos aquellas investigaciones y corrientes que usan ternas semánticas como, por ejemplo, los trabajos de Vernaug (2009, 2013) que tienen una marcada influencia psicológica.

También Biehler (2005), retomando los trabajos de Steinbring (1997, 2006), manifiesta que el significado de un concepto tiene una estructura tripartita: dominios de aplicación, estructura conceptual (teoría), y herramientas y representaciones para trabajar con el concepto.

El salón de clases de matemáticas no debe ser un sistema cerrado y autoproductivo que desarrolle sus propios significados conceptuales. Por el contrario, los significados que se van a construir en las sesiones de clase deben vincularse con prácticas y significados fuera de tales entornos académicos. Los diseñadores de currículos deben considerar la relevancia y el significado del concepto dentro la teoría de las matemáticas, su origen y desarrollo a través de la historia, sus usos para resolver problemas dentro y fuera de las matemáticas, sus interpretaciones, sus raíces en el pensamiento y el lenguaje cotidianos, así como diferentes herramientas y representaciones para trabajar con el concepto (Biehler, 2005).

En el aula, son los docentes los agentes activos en la construcción del significado matemático. La puesta en práctica de los currículos por parte de los docentes está guiada por sus creencias, por lo que se consideran elementos relevantes del significado de un concepto. Si los profesores tienen conocimiento de los significados que están implícitos en el currículo y sirven como base para su diseño, es muy posible que los significados esperados de los conceptos se implementen en el aula. En cambio, si los docentes no están capacitados o educados en este sentido, pueden basar su enseñanza en los significados que han adquirido en otros lugares, a saber, los significados tradicionales de las matemáticas escolares o en los significados de los conceptos que han adquirido durante sus estudios académicos en matemáticas. En síntesis, los docentes deben extender activamente sus significados matemáticos más allá de los que ya han aprendido durante sus estudios dentro de las matemáticas académicas, y las matemáticas escolares no pueden ni deben asumir el significado de los conceptos en el contexto de las matemáticas académicas (Biehler, 2005).

Transmitir significado es uno de los objetivos más importantes por los que puede luchar el docente. Existe evidencia empírica de que los significados matemáticos que posee son importantes en relación con lo que aprenden los estudiantes (Thompson, 2013). Los docentes transmiten significados a los estudiantes en el sentido de que los estudiantes se esfuerzan por comprender lo que su profesor quiere que hagan o entiendan, construyendo significados en el proceso. Esto sucede independientemente de que los profesores sean conscientes de los significados que poseen y su coherencia. El objetivo de un docente debe ser que los significados que los estudiantes construyen a partir de la instrucción sean significados que valga la pena tener para toda la vida. La instrucción debe ayudar a los estudiantes a crear significados coherentes de los conceptos matemáticos, y esos significados deben sentar las bases para el aprendizaje futuro de los estudiantes (Thompson, 2016).

Los estudiantes deben tener la intención de discernir el significado para construir significado a partir de una conversación. La guía del docente en la creación de una atmósfera en la que se valore y se espere generar significado es fundamental para la construcción de significado de los estudiantes a través de conversaciones. Los estudiantes desarrollan comprensiones y formas de pensar acerca de las matemáticas que aprenden incluso cuando el significado no es central para la materia de los profesores (Thompson, 2013). Tomamos como un axioma que los estudiantes se benefician cuando sus maestros tienen significados y formas de pensar ricas y coherentes con respecto a las ideas que enseñan. Los significados culturalmente arraigados y las formas de pensar son difíciles de desalojar entre los profesores universitarios y los profesores de secundaria (Thompson y Milner, 2019).

La preocupación por las referencias ha desempeñado un papel fundamental en la concepción del significado en las matemáticas escolares. El progreso del aprendizaje puede discutirse en términos del paisaje semántico a través del cual viajan los estudiantes. Por lo general, se recomienda que los estudiantes empiecen su viaje en un paisaje empírico, que le permita continuar hacia campos semánticos más abstractos, y las nociones matemáticas llegan a referirse a entidades abstractas. Es así como el significado de un concepto puede, por lo tanto, estar asociado con lo que la persona puede hacer por medio del concepto. Significado y viabilidad se convierten en conceptos conectados. La discusión básica del significado tiene que ver con el significado de las actividades en las que los estudiantes están involucrados como parte de un proceso educativo. Sólo entonces, como especificación de esta discusión, se puede investigar el significado de los conceptos matemáticos (Skovsmose, 2005).

La investigación que aparentemente se basa en conocer o comprender, ya sea que el contexto sea enseñar o aprender, con frecuencia examina el desempeño, en lugar de aclarar los significados que tienen los estudiantes o los docentes cuando se desempeñan correctamente o los significados con los que trabajan cuando no se desempeñan correctamente. Ni la actuación correcta ni la actuación incorrecta dice nada sobre la naturaleza del sistema de significados de una persona que se expresa en él. Es importante tomar el significado como una consideración fundamental en el aprendizaje, la enseñanza y el diseño instruccional de las matemáticas (Thompson, 2013).

Los significados productivos son propedéuticos, es decir, preparan al estudiante para futuros aprendizajes, y dan coherencia a los significados que ya tienen los estudiantes (Thompson, 2016). Asimismo, según Thompson (2013), en la Educación Matemática las cuestiones asociadas a los significados son fundamentales para que los estudiantes desarrollen conocimientos que tengan utilidad fuera de la escuela y potencien el pensamiento creativo y espontáneo.

2.3. SIGNIFICADO DE UN CONTENIDO MATEMÁTICO ESCOLAR

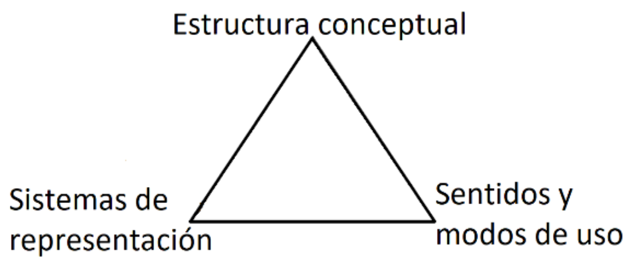
El fundamento teórico de nuestra investigación corresponde al concepto de significado de un contenido matemático escolar, el cual ha sido ampliamente estudiado y desarrollado en educación matemática por autores como Steinbring (1997, 2006), Vergnaud (2009, 2013), Kilpatrick et al. (2005), Thompson (2013, 2016), Thompson y Milner (2019) o Byerley y Thompson (2017).

Concretamente, para nuestro estudio empleamos la noción de significado desde una perspectiva semántica planteada por Rico (Rico, 2012; Rico, 2013; 2016a; Rico, 2016b). Esta consideración de significado corresponde a una doble fundamentación. Por un lado, filosófica, que se basa en la consideración de significado basada en una terna semántica (Bunge, 2008; Frege, 1998). Por otro lado, hay una fundamentación cognitiva del contenido matemático, atendiendo a los desarrollos en psicología de finales del siglo XX (Bell et al., 1983; Hiebert y Lefevre, 1986). Todo ello desde una perspectiva curricular, en la que los contenidos en los que se profundiza forman parte de un plan de formación.

Con respecto al fundamento filosófico, Frege (1998) establece la diferencia entre *signo* y *significado* y, asimismo, en el *significado* diferencia entre *referencia* y *sentido*. Rico (2012; 2013; 2016a; 2016b) adapta esta caracterización mediante un triángulo semántico aplicado a un contenido matemático escolar a través de tres componentes: su referencia o estructura conceptual, que corresponde a la estructura lógico-matemática en la que se inserta; su representación, que identifica los sistemas de representación, con los signos o términos con el que se expresa, gráficos y notaciones que lo representan y las relaciones que se establecen entre diferentes representaciones; y su sentido o modo de uso, considerando interpretaciones del contenido, sus aplicaciones en contexto y las situaciones en las que aplicarlo tiene sentido y los usos de los conceptos más allá de los intramatemáticos, esto es, los modos de uso con que puede ser entendido, aplicado e interpretado. Estas ideas a su vez han sido desarrolladas y adaptadas para el estudio de conceptos y contenidos de las matemáticas escolares mediante el uso de tres componentes para el análisis: estructura conceptual, sistemas de representación y los sentidos y modos de uso (Figura 2.2).

Figura 2.2.

Triángulo semántico de un concepto matemático escolar. Adaptado de Rico (2012).



Por otro lado, desde una óptica curricular y cognitiva, la noción de significado se complementa con la consideración de la naturaleza dual del conocimiento matemático establecida por Bell et al. (1983) quienes indican que al discutir la comprensión y la enseñanza de las matemáticas, debemos distinguir entre conceptos y procedimientos. Posteriormente, muchos otros autores han profundizado sobre esta dualidad que sigue siendo un foco de investigación (Castro et al., 2016).

Aquí consideramos a Hiebert y Lefevre (1986), que proponen una de las caracterizaciones más reconocidas y utilizadas (Castro et al., 2016). Estos autores indican que la distinción entre conceptos y procedimientos juega un papel importante en la adquisición de conocimientos. Ambos, conceptos y procedimientos, son elementos propios de la estructura conceptual de los contenidos matemáticos, inherentes a los contenidos e inseparables. Sin embargo, sus características los hacen diferentes desde el punto de vista cognitivo, esto es, desde el punto de vista de cómo se aprenden, por lo que su identificación resulta de mucha utilidad no solo para caracterizar el conocimiento matemático, sino también para poder organizar los elementos estructurales que manifiestan los sujetos cuando expresan sus ideas acerca de un contenido matemático.

Así, manifestamos que el conocimiento conceptual se caracteriza por ser un conocimiento rico en relaciones que puede considerarse como una red de conocimiento en la que las relaciones de enlace son tan prominentes como las piezas discretas de información. El desarrollo del conocimiento conceptual se logra mediante la construcción de relaciones entre piezas de información. Por su parte, el conocimiento procedimental está compuesto, por un lado, por el lenguaje formal, o sistema de representación de símbolos de las matemáticas, y por otro, de algoritmos o reglas para completar tareas matemáticas.

2.3.1. COMPONENTES DEL SIGNIFICADO

Sobre este doble fundamento filosófico y cognitivo, defendemos que comprender un concepto matemático es conocer su significado, lo que implica saber "su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas" (Rico, 2016a, p. 94). A continuación, se detallan las tres componentes del significado de un contenido matemático escolar, detallando más los aspectos estructurales que son los centrales de este trabajo, que explican la síntesis presentada en la tabla 2.1.

Tabla 2.1

Componentes del significado de un contenido matemático escolar. Adaptado de Rico (1997) y Fernández-Plaza (2016).

Estructura conceptual			Sistemas de representación	Sentido y modos de uso
Campo conceptual	Campo procedimental	Campo actitudinal		
Hechos	Destrezas	Emociones	Verbal	Modos de uso
Conceptos	Razonamientos	Moralidad y normas	Simbólico	Situaciones
Estructuras	Estrategias	Valores éticos	Tabular	Contextos
			Gráfico	Fenómenos

En la tabla 2.1 se observa, en primer lugar, la separación de la terna semántica de la figura 1 (estructura conceptual, sistemas de representación, sentidos y modos de uso). Es en la estructura conceptual donde identificamos los elementos cognitivos que van a permitir detallar la naturaleza del concepto: junto a los campos conceptual y procedimental aparece el campo actitudinal propuesto por Rico (1997), aunque en este trabajo no lo vamos a tener en cuenta.

A su vez, identificamos niveles de complejidad cognitiva en la estructura conceptual:

- el primer nivel de complejidad cognitiva se identifica con la fila donde se ubican los hechos, destrezas y emociones;

- el segundo nivel de complejidad, la siguiente fila, donde se establecen los conceptos, los razonamientos y la moralidad y normas;
- un tercer nivel de complejidad cognitiva, donde se ubican las estructuras, las estrategias y los valores éticos.

Estos niveles de complejidad cognitiva datan desde los trabajos de Bell et al. (1983) y Hiebert y Lefevre (1986) y, posteriormente, Rico (1997; 2012; 2013; 2016a; 2016b) y Rico y Ruiz-Hidalgo (2018) los han ido trabajado para el análisis de un contenido matemático escolar. Como utilización más cercana a nuestro trabajo, las tesis doctorales de Castro-Rodríguez (2015), Fernández-Plaza (2015), Vargas (2020) y Martín-Fernández (2021) utilizan este mismo marco para fundamentar e interpretar significados expresados por escolares sobre conceptos matemáticos.

A continuación, describimos y ejemplificamos cada uno de estos elementos.

2.3.1.1. Estructura conceptual

Comprende los conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos y proposiciones que se obtienen y sus criterios de veracidad, vinculados con un contenido matemático, junto con la estructura formal que proporciona referencia a los contenidos utilizados (Rico, 2012). La estructura conceptual se organiza en tres componentes: campo conceptual, campo procedimental y campo actitudinal.

El campo conceptual es el conglomerado de conceptos y relaciones que hacen referencia a un contenido matemático. Se reconocen tres niveles de conocimiento: los hechos, que se componen de términos, notaciones, convenios y resultados; los conceptos, que describen una regularidad de un conjunto de hechos; y las estructuras conceptuales, que corresponde a un conjunto de conceptos y transformaciones relacionados entre sí (Fernández-Plaza, 2016; Hiebert y Lefevre, 1986; Rico, 1997).

El campo procedimental comprende las reglas, operaciones, algoritmos, propiedades, sus formas de procesamiento y el conocimiento implicado al resolver una tarea matemática. Según la complejidad del contenido matemático, encontramos tres niveles: las destrezas, que son el procesamiento de hechos; los razonamientos, que son el procesamiento de conceptos;

y las estrategias, que implican el procesamiento de una o varias estructuras conceptuales (Fernández-Plaza, 2016; Hiebert y Lefevre, 1986; Rico, 1997).

El campo actitudinal, se describe en tres categorías en las matemáticas escolares: las emociones, que comprenden la seguridad, la disciplina, el dominio y autoestima; la moralidad y las normas, que implican el respeto y la aplicación de reglas, la corrección de procedimientos y la coherencia; y los valores éticos (Bell et al., 1983, Fernández-Plaza, 2016; Rico, 1997).

En nuestro estudio nos centramos, principalmente, en los hechos que evidencian los estudiantes del concepto de límite (campo conceptual) y en los razonamientos que evidencian en la resolución de tareas vinculadas a este concepto matemático (campo procedimental).

Algunos ejemplos del límite en cuanto a la estructura conceptual son: la notación específica de límite, el uso de dos variables *x*, *f(x)*, el límite como el valor que se obtiene, entre otros.

2.3.1.2. Sistemas de representación

Las representaciones aluden a signos, notaciones simbólicas o gráficas para cada noción matemática que expresan los conceptos y procedimientos, así como sus relaciones, características y propiedades (Castro y Castro, 1997; Kaput, 1987). Se pueden considerar representaciones verbales, se trata del uso del lenguaje escrito para referirse a conceptos, procedimientos y propiedades; gráficas, que alude al uso de figuras en el plano cartesiano; tabular, que describe al uso de símbolos alfanuméricos organizados en una tabla; pictórica, uso de dibujos; y simbólica, que resalta el uso de números, símbolos matemáticos y del abecedario en una organización no tabular.

Supongamos que, dada la función: $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)^2}{(x-1)}$, queremos obtener el límite cuando x tiende a 1. Una posible representación verbal de dicho límite sería "El límite cuando equis tiende a uno de, equis menos uno, por el cuadrado de equis más uno, entre equis menos uno es igual a cuatro", que simbólicamente se podría representar como $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)^2}{(x-1)}=4$.

Del mismo modo, la Tabla 2.2. refleja una posible representación tabular de dicho límite, que aparece representado gráficamente en la figura 2.3, .

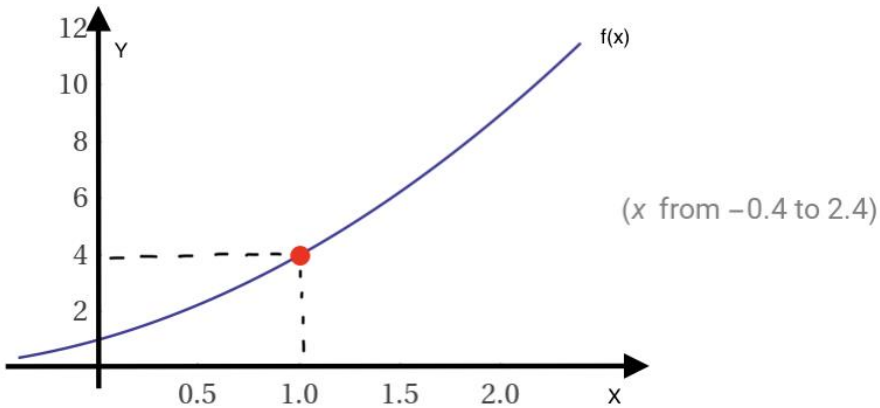
Tabla 2.2

Representación tabular de un límite.

X	0,80	0,90	0,95	0,99	1	1,01	1,05	1,09	1,2
f(x)	3,24	3,61	3,80	3,96	No existe	4,04	4,20	4,36	4,84

Figura 2.3

Representación gráfica de un límite.



2.3.1.3. Sentidos y modos de uso

Los sentidos y modos de uso de los conceptos matemáticos hacen referencia a las diversas situaciones a las que responde, a los problemas que resuelve y los fenómenos que organiza lo que permite complementar sus significados (Ruiz-Hidalgo, 2016). Se consideran relevantes cuatro elementos:

- los términos y modos de uso, que son palabras que sintetizan la definición de un concepto matemático para brindarle sentido, y que compete a distintas interpretaciones del mismo;
- los contextos matemáticos, que están relacionados con las funciones y las cuestiones a las que responden los conceptos matemáticos;
- las situaciones, que corresponden a las circunstancias o condiciones en las que se aplica y trabaja el concepto matemático;

- los fenómenos, refieren a los problemas que dieron origen al concepto y a la forma en que está estructurado el concepto en la actualidad.

En nuestro estudio nos centramos en los términos y sus modos de uso que utilizan los estudiantes para brindarle sentido al límite y en las situaciones que señalan en las que se puede aplicar este concepto matemático.

Algunos términos y modos de uso para el límite son: frontera, linde, alcanzar, contorno, término, fin, extremo, aproximar, tender, etc.

2.4. RAZONAMIENTOS Y JUSTIFICACIONES

Dentro del marco del significado de un contenido matemático escolar, los razonamientos se ubican el campo procedimental de la estructura conceptual. Como se puede observar en la tabla 2.1, la estructura conceptual se puede organizar en distintos niveles de complejidad cognitiva. En un primer nivel se consideran los hechos y las destrezas, en un segundo nivel los conceptos y los razonamientos y en un tercer nivel las estructuras matemáticas y las estrategias (Fernández-Plaza, 2016; Rico,1997).

El análisis del primer nivel se ha realizado en investigaciones previas (Castro-Rodríguez, 2015; Fernández-Plaza, 2015; Martín-Fernández, 2021; Vargas, 2020) mediante el análisis de contenido de las producciones o textos, sin necesidad de recurrir a marcos interpretativos más complejos, ya que en este nivel se analizan palabras, términos, hechos, destrezas, procedimientos algorítmicos, … Sin embargo, en el trabajo de Vargas (2020), la autora, para analizar los razonamientos, necesitó un marco interpretativo más amplio que le permitiera analizar las respuestas de los estudiantes a las tareas. A continuación, describimos un marco que nos permite definir qué es razonamiento y que nos proporciona sustento para poder analizar las respuestas e interpretar los resultados.

Consideramos el razonamiento como la línea de pensamiento acogida para producir afirmaciones y llegar a conclusiones en la resolución de tareas. Su base no es necesariamente la lógica formal, por lo que no se limita a las demostraciones formales (Lithner, 2008), de ahí que consideremos las justificaciones que proporcionan los estudiantes como producciones que pueden ser consideradas razonamientos. En este sentido, coincidimos con De Villiers (1990) en que la demostración matemática tiene distintas funciones:

- De verificación, cuando la demostración es usada para dar validez a una afirmación.
- De explicación, donde la demostración explica el porqué de un procedimiento o una afirmación
- De sistematización, si la demostración sistematiza varios resultados por medio de un sistema deductivo.
- De descubrimiento, cuando la demostración ayuda a producir conocimiento matemático
- De comunicación, si la demostración asume la función de medio de comunicación entre los matemáticos.

Así, consideramos que las justificaciones y explicaciones de los estudiantes son razonamientos o demostraciones que, sin ser necesariamente formales, ayudan a convencer y explicar, manifestando aspectos estructurales de significado de los contenidos matemáticos que son de un nivel cognitivo no básico.

2.4.1. LOS RAZONAMIENTOS

Para el estudio de los razonamientos en Educación Matemática, Reid y Knipping (2010) proponen una actualización del modelo de Toulmin (1958). Según esta propuesta, el argumento consta de cuatro partes:

- la afirmación, que consiste en la conclusión, tesis o hipótesis que se plantea;
- los datos que refieren a las evidencias, hechos o pruebas a favor de la veracidad de la afirmación;
- la garantía o justificación que son las reglas que permiten transitar de los datos a la afirmación;
- el respaldo que consiste en el apoyo para la garantía o justificación dada. Puede ser un teorema conocido que justifica la afirmación. Además, se puede ejemplificar o justificar por qué el teorema es aplicable.

Los argumentos tienen en el modelo de Toulmin una estructura general de datos que conducen a afirmaciones o conclusiones, respaldados por garantías, que a su vez pueden estar respaldadas por respaldos (Knipping y Reid, 2013). Por lo general, los argumentos reconstruidos en los procesos de prueba en el aula suelen estar incompletos y, en estos argumentos, la garantía y el respaldo a menudo no se mencionan explícitamente. En la mayoría de los casos, la garantía puede asumirse o tomarse como implícita, ya que una inferencia solo puede constituirse con una garantía (Knipping y Reid, 2013).

Por su parte, Stylianides (2007) considera tres componentes de un argumento: el elemento matemático empleado, el modo de argumentar (cómo lo emplea) y el modo de representarlo. Estas tres componentes son más cercanas a las componentes de significado de un contenido matemático escolar (apartado 2.3.1), ya que el elemento matemático está muy vinculado a la estructura conceptual, el modo de representar a los sistemas de representación y el modo de argumentar a los modos de uso. A continuación, describimos cada componente.

2.4.1.1. Elemento matemático empleado

Se refiere a definiciones, axiomas, teoremas, procedimientos u otros elementos, en los que se basa el argumento (Stylianides, 2007). Utilizaremos los resultados expuestos en la sección 2.5 para identificarlos en las respuestas que proporcionen los estudiantes.

2.4.1.2. Modo de argumentar

Alude a la aplicación de reglas lógicas de inferencia (como *modus ponens* o *modus tollens*), uso de definiciones para derivar enunciados generales, enumeración sistemática de todos los casos a los que se reduce un enunciado (dado que su número es finito), construcción de contraejemplos, desarrollo de un razonamiento que muestre la aceptación de un enunciado que conduce a una contradicción, entre otros (Stylianides, 2007).

Solow (2006) propone unas técnicas usadas al realizar una demostración matemática, que se pueden aplicar también a los argumentos matemáticos. Manifiesta que las demostraciones se basan en un método al que designa como *retroceder-avanzar*, pues al demostrar una implicación de la forma $P \Rightarrow Q$, donde P es la hipótesis y Q lo que queremos concluir, tenemos dos opciones:

- la primera, cuestionarnos ¿cómo o cuando puedo demostrar que Q es verdadero? es decir, empezando de atrás hacia adelante (retroceder);
- la segunda consiste en asumir que P es verdadero y cuestionarnos ¿Qué significa que P sea verdadero? y obtener de esta manera otra proposición equivalente y así sucesivamente hasta obtener Q (avanzar).

Solow (2006) señala que la clave está en la pregunta que nos hacemos y la respuesta que brindamos a la misma. También, indica que la respuesta a la pregunta se puede hacer a través de una implicación lógica, en la que se pueda usar definiciones o bien de resultados ya establecidos.

2.4.1.3. Modo de representar

Se refiere a la manera en que el argumento es representado. Nos basaremos en la clasificación realizada por Reid y Knipping (2010). Estos autores consideran cuatro grandes categorías de argumentos, que se desglosan a su vez en distintas subcategorías. Puesto que en nuestro trabajo no encontramos diversidad al representar los argumentos, y por un asunto de espacio, seguidamente, describimos algunas de ellas.

- Empíricos: son los argumentos que se basan en un ejemplo particular que no necesariamente es representativo de la situación. Involucra el análisis de uno o varios casos específicos. Dos subcategorías son *tipos; que* muestran distintos ejemplos o casos y *perceptual; que* consiste en el dibujo de un caso en concreto.
- Genéricos: son aquellos argumentos que apelan a ejemplos de un caso representativo de una clase, es decir, el hilo argumentativo puede ser transferido a cualquier otro ejemplo de la clase. Una subcategoría es *pictórico:* que alude a un dibujo representativo.
- Simbólicos: corresponden a argumentos y pruebas que emplean palabras y símbolos matemáticos. Dos subcategorías son: *narrativo*; utiliza en su mayoría palabras, y *simbólicos;* utilizan más símbolos que palabras.
- Formales: son argumentos que constituyen una prueba, se escriben mediante símbolos, usando la menor cantidad de palabras posibles, que fuera de un contexto matemático probablemente no significan nada. Son presentados de manera sintáctica.

Esta clasificación se fundamenta en el uso que dan a los sistemas de representación, pero se puede observar cómo las categorías consideran pruebas que van de las menos formales a las que son más formales. Por ejemplo, los argumentos simbólicos y los formales utilizan el sistema de representación simbólico, pero su nivel de formalidad es diferente. Los simbólicos no necesariamente se refieren a una prueba formal, ya que pueden incorporar palabras, mientras que los argumentos formales aluden a demostraciones y pruebas matemáticas que se distinguen por ser muy sintácticas, evadiendo el uso de las palabras.

2.5 LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

El propósito de este apartado es presentar los principales fundamentos que dan sustento teórico a los conceptos matemáticos sobre límites, continuidad y derivabilidad de funciones reales de variable real que se abordan en este trabajo de investigación. Para ello, revisamos libros de texto de cálculo y análisis en una variable real. Concretamente, consultamos los siguientes autores: Apostol (1967a), Apostol (1967b), Banach (1967a), Banach (1967b), Banach (1967c), Bartle y Sherbert (2000a), Bartle y Sherbert (2000b), Bartle y Sherbert (2000c), Courant y John (1999a), Courant y John (1999b), Lang (1968a), Lang (1968b), Pozniak (1991a), Pozniak (1991b), Royden (1968), Spivak (1992a), Spivak (1992b), Spivak (1992c), Spivak (1992d), Sprecher (1970a), Sprecher (1970b), y Wrede y Spiegel (2002a), Wrede y Spiegel (2002b). Asimismo, se presentan las ideas fundamentales de Blázquez et al. (2006) sobre el contraste de la definición métrica del límite dada por Weierstrass con su conceptualización como aproximación óptima, dada por Blázquez y Ortega (2002).

2.5.1 CONCEPTO Y DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

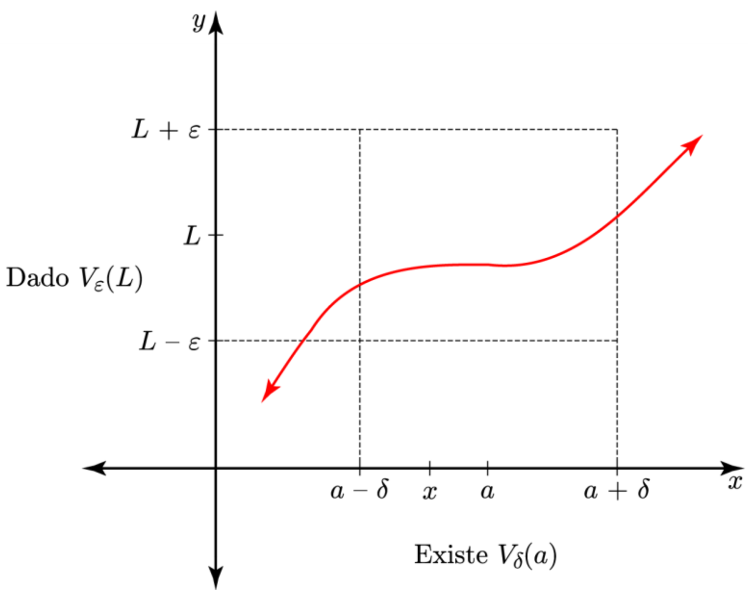
Definición 1 (Límite de una función en un punto)

Sean f una función real de variable real, $a \in \mathbb{R}$ punto de acumulación de D_f y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que L es un límite de f en a si y solo si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que si $x \in D_f$ y $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Algunos elementos importantes para considerar en la definición anterior es que en general el valor de δ depende del valor de ε seleccionado, por tal razón, en algunas ocasiones se escribe $\delta(\varepsilon)$ para remarcar esta dependencia. Además, si un límite de f en a es L se puede decir que f converge a L en a o que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a. Más adelante se demostrará que si la función f tiene un límite en a entonces es único, lo que simbólicamente se expresa como $\lim_{x\to a} f(x) = L$. De esta manera, afirmar que f converge en a equivale a afirmar que $\exists L \in \mathbb{R}$ de manera que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que si $x \in D_f$ y $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Figura 2.4

Representación gráfica del concepto de límite.



En la figura 2.4, se tiene una representación gráfica del concepto de límite. De esta manera, si se construye cualquier vecindad $V_\varepsilon(L)$ centrada en el número real L entonces necesariamente debe existir al menos una vecindad $V_\delta(a)$ centrada en el número real a de forma tal que dado cualquier elemento x del dominio de la función f que pertenezca al conjunto $V_\delta(a) - \{a\}$ se cumple que su imagen $f(x)$ pertenece a la vecindad $V_\varepsilon(L)$. Se puede observar que la definición no requiere que el número real a sea un elemento del dominio de la función f, de este modo, en el límite el interés recae en las preimágenes de la función f cercanas al número real a y no en dicho valor.

Según Blázquez et al. (2006) la conceptualización del límite ha tenido diferentes variaciones en las matemáticas y su principal orientación es brindar rigor matemático y formalismo sintáctico, sin considerar el proceso de aprendizaje de los alumnos sobre estas ideas. Por tanto, dichos autores hacen una comparación de la definición métrica de Weierstrass con la que proponen Blázquez y Ortega (2002).

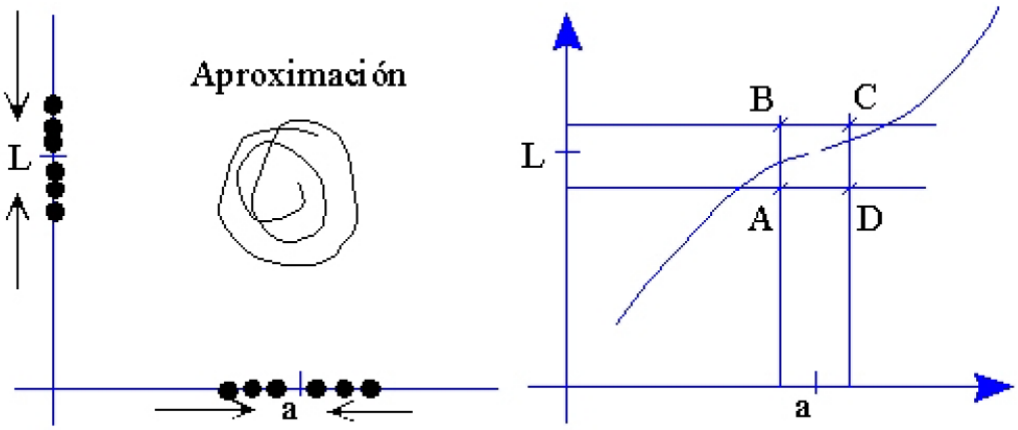
Según Blázquez y Ortega (2002) las definiciones de límite secuencial y límite funcional son las siguientes:

- *Definición de límite secuencial:* L es el límite de una sucesión, si para cualquier aproximación K de L con $K \neq L$ existe un término de la sucesión tal que todos los que siguen están más próximos a L que a K.
- *Definición de límite funcional:* el límite de la función f en $x=a$ es L si para cualquier aproximación K de L con $K \neq L$ existe una aproximación H de a con $H \neq a$ tal que las imágenes de todos los puntos que están más cerca de a que H están más próximas a L que a K.

Para Blázquez et al. (2006) en la figura 2.5 se ilustra el hecho de que cualquier aproximación a L diferente a L genera una banda horizontal que contiene a L, y cualquier aproximación de a distinta de a define otra banda vertical que contiene a a y esto de manera recíproca. De esta manera, cuando se fija una banda horizontal que contenga a L existe una banda vertical que contiene a a de forma tal que la gráfica de la función tiene que intersecar al rectángulo $ADCB$ de manera exclusiva por los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Una de las bondades de esta representación es que no está vinculada a la gráfica de la función y que, por lo tanto, dicha gráfica puede dibujarse después si se desea.

Figura 2.5

Conceptualización del límite por aproximación óptima (Blázquez et al., 2006).



Según Blázquez (1999) si se desea presentar la definición métrica de límite de Weierstrass, es conveniente hacerlo luego de que los alumnos hayan asimilado la conceptualización como aproximación óptima. Asimismo, dicho autor indica que ambas definiciones son equivalentes tal y como se muestra en la 2.3 donde se describe la siguiente correspondencia asociativa entre las unidades significantes elementales que las conforman.

Tabla 2.3

Comparación de las definiciones de límite métrica y aproximación óptima. Tomado de Blázquez et al. (2006).

Asociación de las unidades significantes elementales	
Definición métrica	**Definición como aproximación óptima**
Para todo $\varepsilon > 0$	Para toda aproximación $K \neq L$
Existe $\delta > 0$	Existe una aproximación $H \neq a$
Los x tales que $0 < \lvert x - a \rvert < \delta$	Los x que mejoran la aproximación H de a
$\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$	Las imágenes $f(x)$ mejoran la aproximación K de L

Por otra parte, un elemento para considerar es que, en la definición de límite, no hay garantía de la unicidad. Sin embargo, el siguiente teorema garantiza dicha unicidad.

Teorema 1 (Unicidad del límite)

Sean f una función real de variable real, a punto de acumulación de D_f. Entonces f posee a lo sumo un límite en a.

Demostración

Si la función f no posee un límite en a entonces se satisface el teorema. Supongamos que la función tiene más de un límite en a, concretamente supongamos que los números reales L_1 y L_2 son límites de la función f en a. Consideremos a cualquier número positivo ε.

Como L_1 y L_2 son límites de la función f en a y $\varepsilon > 0$ se sigue que:

- $\exists \delta_1 > 0 \ \forall x \in D_f \left(0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2} \right)$.
- $\exists \delta_2 > 0 \ \forall x \in D_f \left(0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} \right)$.

Sean $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $x \in D_f$ con $0 < |x-a| < \delta$. Puesto que $\delta \le \delta_1$ y $\delta \le \delta_2$ se sigue que:

$|f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2} \ \wedge \ |f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Tenemos que: $0 \le |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \le \left(|f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \right) < \varepsilon$.

Por lo tanto, hemos demostrado que $\forall \varepsilon > 0 \left(0 \le |L_1 - L_2| < \varepsilon \right)$ y de este modo se sigue necesariamente que $|L_1 - L_2| = 0$. En consecuencia, $L_1 = L_2$ lo que demuestra la unicidad.

Con base en la definición de límite y el teorema 1 se tiene que una función f converge en a es equivalente a decir que $\exists ! \, L \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D_f \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \right)$. En tal caso, se puede escribir $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y L es el límite de f en a.

Para ejemplificar las ideas anteriores, consideremos una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}\ \left(f(x)=x^3\right)$ y 2 un punto de acumulación de $\mathbb{R}$. Probemos que $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3\right)=8$. Para ello, se debe garantizar la veracidad de la proposición $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\mathbb{R}\ \left(0<\left|x-2\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-8\right|<\varepsilon\right)$.

En efecto, sea $\varepsilon>0$. Consideremos $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{19}\right\}$, claramente, $\delta>0$. Sea $x\in\mathbb{R}$ y supongamos que $0<\left|x-2\right|<\delta$. Debemos probar que $\left|f(x)-8\right|<\varepsilon$. Vemos que $\left|f(x)-8\right|=\left|x^3-8\right|=\left|(x-2)\left(x^2+2x+4\right)\right|=\left|x-2\right|\left|x^2+2x+4\right|$. Como $0<\left|x-2\right|<\delta$ entonces, $0<\left|x-2\right|\left|x^2+2x+4\right|<\delta\left|x^2+2x+4\right|$ y de esta manera $\left|f(x)-8\right|<\delta\left|x^2+2x+4\right|$. Por otra parte, dado que $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{19}\right\}$, se tiene en particular que $\delta\le 1$ y por lo tanto $0<\left|x-2\right|<\delta\le 1$ de donde $0<\left|x-2\right|<1$ y en consecuencia $-1<x-2<1$ lo que permite deducir que $1<x<3$. Con base en esta última desigualdad se tiene que $1<x^2<9$ y $2<2x<6$ de donde se sigue que $7<x^2+2x+4<19$ lo cual equivale a afirmar que $7<\left|x^2+2x+4\right|<19$. Como $\delta>0$, entonces, $\delta\left|x^2+2x+4\right|<19\delta$ y de este modo $\left|f(x)-8\right|<19\delta$. Puesto que $\delta\le\dfrac{\varepsilon}{19}$ se sigue que $19\delta\le\varepsilon$ de donde concluimos necesariamente que $\left|f(x)-8\right|<\varepsilon$ tal y como se quería probar.

2.5.2 ÁLGEBRA DE LÍMITES DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

En esta sección, se discuten los principales resultados sobre el álgebra de límites. Dichos resultados permiten el cálculo de límites de una manera más eficiente con respecto al uso de la definición formal. Las demostraciones de algunos de los resultados requieren del conocimiento de teoremas que permiten acotar o mayorar de manera conveniente. Por tal razón, antes de enunciar los resultados sobre álgebra de límites, presentamos tales teoremas.

Teorema 2 (Teorema de Acotación)

Sean f una función real de variable real, a un punto de acumulación de D_f. Si f tiene un límite en a, entonces f está acotada en alguna vecindad de a.

Demostración

Supongamos que f tiene un límite en a. Sean $L=\lim_{x\to a} f(x),\ L\in\mathbb{R}$ y $\varepsilon=1$. Luego, $\exists\delta>0\ \forall x\in D_f\ \left[0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon\right]$. Considere $x\in D_f\cap\left(V_\delta(a)-\{a\}\right)$. Se tiene que, $\left||f(x)|-|L|\right|\leq|f(x)-L|<1$. Luego, $-1<|f(x)|-|L|<1$ y así $|f(x)|<|L|+1$.

- Si $a\notin D_f$ entonces sea $M=|L|+1$ y se cumple que $\forall x\in D_f\cap V_\delta(a)\ \left(|f(x)|\leq M\right)$.
- Si $a\in D_f$ entonces sea $M=\max\{|L|+1,|f(a)|\}$ y se cumple que $\forall x\in D_f\cap V_\delta(a)\ \left(|f(x)|\leq M\right)$.

En cualquier caso, hemos demostrado que $\exists\delta,M\in\mathbb{R}^+\ \forall x\in D_f\cap V_\delta(a)\ \left(|f(x)|\leq M\right)$, es decir, que f está acotada en alguna vecindad de a.

Teorema 3 (Teorema de Mayorización)

Sean f una función real de variable real, a un punto de acumulación de D_f, $L\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ entonces, $\exists\delta,M\in\mathbb{R}^+\ \forall x\in D_f\ \left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|>M\right)$.

Demostración

Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x)=L$ con $L\in\mathbb{R}-\{0\}$. Luego, $|L|>0$ y $\exists\varepsilon\in\mathbb{R}\ \left(0<\varepsilon<|L|\right)$. Como $\varepsilon>0$ entonces $\exists\delta>0\ \forall x\in D_f\ \left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon\right)$. Consideremos $x\in D_f\cap\left(V_\delta(a)-\{a\}\right)$. Se tiene que $\left||f(x)|-|L|\right|\leq|f(x)-L|<\varepsilon$ y de este modo $-\varepsilon<|f(x)|-|L|<\varepsilon$ de donde se sigue que $|L|-\varepsilon<|f(x)|$. Sea $M=|L|-\varepsilon$, claramente

$M>0$. Por lo tanto, hemos demostrado que $\exists \delta, M \in \mathbb{R}^{+}\ \forall x \in D_f\ \left(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M\right)$.

Teorema 4 (Álgebra de límites)

Sean f, g funciones reales de variable real, tales que, $D_f \cap D_g \neq \varnothing$, $a \in \mathbb{R}$ punto de acumulación de $D_f \cap D_g$, $A, B \in \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{x \to a} f(x)=A$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)=B$. Entonces

1. Si $A \in \mathbb{R}-\{0\}$ entonces a es punto de acumulación del conjunto $D_{\frac{1}{f}}$ en donde

$D_{\frac{1}{f}}=\left\{x \in D_f : f(x) \neq 0\right\}$.

2. $\lim\limits_{x \to a}\left((f+g)(x)\right)=A+B$.

3. $\lim\limits_{x \to a}\left((f-g)(x)\right)=A-B$.

4. $\lim\limits_{x \to a}(f \cdot g)(x)=A \cdot B$.

5. Si $A \in \mathbb{R}-\{0\}$ entonces $\lim\limits_{x \to a}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=\dfrac{1}{A}$.

6. Si $B \in \mathbb{R}-\{0\}$ entonces $\lim\limits_{x \to a}\left(\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)\right)=\dfrac{A}{B}$.

Demostraciones

Parte 1

Suponga que a no es punto de acumulación de $D_{\frac{1}{f}}$. Luego, $\exists \delta_1>0 \left(\left(V_{\delta_1}(a)-\{a\}\right) \cap D_{\frac{1}{f}}=\varnothing\right)$. Como $\left(V_{\delta_1}(a)-\{a\}\right) \cap D_f \neq \varnothing$ entonces

$\forall x \in \left(\left(V_{\delta_1}(a) - \{a\}\right) \cap D_f\right)\left(f(x) = 0\right)$. Puesto que $A \neq 0$ entonces $|A| > 0$ y $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}\ \left(0 < \varepsilon < |A|\right)$. Para dicho ε, $\exists \delta_2 > 0\ \forall x \in D_f\ \left(0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y tómese $x \in D_f \cap \left(V_\delta(a) - \{a\}\right)$. Se tiene que $|f(x) - A| < \varepsilon \wedge f(x) = 0$ de donde se sigue que $|A| < \varepsilon$. En conclusión, se tiene que $|A| < \varepsilon$ y $\varepsilon < |A|$ lo cual es imposible.

Por lo tanto, a a es un punto de acumulación de $D_{\frac{1}{f}}$.

Parte 2

Debemos probar que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f \cap D_g\ \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |(f+g)(x) - (A+B)| < \varepsilon\right)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Luego, $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Se tiene que:

- $\exists \delta_1 > 0\ \forall x \in D_f\ \left(0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$.
- $\exists \delta_2 > 0\ \forall x \in D_g\ \left(0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, claramente, $\delta > 0$. Sea $x \in D_f \cap D_g$ y supongamos que $0 < |x-a| < \delta$. Puesto que $\delta \leq \delta_1$ y $\delta \leq \delta_2$ se sigue que $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, $|(f+g)(x) - (A-B)| = |f(x) - A + g(x) - B| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, $|(f+g)(x) - (A-B)| < \varepsilon$ como queríamos probar.

Parte 3

Debemos probar que $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D_f\bigcap D_g\ \left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow\left|\left(f-g\right)(x)-\left(A-B\right)\right|<\varepsilon\right)$. En efecto, sea $\varepsilon>0$. Luego, $\dfrac{\varepsilon}{2}>0$. Por lo tanto, se cumple que:

- $\exists\delta_1>0\ \forall x\in D_f\ \left(0<|x-a|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.
- $\exists\delta_2>0\ \forall x\in D_g\ \left(0<|x-a|<\delta_2\Rightarrow|g(x)-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

Sean $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, así, $\delta>0$, $x\in D_f\bigcap D_g$ y suponga que $0<|x-a|<\delta$. Puesto que $\delta\le\delta_1$ y $\delta\le\delta_2$ se sigue que $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ y $|g(x)-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Así, $|(f-g)(x)-(A-B)|=|f(x)-A-g(x)+B|\le|f(x)-A|+|g(x)-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, $|(f-g)(x)-(A-B)|<\varepsilon$ como queríamos probar.

Parte 4

Debemos probar que $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D_f\bigcap D_g\ \left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow\left|\left(f\cdot g\right)(x)-\left(A\cdot B\right)\right|<\varepsilon\right)$. En efecto, sea $\varepsilon>0$. Por el Teorema de Acotación, $\exists\delta_1,M\in\mathbb{R}^+\ \forall x\in D_g\left(0<|x-a|<\delta_1\Rightarrow|g(x)|<M\right)$.

Como $\dfrac{\varepsilon}{2M}>0$, entonces, $\exists\delta_2>0\ \forall x\in D_f\left(0<|x-a|<\delta_2\Rightarrow|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2M}\right)$.

Como $\dfrac{\varepsilon}{2\left(|A|+1\right)}>0$, entonces, $\exists\delta_3>0\ \forall x\in D_g\left(0<|x-a|<\delta_3\Rightarrow|g(x)-B|<\dfrac{\varepsilon}{2\left(|A|+1\right)}\right)$.

Sean $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, $\delta > 0$, $x \in D_f \cap D_g$ y supongamos que $0 < |x-a| < \delta$. Por lo tanto, se sigue que $|g(x)| < M$, $|f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $(g(x) - B) < \dfrac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$. Por otra parte, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|(f \cdot g)(x) - (A \cdot B)| &= |f(x) \cdot g(x) - A \cdot g(x) + A \cdot g(x) - A \cdot B| \\
&\leq |g(x)(f(x) - A)| + |A(g(x) - B)| \\
&\leq |g(x)||f(x) - A| + |A||g(x) - B| \\
&< |g(x)||f(x) - A| + (|A|+1)|g(x) - B| \\
&< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + (|A|+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $|(f \cdot g)(x) - (A \cdot B)| < \varepsilon$ como queríamos probar.

Parte 5

Supongamos que $A \in \mathbb{R} - \{0\}$. Debemos probar que $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{1}{f(x)} \right) = \dfrac{1}{A}$ lo que equivale a probar que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_{\frac{1}{f}}\ \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{A} \right| < \varepsilon \right)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$.

- Como $\lim_{x \to a} f(x) = A$ con $A \in \mathbb{R} - \{0\}$, por el Teorema de Mayorización $\exists \delta_1, M \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in D_f\ \left(0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| > M \right)$.
- Como $A \neq 0$, entonces, $|A| > 0$, luego, $(\varepsilon \cdot |A| \cdot M) > 0$, por lo tanto, $\exists \delta_2 > 0\ \forall x \in D_f\ \left(0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \cdot |A| \cdot M \right)$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Como a es punto de acumulación de D_f, entonces, a es punto de acumulación $D_{\frac{1}{f}}$ y de este modo $(V_\delta(a) - \{a\}) \cap D_{\frac{1}{f}} \neq \varnothing$.

Sea $x \in \left(V_\delta\left(a\right)-\left\{a\right\}\right) \cap D_{\frac{1}{f}}$, de este modo se tiene que: $x \in D_f$, $f\left(x\right) \neq 0 \ \wedge \ 0 < \left|x-a\right| < \delta$

Por lo tanto, $\left|f\left(x\right)\right| > M$ y $\left|f\left(x\right)-A\right| < \varepsilon \cdot \left|A\right| \cdot M$. Se tiene que:

$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{A}\right| = \left|\frac{A-f\left(x\right)}{A \cdot f(x)}\right| = \frac{\left|f\left(x\right)-A\right|}{\left|A\right| \cdot \left|f(x)\right|}$ (*)**.** Como $\left|f\left(x\right)\right| > M$, entonces, $\frac{1}{\left|f\left(x\right)\right|} < \frac{1}{M}$.

En (*): $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{A}\right| < \frac{1}{\left|A\right|} \cdot \frac{1}{M} \cdot \varepsilon \cdot \left|A\right| \cdot M$ **,** esto es, $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{A}\right| < \varepsilon$ como queríamos probar.

Parte 6

Supongamos que $B \in \mathbb{R}-\left\{0\right\}$. Debemos probar que $\lim\limits_{x \to a}\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right) = \frac{A}{B}$. En efecto,

$\lim\limits_{x \to a}\left(\frac{1}{g\left(x\right)}\right) = \frac{1}{B}$. Luego, $\lim\limits_{x \to a}\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right) = \lim\limits_{x \to a}\left(\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right) = \lim\limits_{x \to a}\left(f\left(x\right) \cdot \frac{1}{g\left(x\right)}\right) = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$.

Teorema 5 (El cambio de variable)

Sean $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a, L \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} f\left(x+a\right) = L$.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = L$. Debemos probar que $\lim\limits_{x \to 0} f\left(x+a\right) = L$ lo cual equivale a probar que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(0 < \left|x\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x+a)-L\right| < \varepsilon\right)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Luego $\exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(0 < \left|x-a\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-L\right| < \varepsilon\right)$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \left|x\right| < \delta$. Luego $0 < \left|\left(x+a\right)-a\right| < \delta$ y por lo tanto, $\left|f(x+a)-L\right| < \varepsilon$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\lim\limits_{x \to 0} f\left(x+a\right) = L$. Debemos probar que $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = L$ lo cual equivale a probar que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(0 < \left|x-a\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-L\right| < \varepsilon\right)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Luego $\exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| f(x+a) - L \right| < \varepsilon\right)$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x-a| < \delta$. Luego $\left| f\left((x-a) + a \right) - L \right| < \varepsilon$ y, por lo tanto, $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$.

2.5.3 CÁLCULO DE LÍMITES INMEDIATOS

En esta sección presentamos algunos resultados que junto con los teoremas del álgebra de límites permiten el cálculo de una forma más expedita.

Teorema 6 (Límite de una constante)

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(f(x) = c \right),\ a, c \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, esto es, $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

Demostración

Hay que probar que, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - c \right| < \varepsilon\right)$. En efecto, sean $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$ y $x \in \mathbb{R}$. Se tiene que, $\left| f(x) - c \right| = |c - c| = 0$. Luego la proposición $\left| f(x) - c \right| < \varepsilon$ es siempre verdadera. Por lo tanto, la proposición $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - c \right| < \varepsilon$, es cierta.

Teorema 7

Sean f una función real de variable real, $a \in \mathbb{R}$ punto de acumulación de D_f, $L \in \mathbb{R}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces, $\lim\limits_{x \to a} \left(c \cdot f(x) \right) = c \cdot L,\ \forall c \in \mathbb{R}$.

Demostración

Supongamos que, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Se debe probar que, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f\ \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |cf(x) - cL| < \varepsilon\right)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Luego,

$\frac{\varepsilon}{|c|+1} > 0$ y por lo tanto, $\exists \delta > 0\ \forall x \in D_f\ \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{|c|+1}\right)$.

Consideremos $x \in D_f$ y suponga que $0 < |x-a| < \delta$.

Se tiene que: $|cf(x)-cL| = |c||f(x)-L|$. Se sabe que, $|c| < |c|+1$ y que $|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{|c|+1}$.

Así, $|c| \cdot |f(x)-L| < (|c|+1) \cdot \frac{\varepsilon}{|c|+1}$ de donde se sigue que $|cf(x)-cL| < \varepsilon$ como queríamos probar.

Teorema 8 (Límite de la función identidad)

Sean $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) = x)$, $a \in \mathbb{R}$ punto de acumulación de $\mathbb{R}$. Entonces $\lim_{x \to a} f(x) = a$.

Demostración

Debemos probar que, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-a| < \varepsilon\right)$. En efecto, sean $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$ y $x \in \mathbb{R}$. Supongamos que $0 < |x-a| < \delta$. Se tiene que: $|f(x)-a| = |x-a|$ y como $|x-a| < \delta$ entonces $|x-a| < \varepsilon$. Por lo tanto, $|f(x)-a| < \varepsilon$ tal y como queríamos probar.

Teorema 9

Sean $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de D_f. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}\left(\lim_{x \to a}(f(x))^n = a^n\right)$.

Demostración

Sea $P(n): \lim_{x \to a}(f(x))^n = a^n$ un predicado con $n \in \mathbb{N}$.

- $P(1): \lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^1 = a^1$. Se tiene que, $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^1 = \lim_{x\to a} f(x) = a = a^1$.

  Por lo tanto, $P(1)$ es cierta.

- Debemos probar que $\forall n \in \mathbb{N}\ \left(p(n) \Rightarrow p(n+1)\right)$. En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$.

  Supongamos que $P(n): \lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n = a^n$, es cierta y probemos que $P(n+1): \lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{n+1} = a^{n+1}$, es cierta. En efecto, $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{n+1} = \lim_{x\to a}\left[\left(f(x)\right)^n \cdot f(\mathrm{x})\right]$ (*). Se sabe que $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n = a^n$ y que $\lim_{x\to a} f(x) = a$. En (*) se tiene que: $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{n+1} = a^n \cdot a = a^{n+1}$. Luego, $P(n+1)$ es cierta.

  Por el principio de inducción matemática se sigue que $\forall n \in \mathbb{N}\left(\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n = a^n\right)$.

Teorema 10 (Límite de un polinomio)

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \left(f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)$ con $n\in\mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}, a_n \neq 0,\ a\in\mathbb{R}$. Entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f\left(a\right)$.

Demostración

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)$ (*).

Se sabe que, $\lim_{x\to a} a_o = a_0$ y que $\forall k \in \left[1, n\right]_{\mathbb{N}}\ \left(\lim_{x\to a} a_k x^k = a_k a^k\right)$.

En (*):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} a_n x^n + \lim_{x\to a} a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to a} a_1 x + \lim_{x\to a} a_0 \\
&= a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_o \\
&= f\left(a\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{x\to a} f(x) = f\left(a\right)$ como queríamos probar.

Teorema 11

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I - \{\ a\ \} \to \mathbb{R}$ una función tal que existe otra función $g : I \to \mathbb{R}$ que satisface que $\forall\, x \in \left(I - \{\ a\ \} \right) \left(\ f\left(x\right) = g\left(x\right) \right)$ y $\lim_{x \to a} g(x) = g\left(a\right)$. Entonces $\lim_{x \to a} f(x) = g\left(a\right)$.

Demostración

Debemos probar que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f\ \left(0 < \left| x - a \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - g\left(a\right) \right| < \varepsilon \right)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Luego $\exists \delta > 0\ \forall x \in D_g\ \left(0 < \left| x - a \right| < \delta \Rightarrow \left| g(x) - g\left(a\right) \right| < \varepsilon \right)$. Sea $x \in D_f$ tal que $0 < \left| x - a \right| < \delta$. Se sigue que $x \in D_g$ y puesto que $0 < \left| x - a \right| < \delta$ necesariamente se cumple que $\left| g(x) - g\left(a\right) \right| < \varepsilon$. Puesto que $x \in D_g$ y $x \neq a$ entonces $x \in \left(I - \{\ a\ \} \right)$ con lo cual $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ y por lo tanto $\left| f(x) - g\left(a\right) \right| < \varepsilon$ como queríamos probar.

A continuación, presentamos algunos ejemplos de cálculo de límites con el fin de ilustrar el uso de los teoremas.

1. Calcular $\lim_{x \to 2} \left(\left(x^2 + 1\right)\left(x^3 - 4\right) \right)$

En virtud del límite del polinomio se tiene que $\lim_{x \to 2} \left(x^2 + 1\right) = \left(2\right)^2 + 1 = 5$ y $\lim_{x \to 2} \left(x^3 - 4\right) = \left(2\right)^3 - 4 = 4$. Luego, por el límite del producto se tiene que

$$\lim_{x \to 2} \left(\left(x^2 + 1\right)\left(x^3 - 4\right) \right) = \left(\lim_{x \to 2} \left(x^2 + 1\right) \right) \cdot \left(\lim_{x \to 2} \left(x^3 - 4\right) \right) = \left(5\right) \cdot \left(4\right) = 20.$$

2. Calcular $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1} \right)$

En virtud del límite del polinomio se tiene que $\lim_{x \to 2} \left(x^2 + 1\right) = \left(2\right)^2 + 1 = 5$ y $\lim_{x \to 2} \left(x^3 - 4\right) = \left(2\right)^3 - 4 = 4$. Dado que $5 \neq 0$, por el límite del cociente se tiene que

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-4}{x^2+1}\right) = \frac{\lim_{x\to 2}\left(x^3-4\right)}{\lim_{x\to 2}\left(x^2+1\right)} = \frac{4}{5}\ .$$

3. Calcular $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{3x-6}\right)$

En virtud del límite del polinomio se tiene que $\lim_{x\to 2}\left(x^2-4\right) = \left(2\right)^2-4=0$ y $\lim_{x\to 2}\left(3x-6\right) = 3\left(2\right)-6=0$. No se puede por lo tanto utilizar el límite del cociente. No obstante, se tiene que dado $x \in \mathbb{R}-\left\{2\right\}$ se tiene que $\frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{3\left(x-2\right)} = \frac{x+2}{3} = \frac{1}{3}\left(x+2\right)$. En virtud del teorema 11 se sigue que $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{3x-6}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{3}\left(x+2\right)\right) = \frac{1}{3}\left(2+2\right) = \frac{4}{3}$.

2.5.4 LÍMITES LATERALES

Definición 2 (Límites laterales finitos)

Sean f una función real de variable real y $a, L \in \mathbb{R}$.

1. Si a es un punto de acumulación del conjunto $D_f \cap \left]a,+\infty\right[$ se dice que L es un límite por la derecha de f en a si y solo si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f\ \left(0 < x-a < \delta \Rightarrow \left|f(x)-L\right| < \varepsilon\right)$.

2. Si a es un punto de acumulación del conjunto $\left]-\infty, a\right[\cap D_f$ se dice que L es un límite por la izquierda de f en a si y solo si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f\ \left(0 < a-x < \delta \Rightarrow \left|f(x)-L\right| < \varepsilon\right)$.

Se puede demostrar que si una función tiene límite por la derecha o por la izquierda este es único. Además, el límite por la izquierda y por la derecha se denotan respectivamente como $\lim_{x\to a^-} f\left(x\right)$ y $\lim_{x\to a^+} f\left(x\right)$. Además, todos los teoremas sobre límites enunciados en los apartados anteriores valen en el caso de los límites laterales, con sus debidas adecuaciones.

Teorema 12 (Teorema de los límites laterales finitos)

Sean f una función real de variable real y $a, L \in \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de los conjuntos $D_f \cap \left]\, a, +\infty \right[$ y $\left]-\infty, a\right[\cap D_f$. Entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L \wedge \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \right)$.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Debemos probar que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, lo cual equivale a probar que:

(1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f \left(0 < x - a < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon \right)$

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f \left(0 < a - x < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon \right)$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Luego $\exists \delta > 0\ \forall x \in D_f \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon \right)$. Sea $x \in D_f$ tal que $0 < x - a < \delta$. Es claro que $0 < |x - a| < \delta$ y en consecuencia $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$. Por otro lado, sea $x \in D_f$ tal que $0 < a - x < \delta$. Luego $0 < |x - a| < \delta$ y en consecuencia $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$ lo que garantiza la validez de las proposiciones (1) y (2).

$\Leftarrow$) Supongamos que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$. Debemos probar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ lo que equivale a probar que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon \right)$. Veamos, sea $\varepsilon > 0$. Luego se sigue que:

- $\exists \delta_1 > 0\ \forall x \in D_f \left(0 < x - a < \delta_1 \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon \right)$.
- $\exists \delta_2 > 0\ \forall x \in D_f \left(0 < a - x < \delta_2 \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon \right)$.

Sean $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $\delta > 0$, $x \in D_f$ tal que $0 < |x - a| < \delta$. Debemos probar que $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$. En efecto, si $x > a$ entonces $|x - a| = x - a$ y de este modo $0 < x - a < \delta \le \delta_1$ de donde se sigue que $0 < x - a < \delta_1$ y en consecuencia $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$. Por otra parte, si

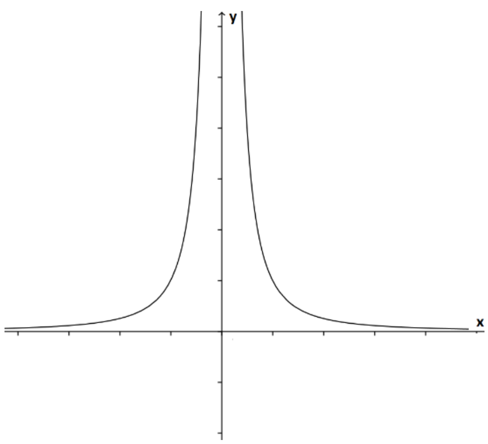
$x < a$ entonces $|x-a| = a-x$ y de este modo $0 < a-x < \delta \leq \delta_2$ de donde se sigue que $0 < a-x < \delta_2$ y en consecuencia $|f(x)-L| < \varepsilon$.

2.5.5 LÍMITES INFINITOS

Consideremos la función $f : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ tal que dado $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ se tiene que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. La representación gráfica de la función f es la siguiente:

Figura 2.6

Representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.



Esta representación gráfica de la función f en la figura 2.6 da la impresión de que conforme las preimágenes son más cercanas a cero, las imágenes correspondientes crecen sin límite, es decir, se hace deliberadamente grandes. Este tipo de límites, suelen llamarse límites infinitos. Para dar precisión formal y sintáctica a este concepto, se presenta la siguiente definición.

Definición 3 (Límites infinitos)

Sean f una función real de variable real y $a \in \mathbb{R}$.

I. Supongamos que a es un punto de acumulación de D_f.

1. Se dice que el límite de f es más infinito cuando x tiende a a si y solo si $\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M\right)$. En tal caso se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

2. Se dice que el límite de f es menos infinito cuando x tiende a a si y solo si $\forall M < 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M\right)$. En tal caso se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

II. Supongamos que a es un punto de acumulación del conjunto $D_f \cap \left] a, +\infty \right[$.

1. Se dice que el límite de f es más infinito cuando x tiende a a por la derecha si y solo si $\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f \left(0 < x-a < \delta \Rightarrow f(x) > M\right)$. En tal caso se escribe $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

2. Se dice que el límite de f es menos infinito cuando x tiende a a por la derecha si y solo si $\forall M < 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f \left(0 < x-a < \delta \Rightarrow f(x) < M\right)$. En tal caso se escribe $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

III. Supongamos que a es un punto de acumulación del conjunto $\left] -\infty, a \right[\cap D_f$.

1. Se dice que el límite de f es más infinito cuando x tiende a a por la izquierda si y solo si $\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f \left(0 < a-x < \delta \Rightarrow f(x) > M\right)$. En tal caso se escribe $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

2. Se dice que el límite de f es menos infinito cuando x tiende a a por la izquierda si y solo si $\forall M < 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f \left(0 < a-x < \delta \Rightarrow f(x) < M\right)$. En tal caso se escribe $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

Teorema 13 (Teorema de los límites laterales infinitos)

Sean f una función real de variable real y $a \in \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de los conjuntos $D_f \cap \left] a, +\infty \right[$ y $\left] -\infty, a \right[\cap D_f$. Entonces

1. $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \right)$.

2. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \wedge \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \right)$

Teorema 14 (Teorema de los límites infinitos)

Sean f y g son dos funciones reales de variable real, $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación del conjunto $D_f \cap D_g$, $\lim_{x \to a} f(x) = A$ con $A \in \mathbb{R} - \{ 0 \}$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ y existe una vecindad $V_\delta(a)$ tal que dado $x \in D_f \cap D_g \cap \left(V_\delta(a) - \{ a \} \right)$. Entonces:

1. Si $g(x) \cdot A > 0$ entonces $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = +\infty$.

2. Si $g(x) \cdot A < 0$ entonces $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = -\infty$.

En el caso de límites laterales, se cumple el resultado, con las modificaciones apropiadas.

2.5.6 FUNCIONES CONTINUAS

Definición 4 (continuidad de una función en un punto)

Sean f una función real de variable real, $a \in D_f$ punto de acumulación de D_f. Se dice que f es continua en a si y solo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Con base en la definición anterior y la definición de límite, podemos establecer que f es continua en a si y solo si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D_f \left(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \right)$. Es decir, que para que una función real de variable real f sea continua en un número real a se requiere el cumplimiento de tres condiciones:

1. $a \in D_f$ lo cual implica que existe $f(a)$.

2. Debe existir $\lim_{x\to a} f(x)$.

3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si al menos una de las tres condiciones anteriores se incumple, se dice que f es discontinua en a. Cuando existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y, $a \notin D_f$ o $a \in D_f$ pero $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, la discontinuidad se llama evitable. En tal caso, a partir de la función f se puede definir una nueva función F continua en a como sigue:

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & si \;\; x \in D_f - \{a\} \\ \\ \lim_{x\to a} f(x) & si \;\; x = a \end{cases}.$$

Por lo tanto, se dice que f tiene una discontinuidad evitable en a.

Cuando $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe no es posible definir una nueva función a partir de la función f que sea continua en a, por tal razón, se dice que f tiene una discontinuidad inevitable en a. Asimismo, si un conjunto A satisface que $A \subseteq D_f$ se dice que f es continua en el conjunto A si y solo si f es continua en cada elemento de dicho conjunto.

Cuando una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ de manera intuitiva, lo que sugiere es que su gráfica es un trazo continuo, es decir, sin cortes. Este hecho, se corrobora de manera formal con dos importantes teoremas, a saber, el Teorema de Bolzano y el Teorema de los Valores Intermedios que se presentan a continuación.

Teorema 15 (Teorema de Bolzano)

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $\left[a, b \right]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces $\exists c \in \left] a, b \right[\left(f(c) = 0 \right)$.

Demostración

Puesto que $f(a) \cdot f(b) < 0$ supongamos sin pérdida de generalidad que $f(a) < 0 < f(b)$. Sea $S = \left\{ x \in [a, b] : f(x) \leq 0 \right\}$. Se puede observar que $a \in S$ y por lo tanto $S \neq \varnothing$. Además, $S \subseteq [a, b]$ y por lo tanto, S es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Por el axioma del extremo superior, existe y además se sabe que es único el supremo del conjunto S. Sea $c = Sup(S)$. Puesto que b es una cota superior de S y $a \in S$ entonces $a \leq c \leq b$.

1. Supongamos que $f(c) > 0$. Como $f(a) < 0$ entonces $a < c \leq b$.

- Si $a < c < b$ existe $\delta > 0$ tal que $a < c - \delta < c < c + \delta < b$ y para cualquier $x \in \left] c - \delta, c + \delta \right[$ se cumple que $f(x) > 0$. Luego dado $y \in \left] c - \delta, c \right[$ se tiene que como $y < c$ existe $j \in S$ tal que con $y < j \leq c$. Tenemos entonces que $c - \delta < y < j \leq c < c + \delta$ y de este modo $f(j) \leq 0$ y $f(j) > 0$ lo cual es imposible.
- Si $a < c \leq b$ y $c = b$ existe $\delta > 0$ tal que $a < c - \delta < c = b$ y para cualquier $x \in \left] c - \delta, c \right[$ se cumple que $f(x) > 0$. Luego dado $y \in \left] c - \delta, c \right[$ se tiene que como $y < c$ existe $j \in S$ tal que con $y < j \leq c$. Tenemos entonces que $c - \delta < y < j \leq c$. Como $f(j) \leq 0$ y $f(c) > 0$ entonces $c \neq j$ y de este modo se tiene que $c - \delta < y < j < c$. Luego $f(j) \leq 0$ y $f(j) > 0$ lo cual es imposible.

2. Supongamos que $f(c) < 0$. Como $f(b) > 0$ entonces $a \leq c < b$.

- Si $a < c < b$ existe $\delta > 0$ tal que $a < c - \delta < c < c + \delta < b$ y para cualquier $x \in \left] c - \delta, c + \delta \right[$ se cumple que $f(x) < 0$. Luego dado $y \in \left] c, c + \delta \right[$ se tiene que $f(y) < 0$ y por lo tanto $y \in S$ con $c < y$ lo cual es imposible pues $c = Sup(S)$.
- Si $a \leq c < b$ y $c = a$ existe $\delta > 0$ tal que $a = c < c + \delta < b$ y para cualquier $x \in \left] c, c + \delta \right[$ se cumple que $f(x) < 0$. Luego dado $y \in \left] c, c + \delta \right[$ se tiene que $f(y) < 0$ y por lo tanto $y \in S$ con $c < y$ lo cual es imposible pues $c = Sup(S)$.

Puesto que el suponer que $f(c) > 0$ o $f(c) < 0$ se generan contradicciones, necesariamente debe cumplirse que $f(c) = 0$. Como $a \leq c \leq b$ y se tiene que $f(a) < 0 < f(b)$ entonces $a < c < b$. Por lo tanto, hemos demostrado que $\exists c \in \left] a, b \right[\left(f(c) = 0 \right)$.

Teorema 16 (Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas)

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sean $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $x_1 < x_2$ y $f(x_1) \neq f(x_2)$. Entonces dado cualquier número real k entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ se cumple que $\exists c \in \left] x_1, x_2 \right[\left(f(c) = k \right)$.

Demostración

Como $f(x_1) \neq f(x_2)$ entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $f(x_1) < f(x_2)$. Sea k un número real tal que k está entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$. Por lo tanto, en este caso se cumple que $f(x_1) < k < f(x_2)$.

Sea $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x \in [x_1, x_2]$ se tiene que $g(x) := f(x) - k$. Como f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$

entonces f es continua en el intervalo $[x_1, x_2]$ y por lo tanto g es continua en $[x_1, x_2]$. Tenemos que $g(x_1) = f(x_1) - k$ y $g(x_2) = f(x_2) - k$. Por lo tanto, $g(x_1) < 0 < g(x_2)$. En virtud del teorema de Bolzano (teorema 15) se sigue que $\exists c \in]x_1, x_2[\, (g(c) = 0)$ lo cual implica que $\exists c \in]x_1, x_2[\, (f(c) = k)$.

2.5.7 LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Definición 5 (La derivada de una función en un punto)

Sean f una función real de variable real, $a \in D_f$ punto de acumulación de D_f, $L \in \mathbb{R}$. Se dice que L es la derivada de f en a si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D_f \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| < \varepsilon \right).$$

De acuerdo con lo anterior, se puede decir que L es la derivada de f en a si y solo si $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = L$. En tal caso se dice que f es derivable en a y se escribe $L = f'(a)$

Una relación interesante entre las nociones de derivación y continuidad es que la continuidad es una condición necesaria para la derivabilidad tal y como se indica en el siguiente teorema.

Teorema 17 (La continuidad como condición necesaria de la derivabilidad)

Sean f una función real de variable real, $a \in D_f$ punto de acumulación de D_f tal que f es derivable en a. Entonces f es continua en a y por lo tanto, existe el límite de f en a.

Demostración

Debemos probar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. En efecto, como f es derivable en a entonces existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = L$. Tenemos que

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{\left(f(x)-f(a)\right)(x-a)}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}\left(\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)(x-a)\right).$$

Puesto que $\lim_{x\to a}(x-a)=a-a=0$ y $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=L$ se tiene que $\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=L\cdot 0=0$. Por lo tanto, tenemos que $\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=0$ y como $\lim_{x\to a} f(a)=f(a)$ se sigue que $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ tal y como queríamos probar.

Para finalizar esta sección, se presenta un resultado importante que vincula a la derivación con el cálculo de límites conocido como la Regla de L' Hôpital.

Teorema 18 (La Regla de L' Hôpital)

Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$ con $a,b\in\mathbb{R}, a<b$, derivables en cada punto del intervalo $]a,b[$ tales que $f(a)=g(a)=0$, $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ para todo $x\in\,]a,b[$, $L\in\mathbb{R}$. Entonces

1. Si $\lim_{x\to a^+}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)=L$ entonces $\lim_{x\to a^+}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=L$.

2. Si $\lim_{x\to a^+}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)=+\infty$ (o bien $-\infty$) entonces $\lim_{x\to a^+}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=+\infty$ (o bien $-\infty$).

Es importante mencionar que el resultado anterior se estableció para límites por la derecha, pero al combinar los resultados para límites por la izquierda y por la derecha, se deduce el resultado para límites por ambos lados. Asimismo, en el teorema anterior también se puede considerar cuando $x\to\pm\infty$ y muchas variantes más. Por tal razón, se habla en general de las Reglas del L' Hôpital para considerar a todas las variantes posibles.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo describimos la metodología que hemos seguido para el desarrollo de esta investigación. Está organizado en cinco apartados que son: diseño y alcance de la investigación, sujetos, instrumentos, análisis de los datos y validación del sistema del sistema de categorías. Hemos procurado que cada apartado sea detallado, de manera que se comprenda lo mejor posible el trabajo que hemos realizado.

3.1 DISEÑO Y ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo se enmarca dentro de las investigaciones de diseño mixto, que son aquellas que consideran un enfoque cualitativo y cuantitativo para estudiar un fenómeno. La investigación con diseño mixto no pretende reemplazar la investigación cuantitativa ni la cualitativa, sino más bien utilizar sus fortalezas, combinándolas y tratando de minimizar sus debilidades. Los métodos mixtos caracterizan los objetos de estudio a través de números y lenguaje e intentan obtener abundante evidencia para fortalecer y expandir nuestro entendimiento de ellos ya que "la triangulación, la expansión o ampliación, la profundización y el incremento de evidencia mediante la utilización de diferentes enfoques metodológicos nos proporcionan mayor seguridad y certeza sobre las conclusiones científicas" (Hernández et al., 2014, p.537). En nuestro caso, y como ampliaremos más adelante, usamos herramientas de la investigación cualitativa, como es el análisis de contenido, y herramientas de la investigación cuantitativa, como es el análisis de conglomerados o *cluster*.

El alcance de nuestro trabajo es exploratorio y descriptivo (Cohen et al., 2018; Hernández et al., 2014). Es exploratorio debido a que se profundiza en un tema poco estudiado, lo cual se respalda con la revisión de la literatura. En el caso de Costa Rica no se conocen investigaciones similares, es decir, no se conocen investigaciones que hagan un análisis del significado que atribuyen estudiantes universitarios al concepto de límite, examinado bajo el marco del significado de un contenido matemático escolar. De la misma manera, nuestro trabajo se enmarca como descriptivo ya que se pretende señalar los diferentes significados del concepto de límite, cómo lo entienden, lo representan, lo utilizan e interpretan, estudiantes universitarios, sin emitir juicios de valor.

Nuestro estudio se organiza en dos momentos. El momento 1 responde a los objetivos 1 y 2, que se centran en describir y agrupar el significado del concepto de límite que manifiestan los estudiantes durante su enseñanza en un primer nivel de complejidad cognitiva.

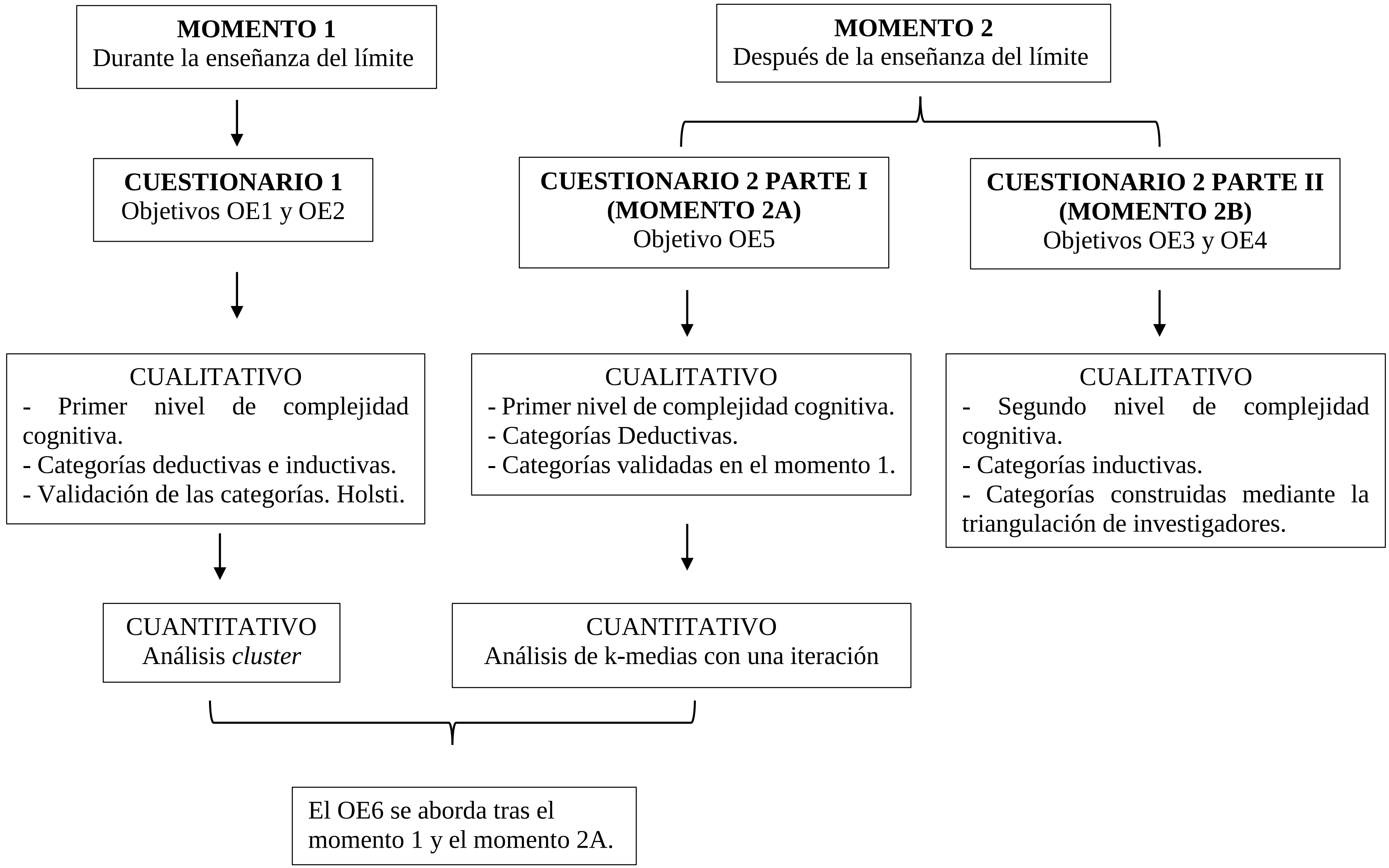
El momento 2 atiende al objetivo 5 que se centra en describir y agrupar el significado del concepto de límite que manifiestan los estudiantes, pero posterior a haber recibido su enseñanza. Este momento se subdivide en dos fases: la primera, análoga al momento 1, considera un primer nivel de complejidad cognitiva, a la que llamaremos momento 2A. La segunda atiende a los objetivos 3 y 4, que se centra en el análisis de los razonamientos que evidencian los estudiantes sobre el concepto de límite, ubicados dentro del marco de significado en un segundo nivel de complejidad cognitiva, a la que nombraremos como momento 2B.

En ambos momentos utilizamos tanto el análisis de contenido, para construir un sistema de categorías que nos permitiera describir los significados, como el análisis *cluster*, para interpretar la información en términos de perfiles de significado. En conjunto, ambos métodos nos permitieron describir con mejor claridad los resultados obtenidos. De esta forma, en ambos momentos se emplearon métodos cualitativos y cuantitativos.

El objetivo 6 corresponde a comparar los significados del concepto de límite de una función en un punto, que manifiestan los estudiantes durante y posterior a la enseñanza del tema de límites y se lleva a cabo posterior al momento 1 y al momento 2A. En la figura 3.1 mostramos un diagrama de cómo hemos llevado a cabo la investigación.

Figura 3.1

Diagrama de la metodología de investigación.



3.2 SUJETOS

Los documentos analizados corresponden a producciones escritas proporcionadas por 218 estudiantes de la asignatura Cálculo I en todas las titulaciones de la UNA en las que se imparte: Biología, Cartografía y Diseño Digital, Comercio y Negocios Internacionales, Enseñanza de las Ciencias, Enseñanza de las Matemáticas, Economía, Administración, Ingeniería en Química Industrial, Ingeniería en Gestión Ambiental, Ingeniería en Sistemas de Información, Ingeniería en Ciencias Forestales, Ingeniería en Topografía, Catastro y Geodesia, Ingeniería en Bioprocesos Industriales. Se trata de estudiantes que tienen su primer contacto con la noción de límite. Durante las clases, los docentes dan más importancia a la comprensión del concepto que a aspectos más técnicos como las definiciones o las demostraciones. Los 218 estudiantes corresponden a los estudiantes que estuvieron presentes en el primer momento, durante la enseñanza del tema de límites, y en el segundo momento, después de la enseñanza de dicho tema.

Procedemos a explicar cómo seleccionamos esos 218 estudiantes. Inicialmente, 421 estudiantes contestaron el cuestionario 1 durante el proceso de enseñanza del límite, y 256 contestaron el cuestionario 2 al finalizar su proceso de enseñanza. Los sujetos de investigación de nuestro estudio son los estudiantes que estaban presentes en ambos momentos, resultando ser 218 los que estaban presentes en ambos momentos (tabla 3.1).

Cabe destacar que estos estudiantes estaban divididos en 15 grupos de aproximadamente 35 personas, encontrándose en todos los grupos estudiantes de diferentes titulaciones. Además, el descenso en el número de estudiantes del primer momento de aplicación del cuestionario al segundo, se debe a la alta tasa de abandono de la asignatura.

Los sujetos de investigación fueron codificados de la siguiente manera: la letra S para indicar que es un sujeto, dos letras más dependiendo de la titulación en la que estén matriculados, cada una de ellas descritas en el párrafo anterior, seis dígitos en donde los dos primeros indicaban el número del grupo al que pertenecen, los dos segundos indicaban el número del cuestionario 1 y los últimos dos el número del cuestionario 2. Por ejemplo, el código SIB051210 se refiere a un sujeto estudiante matriculado en Ingeniería en Bioprocesos

Industriales, que pertenece al grupo 05, cuyo cuestionario 1 es el número 12, y su cuestionario 2 es el número 10.

Tabla 3.1

Distribución de estudiantes por titulación que completaron los cuestionarios.

Titulación	Cuestionario 1	Cuestionario 1 y 2
Biología	32	15
Cartografía digital	1	1
Enseñanza de las Ciencias	28	13
Economía	48	18
Administración	2	
Enseñanza de la Matemática	3	2
Comercio y negocios Internacionales	1	0
Ingeniería en Química Industrial	30	21
Ingeniería en Gestión Ambiental	13	8
Ingeniería en sistemas de Información	168	88
Ingeniería en Ciencias Forestales	16	11
Ingeniería en Topografía, Catastro y Geodesia	47	20
Ingeniería en Bioprocesos Industriales	32	21
Total	421	218

3.3 INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN

Para obtener información acerca del significado que tienen los estudiantes del concepto de límite, elaboramos dos cuestionarios semánticos de elicitación directa (Matthewson, 2004) con preguntas de respuesta abierta. Los cuestionarios semánticos permiten recoger "palabras, términos, símbolos, gráficas, descripciones, explicaciones y otras notas que expresan y representan un modo de apropiación por cada sujeto del concepto considerado" (Martín et al., 2016, p. 56). El cuestionario 1 se administró durante la enseñanza del tema de límites, concretamente, después de introducir el concepto, ya que esta asignatura es el primer contacto que tienen los estudiantes con el concepto de límite, pues no forma parte currículo de Costa Rica en la etapa preuniversitaria. El cuestionario 2 se administró tiempo después del desarrollo del tema de límites, una vez que el concepto se había afianzado más en los estudiantes y que habían estudiado otros conceptos matemáticos como el de continuidad y el de derivabilidad de funciones reales de variable real.

3.3.1. CUESTIONARIO 1

El cuestionario 1 (ver en anexo 1) se compone de 4 tareas y se construyó con base en las tres componentes del significado descritas en el marco teórico: estructura conceptual, sistemas de representación y sentido. La primera tarea (T1_C1), diseñada considerando elementos de la estructura conceptual, pedía a los estudiantes que explicaran con sus propias palabras qué significa la definición de límite de una función en un punto. La segunda (T2_C1), centrada en los sistemas de representación, solicitaba a los estudiantes que utilizaran uno o varios dibujos, esquemas o figuras o lo que consideraran necesario para representar la definición de límite. La tercera (T3_C1) y cuarta (T4_C1) se hicieron con base en los elementos del sentido, y más concretamente, atendiendo a las situaciones y en los términos y modos de uso, respectivamente. Para ello, en la tercera tarea se les pedía que nombraran aplicaciones que pueden tener los límites y en la cuarta otros significados de la palabra límite fuera de la matemática. Se les indicaba que podían utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que consideraran necesario.

A pesar de que cada una de las preguntas fue diseñada pensando en una de las componentes de nuestra terna semántica de significado y esperando que las respuestas atendieran a ella, el hecho es que la riqueza de las respuestas a todas las preguntas no solo informa de la componente con la que está relacionada, sino que también enriquece la información sobre el resto de componentes. Así, por ejemplo, las respuestas a la tarea T2_C1, centrada en los sistemas de representación, aportó muchísima información acerca de aspectos estructurales y relativos a los modos de uso del límite. Esto ocurrió con todas las preguntas.

3.3.2. CUESTIONARIO 2

El cuestionario 2 (ver en anexo 2) constaba de dos partes: la primera muy similar al cuestionario 1, para analizar los significados del límite en un primer nivel de complejidad cognitiva; la segunda para analizar razonamientos, que tienen mayor nivel de complejidad cognitiva. Dada la extensión del cuestionario, para evitar que los estudiantes se cansaran y no contestaran o dejaran el cuestionario incompleto, se optó por modificar ligeramente el cuestionario 1 para confeccionar la primera parte del cuestionario 2. Concretamente, se eliminó la tarea T4_C1; las tareas T1_C1 y T2_C1 se fusionaron en una, la primera tarea de este cuestionario (T1_C2); y la misma tarea T3_C1 se amplió un poco más al preguntarles que problemas resuelve el límite.

La segunda parte del cuestionario 2 se construyó para determinar los razonamientos que evidencian los estudiantes al resolver tareas matemáticas que involucran el concepto de límite. Concretamente, se diseñaron 3 tareas que nombraremos para efectos prácticos como: tercera tarea (T3_C2), cuarta tarea (T4_C2), quinta tarea parte a (T5a_C2) y quinta tarea parte b (T5b_C2).

Las tareas T3_C2 y T5a_C2 tareas son muy similares, pues se les pedía a los estudiantes que calcularan un límite de una función y ellos nos brindan un argumento como respuesta. La principal diferencia es que en la tarea T3_C2 la función proporcionada está definida a trozos. En la tarea T4_C2 los estudiantes debían determinar qué afirmaciones, de un listado dado, son verdaderas si sabían que "el límite cuando x tiende a *2* de una función es *3*". Por último, en la tarea T5b_C2 se les pedía que identificaran cuál de las 6 representaciones gráficas presentadas en una plantilla corresponde con la representación gráfica una función. A diferencia de las dos tareas anteriores, en las que analizamos toda la argumentación descrita por los estudiantes, en estas dos últimas tareas nosotros inferimos qué tipo de argumentación o elementos matemáticos evidencian.

Cronológicamente, el cuestionario 1 se administró la última semana de febrero y la primera de marzo del año 2018 y el cuestionario 2 durante la primera y la segunda semana de mayo del mismo año. En el caso del cuestionario 1 se contó con 20 minutos para completarlo mientras que para el cuestionario 2 se brindaron 40 minutos de tiempo dado que era más extenso. Durante la administración de ambos cuestionarios, se les dieron las instrucciones generales y procedieron a completarlo sin que sucediese ninguna incidencia.

A continuación, describimos la evolución de la redacción de las tareas y explicamos el proceso que hemos seguido para su construcción. Las modificaciones son fruto de nuestra preocupación de que la redacción fuese cercana a la que utilizaron los docentes que les impartían clase.

3.3.3. EVOLUCIÓN DEL DISEÑO DE LAS TAREAS DEL CUESTIONARIO 2

En primera instancia, consideramos el planteamiento de dos tareas matemáticas en las que los sujetos de investigación tuviesen que indicar su valor de verdad: falso o verdadero y, además, brindar una justificación de su respuesta. La figura 3.2 muestra la versión inicial de ambas tareas.

Figura 3.2

Versión 1 de las tareas T3_C2 y T5a_C2.

T3_C2. Dada g una función real de variable real tal que

$$g(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ 2^{-1000} & \text{si } 0\leq x\leq 2^{-1000} \\ x & \text{si } x>2^{-1000} \end{cases}$$

se tiene que $\lim_{x\to 0} g\left(x\right)$ no existe. Indique su valor de verdad: falso o verdadero y, además, brinde una justificación de su respuesta.

T5a_C2. Dada f una función real de variable real tal $f(x)=\dfrac{3x^2-12}{\left(x-2\right)^3\left(2x^2+1\right)}$ se tiene que $\lim_{x\to 2}\left[\dfrac{3x^2-12}{\left(x-2\right)^3\left(2x^2+1\right)}\right]=+\infty$. Indique su valor de verdad: falso o verdadero y, además, brinde una justificación de su respuesta.

Una vez que elaboramos estas dos tareas, hicimos una revisión del programa del curso MAT 002 Cálculo I y de las listas de ejercicios que se proponían a los estudiantes sobre el tema de límites para determinar si este tipo de tareas estaban presentes en el abordaje del curso. Como resultado de esta revisión, determinamos que las tareas que se proponen sobre límites son más procedimentales, esto es, lo que se les solicita es realizar el cálculo directo de límites de funciones en un punto. Por tal razón, y para evitar un bloqueo, procedimos a realizar modificaciones en la redacción de las tareas de manera que se asemejaran al cálculo de un límite, de manera que fuesen similares a las que realizan en sus clases, pero que a su vez lo estudiantes tuviesen la necesidad de elaborar un argumento o una justificación al realizar la tarea, ya que queríamos identificar los razonamientos que evidencian en el argumento que brindan. La versión final de estas dos tareas aparece en la figura 3.3, correspondiéndose con las tareas T3_C2 y T5a_C2.

Figura 3.3

Versión final de las tareas T3_C2 y T5a_C2.

T3_C2. Sea g una función real de variable real tal que $g(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ 2^{-1000} & \text{si } 0\le x\le 2^{-1000} \\ x & \text{si } x>2^{-1000} \end{cases}$

.

Calcule $\lim_{x\to 0} g(x)$.

T5a_C2. Considere la siguiente expresión $\lim_{x\to 2}\left[\dfrac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)}\right]$. Calcule el límite anterior.

Dado que las tareas anteriores son de naturaleza procedimental, consideramos que era necesario plantear una tarea de naturaleza conceptual. Para ello, nos centramos en, propiedades, proposiciones y los modos de argumentar que pueden tener los estudiantes cuando estudian los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad.

En la tarea T4_C2 (Figura 3.4) nos centramos en los modos de argumentar que evidencian los estudiantes al escoger como verdadera cada una de las afirmaciones propuestas en la tarea Dichos modos de argumentar fueron el resultado de un consenso entre los investigadores responsables de este trabajo, y que se describen en la tabla 3.2.

Figura 3.4

Versión final de la tarea T4_C2.

Sea f una función real de variable real tal que $\lim_{x\to 2} f(x)=3.$ Encierre con un círculo la letra de las proposiciones que considere verdaderas (puede encerrar más de una si lo considera necesario). Si no considera ninguna verdadera, encierre con un círculo la proposición f.

a. f es continua en el punto $x=2.$

b. f está definida en $x=2.$

c. $f(2)=3.$

d. $\lim_{h\to 0}\left[f(2+h)-3\right]=0.$

e. $f'(2)$ existe.

f. Ninguna de las proposiciones mencionadas es verdadera.

Tabla 3.2

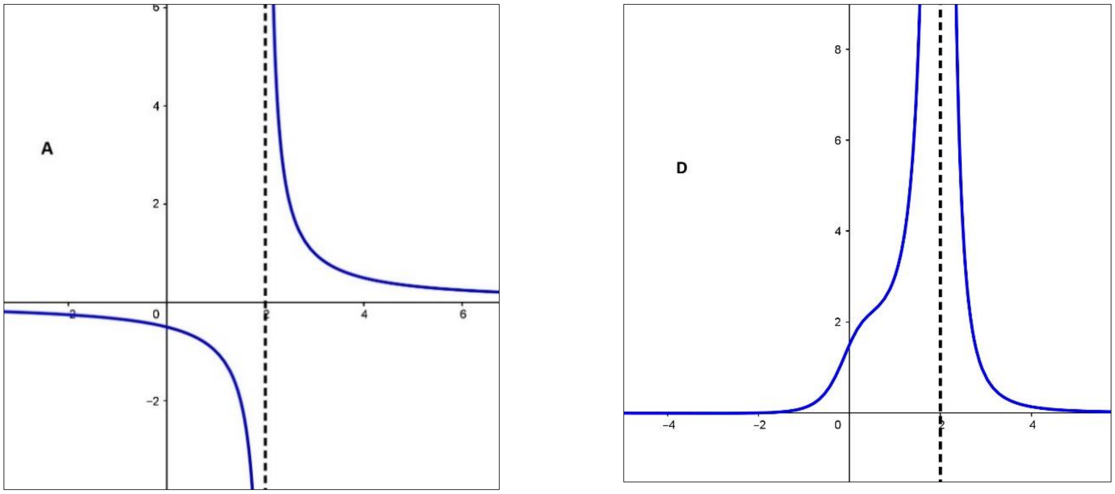
Modos de argumentar evidenciados por los estudiantes de acuerdo con la opción seleccionada en la tarea T4_C2.

Opción	Modo de argumentar evidenciado
a	Si existe el límite de una función en un punto entonces la función es continua en ese punto.
b	Si existe el límite de una función en un punto entonces la función está definida en dicho punto.
c	Si existe el límite de una función en un punto entonces la función está definida en dicho punto y además su imagen coincide con el valor del límite.
d	Si existe el límite de una función en un punto entonces existe el límite en otro punto a través de un cambio de variable válido.
e	Si existe el límite de una función en un punto entonces la derivada de la función existe en ese punto.
f	No se puede decir qué modo de argumentar manifiestan.

En la tarea T5b_C2 le pedimos a los estudiantes que identificaran la gráfica de la función con una de las representaciones dadas en una plantilla. Con esto queríamos identificar los elementos matemáticos en los que prestan atención al identificar dicha representación. En el anexo 2 se observa la plantilla. Elegimos cada una de las representaciones de la plantilla pensando en distintos elementos matemáticos. A continuación, lo detallamos y veremos en los resultados si los estudiantes eligen las representaciones considerando dichos elementos.

Figura 3.5

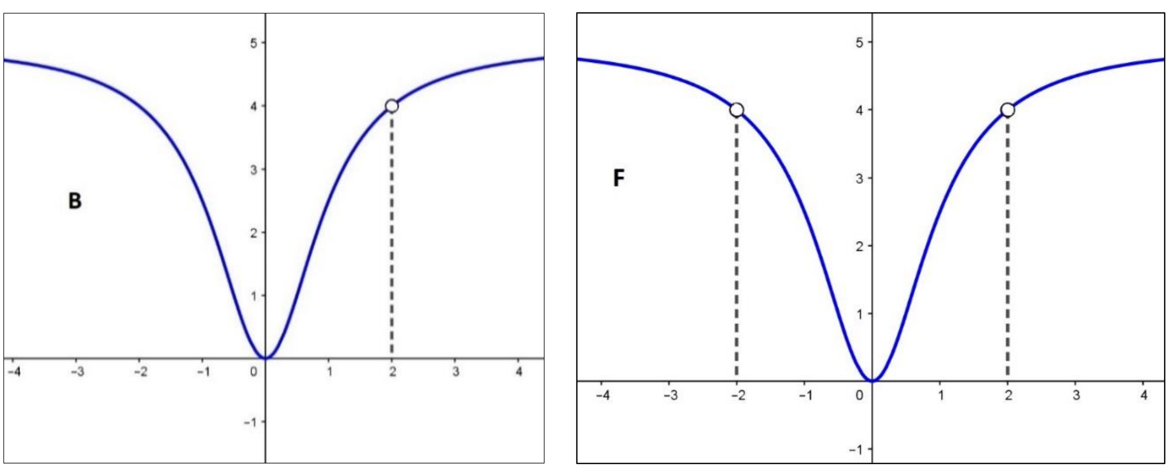
Imagen A y D de la plantilla en la tarea T5b_C2.



Elegimos la representación de las imágenes A y D (figura 3.5) porque el límite no existe. Concretamente, en la imagen A $\lim_{x\to 2-}\left[\frac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)}\right]=-\infty$ y $\lim_{x\to 2+}\left[\frac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)}\right]=+\infty$ en la imagen D $\lim_{x\to 2-}\left[\frac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)}\right]=\lim_{x\to 2+}\left[\frac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)}\right]=+\infty$.

Figura 3.6

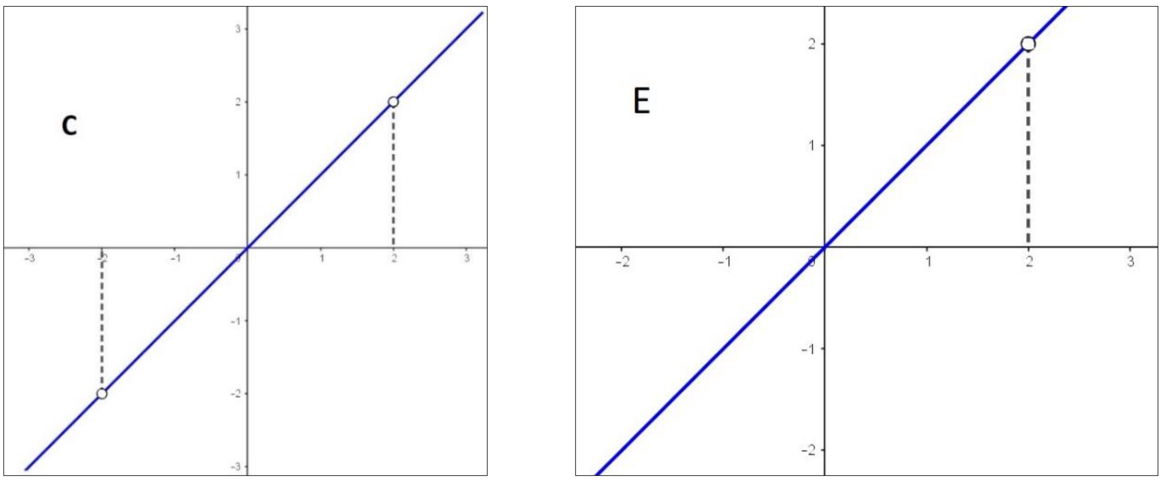
Imagen B y F de la plantilla en la tarea T5b_C2.



Elegimos la representación de la imagen B y F (figura 3.6) porque la representación gráfica de ambas funciones es similar. Pues en la imagen B la imagen de 2 no existe, lo mismo que en la imagen F y además en esta, la imagen de -2 tampoco, sin embargo, en ambas imágenes el límite cuando x se acerca a 2 sí existe y es 4.

Figura 3.7

Imagen C y E de la plantilla en la tarea T5b_C2.



Elegimos la representación de la imagen C y E porque corresponden a funciones lineales que no están definidas en algunos puntos, aunque el límite en dicho punto sí existe (Figura 3.7). Concretamente, en E la imagen de 2 no existe, y en el caso de la gráfica E la imagen de -2 tampoco.

Finalmente, la tarea 5 se planteó tal y como aparece en la Figura 3.8.

Figura 3.8

Versión final de la tarea T5_C2.

Considere la siguiente expresión $\lim_{x \to 2} \left[\dfrac{3x^2 - 12}{(x-2)^3 (2x^2+1)} \right]$.

a. *Calcule el límite anterior.*
b. *Identifique la gráfica de la función con una de las representaciones dadas en la plantilla de gráficas que se encuentra en la página 6. Justifique su elección.*

Con estos dos cuestionarios pretendemos indagar en la forma que tienen los estudiantes de entender la noción de límite, cómo lo representan, que términos y aplicaciones usan para evidenciar su sentido y que razonamientos evidencian al resolver tareas matemáticas. En el anexo 1 se observa el cuestionario 1 y en el anexo 2 el cuestionario 2.

3.4 ANÁLISIS DE LOS DATOS

Los datos de ambos momentos de la investigación se analizaron usando el análisis de contenido. Para dichos momentos, adicionalmente, se complementó el análisis con un análisis *cluster* jerárquico y un análisis *cluster* no jerárquico de k-Medias para enriquecer la interpretación de los resultados.

3.4.1 ANÁLISIS DE CONTENIDO

El análisis de contenido es una técnica de investigación que posibilita codificar y categorizar las unidades de análisis en instrumentos de respuesta abierta, comparar las categorías y establecer vínculos entre ellas y extraer conclusiones teóricas. También permite hacer inferencias válidas y replicables de producciones escritas. Implica procedimientos especializados, proporciona nuevas ideas, aumenta la comprensión del investigador de fenómenos particulares o informa acciones prácticas (Cohen et al., 2018; Krippendorf, 2004).

No hay un procedimiento aceptado universalmente para realizar el análisis de contenido, por lo que seguimos a Rico y Fernández-Cano (2013) que manifiestan que, en general, el análisis de contenido tiene siete fases que se describen en la Figura 3.9.

Figura 3.9

Fases del análisis de contenido. Adaptado de Rico y Fernández-Cano (2013).

Fase 1: Delimitar el contenido (texto, discurso o producción escrita) a analizar.

Fase 2: Precisar la unidad de análisis (palabra, frase o párrafo).

Fase 3: Ubicar o inferir en el texto las unidades de análisis.

Fase 4: Definir e interpretar las categorías consideradas.

Fase 5: Codificar y cuantificar a través de frecuencias o rangos las unidades de análisis adscritas previamente al sistema de categorías establecido.

Fase 6: Vincular e interpretar las categorías considerando sus unidades de análisis adscritas.

Fase 7: Relacionar el proceso de análisis de contenido con lo que se indaga y con los agentes que intervienen: hablante - escritor u oyente – lector.

3.4.1.1. Fases 1, 2 y 3. Delimitar el contenido a analizar, precisar la unidad de análisis y ubicar o inferir en el texto las unidades de análisis

En primer lugar, es necesario delimitar el contenido (texto, discurso o producción escrita) a analizar, que, en nuestro caso, corresponde a la producción escrita que brindaron los 218 estudiantes de Cálculo I como respuesta a los cuestionarios detallados en el apartado 3.3. A continuación, es necesario precisar las unidades de análisis y ubicarlas en el texto. En este sentido, consideramos 2 grupos de unidades de análisis. El primero se corresponde con las unidades de análisis relativas a la explicación de la definición de límite, su representación, sus aplicaciones, los problemas que resuelven y el significado fuera de la matemática que manifiestan los estudiantes. Estas unidades de análisis se encuentran en las respuestas al cuestionario 1 y a la primera parte del cuestionario 2, T1_C2 y T2_C2. El segundo grupo se corresponde con las unidades de análisis relativas a los argumentos que brindan los estudiantes al resolver las 3 tareas de desempeño sobre el concepto de límite estudiantes, que se ubican en las respuestas a las tareas de la parte II del cuestionario 2.

3.4.1.2. Fase 4. Definir e interpretar las categorías consideradas

Como se ha descrito a lo largo de esta memoria, nuestro trabajo analiza el significado de límite que evidencian los estudiantes en dos niveles de complejidad cognitiva. Por ello, consideramos dos sistemas de categorías. El primero se enfoca en describir el significado en un primer nivel de complejidad cognitiva, que se ocupa de los hechos, términos, palabras, representaciones, aplicaciones y modos de uso del límite. El segundo se centra en describir el significado en un segundo nivel de complejidad cognitiva, y en el campo procedimental de la estructura conceptual, en donde se atienden los razonamientos, las propiedades, los modos de argumentar sobre el límite, etc. (Tabla 2.1).

El sistema de categorías 1 (tabla 3.3) está basado en características clásicas que se han venido utilizando en investigaciones sobre límite (p.e., Blázquez y Ortega, 1998; Cornu, 2002; Cottrill et al., 1996; Monaghan, 1991; Sfard, 1991) y el sistema propuesto por Fernández-Plaza et al. (2013b) para caracterizar aspectos estructurales que, como primer avance de esta tesis completamos y sistematizamos al estudiar las definiciones proporcionadas por estudiantes (González-Flores et al., 2021). Está formado por 13 categorías no excluyentes y dicotómicas, indicando la presencia o ausencia de la característica que describe la categoría.

Tabla 3.3

Sistema de categorías 1 de nuestro estudio y su respectiva descripción.

Categoría	Descripción
Límite como objeto (LO)	Los sujetos establecen distintas referencias para el objeto límite (Cottrill et al., 1996; Fernández-Plaza et al., 2013b, Sfard, 1991; Tall, 1980). Se entiende límite como una noción estática. Algunas palabras claves para identificar esta categoría son: número, valor, lugar, frontera, restricción, extremo, fin, plazo, etc. Si un sujeto dice que un límite se aproxima a un número, pero no dice que el límite sea el número, entonces no hay evidencia de LO. En la representación los sujetos destacan: saltos, huecos, puntos, números, etc.
Límite como proceso (LP)	Los sujetos refieren al límite de manera procesual (aproximación) (Cottrill et al., 1996; Fernández-Plaza et al., 2013b, Sfard, 1991; Tall, 1980). Es una noción dinámica. Los sujetos hacen referencia a un proceso de obtención o procedimiento. Algunas palabras claves para identificar esta categoría son: aproximarse, tiende, acercar, etc. Si el sujeto usa un verbo de procedimiento, y no dice nada sobre el objeto límite, asumimos que evidencia LP, como por ejemplo “estudia lo que ocurre alrededor de los puntos”, “análisis de un punto”. En la representación los sujetos destacan: flechas, puntos de aproximación, o líneas alrededor de la variable independiente o dependiente.

Tabla 3.3

Sistema de categorías 1 de nuestro estudio y su respectiva descripción.

Categoría	Descripción
Vinculación entre límite e imagen (LI)	Los sujetos atribuyen al límite un valor de imagen de la función (Fernández-Plaza et al., 2013b). La alusión a la imagen puede hacerse de manera implícita, por ejemplo, en la afirmación “es el valor máximo o más próximo al punto que pertenece a una función” dice que pertenece a una función, por ende, ese valor debe ser imagen, “el número al que tiende una función cuando sustituyo valores en una variable específica” pues al sustituir los valores se entiende que son las imágenes. Cuando los sujetos vinculan el límite con un valor de la imagen, en particular, están evidenciando el límite como objeto, es decir, si se da LI entonces se da LO. En la representación los sujetos destacan: asociaciones a través de puntos o con una línea, de una preimagen con su imagen e indican que la imagen es el límite.
Coordinación entre las variables x e y (CV)	Los sujetos indican que es un proceso en el que están implicadas las dos variables (x e y) y que una depende de otra. Los sujetos evidencian convergencia de y en relación con la convergencia de x, es la aproximación de las imágenes a un número, cuando x se aproxima al punto. En la representación los sujetos destacan: procesos de aproximación entre la variable independiente y la dependiente, y los relacionan.
Referencia a las variables x e y (RV)	Los sujetos usan palabras específicas para aludir a las variables independiente y dependiente de la función. Algunas palabras claves para identificar esta categoría son: preimagen, imagen, punto en x, punto en y, etc.
Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)	Los sujetos expresan que los procesos de cálculo del límite, por la izquierda y por la derecha, deben dar el mismo resultado (Fernández-Plaza et al., 2013b). En la representación los sujetos destacan: flechas o procesos de aproximación alrededor de un mismo número para indicar que por izquierda y derecha el límite debe ser lo mismo.
Propiedades matemáticas (PM)	Los sujetos hacen referencia a propiedades o nociones que son verdaderas en la matemática no contempladas en el resto de las categorías de análisis. En la representación los sujetos destacan: asíntotas o límites infinitos.
Representación gráfica (RG)	Los sujetos realizan una representación gráfica (en el plano cartesiano) para el límite.
Otra Representación (OR)	Los sujetos realizan una representación diferente a la representación gráfica para el límite.

Tabla 3.3

Sistema de categorías 1 de nuestro estudio y su respectiva descripción.

Categoría	Descripción
Aspectos de no alcanzabilidad (NA)	Los sujetos expresan la imposibilidad de alcanzar el límite. (Cornu, 2002; Fernández-Plaza et al., 2013b; Monaghan, 1991). Algunas frases claves para identificar esta categoría son: sin nunca tocar dicho valor, siguiendo la regla de que, y no va a ser el resultado, nunca lo llega a pasar o tocar, fin, etc. En la representación los sujetos destacan: una asíntota, para indicar que eso es el límite.
Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR)	Los sujetos expresan la posibilidad de alcanzar el límite, pero no de rebasarlo o sobrepasarlo. Usan palabras como no pasar (Cornu, 2002; Fernández-Plaza et al., 2013b; Monaghan, 1991). Algunas frases claves para identificar esta categoría son: punto final, valor máximo, hasta donde llega la función, frontera, extremo, plazo, etc. En la representación los sujetos destacan: acotaciones, de donde no se puede "salir".
Términos de posición relativa (PR)	Los sujetos usan palabras o frases para el límite que denotan una posición relativa, es decir, aluden a dónde está ubicada una noción matemática con respecto a una noción fija (objeto) de manera explícita o implícita. Algunas palabras claves para identificar esta categoría son: cercano, a la derecha, encima de, mayor que, próximo, por encima, es una proximidad. Esta categoría no necesariamente está relacionada con el LO. Además, si los sujetos evidencian la categoría CLDC entonces señalan la categoría PR, y puede haber PR sin que haya CLDC. En la representación los sujetos destacan: el uso flechas alrededor de un número o símbolo, hacen aproximaciones por izquierda o derecha de un número.
Situaciones (ST)	Los sujetos refieren a situaciones en las que se aplica el límite.

Estas categorías surgen de procesos de construcción deductivos (basados en las investigaciones previas) e inductivos (algunas surgen o modifican a otras como parte del proceso del análisis de contenido realizado). Por lo tanto, como parte básica de la investigación, procedimos a validar el sistema de categorías. En el apartado 3.5 se detalla esta validación, que a su vez ha sido publicada por González-Flores et al. (2021) en la revista UNICIENCIA.

Como parte de la organización del trabajo y parte necesaria para la interpretación de resultados, situamos las categorías dentro de nuestro marco teórico, es decir, justificamos qué aspecto de significado ponen de manifiesto los estudiantes cuando evidencian alguna de las categorías de la tabla 3.3. En primer lugar, las categorías Límite como objeto (LO) y Límite como proceso (LP) están asociadas directamente con lo conceptual y lo procedimental, respectivamente. La categoría Vinculación entre límite e imagen (LI) se relaciona con la definición de continuidad (definición 4) que siempre que la función sea continua, el límite coincide con el valor de la imagen; la categoría Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC) se relaciona con el teorema de los límites laterales finitos (teorema 12), la categoría Propiedades matemáticas (PM) se asocia a convenios o resultados en el tema de límites no contemplados, la categoría Referencia a las variables x e y (RV) realmente es el uso de las notaciones, la categoría Coordinación entre las variables x e y (CV), involucra las relaciones que se establecen entre dichas notaciones, por esas razones estas 7 categorías las asociamos a la estructura conceptual.

En lo relativo a los sistemas de representación, distinguimos dos categorías: Representación gráfica (RG) y Otra representación (OR). Y finalmente las categorías, Aspectos de no alcanzabilidad (NA), Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR), Términos de posición relativa (PR) y Situaciones (ST) se asocian con la asignación de propiedades que no necesariamente son formales, se toman de la vida cotidiana o que forman parte del lenguaje natural, por estas razones dichas categorías se relacionan con los sentidos y modos de uso.

La Tabla 3.4 sintetiza las categorías propuestas para cada una de las componentes del significado en un primer nivel de complejidad cognitiva.

Tabla 3.4

Categorías según las componentes del significado de un contenido matemático escolar.

Componente del triángulo semántico	Categoría
Estructura conceptual	Límite como objeto (LO) Límite como proceso (LP) Vinculación entre límite e imagen (LI) Coordinación entre las variables x e y (CV) Referencia a las variables x e y (RV) Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC) Propiedades matemáticas (PM)
Sistemas de representación	Representación gráfica (RG) Otra representación (OR)
Sentidos y modos de uso	Aspectos de no alcanzabilidad (NA) Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR) Términos de posición relativa (PR) Situaciones (ST)

El sistema de categorías 2 pretende describir los razonamientos que evidencian los estudiantes al resolver tareas que involucran el concepto de límite. Para ello, se han tenido en cuenta las componentes de los argumentos propuestos por Reid y Knipping (2010) y Stylianides (2007), descritos en el apartado 2.4.1. También consideramos 3 tipos de errores matemáticos, para lo cual utilizamos el trabajo de Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza (2013) sobre análisis de tareas de cálculo de límites en un punto. La resolución de cada una de las tareas propuestas en la segunda parte del cuestionario requiere el uso de definiciones, propiedades y teoremas diferentes. Por ello, al analizar las componentes de los argumentos utilizados en cada una de ellas surgieron categorías diferentes. La tabla 3.5 y la tabla 3.6 describen las categorías que emergieron del análisis de las respuestas de los estudiantes a las tareas T3_C2 y T5a_C2, respectivamente. Para construir estas categorías nos basamos en la triangulación de investigadores (Cohen et al., 2018).

Tabla 3.5

Categorías para la tarea T3_C2.

Afirmaciones	A11. $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe ($\neg\exists$). A12. El límite existe (es un número real o una expresión algebraica) o es infinito ($\pm\infty$.).
Datos	D12. Cálculo de $\lim_{x\to 0^-} g(x)$. D13. Cálculo de $\lim_{x\to 0^+} g(x)$. D14. Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x)$ concluimos que $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe. D15. Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$ concluimos que $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe. D16. Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x)$ concluimos que $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe.
Garantías o justificaciones	Garantía global presente de manera implícita en el argumento: El límite de la función en el punto es finito (existe) y coincide con el valor de los límites laterales *(P)* si, y solo si, los límites laterales de una función real de variable real en un punto son finitos (existen) e iguales *(Q)* (teorema 12).

Tabla 3.5

Categorías para la tarea T3_C2.

	Garantías usadas por los estudiantes: G11. Si los límites laterales son finitos e iguales entonces el límite existe. G12. Los límites laterales son finitos y no son iguales entonces el límite no existe. G13. Los límites laterales son finitos y no son iguales entonces el límite existe.
Respaldo	El límite de la función en el punto es finito (existe) y coincide con el valor de los límites laterales *(P)* si, y solo si, los límites laterales de una función real de variable real en un punto son finitos (existen) e iguales *(Q)* (teorema 12). R11. Para efectos de reportar un respaldo por parte de los estudiantes, aceptamos que indiquen de manera explícita (verbal o simbólica) argumentos relacionados con el teorema 12.
Errores	E3. Calcular el límite (Determinar el valor numérico, calcular límites laterales o infinitos).
Elemento Matemático empleado	EM11. El límite de la función en el punto es finito (existe) y coincide con el valor de los límites laterales *(P)* si, y solo si, los límites laterales de una función real de variable real en un punto son finitos (existen) e iguales *(Q)* (teorema 12).
Modo de argumentar	MA11. Si los límites laterales son finitos e iguales entonces el límite existe. $(Q \Rightarrow P)$. MA12. Los límites laterales son finitos y no son iguales entonces el límite no existe. $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$. MA13. Los límites laterales son finitos y no son iguales entonces el límite existe. $(\neg Q \Rightarrow P)$.
Modo de representación del argumento	MR11. Simbólico.

Deseamos puntualizar, para la tarea T3_C2, que las afirmaciones, las garantías específicas y los modos de argumentar son mutuamente excluyentes, mientras que los datos no lo son. Además, hay un vínculo muy fuerte de cada uno de los elementos de la tabla 3.5, con el marco teórico (apartado 2.5.4), específicamente, con el teorema 12 denominado teorema de los límites laterales finitos, pues varios de los elementos de esta tabla coinciden exactamente con dicho teorema, y en otras ocasiones nos basamos en el para hacer distintas modificaciones y establecer los datos o garantías, por ejemplo.

Tabla 3.6

Categorías para la tarea T5a_C2.

Afirmaciones	A31. $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe ($\neg\exists$), es $+\infty$, es infinito, es ∞. A32. $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe (es un número real, una expresión algebraica) o $\pm\infty, -\infty$. A33. $\lim_{x \to 2} f(x)$ es $\frac{k}{0}$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$.
Datos	D31. Transformaciones aritméticas o algebraicas.
Garantías o justificaciones	Garantías globales presentes de manera implícita en el argumento: Aplicación de una técnica infinitesimal (Regla de L'Hopital) para obtener una fracción que permita evaluar para obtener un valor numérico o infinito. Simplificación algebraica de la fracción dada para obtener una fracción equivalente que permita evaluar para obtener un valor numérico o infinito. Análisis de límites laterales tanto en la fracción simplificada o en la fracción producto de la aplicación de la regla de una técnica infinitesimal (Regla de L'Hopital) para concluir que ambos límites son $+\infty$. Garantías usadas por los estudiantes: G31. Evaluar directamente en la fracción dada, únicamente. G32. Transformar la fracción dada en otra equivalente que permita evaluar. G33. Evaluar directamente en la fracción dada y obtener la forma $\frac{0}{0}$ por lo que transforma la fracción en otra equivalente que permita evaluar. G34. Hacer el cálculo de límites laterales. G35. Aplicar de forma parcial la regla de L'Hopital al derivar el numerador y el denominador de la fracción dada, sin evaluar en la fracción resultante G36. Aplicar la regla de L'Hopital al derivar el numerador y el denominador de la fracción dada y evaluar en la fracción resultante.
Respaldo	R32. Explicitación (verbal o simbólica) que aplican una técnica infinitesimal (regla de L'Hopital, teorema 18).
Errores	E1. Transformar expresiones algebraicas (Factorizar expresiones algebraicas, expandir expresiones algebraicas). E2. Simplificar las fracciones algebraicas

Tabla 3.6

Categorías para la tarea T5a_C2.

	E3. Calcular el límite (Determinar el valor numérico, calcular límites laterales o infinitos). E4. Derivación al utilizar la regla de L'Hopital. E5. Igualación del límite de una función con su criterio de asociación.
Elemento Matemático empleado	EM31. La Regla de L'Hopital (teorema 18). EM32. Procedimiento de simplificación de fracciones algebraicas. EM33. El límite es infinito y coincide con el infinito de los límites laterales (P) sí y solo sí los límites laterales son infinitos e iguales *(Q)* (teorema de los límites laterales infinitos, teorema 13 y apartado 2.5.5).
Modo de argumentar	MA31. La Regla de L'Hopital. Aplicación del procedimiento. MA32. Algoritmo de simplificación de fracciones algebraicas. MA331. Si los límites laterales son infinitos e iguales entonces el límite es infinito y coincide con el infinito de los límites laterales $(Q \Rightarrow P)$. MA332. Si los límites laterales son infinitos e iguales entonces el límite existe $(Q \Rightarrow \neg P)$. MA333. Si los límites laterales son infinitos e iguales entonces el límite no existe $(Q \Rightarrow P)$. MA334. Si los límites laterales son infinitos y distintos entonces el límite no existe $(\neg Q \Rightarrow P)$. MA335. Si los límites laterales son infinitos y distintos entonces el límite es infinito $(\neg Q \Rightarrow P)$. MA336. Si los límites laterales son finitos e iguales entonces el límite no existe $(\neg Q \Rightarrow P)$.
Modo de representación del argumento	MR31. Simbólico para los tres elementos matemáticos.

Queremos puntualizar que, para la tarea T5a_C2, las afirmaciones son mutuamente excluyentes, sin embargo, las garantías específicas, los errores, los elementos matemáticos y los modos de argumentar, no lo son. Además, hay un vínculo muy fuerte de cada uno de los elementos de la tabla 3.6 con el marco teórico, puntualmente con el apartado 2.5.5 límites infinitos, y el teorema 18 denominado La Regla de L' Hopital, ya que varios de los elementos de esta tabla se basan en lo expuesto en esos apartados. Para finalizar, deseamos explicitar los acuerdos que consensuamos los investigadores en el momento de codificar estas 2 tareas de desempeño:

- En general, en cuanto a la tarea T3_C2 y la tarea T5a_C2, tenemos que, cuando no aparece garantía, lo interpretamos como que no hay modo de argumentar.
- El error 3, (E3, tabla 3.6 o tabla 3.7) se evidencia cuando se hace una evaluación del límite de manera incorrecta.
- En la tarea T3_C2, cuando se escribe que el límite es un número real y no se hace ningún cálculo, agregamos A12, E3 y MR11 únicamente. Si solo se evidencia de uno o de ambos límites laterales (sin decir nada sobre el límite global) no agregamos garantía, y por ende tampoco modo de argumentar, pero si agregamos elemento matemático y modo de representar.
- Y en la tarea T5a_C2, cuando un estudiante da evidencias de uno o de ambos límites laterales infinitos (sin decir nada sobre el límite global) no agregamos modo de argumentar, pero si elemento matemático y modo de representar, el modo de argumentar lo registramos solo si dan evidencias de los 2 límites laterales y concluyen sobre el límite global.

3.4.1.3 Fase 5. Codificar y cuantificar a través de frecuencias o rangos las unidades de análisis adscritas previamente al sistema de categorías establecido

Una vez establecidos ambos sistemas de categorías, se procedió al análisis de la presencia o ausencia de cada una de las características descritas en la categoría. Los datos se anotaron en una hoja de cálculo en *Excel* que contiene una columna para cada una de las categorías, correspondiendo cada fila a una unidad de información. Se agregaba un 1 cuando estaba presente la categoría en la unidad de información y un 0 cuando no lo estaba, obteniendo un registro de datos de naturaleza dicotómica.

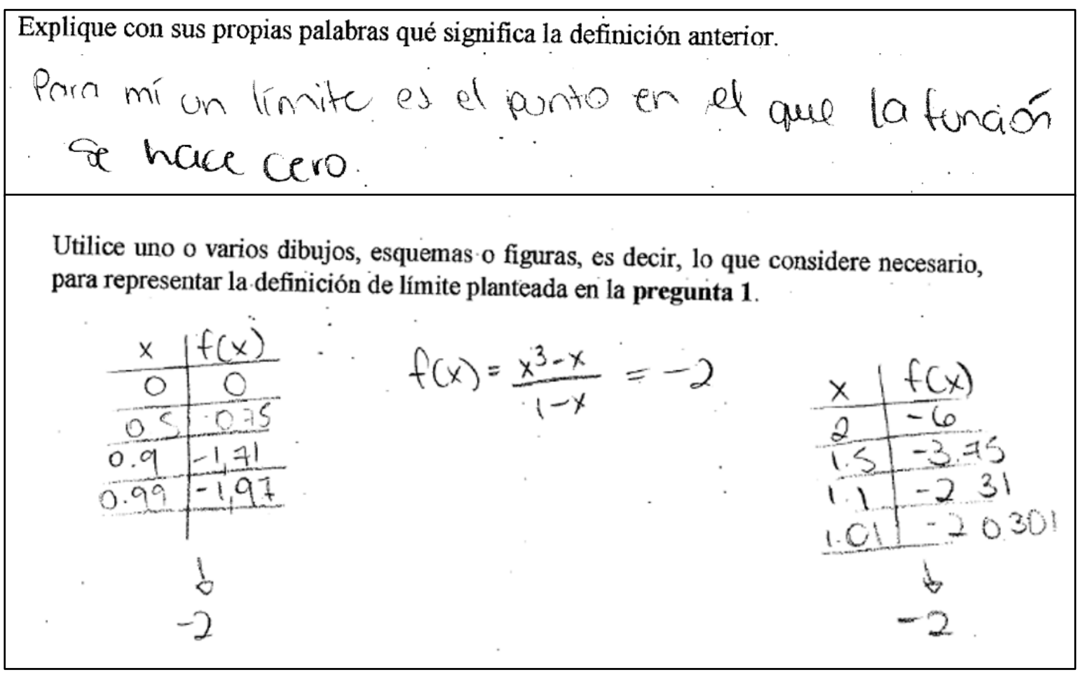
A continuación, vamos ejemplificar el proceso de codificación de ambos sistemas de categorías con el análisis de las respuestas de varios estudiantes a los cuestionarios. Comenzaremos con las respuestas del estudiante EBM131319 a las tareas del cuestionario 1.

Como puede observarse en la figura 3.10, al responder a la tarea T1_C1, el estudiante SBL131319 evidencia la categoría Límite como Objeto (LO), ya que indica que el límite es el punto. No obstante, en la tarea T2_C1, observamos las categorías:

- Límite como Proceso (LP) debido que se observa un proceso de aproximación,
- Coordinación entre las Variables x e y (CV), ya que hay relación de la variable independiente con la variable dependiente a través de procesos de aproximación,
- Condiciones de Lateralidad y Doble convergencia (CLDC), pues evidencia que por derecha e izquierda el límite debe ser -2,
- Posición Relativa (PR) debido a que muestra diferentes preimágenes tanto a la izquierda como a la derecha de 1,
- Otra Representación (OR), ya que utiliza una representación tabular.

Figura 3.10

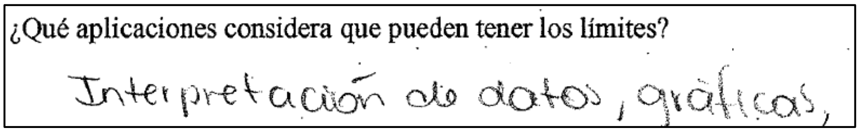
Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SBL131319.



Además, anota dos situaciones generales para el límite (figura 3.11), por lo que evidencia la categoría Situaciones (ST). Por último, afirma que es el punto máximo al que se puede llegar, asociando el límite con un extremo (figura 3.12) y evidenciando las categorías Límite como Objeto (LO) y Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR).

Figura 3.11

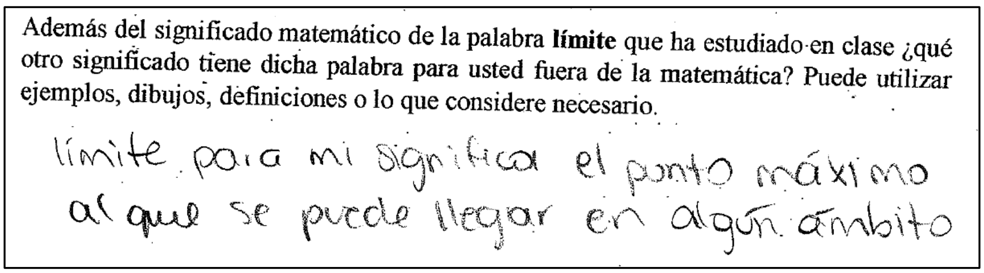
Respuesta a la tarea T3_C1 del estudiante SBL131319.


¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

Interpretación de datos, gráficas,

Figura 3.12

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SBL131319.


Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

límite para mi significa el punto máximo al que se puede llegar en algún ámbito

Para ejemplificar el resto de categorías sobre el sentido en un primer nivel de complejidad cognitiva, esto es, las categorías RV, LI, NA, PM, y RG, presentamos el análisis de las respuestas del estudiante SBL030901 a las tareas del cuestionario 1.

En la figura 3.13, percibimos como el estudiante SBL030901 evidencia las categorías:

- Propiedades matemáticas (PM), debido a que el estudiante comienza la definición hablando de una función real de variable real;
- Límite como proceso (LP), puesto que en la definición usa términos como acercando, acercar y en la representación usa puntos alrededor de *a* y de *L* para denotar acercamientos;
- Referencia a las Variables x e y (RV), pues usa los términos preimagen e imagen;
- Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV), ya que en la definición manifiesta que cuando se vayan a cercando los números a una preimagen, se van a acercar a una imagen, lo refuerza en la representación al asociar puntos del eje *x* con puntos del eje *y*.

- Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC), pues en la definición indica que el límite debe ser el mismo tanto por izquierda como por derecha, además lo subraya en la representación al dibujar que por izquierda y por derecha el límite es *L*;
- Términos de posición relativa (PR), pues como se indica en su descripción, cada vez que se evidencia la categoría CLDC se exhibe la categoría PR, ya que se hace referencia a los términos izquierda y derecha;
- Vinculación entre límite e imagen (LI), ya que indica que, esta imagen es el límite;
- Representación gráfica (RG), ya que usa el plano cartesiano para representar el límite;
- Límite como Objeto (LO) pues en la definición dice esta imagen es el límite. Esto se refuerza en la tarea T4_C1 (figura 3.14), cuando dice que se puede usar el límite para definir cuál es el punto al que no se llegará, es decir, afirma que es un punto y da evidencias de la acepción de límite como fin;
- Aspectos de no alcanzabilidad (NA) ya que como se mencionó, el estudiante manifiesta se puede usar el límite para definir cuál es el punto al que no se llegará, es decir, da evidencias de fin (figura 3.14).

Figura 3.13

Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SBL030901.

2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

Para Una funcion Real de variable real, Cuando se vayan acercando los numeros a una preimagen, se van a acercar a una imagen, esta imagen es el limite si es la misma Cuando se acercan tanto por la derecha como por la izquierda de la preimagen.

Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

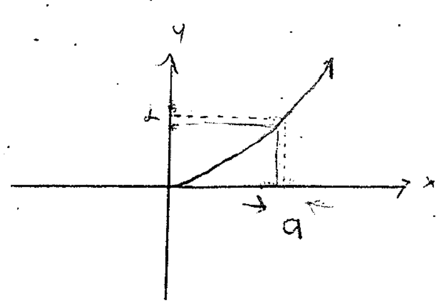
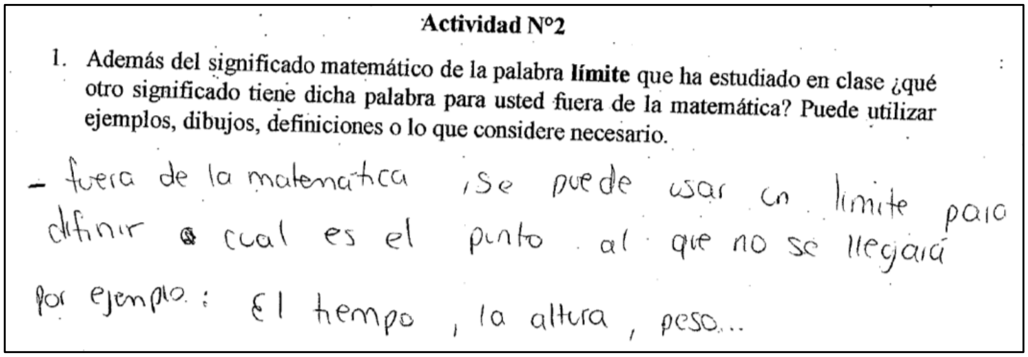


Figura 3.14

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SBL030901.



Actividad N°2

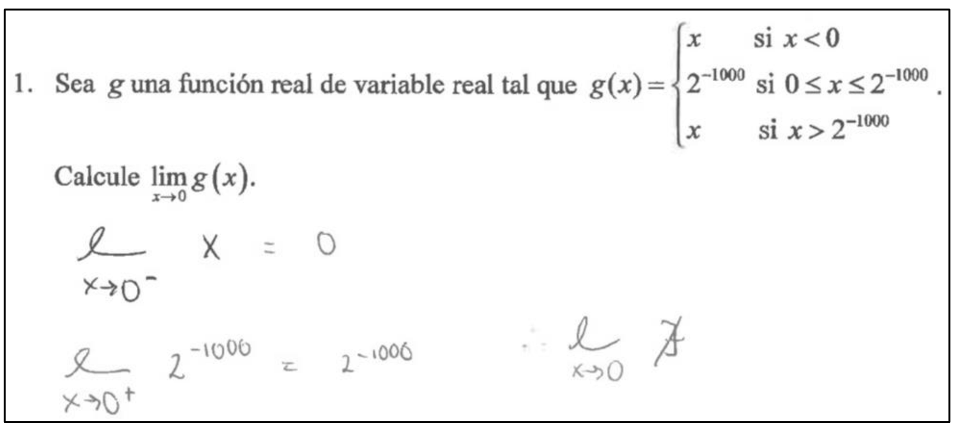
1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

- fuera de la matematica ,se puede usar un limite para difinir cual es el punto al que no se llegará
por ejemplo: El tiempo , la altura , peso...

Veamos ahora, a modo de ejemplo, cómo se pueden observar algunos de los componentes de la tabla 3.8 en la respuesta del estudiante SIB051210 a tarea T3_C2 (figura 3.15).

Figura 3.15

Respuesta a la tarea T3_C2 del estudiante SIB051210.



1. Sea g una función real de variable real tal que $g(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ 2^{-1000} & \text{si } 0\leq x\leq 2^{-1000} \\ x & \text{si } x>2^{-1000} \end{cases}$.

Calcule $\lim_{x\to 0} g(x)$.

$\lim_{x\to 0^-} x = 0$

$\lim_{x\to 0^+} 2^{-1000} = 2^{-1000}$ $\quad \therefore \lim_{x\to 0} \nexists$

Concretamente, el estudiante evidencia varios componentes en el argumento:

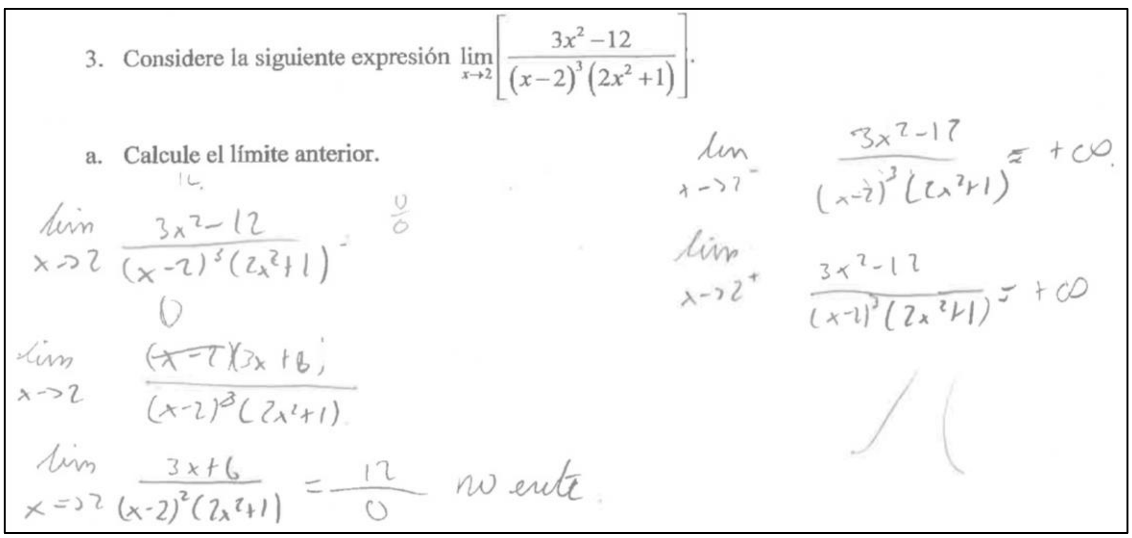
- el elemento matemático (apartado 2.4.1.1, teorema 12) exhibido es que los límites laterales de una función real de variable real en un punto son finitos (existen) e iguales si y sólo si el límite de la función en el punto es finito (existe) y coincide con el valor de los límites laterales, pues es en lo que se basa para exponer su argumento;
- su modo de argumentar (apartado 2.4.1.2) y a la vez su garantía es que si los límites laterales son finitos y no son iguales entonces el límite no existe, ya que hace el cálculo del límite lateral izquierdo y del derecho y obtiene resultados diferentes, y concluye que el límite no existe al utilizar el símbolo $\neg\exists$.

- utiliza un modo de representar (apartado 2.4.1.3) simbólico para representar su argumento,
- la afirmación que exhibe es que no existe el límite, al utilizar el símbolo $\neg\exists$,
- los datos mostrados son el cálculo de los límites laterales por izquierda y derecha de cero. Además evidencia que los límites laterales son diferentes y que no existe el límite, pues como se puede observar el límite lateral izquierdo es 0, el límite lateral derecho es 2^{-1000} son diferentes y concluye que el límite no existe;
- no utiliza un respaldo para su garantía, y
- no presenta errores en el argumento.

De modo similar, ejemplificamos algunos de los componentes de la tabla 3.9 con el análisis de la respuesta del estudiante SIQ021004 a la tarea T5a_C2 (figura 3.16).

Figura 3.16

Respuesta a la tarea T5a_C2 del estudiante SIQ021004.



3. Considere la siguiente expresión $\lim_{x\to 2}\left[\dfrac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)}\right]$.

a. Calcule el límite anterior.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+6)}{(x-2)^3(2x^2+1)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+6}{(x-2)^2(2x^2+1)} = \frac{12}{0}$$ no exite

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)} = +\infty$$

Como puede observarse el estudiante evidencia varios componentes en el argumento:

- usó 2 elementos matemáticos (apartado 2.4.1.1), el algoritmo de simplificación de fracciones algebraicas, que a la vez es también su modo de argumentar, y el teorema que dice que si los límites laterales son infinitos e iguales si y solo si el límite es infinito y coincide con el infinito de los límites laterales, ya que es en lo que se basa para exponer su argumento;

- para este último elemento matemático, el modo de argumentar (apartado 2.4.1.2) que evidencia el estudiante es que si los límites laterales son infinitos e iguales entonces el límite no existe, pues como puede observarse en el argumento, el estudiante evidencia que el límite por izquierda y derecha de 2 es $+\infty$ e indica que el límite no existe;
- utiliza un modo de representación (apartado 2.4.1.3) simbólico, pues utiliza símbolos matemáticos para representar su argumento,
- la afirmación brindada es que el límite no existe, explicitándolo de manera verbal,
- los datos proporcionados son las transformaciones aritméticas o algebraicas, pues como se observa factoriza y simplifica la fracción algebraica,
- las garantías que evidenciadas son, evaluar directamente en la fracción dada y obtener la forma $\frac{0}{0}$ por lo que transforma la fracción en otra equivalente que permita evaluar; y hacer el cálculo de límites laterales,
- no respalda sus garantías, y
- no presenta errores en el argumento.

En cuanto a la tarea T4_C2, detallaremos los modos de argumentar que evidencian los estudiantes. En la figura 3.17 apreciamos la respuesta del estudiante SIS102109 a la tarea T4_C2.

Figura 3.17

Respuesta a la tarea T4_C2 *del estudiante SIS102109*

2. Sea f una función real de variable real tal que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$. Encierre con un círculo la letra de las proposiciones que considere verdaderas (puede encerrar más de una si lo considera necesario). Si no considera ninguna verdadera, encierre con un círculo la proposición f.

a. f es continua en el punto $x = 2$.

b. f está definida en $x = 2$.

c. $f(2) = 3$.

d. $\lim_{h\to 0}\left[f(2+h) - 3\right] = 0$.

e. $f'(2)$ existe.

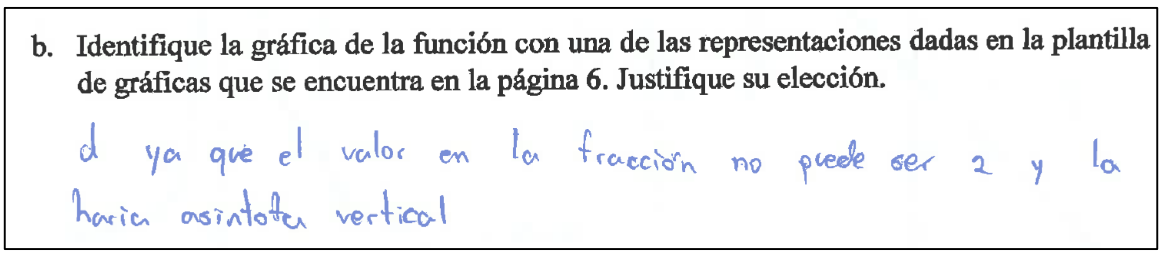
f. Ninguna de las proposiciones mencionadas es verdadera.

Como se aprecia en la respuesta a la tarea T4_C2 (figura 3.17) el estudiante SIS102109 ha seleccionado las opciones c, d y e. Los modos de argumentar evidenciados, de acuerdo con la tabla 3.4 son: que si existe el límite de una función en un punto entonces la función está definida en dicho punto y además su imagen coincide con el valor del límite, que si existe el límite de una función en un punto entonces existe el límite en otro punto a través de un cambio de variable válido, y que si existe el límite de una función en un punto entonces la derivada de la función existe en ese punto.

Con respecto a la tarea T5b_C2, identificamos los elementos matemáticos a los que prestan atención los estudiantes al identificar cada representación En la figura 3.18 mostramos la respuesta del estudiante SIT140401 a la tarea T5b_C2.

Figura 3.18

Respuesta a la tarea T5b_C2 *del estudiante SIT140401.*



b. Identifique la gráfica de la función con una de las representaciones dadas en la plantilla de gráficas que se encuentra en la página 6. Justifique su elección.

d ya que el valor en la fracción no puede ser 2 y la haria asintota vertical

Como se percibe en la respuesta a la tarea T5b_C2 (figura 3.18) el estudiante SIT140401 ha seleccionado la representación de la imagen D, y el elemento matemático que utiliza para justificar su elección es que la función tiene una asíntota vertical.

Las Fases 6 y 7. Vincular e interpretar las categorías considerando sus unidades de análisis adscritas y relacionar el proceso de análisis de contenido con lo que se indaga y con los agentes que intervienen: hablante –escritor u oyente– lector, no se detallan ya que son parte de los resultados y conclusiones del trabajo, capítulo 4 y capítulo 5 respectivamente.

3.4.2 ANÁLISIS DE CONGLOMERADOS

Por último, nos servimos de un análisis *cluster* para obtener una vista sintetizada de las concepciones sobre el límite de los participantes mediante la formación de grupos. El análisis *cluster* o análisis de conglomerados permite organizar los datos en grupos homogéneos basados en conjuntos de variables clasificadas (Härdle y Simar, 2015). En nuestro caso, el análisis de contenido nos dejaba ver algunas similitudes entre las respuestas dadas a cada una de los sujetos; sin embargo, también nos interesaba determinar similitudes por participante según las respuestas que daba al instrumento de forma conjunta, y así poder identificar perfiles de significado dados al límite.

El análisis de conglomerados se realizó con el software R, versión 4.2.3. R (https://www.r-project.org/), un lenguaje de programación multiplataforma basado en software libre diseñado para el análisis estadístico. Como señalamos previamente, aunque nuestro trabajo es inicialmente cualitativo, este análisis nos permitió agrupar a los participantes por similitudes en las respuestas que no son fáciles de detectar observando los datos. Así que el software resultó ser una herramienta muy útil para este propósito.

El análisis de conglomerados fue de tipo jerárquico aglomerativo, para el que se requirió una medida de similitud debido a la naturaleza dicotómica de los datos. El método empleado fue el de Ward, que minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre cada individuo y su centroide dentro de cada grupo (Rencher, 2002). De todas las medidas de similitud posibles se eligió la de Rogers-Tanimoto: dadas las posibilidades de dos variables binarias se puede construir una tabla de contingencia 2×2 que se puede esquematizar como se aprecia en la tabla 3.7.

Tabla 3.7

Posibilidades de dos variables en una tabla de contingencia 2x2.

	1	0	Totales
1	a	b	$a+b$
0	c	d	$c+d$
Totales	$a+c$	$b+d$	$m=a+b+c+d$

Donde a representa la cantidad de individuos que toman valor 1–1, b el número de sujetos que toman valor 1–0; la letra c representa a aquellos con valor 0–1, y la letra d a los 0–0.

La medida de Rogers-Tanimoto $\frac{a+d}{a+d+2(b+c)}$, se interpreta como la probabilidad de que un individuo elegido al azar presente una coincidencia de cualquier tipo, pesando el doble las no coincidencias.

La elección del método Ward la realizamos tras comprobar que, usado los otros métodos y calculando los coeficientes de aglomeración con todos los métodos, el que mejor resultado brinda es el que da el método de Ward con un coeficiente de 0,9492285 en el momento 1.

También hemos calculado el coeficiente cofenético que mide la correlación entre la disposición inicial y final. El resultado es bajo, un coeficiente de 0,4414. El análisis *cluster* se usó para analizar los resultados del cuestionario 1.

3.4.3 ANÁLISIS DE k-MEDIAS

El método de las k-Medias es un tipo de análisis de conglomerados no jerárquico. Los métodos de clasificación no jerárquicos parten de una partición en k grupos establecidos de antemano y, mediante diferentes algoritmos, buscan una mejorar la partición inicial. Las técnicas y los criterios que se utilizan para realizar esta mejora los dividen en diversos tipos. De ellos, el método de las k-Medias pertenece al grupo de métodos de reasignación en los que los individuos pueden pasar de un grupo a otro en las diferentes etapas hasta conseguir una partición óptima.

El primer paso para ello es calcular los puntos iniciales o puntos semilla. A continuación, se clasifican los individuos según su proximidad a los puntos iniciales, clasificando dentro del mismo grupo aquellos con una menor distancia o mayor proximidad al núcleo del grupo. Después de cada asignación, se recalculan los centroides que tomarán el papel de nuevo núcleo del *cluster*. Los pasos anteriores se repiten tantas veces como sea necesario hasta que en la distribución de grupos no haya cambios significativos, es decir, hasta que se haya alcanzado una convergencia (Rencher, 2002).

En nuestro trabajo, cada uno de los 4 *clusters* realizados en el momento 1 (durante la enseñanza del concepto de límite) tiene un centroide o punto medio para cada categoría. Luego, en el momento 2A (después de la enseñanza del concepto de límite), dadas las respuestas de los estudiantes, señalamos de que centroide está más cerca cada categoría, si del centroide de los conglomerados 1, 2, 3 o 4. Para ello realizamos una medida de las distancias euclídeas y no por similitud, por lo que hicimos un k-Medias con una sola iteración, para determinar de qué centroide del momento 1 está más cerca cada categoría, sin preocuparnos de las repeticiones del método.

3.5 DESARROLLO Y VALIDACIÓN DEL SISTEMA DE CATEGORÍAS 1 PARA EL ANÁLISIS DEL SIGNIFICADO DEL CONCEPTO DE LÍMITE

La disponibilidad de un sistema de categorías que nos permitiera analizar los significados del concepto de límite nos llevó a preocuparnos, inicialmente, por construir y validar dicho sistema de categorías. A continuación, detallamos el proceso de construcción del sistema de categorías 1.

Esta parte de la memoria corresponde a la parte inicial de la investigación, en la que, utilizando una muestra restringida de los datos, consultamos estudios previos, fundamentamos un sistema de categorías inicial, lo pusimos "a prueba" y, tras discusión de los investigadores, creamos, modificamos y consolidamos unas categorías que nos permitieran no solo el análisis de respuestas sobre la definición de límite, sino también el de respuestas sobre representaciones y modos de uso del concepto.

3.5.1 ANÁLISIS DE LAS DEFINICIONES DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Para analizar las respuestas de los estudiantes partimos de las categorías de análisis propuestas por Fernández-Plaza et al. (2013b). Sin embargo, al poner en práctica este sistema de categorías con las definiciones de límite proporcionadas por 10 estudiantes surgió la necesidad de precisar algunas de ellas e incluir categorías nuevas. En la tabla 3.8 presentamos la relación entre estas categorías y las categorías que emergieron de nuestro estudio. Hay que destacar que todas estas categorías son dicotómicas e indican la presencia o ausencia de la característica que describe la categoría.

La categoría tipo de objeto/proceso, descrita como "cuando los estudiantes establecen distintas referencias para el *objeto límite* (lugar del plano, conjunto de puntos, recta, etc.); en algunos casos, se destaca también su dualidad procesual (aproximación)" (Fernández-Plaza et al., 2013b, p. 122), se convirtió en dos categorías que no son excluyentes: límite como objeto y límite como proceso.

La categoría vinculación entre límite e imagen se establece cuando el estudiante "asigna al límite un valor de imagen se observa una Identificación (de manera general), una Conexión (en casos particulares) o bien una Independencia entre dicho límite y el valor imagen de la función” (Fernández-Plaza et al., 2013b, p. 122), se convirtió en una única categoría llamada vinculación entre límite e imagen, porque lo que nos interesa es determinar si los estudiantes relacionan el límite con la imagen ya sea de manera general o con casos particulares.

Tabla 3.8

Adaptación de las categorías de Fernández-Plaza et al. (2013b).

Categorías de Fernández-Plaza et al. (2013b)	**Nuestras categorías iniciales**
Tipo de objeto/proceso	Límite como objeto (LO) Límite como proceso (LP)
Vinculación entre límite e imagen (identificación, conexión e independencia)	Vinculación entre límite e imagen (LI)
Descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función	Descoordinación de los procesos en el dominio de la función (DX)
	Descoordinación de los procesos en el rango de la función (DY) Descoordinación general de los procesos (DG) Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV)
Referencia explícita a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico	Símbolos matemáticos y notaciones (S) Referencia a un sistema de representación gráfico y/o geométrico (G)
Evaluación en el punto	----
Tabla de valores	----
Condiciones de lateralidad y doble convergencia	Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)
Aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad	Aspectos estructurales de no alcanzabilidad (NA) Aspectos estructurales de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR)
Reproducción de la definición de referencia	----
	Referencia a las variables *x* e *y* (RV) Términos de posición relativa (PR) Propiedades matemáticas (PM)

La categoría descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función, que se presenta cuando “los escolares sólo se refieren a la variable *x*” (Fernández-Plaza et al., 2013b, p. 122), motivó la creación de cuatro categorías mutuamente excluyentes: coordinación entre las variables *x* e *y*, descoordinación de los procesos en el dominio de la función, descoordinación de los procesos en el rango de la función y descoordinación general de los procesos.

Asimismo, la categoría denominada referencia explícita a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico, se presenta con el "empleo de términos para el objeto/proceso límite relacionados con un sistema de representación diferente al numérico o simbólico" (Fernández-Plaza et al., 2013b, p. 122), motivó la creación de la categoría símbolos matemáticos y notaciones, y de la categoría referencia a un sistema de representación gráfico y/o geométrico.

La categoría condiciones de lateralidad y doble convergencia, en la que los estudiantes "expresan que los procesos de cálculo del límite, bien por la izquierda o bien por la derecha, deben dar el mismo resultado" (Fernández-Plaza et al., 2013b, p. 122), se mantiene sin modificaciones. La categoría aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad, descrita como "la posibilidad o no de alcanzar o rebasar el límite puede ser expresada por los escolares en sus definiciones" (Fernández-Plaza et al., 2013b, p. 122), se desglosó en dos categorías: no alcanzable y alcanzable pero no rebasable. Finalmente, surgió la necesidad de incluir las categorías referencia a las variables *x* e *y*, términos de posición relativa y propiedades matemáticas. Seguidamente, presentamos la descripción de nuestras categorías expuestas en la segunda columna de la tabla 3.8.

(1) Límite como objeto (LO): los sujetos establecen distintas referencias para el objeto límite (Cottrill et al., 1996; Fernández-Plaza et al., 2013b, Sfard, 1991; Tall, 1980). Se entiende límite como una noción estática. Algunas palabras claves para identificar esta categoría son: número, valor, lugar, etc. Si un sujeto dice que un límite se aproxima a un número, pero no dice que el límite sea el número, entonces no hay evidencia de LO.

(2) Límite como proceso (LP): los sujetos refieren al límite de manera procesual (aproximación) (Cottrill et al., 1996; Fernández-Plaza et al., 2013b, Sfard, 1991; Tall, 1980). Es una noción dinámica. Los sujetos hacen referencia a un proceso de obtención o procedimiento. Algunas palabras claves para identificar esta categoría son: aproximarse, tiende, acercar, etc. Si el sujeto usa un verbo de procedimiento, y no dice nada sobre el objeto límite, asumimos que evidencia LP, como por ejemplo

"estudia lo que ocurre alrededor de los puntos", "análisis de un punto". Las categorías límite como objeto y límite como proceso no son mutuamente excluyentes.

(3) Vinculación entre límite e imagen (LI): los sujetos atribuyen al límite un valor de imagen de la función (Fernández-Plaza et al., 2013b). La alusión a la imagen puede hacerse de manera implícita, por ejemplo, en la afirmación "es el valor máximo o más próximo al punto que pertenece a una función" dice que pertenece a una función, por ende, ese valor debe ser imagen, "el número al que tiende una función cuando sustituyo valores en una variable específica" pues al sustituir los valores se entiende que son las imágenes. Cuando los sujetos vinculan el límite con un valor de la imagen, en particular, están evidenciando el límite como objeto, es decir, si se da LI entonces se da LO.

Las categorías 4-7 que mostramos a continuación, representan las distintas posibilidades que encontramos en lo relativo a la coordinación o descoordinación entre las variables x e y, por lo que son mutuamente excluyentes. Además, estas categorías solo se evidencian cuando los sujetos aluden al límite como proceso.

(4) Coordinación entre las variables x e y (CV): los sujetos indican que es un proceso en el que están implicadas las dos variables (x e y), una depende de otra. Los sujetos evidencian convergencia de y en relación con la convergencia de x, es la aproximación de las imágenes a un número, cuando x se aproxima al punto.

(5) Descoordinación de los procesos en el dominio de la función (DX): los sujetos, de manera explícita, sólo evidencian convergencia de x, es decir, solo evidencian la aproximación de las preimágenes a un número. (Fernández-Plaza et al., 2013b).

(6) Descoordinación de los procesos en el rango de la función (DY): Los sujetos, de manera explícita, sólo evidencian convergencia de y, es decir, solo evidencian la aproximación de las imágenes a un número.

(7) Descoordinación general de los procesos (DG): Los sujetos evidencian convergencia en una sola de las variables, ya sea en la variable independiente o en la variable dependiente, pero no explicitan en cuál de ellas. Es decir, hay descoordinación general, cuando el estudiante ve al límite como un proceso, no coordina las variables, no descoordina en x, no descoordina en y.

(8) Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC): los sujetos expresan que los procesos de cálculo del límite, por la izquierda y por la derecha, deben dar el mismo resultado (Fernández-Plaza et al., 2013b).

(9) Términos de posición relativa (PR): los sujetos usan palabras o frases para el límite que denotan una *posición relativa*, es decir, aluden a dónde está ubicada una noción matemática con respecto a una noción fija (objeto) de manera explícita o implícita. Algunas palabras claves para identificar esta categoría son: cercano, a la derecha, encima de, mayor que, próximo, por encima, es una proximidad. Esta categoría no necesariamente está relacionada con el LO. Además, si los sujetos evidencian la categoría CLDC entonces señalan la categoría PR, y puede haber PR sin que haya CLDC.

Las categorías 10-11 son mutuamente excluyentes.

(10) Aspectos estructurales de no alcanzabilidad (NA): los sujetos expresan la imposibilidad de alcanzar el límite. (Cornu, 2002; Fernández-Plaza et al., 2013b; Monaghan, 1991). Algunas frases claves para identificar esta categoría son: sin nunca tocar dicho valor, siguiendo la regla de que, *y* no va a ser el resultado, nunca lo llega a pasar o tocar, etc.

(11) Aspectos estructurales de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR): los sujetos expresan la posibilidad de alcanzar el límite, pero no de rebasarlo o sobrepasarlo. Usan palabras como no pasar (Cornu, 2002; Fernández-Plaza et al., 2013b; Monaghan, 1991). Algunas frases claves para identificar esta categoría son: punto final, valor máximo, hasta donde llega la función.

(12) Referencia a las variables x e y (RV): los sujetos usan palabras específicas para aludir a las variables independiente y dependiente de la función. Algunas palabras claves para identificar esta categoría son: preimagen, imagen, punto en x, punto en y, etc.

(13) Símbolos matemáticos y notaciones (S): los sujetos usan símbolos matemáticos, notaciones para aludir a diferentes nociones matemáticas. Algunos símbolos claves para identificar esta categoría son: f, a, L, x, y, etc.

(14) Referencia a un sistema de representación gráfico y/o geométrico (G): los sujetos usan términos para el objeto/proceso límite relacionados con un sistema de representación gráfico y/o geométrico. Algunas palabras claves para identificar esta categoría son: punto final, en la gráfica, el punto en una recta, huecos que hay en un gráfico, etc.

(15) Propiedades matemáticas (PM): los sujetos hacen referencia a propiedades o nociones que son verdaderas en la matemática, no contempladas en el resto de las categorías de análisis.

Una vez que construimos este sistema de categorías para el análisis de las definiciones del concepto de límite, procedimos a validarlas, ya que es un sistema de categorías compuesto por categorías deductivas en inductivas. Para ello se analizaron de manera independiente 49 definiciones de límite proporcionadas por los estudiantes y realizamos una triangulación para consensuar, ajustar y explicar más las definiciones de las categorías de manera que nos permitieran hacer un análisis sistemático y con la menor de las ambigüedades.

La muestra utilizada en dicha validación correspondió a la producción escrita que brindaron 38 estudiantes de Cálculo I de Biología e Ingeniería en Química Industrial al pedirles que explicaran con sus propias palabras el significado de la definición de límite que le había dado su profesor en el Momento 1. Con ello buscábamos conocer, en aspectos generales, la forma en que expresaban su interpretación de dicho concepto y los aspectos o características que resaltaban del mismo. En este sentido, consideramos cada definición dada por los estudiantes como una unidad de análisis, entendiendo que una definición completa acaba cuando el estudiante agrega un punto y aparte. Once estudiantes respondieron dos veces a la tarea, por lo que en total trabajamos con 49 unidades de análisis.

La fiabilidad es la medida en que un procedimiento de medición arroja los mismos resultados en ensayos repetidos. Esto último es particularmente relevante para el análisis de contenido codificado por humanos, ya que una medida es poco valiosa si solo puede ser realizada una vez o por una sola persona en particular (Neuendorf, 2017). La replicabilidad es la forma más importante de fiabilidad (Krippendorff, 2004). Los índices de fiabilidad se utilizan para determinar la fiabilidad de las mediciones realizadas por los investigadores (Sim y Wright, 2005).

Neuendorf (2017) describe cuatro amenazas para la fiabilidad: un esquema de codificación mal ejecutado, el entrenamiento inadecuado del codificador, la fatiga del codificador y deriva del codificador y, la presencia de un codificador deshonesto. Para evitar estas amenazas, hemos realizado varios ciclos de revisión de las categorías con una muestra de las respuestas de los estudiantes y posteriormente hemos discutido los resultados, como parte del entrenamiento en la codificación. Este proceso ha dado lugar a la modificación de la descripción de las categorías, que hemos redactado de la forma más explicativa posible, incluyendo términos usuales en los que aparecen y algunas aclaraciones a dudas que surgieron al aplicar dichas categorías a una muestra. Además, hemos asociado las que están relacionadas para que sea más sencilla la categorización. Por último, dada la importancia que tiene para nosotros ajustarnos a la realidad, hemos realizado las categorizaciones en momentos que nos sintamos cómodos y centrados, evitando dedicarnos a este trabajo cuando estábamos fatigados.

A modo de ejemplo, en la categoría LI se agregó que la alusión a la imagen se podía hacer de manera implícita, por ejemplo, en la afirmación "es el valor máximo o más próximo al punto que pertenece a una función" dice que pertenece a una función, por ende, ese valor debe ser imagen, "el número al que tiende una función cuando sustituyo valores en una variable específica" pues al sustituir los valores se entiende que son las imágenes, ya que uno de los investigadores solo anotaba esta categoría cuando aludía a la imagen explícitamente. Algo similar consensuamos para la categoría LO, ya que acordamos que, si un estudiante dice que un límite se aproxima a un número, pero no dice que el límite sea el número, entonces no está presente dicha categoría. Por limitaciones de espacio, no podemos desglosar los cambios de todas las categorías. Una vez depuradas las 15 categorías con las respuestas de los 10 estudiantes, los tres investigadores analizamos nuevamente de manera independiente las 49 respuestas de los 38 estudiantes y determinamos nuestro grado de acuerdo en las categorizaciones de las respuestas de los sujetos de investigación.

Para esto hemos utilizado el acuerdo de categorización entre evaluadores, debido a que medimos el acuerdo entre los tres investigadores. En concreto, utilizamos el índice Holsti, que es el porcentaje de acuerdo entre codificadores de los mismos casos (Neuendorf, 2017; Wang, 2011), ya que es fácil de entender, calcular y se puede aplicar a más de dos codificadores. La fórmula es: $PA_0 = \frac{2A}{N_1 + N_2}$ donde *PA0* representa el porcentaje de acuerdo entre dos codificadores, *A* es el número de decisiones de consenso de dos codificadores, y *N1* y *N2* son los números de decisiones que los codificadores han tomado respectivamente (Wang, 2011). Sin embargo, dado que queremos conocer el grado de acuerdo de los tres investigadores, tuvimos que modificar esta fórmula quedando $PA_0 = \frac{3A}{N_1 + N_2 + N_3}$ donde *PA0* representa el porcentaje de acuerdo entre tres codificadores, *A* es el número de decisiones de consenso de los tres codificadores, y *N1, N2* y *N3* son los números de decisiones que los codificadores han tomado respectivamente.

El índice Holsti de nuestro sistema de categorías fue de 0,92. Sin embargo, siguiendo las recomendaciones de Neuendorf (2017), decidimos realizar el Holsti por categorías (Tabla 3.9) para tener información específica de cada una y evitar que el promedio de acuerdos ocultara la baja fiabilidad de alguna de ellas. Como se puede apreciar, cada categoría tiene un porcentaje alto de acuerdo, siendo símbolos matemáticos y notaciones (S) la categoría con el porcentaje más bajo y descoordinación de los procesos en el rango de la función (DY) es la categoría con el porcentaje más alto de acuerdo. Se aprecia como de las 15 categorías 12 tienen un acuerdo entre los tres investigadores del 0,90 o más. Indicar que, el índice Holsti de la primera versión aplicada a los estudiantes de Biología arrojó un Holsti global de los tres investigadores de 0,80.

Tabla 3.9

Índice Holsti por categorías de los tres investigadores.

Categoría	Porcentaje
LO	90%
LP	88%
LI	92%
CV	94%
DX	96%
DY	100%
DG	90%
CLDC	96%
PR	98%
NA	92%
ANR	92%

Tabla 3.9

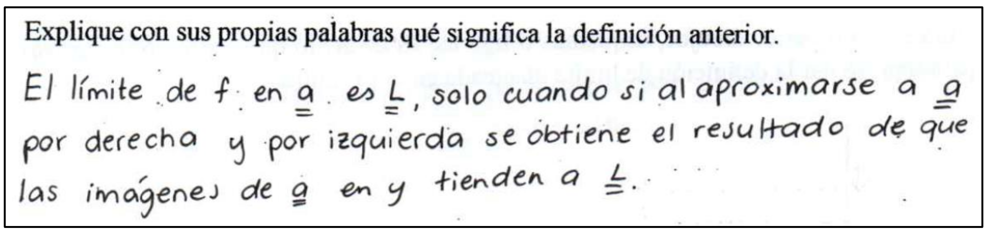
Índice Holsti por categorías de los tres investigadores.

Categoría	Porcentaje
RV	88%
S	86%
G	90%
PM	92%
Global	92%

A continuación, observamos la figura 3.19 donde el estudiante SBL012507 explica la definición del concepto de límite.

Figura 3.19

Respuesta a la tarea T1_C1 del estudiante SBL012507.


Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

El límite de f en a es L, solo cuando si al aproximarse a a por derecha y por izquierda se obtiene el resultado de que las imágenes de a en y tienden a L.

En la figura 3.19 observamos cómo el estudiante evidencia las categorías Límite como objeto (LO) ya que indica que “el límite de *f* en *a* es *L*” y Límite como proceso (LP) ya que utiliza los términos “aproximarse” y “tender”. Además, exhibe la categoría Coordinación entre las variables x e y (CV), pues indica que es un proceso en el que están implicadas las variables *x* e *y*, donde una depende de otra; exhibe la categoría Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC) pues establece la necesidad de que las aproximaciones por la derecha y la izquierda del número y que el límite sea *L*, evidencia la categoría Términos de posición relativa (PR) pues usa los términos izquierda y derecha, exhibe la categoría Referencia a las variables x e y (RV) pues usa el término imágenes y finalmente evidencia la categoría Símbolos matemáticos y notaciones (S) pues usa los símbolos *f, a, L, y.*

3.5.2 ANÁLISIS DE LAS REPRESENTACIONES DEL CONCEPTO DE LÍMITE

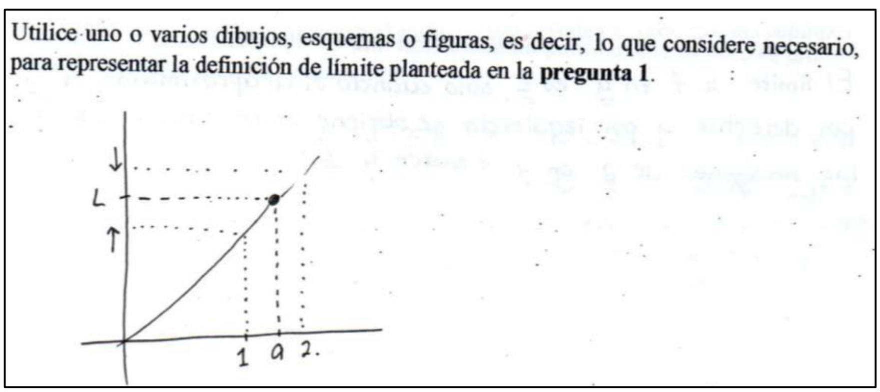
Posteriormente este sistema de 15 categorías nos sirvió para analizar las representaciones del concepto de límite que brindaban los mismos 38 estudiantes, por lo que en total trabajamos con 38 unidades de análisis. Como lo indicamos anteriormente, a los estudiantes se les pidió que utilizaran uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que consideraran necesario, para representar la definición de límite, esta es la segunda tarea del cuestionario 1 (T2_C1). Identificamos los tipos de sistemas de representación de cada unidad de análisis que utilizaron los estudiantes (gráfico, simbólico, tabular o verbal), encontrando estudiantes que usaban más de un sistema de representación.

En este sistema de categorías, las categorías Referencia a un sistema de representación gráfico y/o geométrico (G) y Símbolos matemáticos y notaciones (S) no las consideremos para analizar las representaciones, debido a que duplican la información, ya que son categorías que aluden directamente a las representaciones.

Una vez establecidas las categorías, se procedió al análisis de la presencia o ausencia de cada una de las características descritas en la categoría. Los datos se anotaron en una hoja de cálculo en Excel que contiene una columna para cada una de las 13 categorías, correspondiendo cada fila a una unidad de información. Se agregaba un 1 cuando estaba presente la categoría en la unidad de información y un 0 cuando no lo estaba. A continuación, en la figura 3.20 se muestra la representación del sujeto SBL012507.

Figura 3.20

Respuesta a la tarea T2_C1 del estudiante SBL012507.



Nótese que el sujeto SBL012507 usa una representación gráfica. En ella indica que la imagen de a es L, por lo que evidencia las categorías Vinculación entre límite e imagen (LI) y límite como objeto (LO). Resalta acercamiento a *a* y a *L* lo que evidencia la categoría Límite como proceso (LP) y Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV). También, esboza que por izquierda y por derecha de *a* el límite deber ser *L*, por lo que muestra las categorías Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC) y Términos de posición relativa (PR).

Las categorías, referencia a las variables *x* e *y* (RV), descoordinación general de los procesos (DG), y descoordinación de los procesos en el rango de la función (DY) no estuvieron presentes en las representaciones de los estudiantes. Es decir, solo hubo evidencia de las restantes 10 categorías en las representaciones de los estudiantes.

3.5.3 ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES Y DE LOS TÉRMINOS Y MODOS DE USO DEL CONCEPTO DE LÍMITE

En cuanto al sentido, para la codificación de los términos y modos de uso consideramos cuatro categorías basados en cuatro definiciones de límite contenidas en el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española[1]:

- Frontera (barrera e impedimento): Línea real o imaginaria que separa dos tierras, dos países, dos territorios.
- Extremo que puede llegar a lo físico y lo emocional –Llegó al límite de su poder.
- Plazo. Esta categoría no se detectó en las respuestas de los estudiantes.
- Fin (dimensiones límite, situación límite). Cualidades reales o imaginarias que no son propias del ser humano –fin de las historias, final de la película, final de una página.

Cada una de estas 4 categorías remite, atendiendo a la interpretación seguida en esta memoria, a las categorías Límite como objeto (LO). Además, las tres primeras categorías están relacionados con la categoría Aspectos estructurales de la alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR) mientras que la última alude a Aspectos estructurales de la no alcanzabilidad (NA).

Refiriéndose también al sentido, para el análisis de las situaciones consideramos cuatro categorías como resultado de las respuestas de los estudiantes:

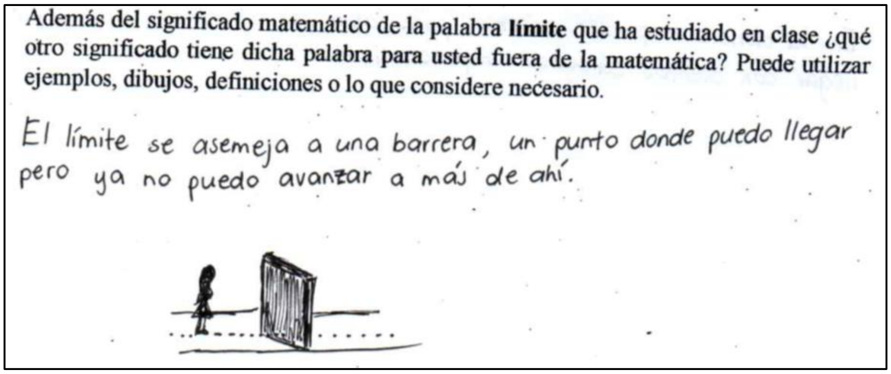
- Sector productivo: comprende la industria, la medicina y las actividades económicas;
- Matemáticas: contiene gráficas matemáticas, convergencia, derivada, …;
- Carreras técnicas: que incluye arquitectura e ingeniería;
- Experimental: incluye Astronomía y Física.

[1] https://dle.rae.es/diccionario

Las categorías de las situaciones y de los términos y modos de uso no son excluyentes, es decir, puede ocurrir que la respuesta de algún estudiante nos brinde información para más de una categoría.

Figura 3.21

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SBL012507



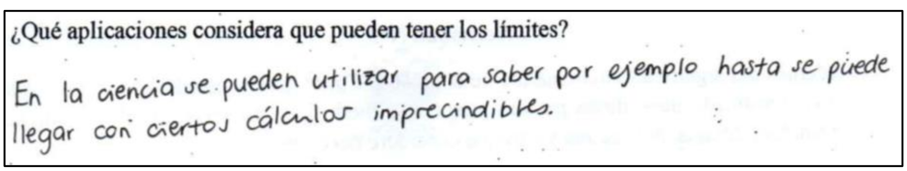
Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

El límite se asemeja a una barrera, un punto donde puedo llegar pero ya no puedo avanzar a más de ahí.

Como ejemplo, la Figura 3.21 muestra que el sujeto SBL012507 indica que el límite es una barrera, mostrando así la categoría de frontera por lo que a su vez evidencias las categorías LO y ANR.

Figura 3.22

Respuesta a la tarea T3_C1 del estudiante SBL012507



¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

En la ciencia se pueden utilizar para saber por ejemplo hasta se puede llegar con ciertos cálculos imprecindibles.

En el caso de la figura 3.22, el sujeto SBL012507 brinda una respuesta ambigua, por lo que no evidencia ninguna de las cuatro categorías de las situaciones.

3.5.4 UNIFICACIÓN DE UN ÚNICO SISTEMA DE CATEGORÍAS PARA ANALIZAR EL SIGNIFICADO DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Hasta este momento teníamos un sistema de 15 categorías que nos permitía analizar las definiciones y las representaciones, además de otras categorías adicionales para analizar las situaciones y los términos y modos de uso que brindaban los estudiantes del concepto de límite. Nuestro objetivo es analizar el significado del límite que expresan los estudiantes sin analizar primero las definiciones, luego las representaciones y luego las situaciones y los términos y modos de uso, sino analizar el significado conjunto, con un único sistema de categorías.

En este sentido se tomaron varias decisiones. Por un lado, se eliminaron las categorías Descoordinación de los procesos en el dominio de la función (DX), Descoordinación de los procesos en el rango de la función (DY), Descoordinación general de los procesos (DG), ya que al incluir los sistemas de representación no aparecieron ni descoordinación general ni descoordinación en y, e implícitamente se contemplaba en la categoría Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV). Por otro, se desglosó la categoría Referencia a un sistema de representación gráfico y/o geométrico (G) en las categorías Representación gráfica (RG), y Otra Representación (OR). También se eliminó la categoría Símbolos matemáticos y notaciones (S).

En la tabla 3.10. se muestra las categorías usadas para analizar las definiciones del concepto de límite y las categorías usadas para analizar su significado. Como se puede apreciar la diferencia es mínima entre un sistema de categorías y otro, ya que realmente la única categoría que es nueva es Situaciones (ST).

Tenemos entonces que las 13 categorías son: Límite como objeto (LO), Límite como proceso (LP), Vinculación entre límite e imagen (LI), Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV), Referencia a las variables *x* e *y* (RV), Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC), Propiedades matemáticas (PM), Aspectos estructurales de no alcanzabilidad (NA), Aspectos estructurales de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR), Términos de posición relativa (PR), Representación gráfica (RG), Otra Representación (OR) y Situaciones (ST).

Las categorías de términos y modos de uso se distribuyeron así: Frontera, extremo, fin y plazo se agregan en Límite como objeto (LO), Frontera, extremo y plazo se agregan en Aspectos estructurales de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR), y Fin se agrega en Aspectos estructurales de no alcanzabilidad (NA).

Tabla 3.10

Categorización de una unidad de información.

Categorías para analizar las definiciones del concepto de límite	**Categorías para analizar el significado del concepto de límite**
Límite como objeto (LO)	Límite como objeto (LO)
Límite como proceso (LP)	Límite como proceso (LP)
Vinculación entre límite e imagen (LI)	Vinculación entre límite e imagen (LI)
Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV)	Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV)
Descoordinación de los procesos en el dominio de la función (DX)	----
Descoordinación de los procesos en el rango de la función (DY)	----
Descoordinación general de los procesos (DG)	----
Referencia a las variables *x* e *y* (RV)	Referencia a las variables *x* e *y* (RV)
Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)	Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)
Propiedades matemáticas (PM)	Propiedades matemáticas (PM)
Referencia a un sistema de representación gráfico y/o geométrico (G)	Representación gráfica (RG)
---	Otra Representación (OR)
Aspectos de no alcanzabilidad (NA)	Aspectos de no alcanzabilidad (NA)
Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR)	Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR)
Términos de posición relativa (PR)	Términos de posición relativa (PR)
----	Situaciones (ST)
Símbolos matemáticos y notaciones (S)	----

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos en nuestra investigación, tras el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a las tareas propuestas en los cuestionarios 1 y 2. Para ello, hemos considerado cuatro apartados organizándolos utilizando los diferentes momentos y los niveles de significado que se quieren identificar (ver figura 3.1):

- En el primer apartado se presentan los resultados correspondientes a los análisis de cada una de las tareas del cuestionario 1 (T1_C1, T2_C1, T3_C1, T4_C1) que se ubican en un primer nivel de compleji dad cognitiva, en el que se estudian los términos, notaciones, convenios sobre el concepto de límite, además de sus representaciones, modos de uso y situaciones que involucra dicho concepto;
- En el segundo, los resultados obtenidos de las primeras dos tareas del cuestionario 2 (T1_C2, T2_C2) que también se sitúan en un primer nivel de complejidad cognitiva y contemplan los mismos elementos del primer apartado;
- Posteriormente, en tercero, se hace una comparación entre los resultados obtenidos en el primero apartado y los del segundo;
- Para cerrar el capítulo, con objeto de analizar los razonamientos, en el cuarto apartado se presenta el análisis de las tres tareas restantes del cuestionario 2 (T3_C2, T4_C2, T5_C2), que se ubican en el segundo nivel de complejidad cognitiva.

Para que el discurso sea más fluido, utilizaremos un vocabulario flexible indicando, por ejemplo, que un estudiante determinado evidencia, manifiesta o expresa una categoría en particular. Con estas expresiones lo que queremos decir es que, tras el análisis de las respuestas, identificamos justificadamente indicadores asociados a las categorías (ver apartado 3.5.1.2) en las respuestas, esto es, codificamos e interpretamos sus respuestas a través de las categorías de análisis.

4.1 SIGNIFICADOS INICIALES DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Durante la enseñanza del concepto de límite, momento 1, se les pidió a los 218 estudiantes que completaran el cuestionario 1, compuesto por cuatro tareas que permitían indagar sobre el significado del concepto de límite. En la primera tarea (T1_C1) se les pedía a los estudiantes que explicaran con sus propias palabras la definición de límite, en la segunda tarea (T2_C1) se les solicitaba que utilizaran dibujos, esquemas o figuras para representar la definición de límite, en la tercera tarea (T3_C1), se les preguntaba por las aplicaciones que consideraba que tenía los límites y en la cuarta tarea (T4_C1) se les demandaba por el significado de la palabra límite fuera de la matemática (Figura 4.1).

Figura 4.1

Tareas del cuestionario 1.

Pregunta 1. Escriba la definición de **límite de una función en un punto** que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).

T1_C1. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

T2_C1. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la pregunta 1.

T3_C1. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

T4_C1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

Para presentar los resultados, en primer lugar, realizamos un análisis descriptivo de las respuestas atendiendo a las categorías de análisis, que es el resultado del análisis de contenido, la codificación y el recuento de las respuestas. Posteriormente, explicamos los perfiles de significado que obtuvimos al realizar el análisis de conglomerados.

4.1.1 DESCRIPCIÓN CATEGORÍA POR CATEGORÍA

En este apartado presentamos una descripción de la cantidad de estudiantes que evidencia cada una de las categorías de nuestro estudio, así como las palabras, términos, dibujos o símbolos que usan para resaltar cada categoría.

Límite como objeto y Límite como proceso

Las categorías límite como objeto (LO) y Límite como proceso (LP) fueron las categorías con mayor presencia en las respuestas de los estudiantes en su primera toma de contacto con el concepto de límite. Concretamente, el 78% de los estudiantes evidenciaron ambas categorías en sus repuestas, un 17% la categoría límite como objeto únicamente y un 2% la categoría límite como proceso.

El límite como objeto se observa en la tarea T1_C1 (definición) cuando los estudiantes se refieren al límite como: número, valor, valores, punto, cero, imagen, el fin, huecos, lugar, etc. En la tarea T2_C1 (representación) lo identifican con puntos, huecos, saltos, números en la representación. Además, todas las acepciones del límite en la vida cotidiana ven al límite como un objeto, ya sea físico o abstracto: frontera, extremo, fin y fecha límite; por lo que las respuestas a la tarea T4_C1 muestran esta categoría y en muy pocas ocasiones en la tarea T3_C1.

En el caso de la categoría Límite como proceso (LP), se observa cuando se refieren al límite como: aproximarse, tendencia, acercamiento, analizar lo que hay alrededor de un punto, se estudia el alrededor de los puntos, etc. (tarea T1_C1) o lo identifican con flechas, puntos de aproximación, líneas alrededor de la variable independiente o dependiente tanto de modo general como en casos particulares en la representación (T2_C1).

Vinculación entre límite e imagen

La categoría Vinculación entre límite e imagen (LI) se aprecia en un 13% de las respuestas de los estudiantes. En la en la tarea T1_C1, usan frases como: esta imagen es el límite, las imágenes de *a* en *y* tienden a *L*, es un punto al cual se acerca ubicado en *f(x)*, el valor que pertenece a una función, cuando sustituyo valores en una variable específica, es el valor que toma la *y*, el límite de *f(x)* es *4*; y en la tarea T2_C1 realizan asociaciones a través de puntos o con una línea, de una preimagen con su imagen en la representación.

Coordinación entre las variables x e y

La categoría Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV) se observa en un 23% de las respuestas de los estudiantes. En la tarea T1_C1, refieren al límite como procesos de aproximación entre la variable independiente y la dependiente, y los relacionan; y en la tarea T2_C1 lo explicitan en la representación.

Referencia a las variables x e y

La categoría Referencia a las variables *x* e *y* (RV) se aprecia en un 36% de las respuestas de los estudiantes. En la tarea T1_C1, refieren al límite como: preimagen, imagen, imágenes, punto en *x*, punto en *y*, etc. En la tarea T2_C1 usan los símbolos *x*, *f(x)*, etc.

Condiciones de lateralidad y doble convergencia

La categoría Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC) se observa en un 27% de las respuestas de los estudiantes. En la tarea T1_C1, usan frases como: si al aproximarse a *a* por derecha y por izquierda se obtiene el resultado, es el límite si es la misma cuando se acerca tanto por derecha como por izquierda de la preimagen etc.; y en la tarea T2_C1 realizan en la representación gráfica, flechas o procesos de aproximación alrededor de un mismo número para indicar que por izquierda y derecha el límite debe ser lo mismo. Y en la tabular, se hacen asignaciones de valores cercanos a un mismo número por izquierda y derecha, para verificar que sus imágenes tienden al mismo resultado.

Términos de posición relativa

Los estudiantes de la muestra, con bastante frecuencia (66%), hacen referencia a términos de posición relativa al explicar o representar el concepto de límite. En la tarea T1_C1, destacan frases como: izquierda, derecha, arriba, abajo, cerca de un valor, valor aproximado al punto, por ambos lados se acerca a un valor en el eje *x*, es una proximidad, etc.; y en la tarea T2_C1 usan flechas alrededor de un número o símbolo, hacen aproximaciones por izquierda o derecha de un número en la representación.

Como puede observarse en la figura 4.2, el estudiante EBM0125 hace una representación para el límite en el que podemos observar: procesos de aproximación por la izquierda y derecha de a, usa flechas alrededor de L, por lo que evidencia las categorías LP y PR; asocia las preimágenes 1, a y 2 con sus respectivas imágenes, por lo que evidencia las categorías CV y RV; por su explicación de la definición del límite detectamos que evidencia la categoría CLDC; dibuja un punto, lo que evidencia la categoría LO; y, con este punto que dibuja se deprende que la imagen de a es L, lo que evidencia la categoría LI.

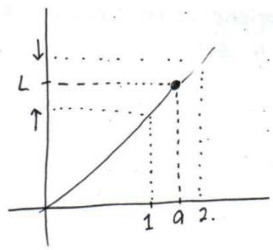
Figura 4.2

Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SBL012507.

2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

El límite de f en a es L, solo cuando si al aproximarse a a por derecha y por izquierda se obtiene el resultado de que las imágenes de a en y tienden a L.

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.



Propiedades matemáticas

La categoría Propiedades matemáticas (PM) se observa en un 13% de las respuestas de los estudiantes. En la tarea T1_C1, los estudiantes usan frases como: función real de variable real, hay límites infinitos, sucesiones, límite de sucesiones, etc.; y en la tarea T2_C1 evidencian asíntotas o límites infinitos en la representación. En la figura 4.3 vemos como el estudiante EQH0207 evidencia esta categoría.

Figura 4.3

Respuesta a la tarea T1_C1 del estudiante SIQ020707.

El concepto general de límite que se tiene (límites de regiones, límites de velocidad, etc), puede extenderse al campo matemático. Para ello analicemos las siguientes sucesiones de números:

I. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$

II $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9} \ldots$

Puede observarse que cada número de las sucesiones es cada vez más cercano a cero lo que significa que el límite de las sucesiones es 0. (cero)

Representación gráfica y otras representaciones

El 80% de los estudiantes utilizan representaciones gráficas (RG) para explicar el concepto de límite, que suelen aparecer en respuesta a la tarea T2_C1, mientras que el 42% utiliza otras representaciones (OR) (tabulares, verbales, simbólicas y pictóricas), ya sea como respuesta a la pregunta T2_C1 o la T4_C1. Un ejemplo de representación gráfica utilizada como respuesta a T2_C1 se mostró en la figura 4.2. La figura 4.4 muestra un ejemplo de ilustración del concepto de límite fuera de la matemática (T4_C1) utilizando una representación pictórica.

Figura 4.4

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SBL012507.

Aspectos de no alcanzabilidad y aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad

Un 36% de las respuestas de los estudiantes manifiestan una concepción del límite como algo no alcanzable (NA) y el 76% como algo alcanzable, pero no rebasable (ANR).

En el primer caso, encontramos que, en la tarea T1_C1, los estudiantes se refieren al límite como: el lugar por donde esta no pasa (en la gráfica), se acerca a un punto pero nunca lo toca, sin que este esté incluido, pero siguiendo la regla de que *y* no va a ser el resultado, etc., y, en la tarea T2_C1 lo destacan con asíntotas o límites infinitos en la representación. Además, interpretamos que, en las respuestas a recogidas en la tarea T4_C1, cuando el límite se ve como fin se entiende que es no alcanzable.

En el segundo caso, los estudiantes refieren al límite como: valor máximo, el límite una función es hasta donde llega la función, solo se le permite acercarse a cierto valor, no pasarse de él (T1_C1) o acotan la representación (T2_C1). Además, interpretamos que las acepciones de límite como frontera, extremo y fecha límite muestran al límite como algo alcanzable, no rebasable. En la figura 4.5 se observa la categoría Aspecto de no alcanzabilidad (NA) y en las figuras

4.4 y 4.6 se observan ejemplos de la categoría Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR).

Figura 4.5

Respuesta a la tarea T2_C1 del estudiante SBL092719.

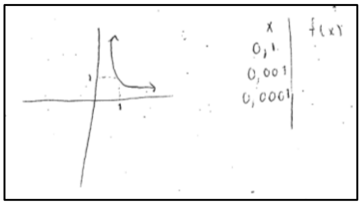
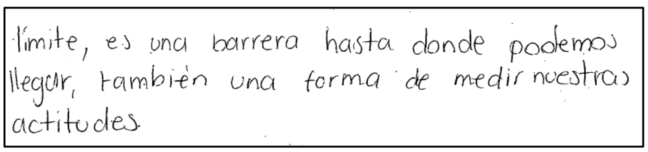


Figura 4.6

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SIQ051814.

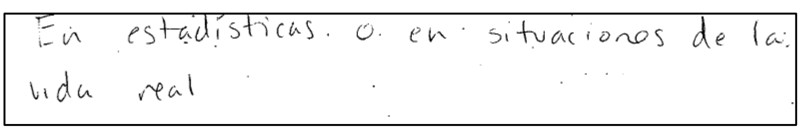


Situaciones

La tarea T3_C1 solicitaba a los estudiantes aplicaciones de los límites. El 46% de los estudiantes proporcionó alguna Situación (ST) en la que se aplica el límite, para ello, usaron frases como: en la industria, en la medicina, en la economía, en gráficas matemáticas, en la convergencia de una función, en el concepto de derivada, en la estadística, en la arquitectura, en la ingeniería, en la astronomía y en la física. En la figura 4.7 observamos cómo el estudiante EBM0927 evidencia esta categoría, pues indica que el límite se puede usar en estadísticas.

Figura 4.7

Respuesta a la tarea T3_C1 del estudiante SIQ021322.



4.1.2 DESCRIPCIÓN GENERAL DE LAS CATEGORÍAS

En la tabla 4.1 mostramos la frecuencia con la que los estudiantes evidencian cada una de las 13 categorías en las respuestas a las distintas tareas de dicho cuestionario, organizadas según su relación con cada una de las tres componentes de significado organizadas en el triángulo semántico.

Tabla 4.1

Presencia de las 13 categorías en las respuestas de los 218 estudiantes durante la enseñanza del concepto de límite.

Componente de significado	Categoría	Frecuencia
Estructura conceptual	Límite como objeto (LO)	208 (95%)
	Límite como proceso (LP)	174 (80%)
	Vinculación entre límite e imagen (LI)	29 (13%)
	Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV)	50 (23%)
	Referencia a las variables *x* e *y* (RV)	79 (36%)
	Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)	59 (27%)
	Propiedades matemáticas (PM)	28 (13%)
Sistemas de representación	Representación gráfica (RG)	174 (80%)
	Otra representación (OR)	92 (42%)
Sentidos y modos de uso	Aspectos de no alcanzabilidad (NA)	79 (36%)
	Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR)	165 (76%)
	Términos de posición relativa (PR)	144 (66%)
	Situaciones (ST)	101 (46%)

Observamos que una mayoría de los estudiantes aportan elementos que pueden ser clasificados utilizando nuestro sistema de categorías, mostrando que todas las personas con formación o sin ella, son capaces de expresar ideas acerca de los conceptos. Así, en este caso, observamos que los estudiantes cuando están empezando a estudiar el límite:

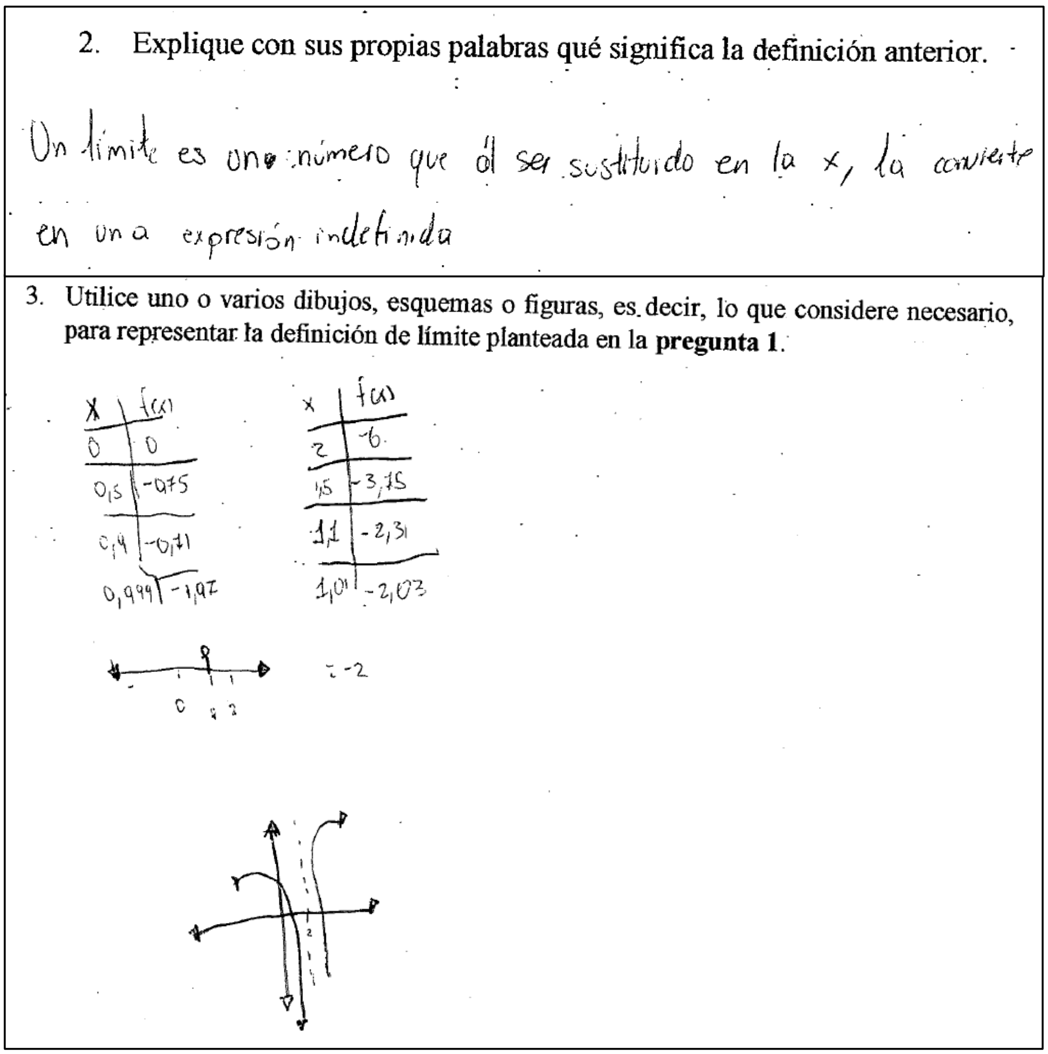
- manifiestan *aspectos estructurales*, expresando que el límite es un objeto, por ejemplo, diciendo que el límite es un número como se observa en la figura 4.1 y un proceso, esto es, indicando que es un acercamiento como se registra en la figura 4.5 (Límite como objeto y Límite como proceso), lo que nos parece natural puesto que no han recibido formación al respecto;
- expresan *aspectos de representación,* utilizando mayoritariamente representaciones gráficas (RG) como se aprecia en la figura 4.2, aunque muchos, también, utilizan otras representaciones distintas a las gráficas (OR) como la representación tabular, un ejemplo se observa en la figura 4.2;
- se expresan usando *aspectos de sentido,* ya que identifican el límite como algo que no se puede superar (ANR) porque delimita (figura 4.3), que requiere el uso de una posición relativa, por ejemplo, haciendo aproximaciones por izquierda y derecha

como se observa en la figura 4.2. Además, casi la mitad identifican que el límite es útil en situaciones (ST) como, por ejemplo, para los ingenieros (figura 4.3).

A continuación, presentamos unos ejemplos. En las figuras 4.8, 4.9, y 4.10 observaremos cómo SIG130714 evidencia 12 de las 13 categorías y en la figura 4.11 veremos cómo SBL030901 se evidencia la categoría restante.

Figura 4.8

Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SIG130714.



2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

Un límite es una número que al ser sustituido en la x, la convierte en una expresión indefinida

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

x	f(x)
0	0
0,5	-0,75
0,9	-0,71
0,999	-1,97

x	f(x)
2	-6
1,5	-3,75
1,1	-2,31
1,01	-2,03

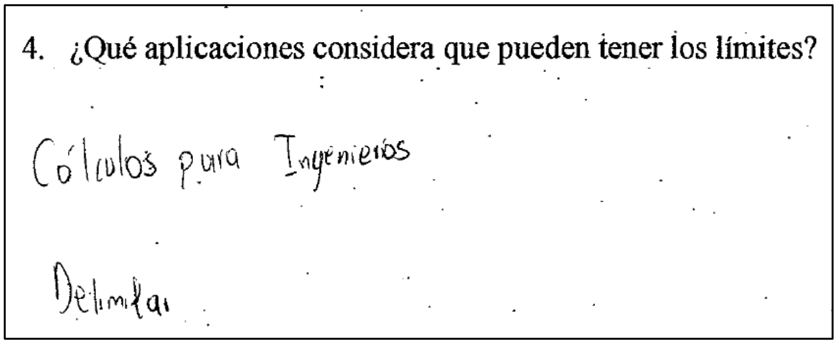
≈ -2

En la figura 4.8 observamos cómo el estudiante SIG130714 evidencia las categorías:

- Límite como objeto (LO), ya que dice que el límite es un número;
- Referencia a las variables *x* e *y* (RV), ya que en la definición habla de una sustitución en *x*, lo que denota alusión a variable independiente y en la representación tabular lo refuerza al usar *x* y *f(x)* para anotar preimágenes e imágenes, respectivamente, de la función;
- Límite como proceso (LP), puesto que en la representación tabular se aprecia cómo en las preimágenes y en las imágenes exhibe procesos de aproximación;
- Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV), debido a que en la representación tabular se observa que conforme anota una preimagen anota una imagen y así en varias ocasiones;
- Términos de posición relativa (PR), ya que en la representación tabular exhibe aproximaciones por izquierda y por derecha de 1;
- Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC); ya que se observa en la representación tabular, hace aproximaciones por izquierda y por derecha de 1 y señala que debe ser -2;
- Representación gráfica (RG) puesto que utiliza una representación en el plano cartesiano;
- Otra representación (OR) dado que además de la representación gráfica, utiliza una representación tabular;
- Aspectos de no alcanzabilidad (NA) ya que como se observa en la representación gráfica evidencia una asíntota en *x=2;*
- Propiedades matemáticas (PM) puesto que evidencia un límite infinito en la representación gráfica.

Figura 4.9

Respuesta a la tarea T3_C1 del estudiante SIG130714.


4. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

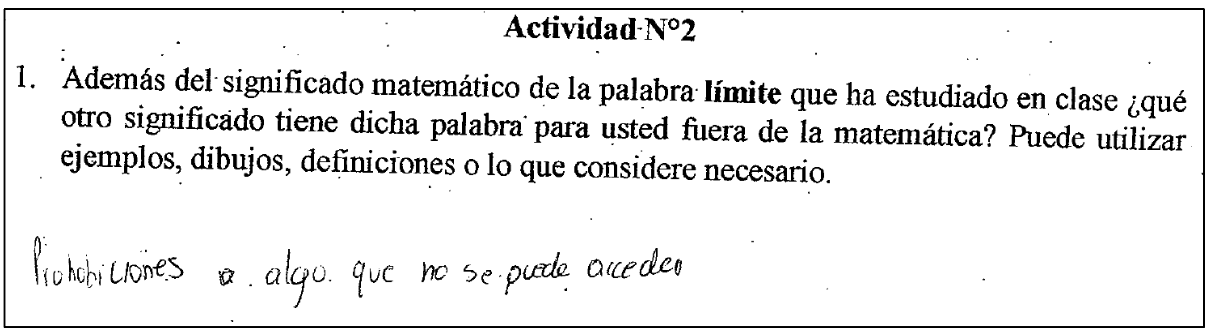
Cálculos para Ingenieros

Delimitar

En la figura 4.9, observamos cómo el estudiante evidencia la categoría Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR) ya que asocia al límite con delimitar y la categoría Situaciones (ST) ya que indica que el límite se usa en cálculos para ingenieros.

Figura 4.10

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SIG130714.


Actividad N°2

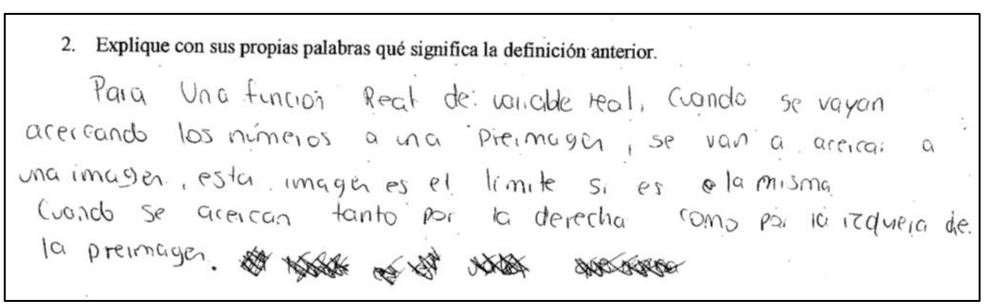
1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

Prohibiciones o algo que no se puede acceder

En la figura 4.10, observamos cómo el estudiante evidencia la categoría Aspectos de no alcanzabilidad (NA) ya que asocia al límite con algo que no se puede acceder.

Figura 4.11

Respuesta a la tarea T1_C1 del estudiante SBL030901.


2. **Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.**

Para Una funcion Real de variable real, Cuando se vayan acercando los numeros a una Preimagen, se van a acercar a una imagen, esta imagen es el limite si es la misma Cuando se acercan tanto por la derecha como por la izquierda de la preimagen.

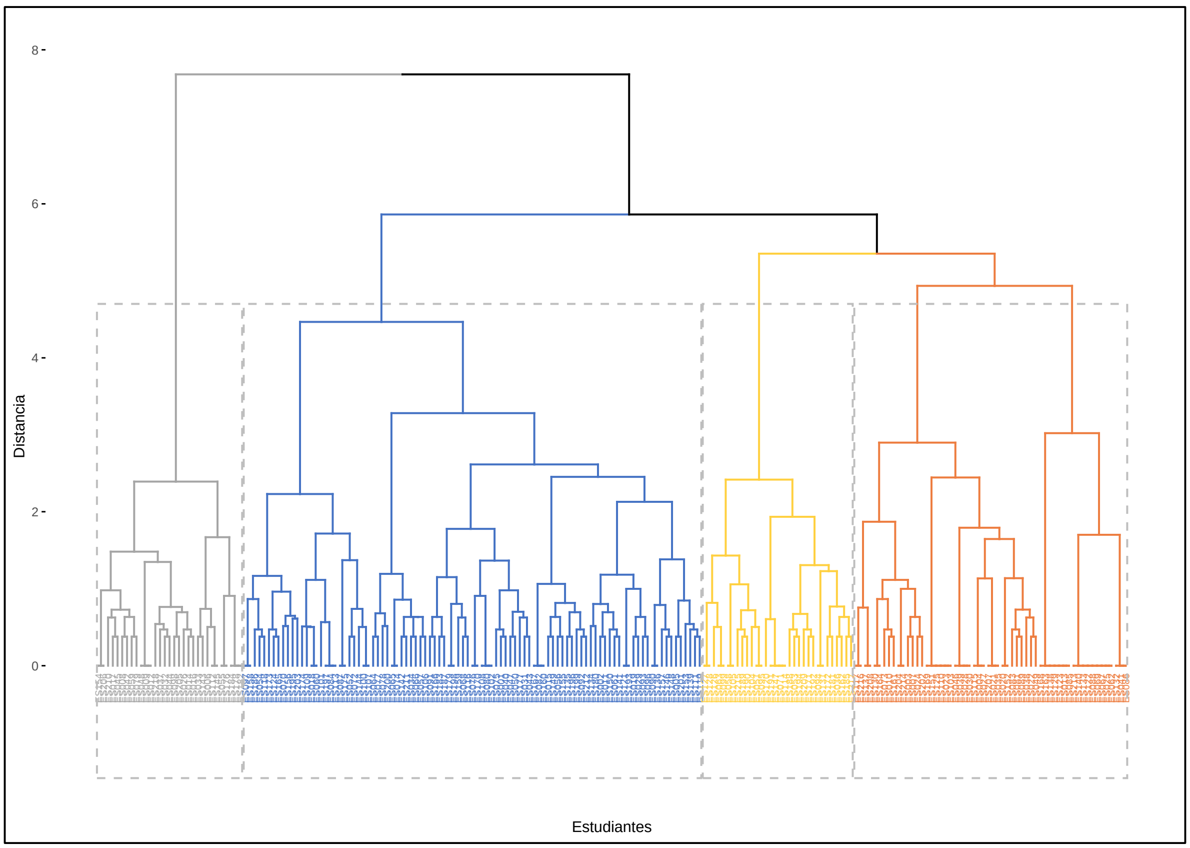
El estudiante SIG130714 la única categoría que no expresó en sus respuestas fue Vinculación entre límite e imagen (LI), por esa razón mostramos un ejemplo en la figura 4.11 de otro estudiante que sí la exhiba en alguna de sus respuestas, como es el caso del estudiante SBL030901 que la evidencia la categoría LI en la explicación de la definición de límite ya que indica que la imagen es el límite si es la misma...

4.1.3 DESCRIPCIÓN DE LOS PERFILES OBTENIDOS

El análisis *cluster* nos ha permitido organizar las respuestas de los 218 estudiantes durante la enseñanza del concepto de límite en cuatro conglomerados. Como lo indicamos el proceso requirió del método de Ward y se usó una medida de similitud, concretamente, la medida de Roger-Tanimoto. En la figura 4.12 se puede observar el dendrograma obtenido.

Figura 4.12

Dendrograma con los cuatro conglomerados durante la enseñanza del concepto de límite.



El que hemos denominado *cluster* 1 (color azul en la figura 4.12) está compuesto 97 estudiantes. El segundo conjunto (color naranja en la figura 4.12) agrupa a 58 estudiantes, mientras que el tercer grupo (color gris, figura 4.12) agrupa a 31. Finalmente, en el conglomerado de color amarillo se concentran 32 estudiantes.

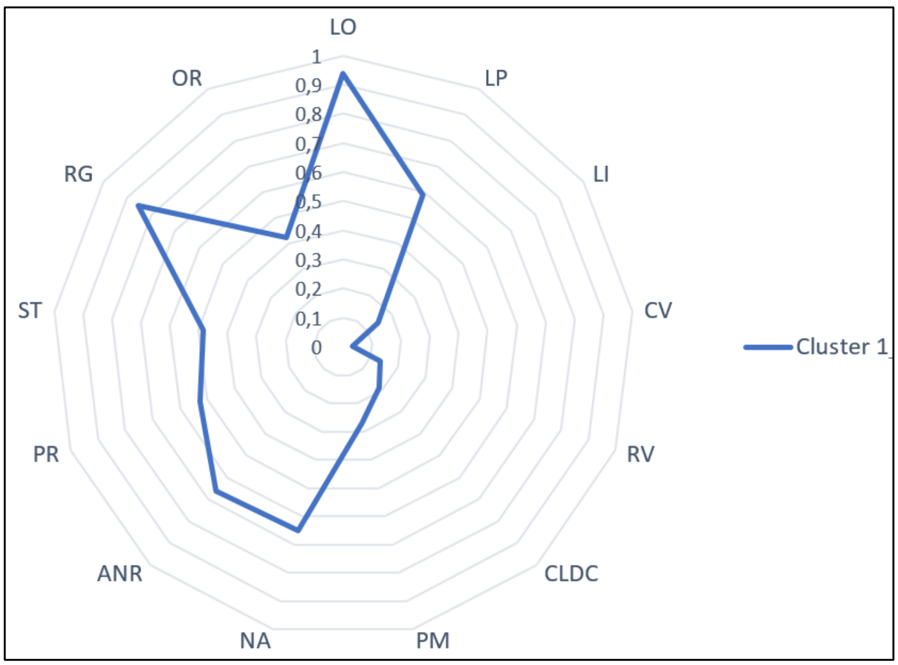
Pasamos a describir uno a uno los conglomerados. Para ello, utilizamos los centroides de los conjuntos para caracterizar los perfiles de respuesta.

4.1.3.1 Respuestas ingenuas

El *cluster* 1 es el más numeroso (97 estudiantes, el 45%). Determinamos su centroide calculando las medias de las respuestas por categoría (Figura 4.13), lo que nos permite caracterizarlo a través de las categorías más y menos expresadas por los estudiantes.

Figura 4.13

Representación radial del cluster 1 con las categorías, durante la enseñanza del concepto de límite.



A la vista de la figura 4.13, destacamos que:

- sobre los aspectos estructurales, más de un 90% de los estudiantes manifiestan que el límite es un objeto y un 60% que el límite es un proceso (LO y LP), un ejemplo de ello se puede apreciar en la figura 4.14, mientras que el resto de categorías de esta componente de significado casi no aparece;

- en los aspectos de representación, cerca de un 90% se decanta por las representaciones gráficas (RG) como se percibe en la figura 4.14; aunque hay un grupo importante (más del 40%) de estudiantes que utilizan otras representaciones distintas;
- en los aspectos de sentido, casi un 70% de los estudiantes evidencian elementos de no alcanzabilidad y no rebasabilidad (NA y ANR), en particular se aprecia en las figuras 4.14, y 4.15 y 4.16 respectivamente.

Como síntesis, para los estudiantes en este grupo, se puede decir que el límite es estructuralmente un objeto y en menor medida un proceso, que se representa gráficamente y que cuyo modo de uso es de una noción no alcanzable o alcanzable no rebasable. Se trata de un significado ingenuo, ya que los estudiantes manifiestan pocos aspectos de los elementos de significado (salvo LO y LP). Por supuesto, en este momento, cuando están al comienzo de su instrucción, consideramos que se trata de respuestas razonables ya que son estudiantes sin formación previa sobre el concepto o comenzando su formación en el tema.

En las siguientes figuras (4.14, 4.15 y 4.16) presentamos las respuestas del estudiante SIQ022720, que pertenece a este grupo.

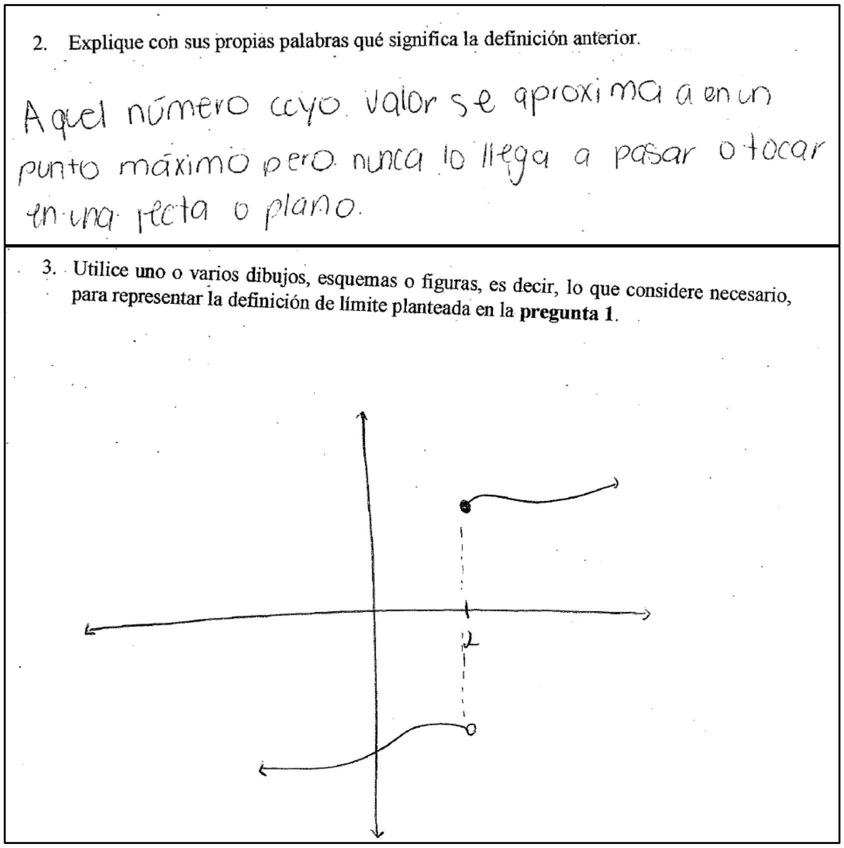
En la figura 4.14 observamos cómo el estudiante SIQ022720 exhibe categorías tales como:

- Límite como objeto (LO), ya que en la definición refiere al límite como aquel número y en la representación vemos como representa el límite como un “hueco” o “salto”;
- Límite como proceso (LP), porque indica que ese número se aproxima a un punto;
- Aspectos de no alcanzabilidad (NA) puesto que indica que el número que se aproxima lo hace a un punto máximo, pero nunca lo llega a pasar o tocar;
- Representación gráfica (RG), puesto que realiza un dibujo en el plano cartesiano para representar el límite.

En la figura 4.15 observamos cómo el estudiante SIQ022720 alude a la categoría Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR) ya que refiere a un valor extremo, al indicar que es la máxima de un equipo eléctrico. En la figura 4.16 refuerza la idea del límite como valor extremo al brindar otros ejemplos como límites propios y límites con los demás, también alude a los límites entre provincias y países, con lo que interpretamos que entiende el límite como una frontera; es así como reafirma la evidencia de la categoría Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR).

Figura 4.14

Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SIQ022720.



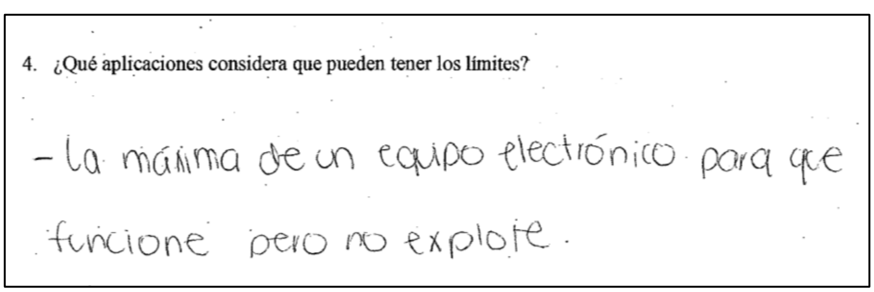
2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

Aquel número cuyo valor se aproxima a en un punto máximo pero nunca lo llega a pasar o tocar en una recta o plano.

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

Figura 4.15

Respuesta a la tarea T3_C1 del estudiante SIQ022720.

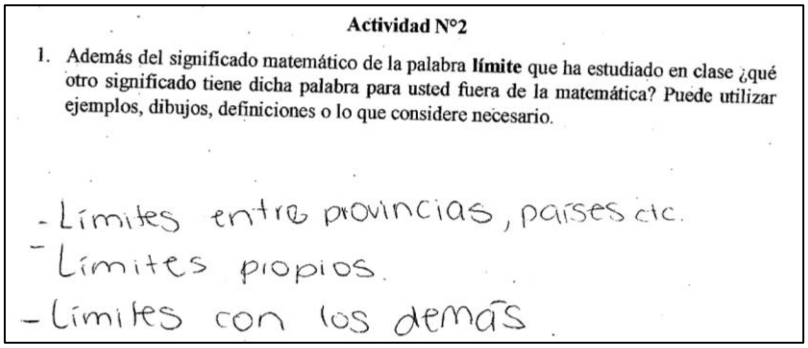


4. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

- la máxima de un equipo electrónico para que funcione pero no explote.

Figura 4.16

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SIQ022720.



Actividad N°2

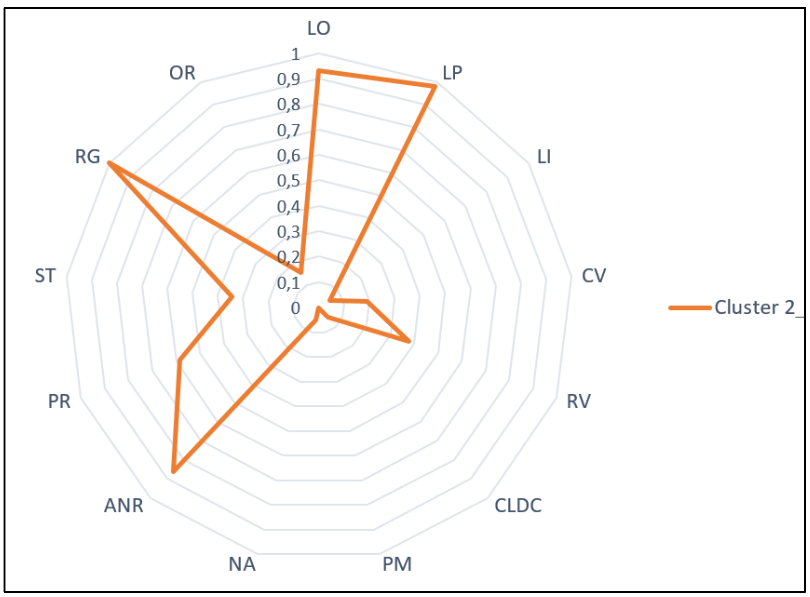
1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

- Límites entre provincias, países etc.
- Límites propios.
- Límites con los demás.

4.1.3.2 Respuestas gráficas

Figura 4.17

Representación radial del cluster 2 con las categorías, durante la enseñanza del concepto de límite.



Como lo indicamos, el *cluster* 2 está compuesto por 58 (27%) estudiantes. Observamos en la figura 4.17 cómo:

- en los aspectos estructurales, más de un 90% de los estudiantes expresan que el límite es un objeto (LO), cerca de un 100% manifiestan que el límite es un proceso (LP) y casi un 40% refieren a la variable independiente y a la variable dependiente (RV), en la figura 4.18 se observa la presencia de estas categorías;

- en los aspectos de representación, todos los estudiantes utilizan la representación gráfica (RG), lo que nos ha llevado a nombrar este perfil por esta característica, en la imagen 4.18 vemos un ejemplo de representación gráfica del límite;
- en los aspectos de sentido, casi un 90% de los estudiantes identifican al límite con una noción alcanzable pero no superable (ANR), en particular se aprecia en la figura 4.20, un 60% usan términos de posición relativa para caracterizar el límite (PR), en la figura 4.18 se aprecia, y más de un 30% exhibe alguna situación (ST) donde aprecian su utilidad, esto se percibe en la figura 4.19.

Expresado en tres frases, para este grupo, estructuralmente, el límite es tanto un objeto como un proceso, donde algunos estudiantes mencionan explícitamente a las variables. Para los estudiantes de este grupo el límite es algo que es alcanzable, no rebasable y que se expresa haciendo referencia a una posición relativa. Pero lo que realmente caracteriza a los miembros de este perfil, en comparación con el perfil del *cluster*4, es que en este todos utilizan la representación gráfica. Se trata, por tanto, de un significado representado gráficamente. Como veremos en el *cluster* 4 (apartado 4.1.2.3), estos dos grupos se parecen bastante, salvo por el tipo de representación que utilizan.

Las siguientes figuras (4.18, 4.19 y 4.20) presentamos las respuestas del estudiante SIB022014 que pertenece a grupo.

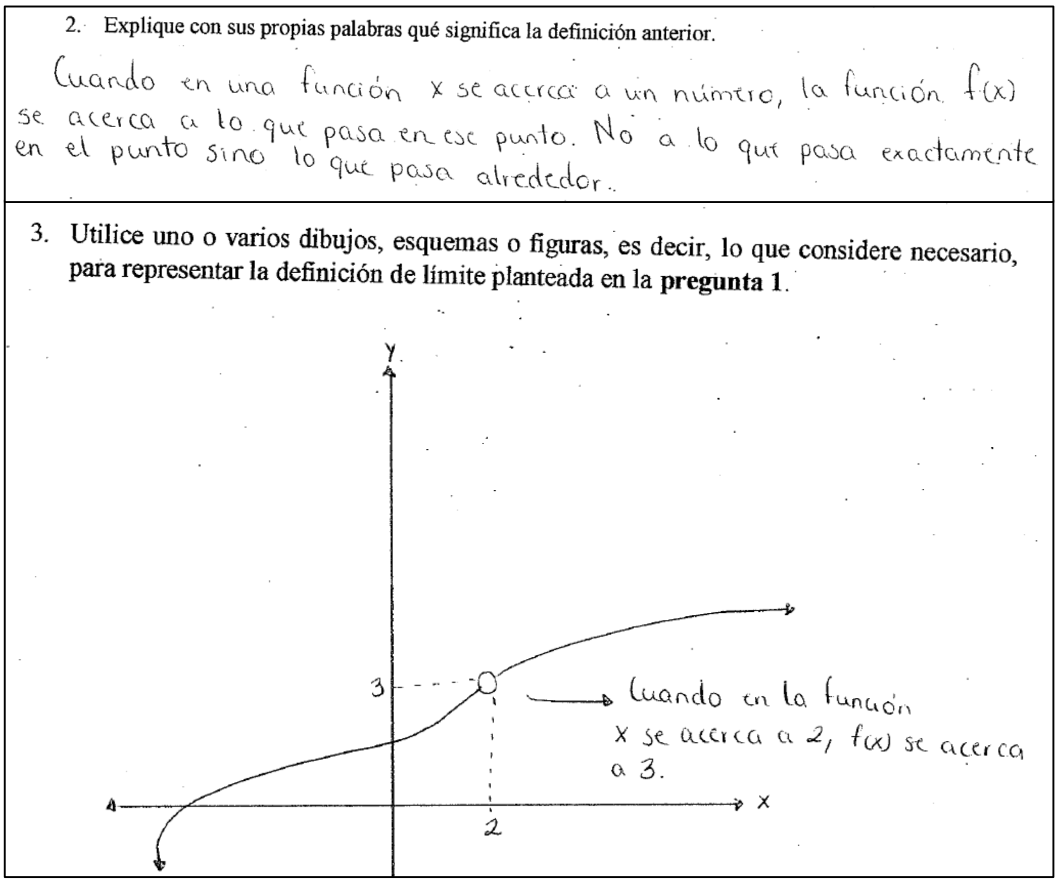
En la figura 4.18 observamos cómo el estudiante SIB022014 exhibe categorías tales como:

- Límite como objeto (LO), pues en la representación dibuja un hueco;
- Límite como proceso (LP), dado que en dos ocasiones habla de acercamientos;
- Referencia a las variables (RV), ya que menciona a x y a $f(x)$;
- Términos de posición relativa (PR), al indicar que es lo que pasa alrededor de un punto;
- Representación Gráfica (RG), puesto que realiza un dibujo en el plano cartesiano;
- Coordinación entre las variables x e y (CV), porque indica que es un proceso en la que están implicadas las dos variables, x y $f(x)$.

En la figura 4.19 observamos cómo el estudiante SIB022014 muestra la categoría Situaciones (ST), ya que indica que el límite se puede usar en la matemática para conocer los valores de una función. Y en la figura 4.20 observamos cómo evidencia las categorías Límite como objeto (LO) y Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR), ya que indica que el límite es el máximo al que uno puede llegar, por lo que interpretamos que percibe el límite como un extremo.

Figura 4.18

Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SIB022014.



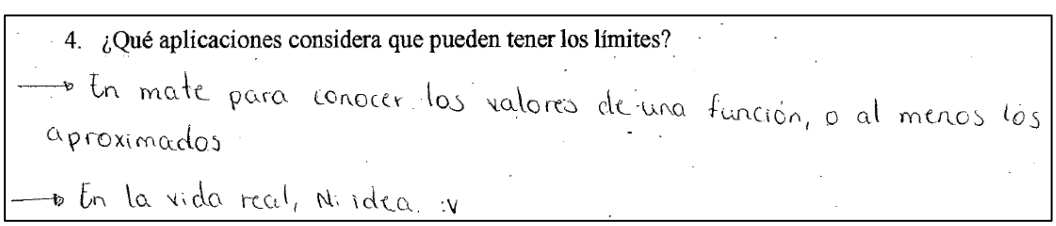
2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

Cuando en una función x se acerca a un número, la función f(x) se acerca a lo que pasa en ese punto. No a lo que pasa exactamente en el punto sino lo que pasa alrededor.

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

Figura 4.19

Respuesta a la tarea T3_C1 del estudiante SIB022014.



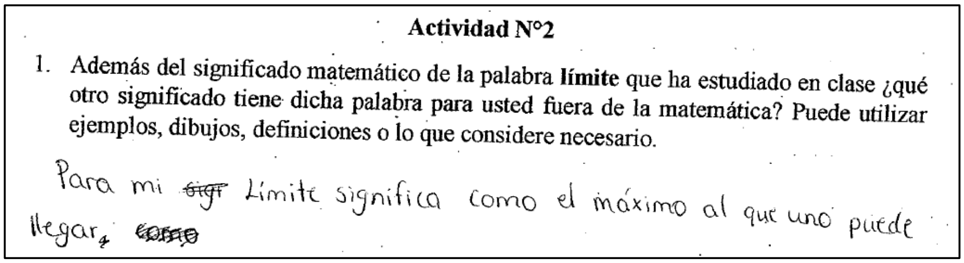
4. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

→ En mate para conocer los valores de una función, o al menos los aproximados

→ En la vida real, Ni idea. :v

Figura 4.20

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SIB022014.



Actividad N°2

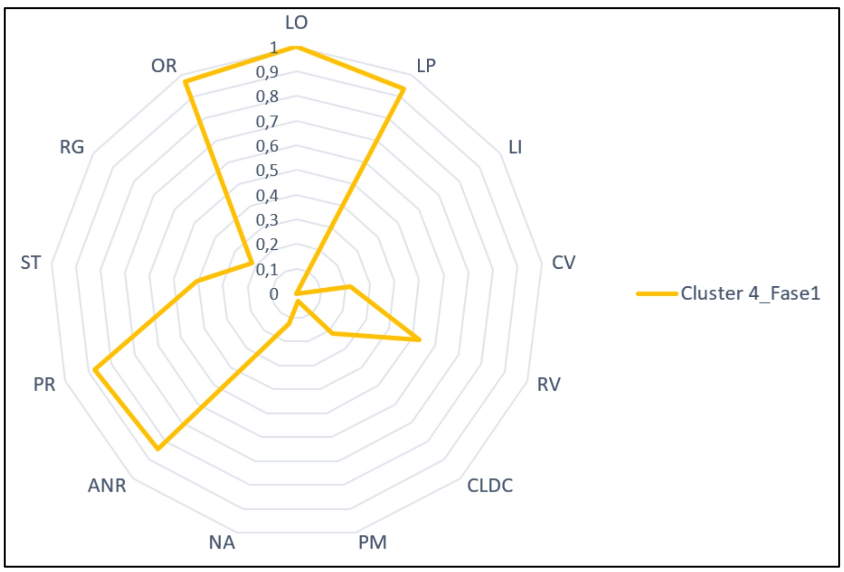
1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

Para mi ~~sigr~~ Límite significa como el máximo al que uno puede llegar, ~~como~~

4.1.3.3 Otras representaciones

Figura 4.21

Representación radial del cluster 4 con las categorías, durante la enseñanza del concepto de límite.



Como referimos el *cluster* 4 contiene 32 (15%) estudiantes. Analizando el centroide representado en la figura 4.21 podemos observar que:

- en los aspectos estructurales, las respuestas se focalizan en la noción de límite como objeto y como proceso (LO y LP) y algo más de la mitad manifiestan la referencia a las variables independiente y dependiente (RV), un ejemplo de ello se puede apreciar en la figura 4.22;
- en los aspectos de representación, el uso de representaciones diferentes a la gráfica (OR) predomina, a modo de ejemplo se puede observar en la figura 4.22 una

representación tabular, lo que nos permite identificar este grupo por esta característica;

- en los aspectos de sentido, la no rebasabilidad (ANR) observable en la figura 4.24 y la posición relativa (PR) destacada en la figura 4.22 son las categorías más veces identificadas.

A modo de descripción resumida del grupo, para los estudiantes que lo componen el límite es tanto un objeto como un proceso, matizado por otros aspectos estructurales como la relación entre las variables. Además, se representa de manera no cartesiana y es no rebasable. Se trata de un significado representado no gráficamente. Este grupo es muy parecido al 2 en estructura y sentido, pero se diferencia en que la representación que usan no es la gráfica, sino que usan otras representaciones.

En las siguientes figuras (4.22, 4.23 y 4.24) presentamos las respuestas del estudiante SIS042101, que pertenece a este grupo.

En la figura 4.22 observamos cómo el estudiante SIS042101 evidencia las categorías:

- Límite como objeto (LO), pues indica que el límite es un valor, esto lo apreciamos en la definición;
- Límite como proceso (LP), dado que en la definición usa el término tendencia y lo refuerza en la representación al evidenciar procesos de aproximación en la variable independiente y en la dependiente;
- Referencia a las variables (RV), ya que en la representación refiere a la variable independiente como *x* y a la dependiente como *f(x)*,
- Coordinación de las variables *x* e *y* (CV), puesto que en la representación resalta un proceso en el que están implicadas las dos variables;
- Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC), ya que en la definición manifiesta que por ambos lados el valor debe ser el mismo y en la representación lo refuerza al hacer cálculos por la izquierda y la derecha 1 y enfatiza que la función toma valores cercanos a 3;

- Términos de posición relativa (PR), ya que sabemos por su descripción que cuando se evidencia la categoría CLDC se evidencia la categoría PR). No obstante, se aprecia de manera muy evidente en la definición pues se usan los términos ambos lados y en la representación se resaltan valores por la izquierda y valores por la derecha de 1, lo que genera a su vez se acercamiento por la izquierda y por la derecha de 3;
- Otra representación (OR), dado que utiliza una representación tabular y una verbal.

Figura 4.22

Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SIS042101.

2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

Es un valor aproximado, que es único y debe ser el mismo por ambos lados en que se evalúa a la función dependiendo de la tendencia que se presenta.

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

$f(x) = 2x + 1$

valores izq

x	0	0.25	0.75	0.99
$f(x)$	1	1.5	2.5	2.98

valores der

x	2	1,75	1,5	1,25
$f(x)$	5	4,5	4	3,5

en cuanto más cercano está x de 1, la función toma valores cercanos a 3.

En la figura 4.23 percibimos cómo el estudiante SIS042101 exhibe la categoría Situaciones (ST) ya que indica el límite se usa en aplicaciones matemáticas. Y en la figura 4.24 observamos cómo evidencia la categoría Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR) pues interpretamos que percibe el límite como una frontera, al brindar como ejemplo los límites de una propiedad.

Figura 4.23

Respuesta a la tarea T3_C1 del estudiante SIS042101.

4. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

Aplicaciones matemáticas.

Figura 4.24

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SIS042101.

Actividad N°2

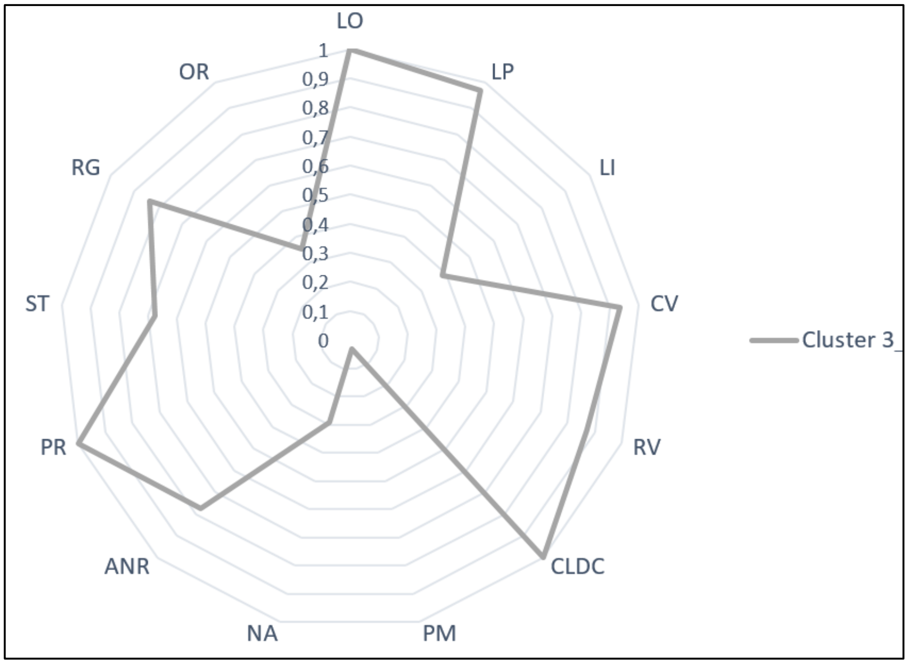
1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

Por ejemplo los limites de una propiedad, una persona no puede invadir las propiedades cercanas.

4.1.3.4 Respuestas con riqueza de significado

Figura 4.25

Representación radial del centroide del cluster 3 con las categorías, durante la enseñanza del concepto de límite.



Como mencionamos previamente, el *cluster* 3 está compuesto por 31 (14%) estudiantes. Vemos en la figura 4.25 como:

- en los aspectos estructurales, casi todos y cada uno de sus miembros entienden el límite como un objeto y un proceso. Pero, además, los estudiantes pertenecientes a este perfil manifiestan, de manera generalizada, otras categorías como la referencia y la coordinación entre las variables (CV, RV) o la doble convergencia (CLDC), algunas de estas categorías se aprecian en las figuras 4.26 y 4.28;
- en los aspectos de representación, una gran mayoría de estudiantes destacan representaciones gráficas (RG) para el límite, sin embargo, un poco menos de la mitad, también usan representaciones distintas a las gráficas para representar el límite, un ejemplo de representación gráfica lo podemos observar en la figura 4.26;
- en los aspectos de sentido, la mayoría de los estudiantes proponen ejemplos de aplicación (ST), y muchos más subrayan la no rebasabilidad (ANR). Destaca la total referencia a posiciones relativas (PR), por ejemplo, usando marcas para señalar

puntos que sirven de referencia, en las figuras 4.26, 4.27 y 4.28 podemos ver algunos ejemplos de estas categorías.

En pocas palabras, en este perfil se considera que un límite es tanto un objeto como un proceso, enriquecido con otros elementos estructurales que los estudiantes manifiestan explícitamente como coordinación entre las variables x e y, las condiciones de lateralidad y doble convergencia del límite. Asimismo, este grupo de estudiantes utiliza diversidad de representaciones y no solo la gráfica. Las categorías de sentido que evidencian son también variadas, como posición relativa, aspectos de no alcanzabilidad o no rebasabilidad y también manifiestan ejemplos de situaciones. Este grupo es el más rico en estructura, representaciones y en sentido, por lo que lo que consideramos que los estudiantes que pertenecen a este grupo expresan un significado enriquecido.

En las siguientes figuras (4.26, 4.27 y 4.28) presentamos las respuestas del estudiante SIQ010409 que pertenece a este grupo.

En la figura 4.26 observamos cómo el estudiante SIQ010409 evidencia las siguientes categorías:

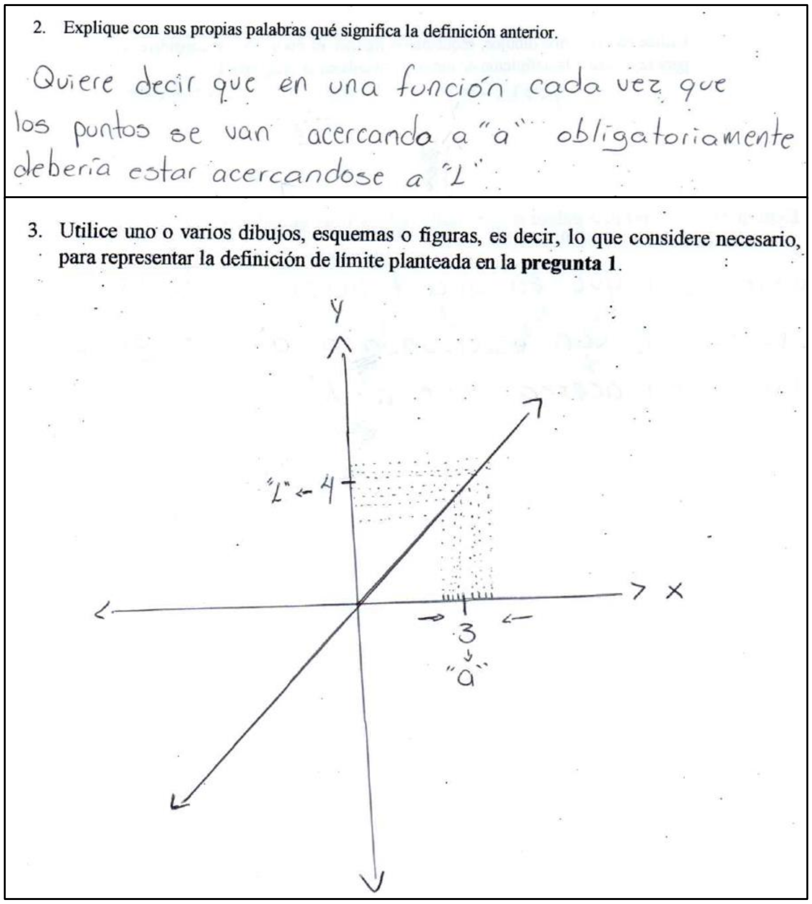
- Límite como Proceso (LP), ya que en la definición en dos ocasiones habla de acercamientos, y en la representación apreciamos como realiza rayas o puntos alrededor de 3 y de 4 que denotan aproximación;
- Coordinación entre las variables x e y (CV), pues en la representación señala un proceso en el que relaciona preimágenes con sus respectivas imágenes;
- Términos de posición relativa (PR), debido a que utiliza flechas alrededor de 3 aludiendo a izquierda y derecha;
- Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC), ya que en la representación las líneas discontinuas señalan preimágenes por izquierda y derecha de 3 y las asocian con sus respectivas imágenes por izquierda y derecha de 4 y se van acercando a 4;
- Representación gráfica (RG), puesto que realiza un dibujo en el plano cartesiano.

En la figura 4.27, observamos cómo el estudiante SIQ010409 no nos aporta información para ninguna de nuestras categorías de análisis. Y en la figura 4.28 observamos evidencia la categoría Límite como objeto (LO) puesto que indica que el límite es un punto, también exhibe la categoría

Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR) porque anota que el límite es un punto del que no se puede pasar.

Figura 4.26

Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SIQ010409.



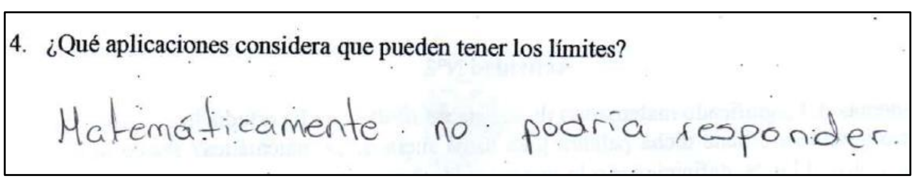
2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

Quiere decir que en una función cada vez que los puntos se van acercando a "a" obligatoriamente debería estar acercandose a "L"

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

Figura 4.27

Respuesta a la tarea T3_C1 del estudiante SIQ010409.

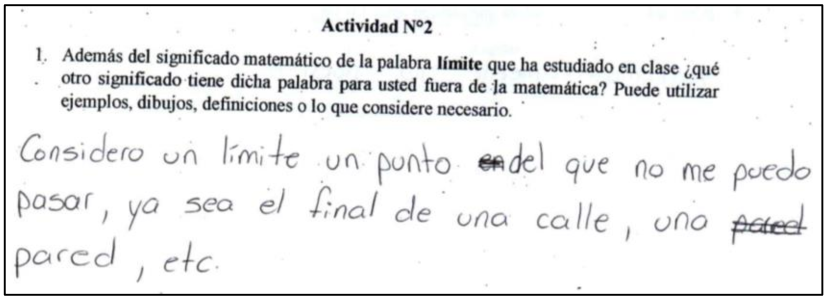


4. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

Matemáticamente no podría responder.

Figura 4.28

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SIQ010409.


Actividad N°2

1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

Considero un límite un punto ~~en~~ del que no me puedo pasar, ya sea el final de una calle, una ~~pared~~ pared, etc.

4.2 SIGNIFICADOS QUE PERMANECEN DESPUÉS DE LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Tras la enseñanza de los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad, los estudiantes completaron el cuestionario 2. En este apartado realizamos el análisis de la primera parte de dicho cuestionario de los 218 estudiantes que hemos analizado en el apartado anterior, que es lo que llamamos momento 2A. Esta primera parte del cuestionario 2 lo constituyen las tareas 1 y 2 (T1_C2 y T2_C2). Recordemos que la tarea T1_C2 corresponde a la unión de las tareas T1_C1 y T2_C1, y la tarea T2_C2 es una fusión de las tareas T3_C1 y T4_C1.

Figura 4.29.

Cuestiones consideradas en el momento 2A.

Sobre la definición de límite de una función en un punto, escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).

T1_C2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición planteada

T2_C2. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites? ¿Qué tipo de problemas se pueden resolver usando límites?

Puesto que ya hemos profundizado en las categorías de análisis, en este apartado nos centramos es describir las respuestas de los estudiantes. Si realizásemos un análisis *cluster* de las respuestas en este momento, surgirían unos nuevos perfiles de respuesta que serían imposibles de comparar con los anteriores, ya que los datos son diferentes. Por tanto, reservamos la comparación de los resultados al próximo apartado 4.3.

4.2.1 DESCRIPCIÓN GENERAL DE LAS RESPUESTAS

En la tabla 4.2 resumimos, en términos de frecuencia, la aparición de las 13 categorías que evidencian los 218 estudiantes en las respuestas a las distintas tareas de la primera parte del cuestionario 2 (T1_C2 y T2_C2). Como en las anteriores tablas, se indica también la relación de cada una de las categorías con cada una de las tres componentes del triángulo semántico.

En la tabla 4.2 observamos que:

- con respecto a los aspectos estructurales, esto es, en lo que se refiere a las notaciones, los términos y, en general, los hechos que los estudiantes utilizan para expresar sus ideas sobre límite, destaca que entre un 65% y un 75% de estudiantes evidencian el límite como un objeto y como un proceso (LO y LP), incidiendo, como ya ocurrió en el momento 1 en que estas categorías clásicas en la literatura son absolutamente imprescindibles cuando se quiere caracterizar lo que los estudiantes entienden por límite. También destacamos que menos de un 25% de los sujetos manifiestan el resto de categorías asociadas a los aspectos estructurales (LI, CV, RV, CLDC y PM) como ya sucedía en el momento 1 (ver tabla 4.1);
- el uso de las representaciones es generalizado, aunque claramente las representaciones gráficas (RG)) son más utilizadas que cualesquiera de las otras representaciones posibles (OR), un 67% frente a un 35%;
- en general, los aspectos de sentido son menos frecuentes, no superando ninguna de las categorías el 50% de uso. Entre ellas, los estudiantes optan por el uso de los términos de posición relativa (PR) dejando de lado las referencias a la alcanzabilidad y no rebasabilidad (NA y ANR). Lo que sí proponen casi la mitad son ejemplos de situaciones o aplicaciones de límite (ST), como, por ejemplo, el estudiante SBL030901, que indica que los límites sirven para resolver problemas de optimización (Figura 4.31).

Tabla 4.2

Presencia de las 13 categorías en las respuestas de los 218 estudiantes después de la enseñanza del concepto de límite.

Componente de significado	Categoría	Frecuencia
Estructura conceptual	Límite como objeto (LO)	146 (67%)
	Límite como proceso (LP)	155 (71%)
	Vinculación entre límite e imagen (LI)	19 (9%)
	Coordinación entre las variables x e y (CV)	40 (18%)
	Referencia a las variables x e y (RV)	55 (25%)
	Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)	31 (14%)
	Propiedades matemáticas (PM)	22 (10%)
Sistemas de representación	Representación gráfica (RG)	145 (67%)
	Otra representación (OR)	76 (35%)
Sentidos y modos de uso	Aspectos de no alcanzabilidad (NA)	50 (23%)
	Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR)	21 (10%)
	Términos de posición relativa (PR)	110 (50%)
	Situaciones (ST)	105 (48%)

En las figuras 4.30 y 4.31 ejemplificamos y analizamos cómo SBL030901 evidencia 10 de las 13 categorías y en las figuras 4.32 y 4.33 veremos cómo dos estudiantes diferentes evidencian las 3 categorías restantes (ANR, PM y OR).

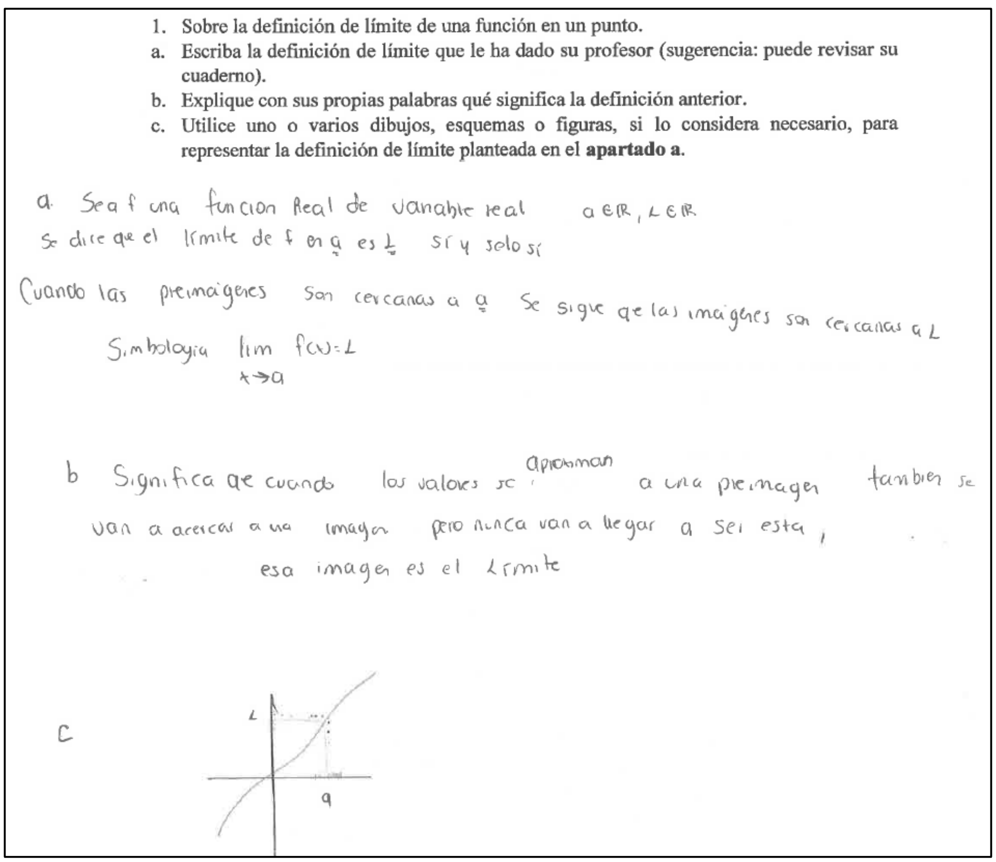
En la figura 4.30, observamos cómo el estudiante evidencia las categorías:

- Vinculación del límite con la imagen (LI) ya que en el punto b, indica que esta imagen es el límite y cómo se observa en la representación señala que la imagen de a es L;
- Límite como objeto (LO), en la definición al decir esta imagen es el límite, refiere a un objeto y en la representación señala que la imagen de a es L, resaltando la noción de objeto, además sabemos las categorías LO y LI están sumamente relacionadas, pues cuando se presenta LI entonces se presenta LO;
- Límite como proceso (LP), pues en el punto b, alude a aproximar y acercar y en la representación se observan puntos “acercándose” a y L, lo que entendemos como una aproximación;
- Aspectos de no alcanzabilidad (NA), debido a que en el punto b, indica que nunca llega a ser esta;

- Referencia a las variables *x* e *y* (RV), pues usa las palabras preimágenes e imágenes como se aprecia en el punto b;
- Representación gráfica (RG), puesto que realiza un dibujo en el plano cartesiano,
- Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV), pues en la representación señala a través de puntitos la relación de preimagen con su respectiva imagen y así en varias ocasiones;
- Términos de posición relativa (PR), pues como se aprecia en la representación utiliza líneas de aproximación alrededor de *a* y de *L* aludiendo a izquierda y derecha;
- Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC), ya que en la representación se observa las líneas discontinuas y puntitos que señalan las preimágenes por izquierda y derecha de *a* y las asocian con sus respectivas imágenes por izquierda y derecha de *L* y se van acercando a *L*.

Figura 4.30

Respuesta a la tarea T1_C2 del estudiante SBL030901.



1. Sobre la definición de límite de una función en un punto.
a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).
b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.
c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a**.

a. Sea f una funcion Real de variable real $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$
Se dice que el límite de f en a es L si y solo si
Cuando las preimágenes son cercanas a a se sigue que las imágenes son cercanas a L
Simbología $\lim_{x \to a} f(x) = L$

b Significa qe cuando los valores se aproximan a una preimagen tanbien se van a acercar a una imagen pero nunca van a llegar a ser esta, esa imagen es el límite

c

En la figura 4.31, observamos cómo el estudiante evidencia la categoría Situaciones (ST) ya que indica que las derivadas sirven como herramienta en problemas de optimización y problemas de cambio, manifestando su uso dentro de las matemáticas.

Figura 4.31

Respuesta a la tarea T2_C2 del estudiante SBL030901.

2. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites? ¿Qué tipo de problemas se pueden resolver usando límites?

Los límites se pueden usar para conocer la derivada de una función y las derivadas para resolver problemas de optimización y de valores de cambio

En la figura 4.32, en los puntos b y c, observamos cómo el estudiante evidencia la categoría Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR) ya que relaciona el límite con encontrar el extremo máximo de una función dada y la categoría Propiedades matemáticas (PM) dado que exhibe un límite infinito.

Figura 4.32

Respuesta a la tarea T1_C2 del estudiante SCD110503.

Actividad N°1

1. Sobre la definición de límite de una función en un punto.

a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).

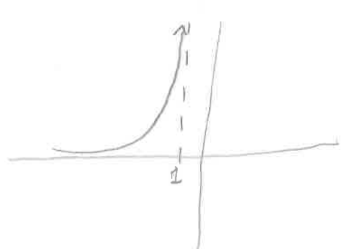
b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a**.

a) Encontrar los numeros a los que tiende la función

b) es una forma de encontrar a donde puede llegar una función dada, cual es el extremo maximo de esta,

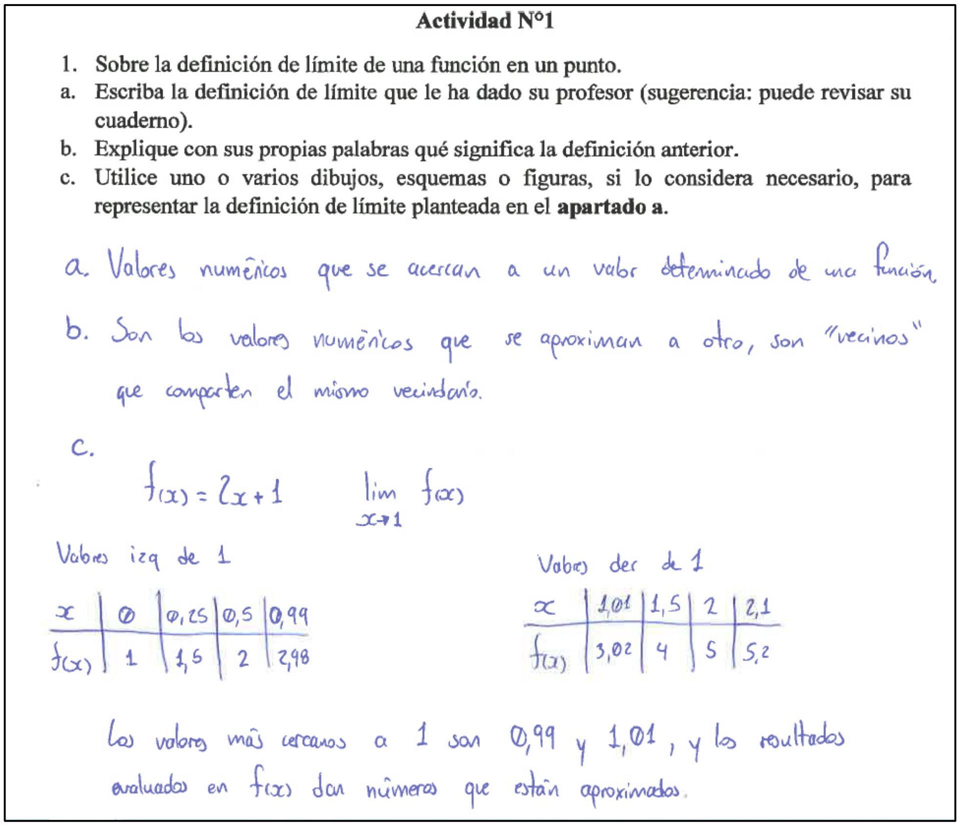
c)



En la figura 4.33, en los puntos b y c, observamos cómo el estudiante evidencia la categoría Otra Representación (OR) ya que realiza representaciones del límite distintas a la gráfica, concretamente, hace uso de los sistemas de representación tabular, simbólico y verbal.

Figura 4.33

Respuesta a la tarea T1_C2 del estudiante SIS042101.



Actividad N°1

1. Sobre la definición de límite de una función en un punto.
a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).
b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.
c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a**.

a. Valores numéricos que se acercan a un valor determinado de una función,

b. Son los valores numéricos que se aproximan a otro, son "vecinos" que comparten el mismo vecindario.

c.

$f(x) = 2x+1$ $\lim_{x \to 1} f(x)$

Valores izq de 1

x	0	0,25	0,5	0,99
$f(x)$	1	1,5	2	2,98

Valores der de 1

x	1,01	1,5	2	2,1
$f(x)$	3,02	4	5	5,2

Los valores más cercanos a 1 son 0,99 y 1,01, y los resultados evaluados en f(x) dan números que están aproximados.

4.3 COMPARACIÓN DE LOS MOMENTOS

Hasta ahora, hemos descrito los significados expresados sobre límite por los estudiantes de la asignatura Cálculo I durante la enseñanza del concepto de límite (momento 1, apartado 4.1) y los expresados después de la enseñanza de dicho concepto matemático (momento 2A, apartado 4.2). En ambos casos, las preguntas y las respuestas pretendieron indagar y organizar las respuestas en un nivel de complejidad cognitiva básico, esto es, interpretar términos, notaciones, convenios sobre el concepto de límite, sin olvidar sus representaciones, modos de uso y situaciones que involucra este concepto. A pesar de que hubo pequeñas diferencias de formato en los cuestionarios, motivadas por los momentos en los que se implementaron, parece razonable preguntarse si estos significados “evolucionan”, esto es, son iguales o diferentes en ambos momentos.

Más específicamente, dadas las características de los cuestionarios, esta comparación puede enfocarse en responder a la pregunta: ¿Existe relación entre los significados iniciales y los que expresan los estudiantes después de haber recibido formación? Esta pregunta, a su vez, puede ser respondida mediante la respuesta a preguntas más concretas como:

- ¿Los estudiantes se expresan mejor tras la instrucción?
- ¿Usan vocabulario más rico o más específico?
- ¿Las representaciones son más precisas? ¿Prefieren después de ser formados la representación gráfica?
- ¿Son capaces de identificar usos del límite más concretos?
- …

Las respuestas a estas preguntas pasan por describir y comparar los diferentes elementos que constituyen la noción de significado empleada. Como expectativa ingenua de los investigadores, se esperaría que los significados expresados tras la formación fuesen más ricos que los primeros.

Esta comparación se hará en dos partes. En un primer apartado, se realizará una comparación en términos descriptivos. En un segundo apartado, nos serviremos del análisis *cluster* realizado en el momento 1 y, atendiendo a las respuestas del momento 2A, se tratará de situar a los estudiantes en el momento 2A en el conglomerado más cercano, para lo que calcularemos las distancias del vector de respuesta a los centroides de los *clusters* descritos anteriormente.

4.3.1. COMPARACIÓN DESCRIPTIVA DE LOS RESULTADOS

En contra de lo esperado, los estudiantes han respondido con más expresividad durante el proceso de enseñanza (momento 1) que una vez terminada la formación, momento 2A. Esto lo apreciamos al comparar las respuestas de manera directa ya que usan menos palabras para expresar lo que desean y no respondieron del todo algunas de las tareas.

Por ejemplo, la figura 4.26 muestra cómo el estudiante SIQ010409 respondió en el momento 1 a las tareas T1_C1 y T2_C1, pero la figura 4.34 muestra que no lo hizo en el momento 2A.

Figura 4.34

Respuesta a la tarea T1_C2 del estudiante SIQ010409.

Actividad N°1

1. Sobre la definición de límite de una función en un punto.

a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).

b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a.**

Asimismo, a modo de ejemplo la figura 4.35 muestra cómo el estudiante SIC052311 respondió en el momento 1 en las tareas T1_C1 y T2_C1 con más riqueza ya que evidencia las categorías Límite como objeto (LO), Límite como proceso (LP), Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV), Términos de posición relativa (PR), Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC) y Representación gráfica (RG); sin embargo la figura 4.36 muestra en el punto *b* y *c* que en el momento 2A brindó una respuesta mucho más escueta, observamos que mantiene las categorías LO, LP y RG, pero ya no evidencia las categorías CV, PR y CLDC, e indica que la verdad no sabe.

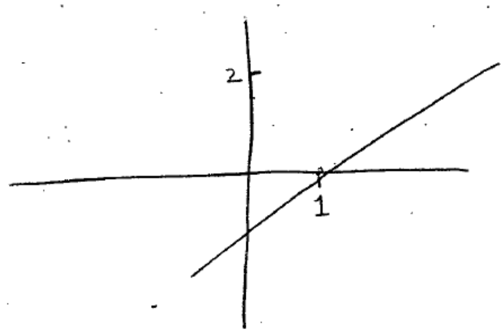
Figura 4.35

Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SIC052311.

2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

Conforme nos acercamos a un punto podemos determinar cual es el límite tanto por la izquierda como por la derecha

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.



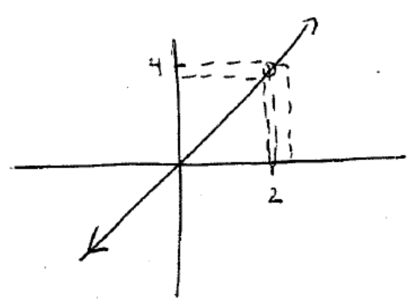
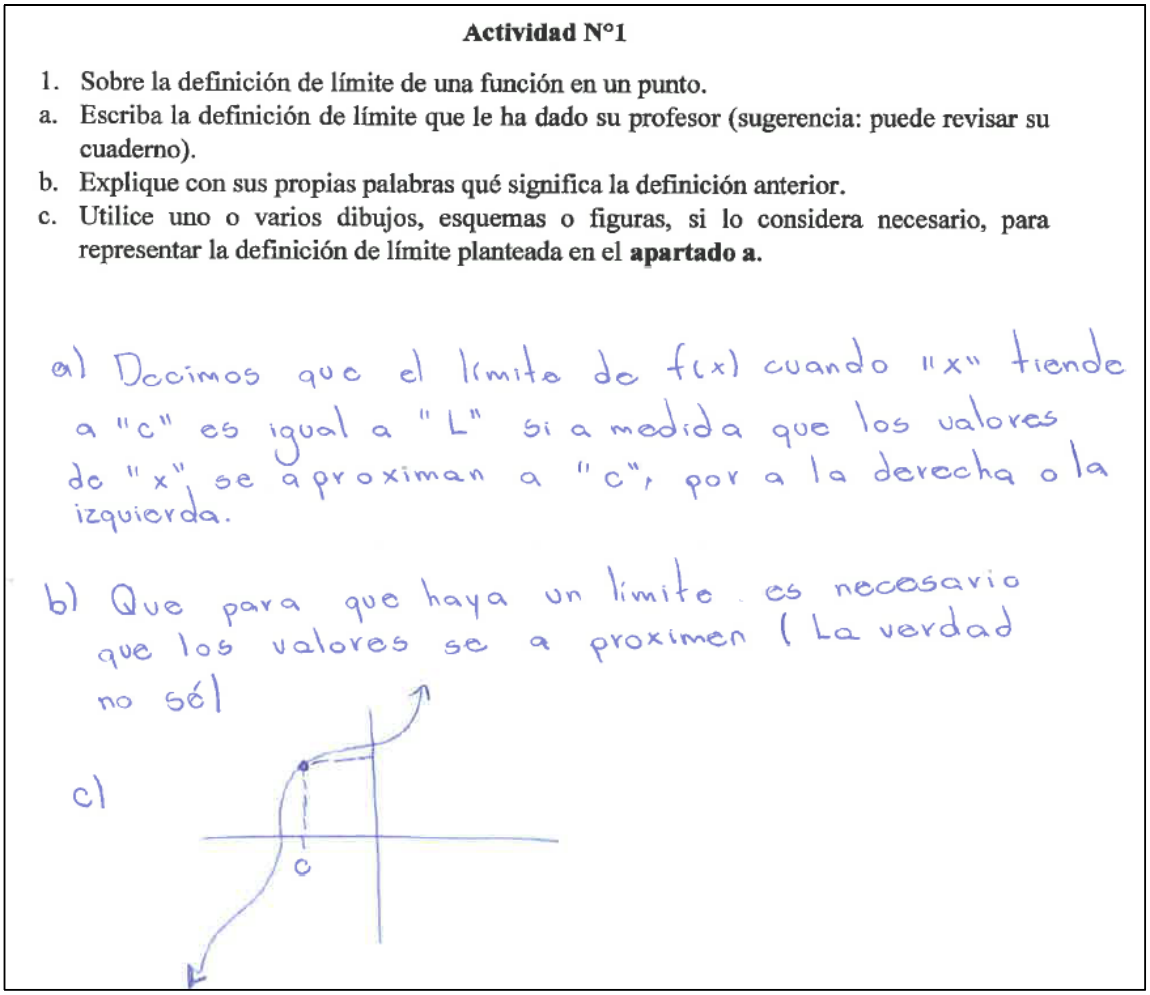


Figura 4.36

Respuesta a la tarea T1_C2 del estudiante SIC052311.



Actividad N°1

1. Sobre la definición de límite de una función en un punto.

a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).

b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a.**

a) Decimos que el límite de f(x) cuando "x" tiende a "c" es igual a "L" si a medida que los valores de "x" se aproximan a "c", por a la derecha o la izquierda.

b) Que para que haya un límite es necesario que los valores se a proximen (La verdad no sé)

c)

En términos de categorías de análisis, la tabla 4.3 muestra las frecuencias de aparición o no de las categorías de análisis en las respuestas de los estudiantes en los dos momentos. De nuevo, con un solo vistazo, observamos que las frecuencias de aparición son más bajas al final de la formación.

Tabla 4.3

Frecuencias de las categorías durante y después de la enseñanza del concepto de límite (síntesis de las tablas 4.1 y 4.2).

Componente de significado	Categoría	Frecuencia Momento 1	Frecuencia Momento 2A
Estructura conceptual	Límite como objeto (LO)	208 (95%)	146 (67%)
	Límite como proceso (LP)	174 (80%)	155 (71%)
	Vinculación entre límite e imagen (LI)	29 (13%)	19 (9%)
	Coordinación entre las variables x e y (CV)	50 (23%)	40 (18%)
	Referencia a las variables x e y (RV)	79 (36%)	55 (25%)
	Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)	59 (27%)	31 (14%)
	Propiedades matemáticas (PM)	28 (13%)	22 (10%)
Sistemas de representación	Representación gráfica (RG)	174 (80%)	145 (67%)
	Otra representación (OR)	92 (42%)	76 (35%)
Sentidos y modos de uso	Aspectos de no alcanzabilidad (NA)	79 (36%)	50 (23%)
	Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR)	165 (76%)	21 (10%)
	Términos de posición relativa (PR)	144 (66%)	110 (50%)
	Situaciones (ST)	101 (46%)	105 (48%)

Como se puede apreciar en la tabla 4.3, los estudiantes:

- sobre los aspectos estructurales de límite, muestran muchas más palabras o referencias las categorías en esta componente durante la instrucción que después de ella. Así, por ejemplo, las menciones a que el límite es un objeto pasan de ser utilizadas por el 95% de los estudiantes a ser usadas solo por el 67% de ellos, la figura 4.37 muestra como el estudiante SIS130305 evidencia la categoría Límite como objeto (LO) al manifestar que el límite de una función es un número real, y la figura 4.38 evidencia como después de la enseñanza del límite no la evidencia;

- en el caso de las representaciones, el uso de las representaciones disminuye, aunque no se aprecia distinta reducción según el tipo de representación, la figura 4.39 muestra como el estudiante SIB011308 durante la instrucción hace una representación gráfica, y la figura 4.40 muestra cómo después de la instrucción del límite no realiza este tipo de representación;

- con respecto a los sentidos, todas las categorías sufren descenso de aparición, pero en ninguna de ellas es tan evidente como en relación a la no rebasabilidad (ANR), que pasa de ser evidenciada por una gran mayoría (76% en el momento 1) a ser ignorada en el momento 2A (10%). La explicación a este descenso en la categoría ANR sugerimos que podría ser debido a las diferencias entre los cuestionarios, que el momento 2A no hacen tanto énfasis en los aspectos de sentido.

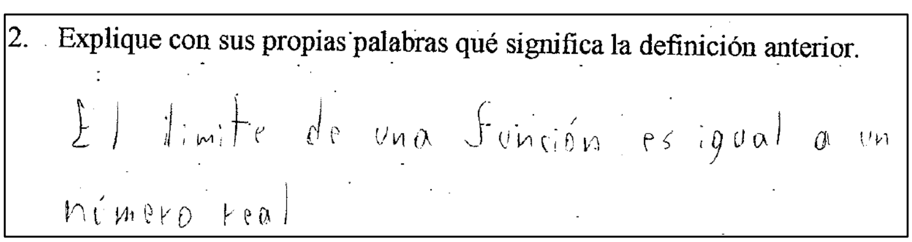
  De todas las categorías, la única que aumenta su frecuencia es la de aplicaciones o situaciones (ST), aunque su crecimiento es muy leve, la figura 4.41 muestra que durante la enseñanza del concepto de límite el estudiante SIQ020707 no evidenció ninguna aplicación de dicho concepto, sin embargo, la figura 4.42 demuestra que tras la instrucción el estudiante SIQ020707 manifiesta que en matemáticas el límite se utiliza para graficar y determinar las asíntotas de una función, afirma que se utiliza en la industria y para determinar capacidades y el volúmenes.

A modo de síntesis, se aprecia una evidente reducción del uso de elementos (términos, hechos, palabras, representaciones, referencias, …) cuando se expresan las ideas acerca de límite tras haber recibido la instrucción. Aun así, las categorías que predominan en ambos momentos son las referentes al límite como objeto y como proceso (LO y LP), con el uso de representaciones gráficas (RG) y, en el caso de los usos, la mención a las posiciones relativas de límite (PR) y a la no rebasabilidad (ANR) en el momento 1.

De alguna manera parece que, tras la enseñanza del límite, los estudiantes reducen el uso de vocabulario y símiles fuera de las matemáticas para proporcionar descripciones más escuetas, lo que no significa que sean ni más precisas ni tampoco peores.

Figura 4.37

Respuesta a la tarea T1_C1 del estudiante SIS130305.


2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

El limite de una función es igual a un número real

Figura 4.38

Respuesta a la tarea T1_C2 del estudiante SIS130305.

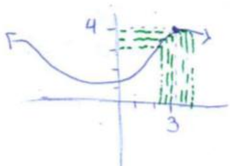
Actividad N°1

1. Sobre la definición de límite de una función en un punto.
a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).
b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.
c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a.**

Figura 4.39

Respuesta a la tarea T2_C1 del estudiante SIB011308.

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.



El límite ~~de~~ cuand x tiende a 3 es 4.

Figura 4.40

Respuesta a la tarea T1_C2 del estudiante SIB011308.

Actividad N°1

1. Sobre la definición de límite de una función en un punto.
a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).
b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.
c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a.**

a) Que una función se acerque a un número lo más que pueda, pero sin tocarlo.

b) Que un objeto de estudio se quiera acercar lo mayor posible a cierto número, pero que no pueda tocarlo.

c)

Los rayas negras "tienden" a 1, pero nunca lo tocan. Siempre serán 1,.... Nunca 1 solo, entero

Figura 4.41

Respuesta a la tarea T3_C1 del estudiante SIQ020707.

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

Figura 4.42

Respuesta a la tarea T2_C2 del estudiante SIQ020707.

2. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites? ¿Qué tipo de problemas se pueden resolver usando límites?

En matemáticas para la realización de las graficas estos pueden ser útiles para determinar las asíntotas de una función

También se podrían determinar valores en una línea de producción, hablando sobre industrias.

Capacidades y volumenes de la función de una botella o recipientes.

En la tabla 4.4, presentamos la comparación cuantitativa categoría a categoría de la evolución de las respuestas.

Tabla 4.4

Evolución de las frecuencias de aparición de las categorías desde el momento de enseñanza del concepto al momento posterior a la enseñanza del concepto de límite.

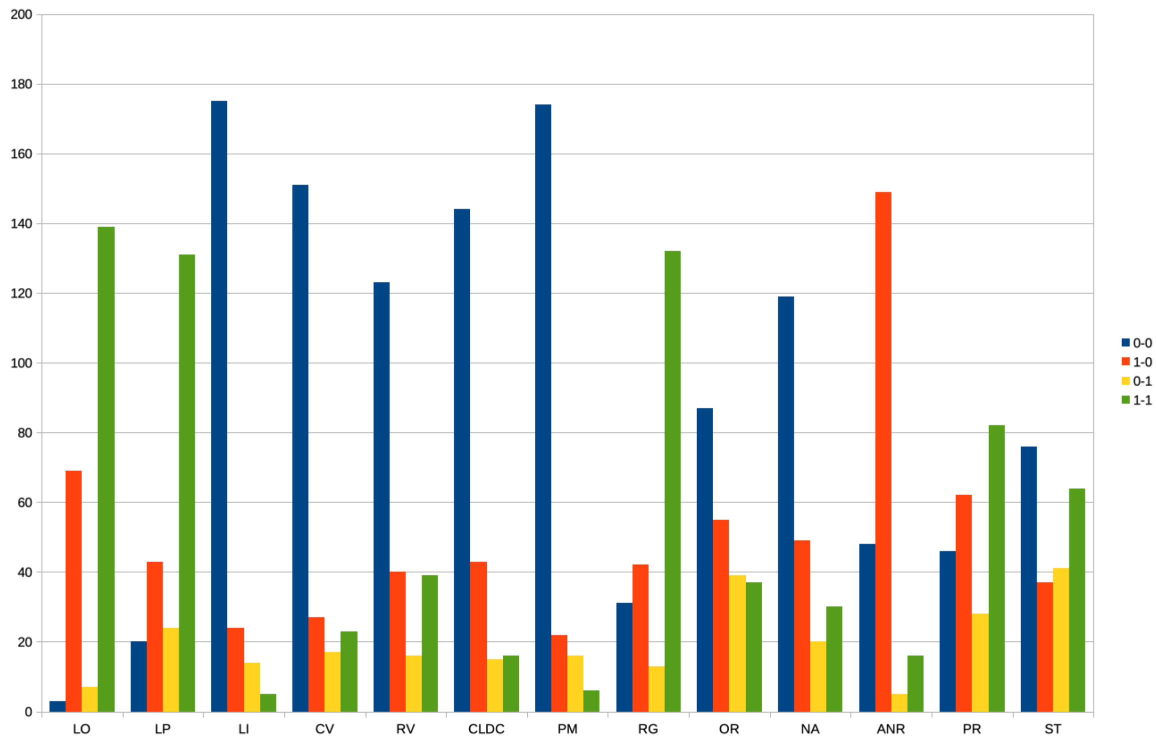
Modalidad de respuesta	Categorías												
	LO	LP	LI	CV	RV	CLDC	PM	RG	OR	NA	ANR	PR	ST
0-0	3	20	175	151	123	144	174	31	87	119	48	46	76
1-0	69	43	24	27	40	43	22	42	55	49	149	62	37
0-1	7	24	14	17	16	15	16	13	39	20	5	28	41
1-1	139	131	5	23	39	16	6	132	37	30	16	82	64
Total	218	218	218	218	218	218	218	218	218	218	218	218	218

Nota. 0-0: No respondió en ningún momento, 1-0: respondió solo en el momento 1, 0-1: respondió solo en el momento 2A y 1-1: respondió en el momento 1 y en el momento 2A.

Como vemos en la tabla 4.4, las categorías que se reafirman son las referidas a límite como objeto, como proceso y al uso de representaciones gráficas (LO, LP y RG). Subrayamos, de nuevo, la singularidad de los aspectos de no rebasabilidad (categoría ANR) probablemente por la pregunta que está en el momento 1 y no en el momento 2A. El uso de otras representaciones, el uso de términos que indiquen posición relativa y la propuesta de aplicaciones (OR, PR y ST) aparecen de manera equilibrada en los dos momentos. El resto de categorías (LI, CV, RV, NA, CLCD y PM) no parecen determinantes para expresar el límite en ninguno de los momentos.

Figura 4.43

Evolución de las respuestas de los 218 estudiantes en las 13 categorías del momento 1 (durante la enseñanza del concepto de límite) al momento 2A (después de la enseñanza del concepto de límite).



Nota. 0-0: nunca se presentó esa categoría, 1-0: presencia en momento 1 de la categoría, 0-1: presencia en momento 2A de la categoría y 1-1: presencia en ambos momentos.

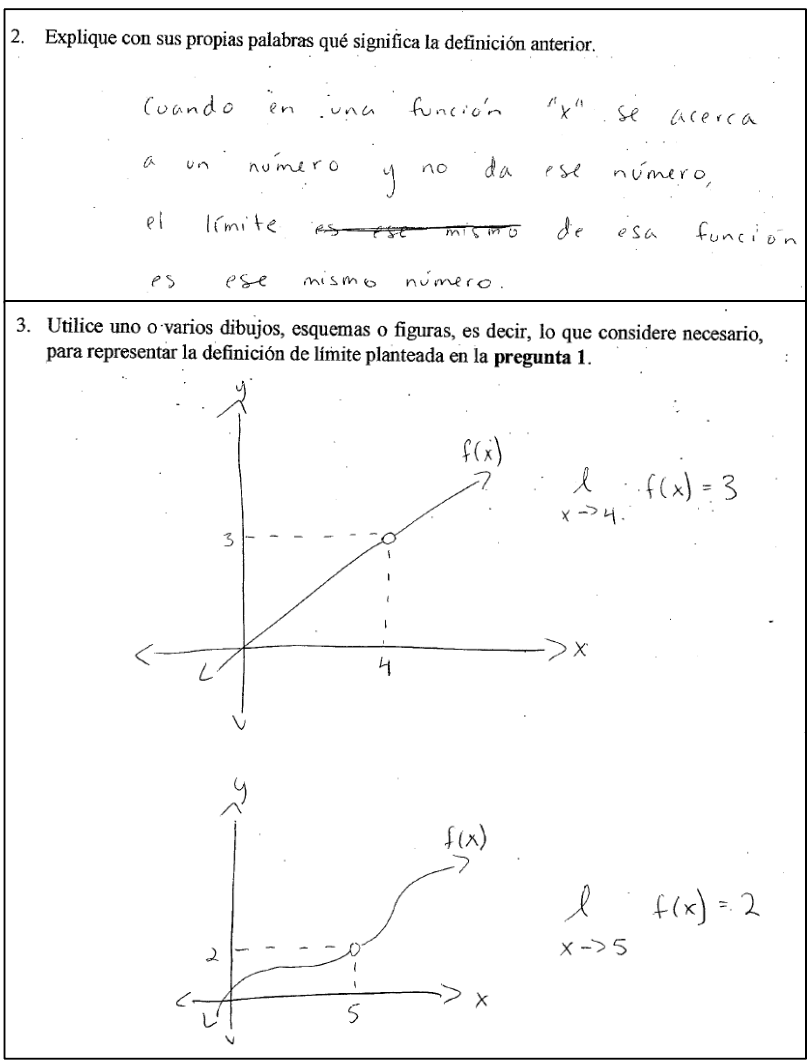
Cuando transformamos la tabla 4.4 en un gráfico, figura 4.43, podemos apreciar de manera visual aspectos interesantes de las frecuencias y repeticiones de la aparición y evolución de las categorías de análisis en las respuestas de los estudiantes. Por ejemplo, nótese como las menciones a la vinculación entre el límite y la imagen (LI), la coordinación y la vinculación entre las variables (CV, RV), la doble convergencia (CLCD), las propiedades matemáticas (PM) y la no alcanzabilidad (NA) son elementos poco evidenciados por los estudiantes (en azul en la figura 4.43), lo que indica que son categorías poco importantes para caracterizar las respuestas de los estudiantes. Mientras, límite como objeto, como proceso y las representaciones gráficas (LO, LP y RG, en verde, figura 4.43) son las categorías presentes “al inicio” y “al final”, es decir que los estudiantes las evidencian durante la enseñanza del concepto de límite y después de la enseñanza de dicho concepto. Las figuras 4.44 y 4.45

muestran la presencia de las categorías Límite como objeto (LO), Límite como proceso y Representación gráfica (RG) en estos dos momentos de instrucción.

Puntualmente, en la figura 4.38 el estudiante SIQ021322 indica en la definición que el límite es un número, en la representación dibuja un hueco, indica que un límite es 3 y que otro es 2; además en la figura 4.45 en el punto *b* indica que el límite es L, en la representación dibuja nuevamente un hueco e indica que un límite es 4; por lo que evidencia la categoría LO. También, en las figuras 4.44 y 4.45 observamos cómo el estudiante SIQ021322 usa las palabras "se acerca" para referir al límite, por lo que evidencia la categoría LP; y en ambas figuras es evidente el uso de la representación gráfica (RG) para representar al límite.

Figura 4.44

Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SIQ021322.

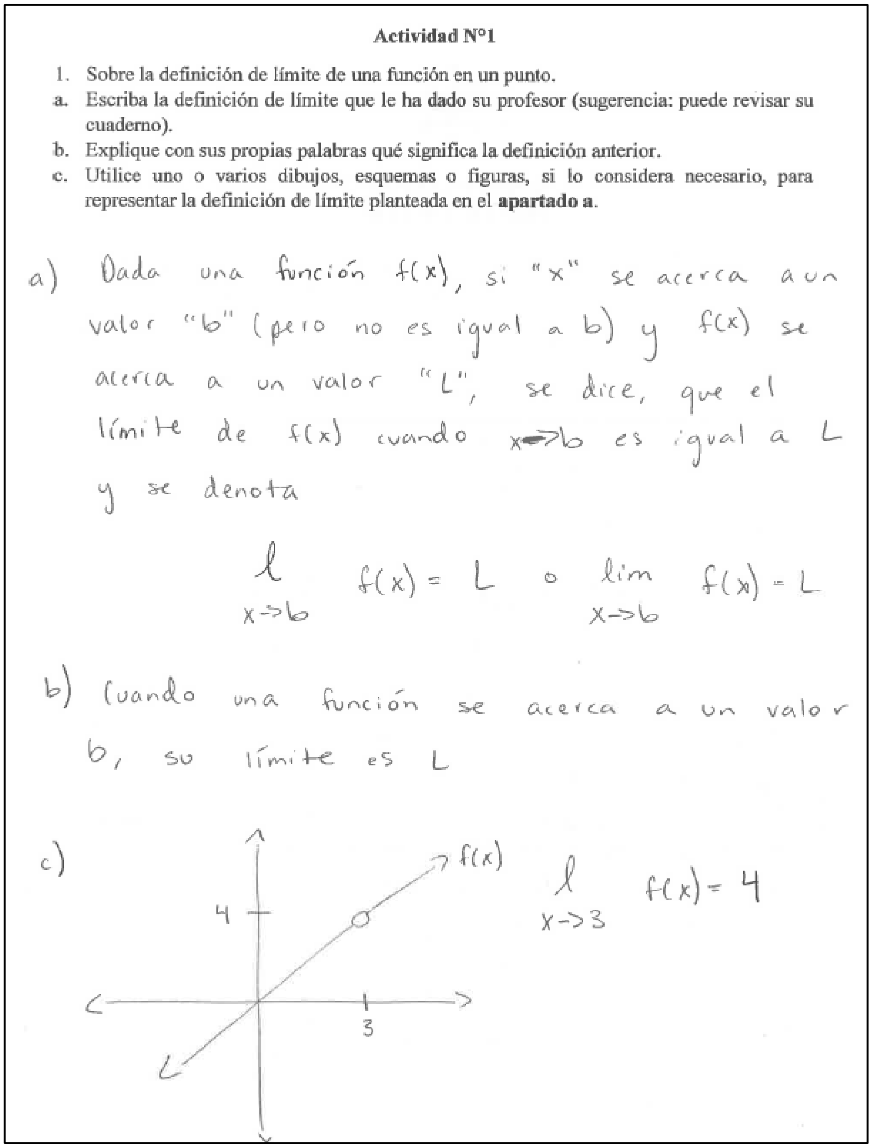

2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

Cuando en una función "x" se acerca a un número y no da ese número, el límite ~~es ese mismo~~ de esa función es ese mismo número.

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

Figura 4.45

Respuesta a la tarea T1_C2 del estudiante SIQ021322.



Actividad N°1

1. Sobre la definición de límite de una función en un punto.
a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).
b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.
c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a**.

a) Dada una función f(x), si "x" se acerca a un valor "b" (pero no es igual a b) y f(x) se acerca a un valor "L", se dice, que el límite de f(x) cuando x->b es igual a L y se denota

$$\underset{x\to b}{l}\ f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to b} f(x) = L$$

b) Cuando una función se acerca a un valor b, su límite es L

c) $\underset{x\to 3}{l}\ f(x) = 4$

4.3.2. BÚSQUEDA DEL *CLUSTER* MÁS CERCANO

Para cumplimentar el análisis comparativo de manera cuantitativa, decidimos calcular a qué perfil del momento 1 (apartado 4.1.2) pertenecerían las respuestas que los estudiantes dieron en el momento 2A. Así, tomamos en consideración los conglomerados construidos en el momento 1, que recordamos:

- El primer perfil agrupa a los estudiantes que manifiestan “respuestas ingenuas” en las que el límite se presenta como un objeto, la representación es gráfica y algunos expresan aspectos de no rebasabilidad y no alcanzabilidad.
- Los estudiantes del segundo perfil hacen énfasis en las “representaciones gráficas”, pero también subrayan que el límite es un objeto y un proceso y aspectos de no rebasabilidad.
- En el tercer grupo, incluimos a los estudiantes con respuestas ricas en elementos de significado, que expresan ideas relacionadas con muchas de las categorías de análisis.
- Finalmente, el último grupo, de carácter gráfico como el 2, se caracteriza por respuestas en las que se destacan las representaciones no gráficas, sin descuidar los aspectos estructurales de límite como proceso y como objeto y con un sentido de no rebasabilidad.

Para estos conglomerados, se determinaron los centroides de cada grupo, esto es, los valores medios de los valores asignados a cada variable (figura 4.46)

Dado que estamos interesados en determinar si los estudiantes cambian de grupo, calculamos las distancias de los vectores de respuesta del momento 2A a los centroides de cada grupo para determinar el centroide más cercano. Para que los cálculos fuesen rápidos y sencillos, se realizó mediante la aplicación de un análisis de k-Medias con una sola iteración.

Los resultados muestran que hay diversidad de comportamientos, aunque un gran número de estudiantes (40%) no cambian su perfil de respuesta, esto es, manifiestan el mismo significado en el momento 1 que en el momento 2A.

Figura 4.46

Representación radial de los cuatro clusters con las categorías, durante la enseñanza del concepto de límite (síntesis de las figuras 4.13, 4.17, 4.21 y 4.25).

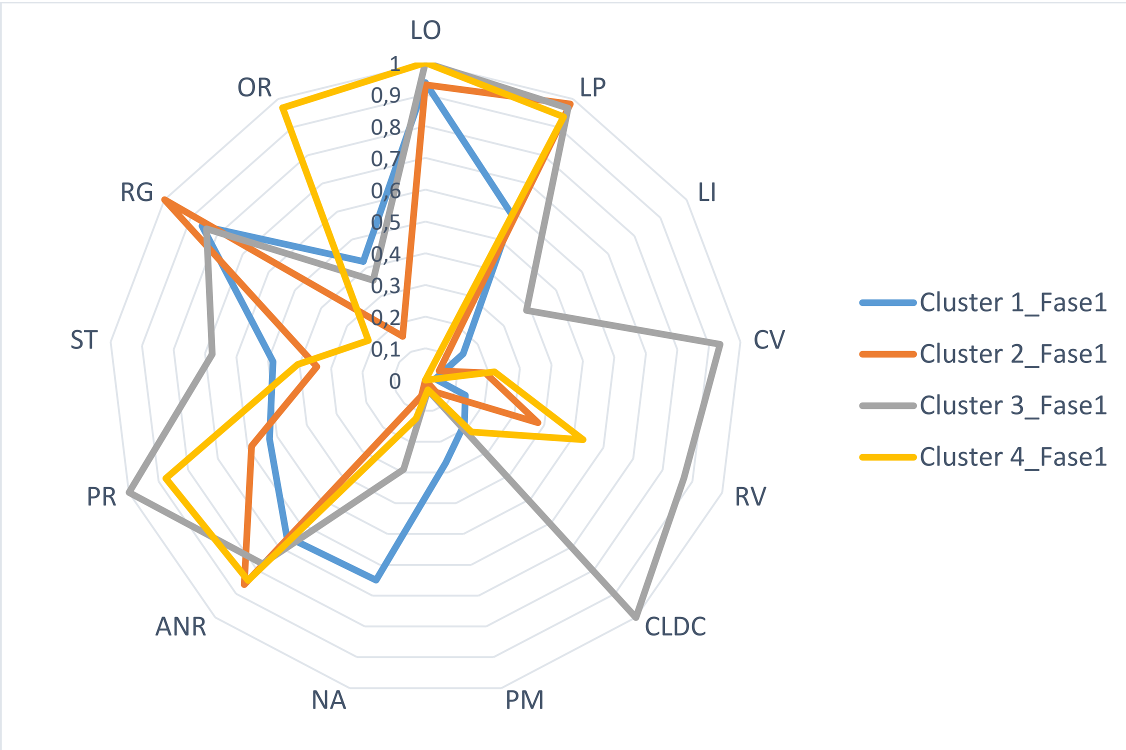


Tabla 4.5

Distribución de los estudiantes en el momento 2A por su cercanía a los centroides de los clusters en el momento 1.

Clusters del momento 1	*Clusters* del momento 2A				
	Cluster 1	*Cluster* 2	*Cluster* 3	*Cluster* 4	Total
Cluster 1	44	27	2	24	97
Cluster 2	17	16	10	15	58
Cluster 3	8	3	15	5	31
Cluster 4	9	5	6	12	32
Total	78	51	33	56	218

4.3.2.1. Significados ingenuos

La composición de los conglomerados cambia de número de miembros. Así, en la tabla 4.5 observamos que el *cluster* 1, el de los significados ingenuos, pasa de estar formado por 97 estudiantes en el momento 1 a estarlo por 78 en el momento 2A reduciendo un 20% el número de estudiantes. De estos estudiantes que componían el *cluster* 1, casi la mitad, 44, se mantienen en este perfil y 2 de ellos pasan a pertenecer al *cluster* 3, lo que nos indica que enriquecen sus expresiones sobre el límite. Por otro lado, más de la mitad de los estudiantes, el 53%, se acercan a los *clusters* que subrayan los aspectos de representación, sin mostrar preferencias entre la representación gráfica (*cluster* 2) o cualquier otra (*cluster* 4). También destacamos que el *cluster* 1 fue el que más estudiantes perdió (17), lo cual nos parece razonable, y pensamos que los estudiantes que se mantienen cerca de los restantes tres *clusters* enriquecieron su significado después de la enseñanza del concepto de límite.

A continuación, en las figuras 4.47, 4.48, 4.49, 4.50 y 4.51 presentamos, a modo de ejemplo, al estudiante SEN071712 quien en el momento 1 se ubicaba en el *cluster* 1 y en el momento 2A se ubica más cercano al *cluster* 2.

Cómo podemos apreciar en las figuras 4.47, 4.48 y 4.49, durante la enseñanza del concepto de límite, el estudiante SEN071712 no evidencia ninguna de las categorías de nuestro trabajo, ya que en las respuestas a cada una de las preguntas no aporta información que merezca ser valorada.

Cómo podemos apreciar, después de la enseñanza del concepto de límite, el estudiante SEN071712 evidencia en la figura 4.50, en el punto *b*, la categoría Límite como objeto (LO) pues indica que el límite es *f(A)*, y la categoría Términos de posición relativa (PR) pues indica que se puede estudiar por la derecha y por la izquierda, ya en el punto *c*, se observa como exhibe la categoría Vinculación entre límite e imagen (LI), pues relaciona a *A* con *f(A)* y había indicado que *f(A)* era el límite, y la categoría Representación gráfica (RG) pues realiza una representación en el plano cartesiano del límite. En la figura 4.51 apreciamos que el estudiante SEN071712 no evidencia ninguna de las categorías.

Figura 4.47

Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SEN071712.

2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

Es un límite por simplificassón.

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

no se

Figura 4.48

Respuesta a la tarea T3_C1 del estudiante SEN071712.

4. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

-Se pueden aplicar para reflejar por donde pasa una función en una gráfica

Figura 4.49

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SEN071712.

Actividad N°2

1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

A mi criterio la palabra límite significa el límite que se le puede dar a algo, en el caso de la matemática sería a la función.

Figura 4.50

Respuesta a la tarea T1_C2 del estudiante SEN071712.

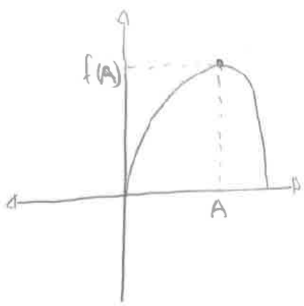
Actividad N°1

1. Sobre la definición de límite de una función en un punto.
   a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).
   b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.
   c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a**.

A) No dio definicion

B) El limite que tiene alguna función, donde se puede estudiar por la derecha y izquierda

C)



$\lim_{x \to A} f(x) = f(a).$

Figura 4.51

Respuesta a la tarea T2_C2 del estudiante SEN071712.

2. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites? ¿Qué tipo de problemas se pueden resolver usando límites?

Se puede ver el comportamiento de una gráfica o función en el plano cartesiano.

4.3.2.2. Significados basados en representación gráfica

El *cluster* 2 pasa de estar formado por 58 estudiantes a 51, manteniendo el número. Sin embargo, esta igualdad no está provocada porque los estudiantes expresen los mismos significados, sino que está provocado por un reparto de los miembros de este *cluster* entre todos los demás. Así, 16 (28%) estudiantes expresan en mismo significado gráfico en los dos momentos. Pero, el 29% de los estudiantes que en el momento 1 subrayaban la representación gráfica de límite, después de recibir instrucción en el momento 2A manifiestan menos categorías lo que los sitúa en el *cluster* 1; el 17% enriquece sus expresiones, pasando a formar parte del grupo 3; y el 26% pasan de usar la representación gráfica a incorporar otras representaciones en sus respuestas.

A continuación, en las figuras 4.52, 4.53, 4.54, 4.55, y 4.56, presentamos a modo de ejemplo, al estudiante SIB021219 quien en el momento 1 se ubicaba en el *cluster* 2 y en el momento 2A se ubica más cercano al *cluster* 1.

Como podemos apreciar, durante la enseñanza del concepto de límite, el estudiante SIB021219 evidencia la categoría Límite como objeto (LO) pues indica en la figura 4.52 que el límite es el resultado de una función, en la figura 4.52 señala con una flecha el 4 y en la figura 4.54 indica que es una frontera. Exhibe la categoría Límite como proceso (LP) la evidencia en la figura 4.52 pues indica que x tienda a algún valor. Muestra la categoría Referencia a las variables x e y (RV) pues en la figura 4.52 alude a la variable independiente como x, evidencia la categoría Representación gráfica (RG) ya que apreciamos en la figura 4.52 como realiza una representación en el plano cartesiano del límite. Finalmente, exhibe la categoría Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR) pues en la figura 4.54 alude al límite como una frontera.

Además, apreciamos que después de la enseñanza del concepto de límite, el estudiante SIB021219 evidencia únicamente en la figura 4.55 la categoría Límite como objeto (LO) pues indica que el límite es un punto.

Figura 4.52

Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SIB021219.

2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

Bueno es un tema que no entiendo muy bien, pero lo que puedo recapitular de esa definición es que se le conoce como límite al resultado de una función siempre que "x" tienda a algún valor.

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

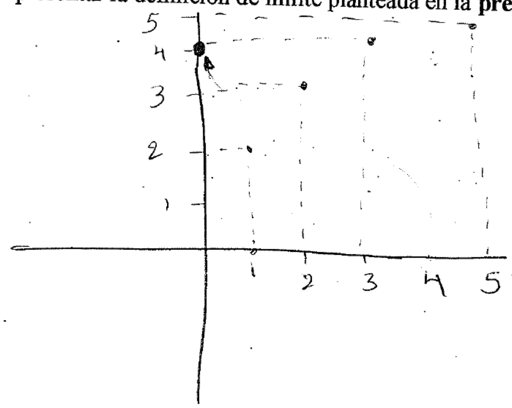


Figura 4.53

Respuesta a la tarea T3_C1 del estudiante SIB021219.

4. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

Figura 4.54

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SIB021219.

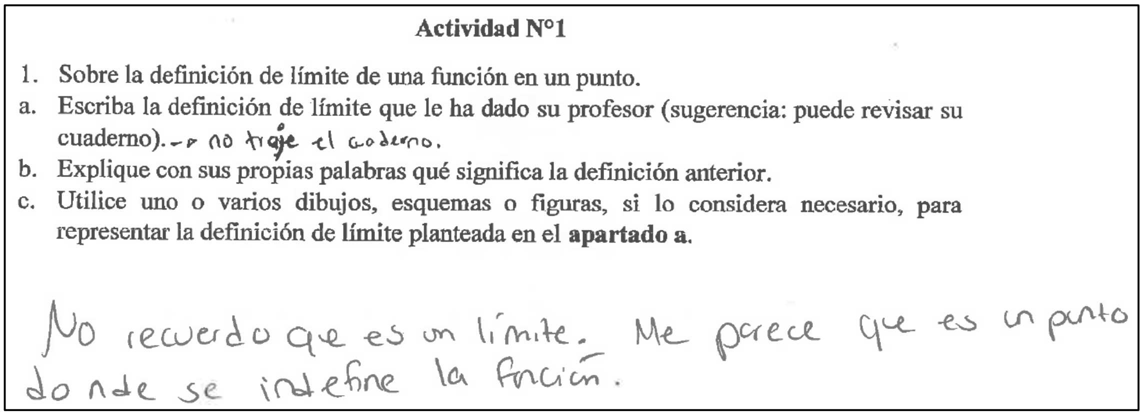
Actividad N°2

1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

Personalmente creo que un límite es algo así como una frontera. También el final de algo, justamente en el inicio de otra cosa.

Figura 4.55

Respuesta a la tarea T1_C2 del estudiante SIB021219.

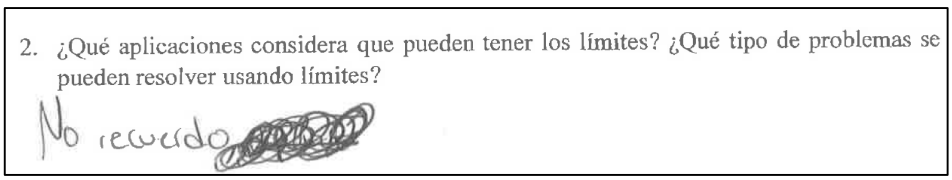

Actividad N°1

1. Sobre la definición de límite de una función en un punto.
a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno). → no traje el cuaderno.
b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.
c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a.**

No recuerdo que es un límite. Me parece que es un punto donde se indefine la función.

Figura 4.56

Respuesta a la tarea T2_C2 del estudiante SIB021219.


2. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites? ¿Qué tipo de problemas se pueden resolver usando límites?

No recuerdo

4.3.2.3. Uso de otras representaciones no gráficas

El *cluster* 4 aumenta de 32 a 56 estudiantes, siendo el que más aumenta, un 75%. La gran mayoría de este aumento está provocado por el movimiento de estudiantes del *cluster* 1 (24 estudiantes), aunque también muchos provienen del *cluster* 2 (15 estudiantes). De hecho, los que se mantienen en los dos momentos en este *cluster* son solo 12 (37%).

A continuación, en las figuras 4.57, 4.58, 4.59, 4.60 y 4.61, presentamos a modo de ejemplo, al estudiante SIS061011 quien en el momento 1 se ubicaba en el *cluster* 4 y en el momento 2A se mantiene cercano al *cluster* 4.

Cómo podemos apreciar, durante la enseñanza del concepto de límite, el estudiante SIS061011 evidencia las categorías:

- Límite como objeto (LO), pues resalta en la figura 4.57 que el límite es 1 y en la figura 4.53 indica que puede ser el punto máximo,
- Límite como proceso (LP), dado que en la figura 4.57 apreciamos acercamientos alrededor de 1, a través de aproximaciones,

- Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR), pues en la figura 4.59 indica que el límite puede ser el punto máximo,
- Términos de posición relativa (PR), pues en la figura 4.57 observamos que hace acercamientos por la izquierda y por la derecha de 1,
- Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC), ya que en la figura 4.57 apreciamos que el límite por la izquierda y por la derecha es el mismo, en este caso 1,
- Otra Representación (OR), dado que percibimos en la figura 4.57 como realiza una representación distinta a la representación gráfica del límite,
- Situaciones (ST), pues en la figura 4.58 indica que el límite se puede usar en la estadística y la probabilidad.

Observamos que después de la enseñanza del concepto de límite, el estudiante SIS061011 evidencia las categorías:

- Límite como objeto (LO), pues indica en la figura 4.60, en el punto *b*, que el límite es un punto,
- Límite como proceso (LP), dado que en la figura 4.60, en el punto *c*, apreciamos acercamientos alrededor de 1, a través de aproximaciones,
- Términos de posición relativa (PR), pues en la figura 4.60, en el punto *c*, observamos que hace acercamientos por la izquierda y por la derecha de 1,
- Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC), ya que en la figura 4.60 en el punto *c*, apreciamos que el límite por la izquierda y por la derecha, debe ser el mismo, en este caso 1,
- Otra Representación (OR), pues percibimos en la figura 4.60, en el punto *c*, como realiza una representación distinta a la representación gráfica del límite.

Figura 4.57

Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SIS061011.

2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

Es la cercania con alguna variable o algún punto especifico

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

Limite a 1

Por la derecho

0.9 | 1 | 1.01
0.999 | 1 | 1.0001
0.999999 | 1 | 1.0000001
0.9999999999 | 1 | 1.0000000 0001 ...
0.999...999 | 1 | 1.00.... 1

Figura 4.58

Respuesta a la tarea T3_C1 del estudiante SIS061011.

4. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

Calculos para estadistica y probabilidad

Figura 4.59

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SIS061011.

Actividad N°2

1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

Puede ser el punto maximo previo a llegar a dicho destino.

Figura 4.60

Respuesta a la tarea T1_C2 del estudiante SIS061011.

Actividad N°1

1. Sobre la definición de límite de una función en un punto.
a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).
b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.
c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a**.

a) Es un punto en una función que se excluye

b) Es un punto por el cual pasa la grafica, pero no se usa

c)

Izquierda	x = 1	Derecha
0,9	1	1,1
0,999	1	1,001
0,9999	1	1,0001
0,999999..	1	1.000...01

Figura 4.61

Respuesta a la tarea T2_C2 del estudiante SIS061011.

2. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites? ¿Qué tipo de problemas se pueden resolver usando límites?

Problemas en los que se tenga que analizar cuando una función se indefine.

4.3.2.4. Riqueza de significado

El *cluster* 3 pasa de 31 a 33 estudiantes, de los cuales el 48% no cambian la composición de sus respuestas. Mientras, 8 estudiantes evidencian, en el momento 2A, estar más cercanos a los *clusters* 2 y 4, aquellos que subrayan las representaciones. Sorprenden, en este conglomerado, los 8 estudiantes (26%) que pasan a formar parte en el momento 2A del *cluster* 1, aquel que agrupa los significados ingenuos, con menos detalle en cada categoría, como si la enseñanza recibida les hubiese provocado inseguridad u olvido en sus conocimientos.

A continuación, en las figuras 4.62, 4.63, 4.64, 4.65 y 4.66, presentamos a modo de ejemplo, al estudiante SIS032318 quien en el momento 1 se ubicaba en el *cluster* 3 y en el momento 2A se mantiene cercano al *cluster* 3.

Cómo podemos apreciar, durante la enseñanza del concepto de límite, el estudiante SIS032318 evidencia las categorías:

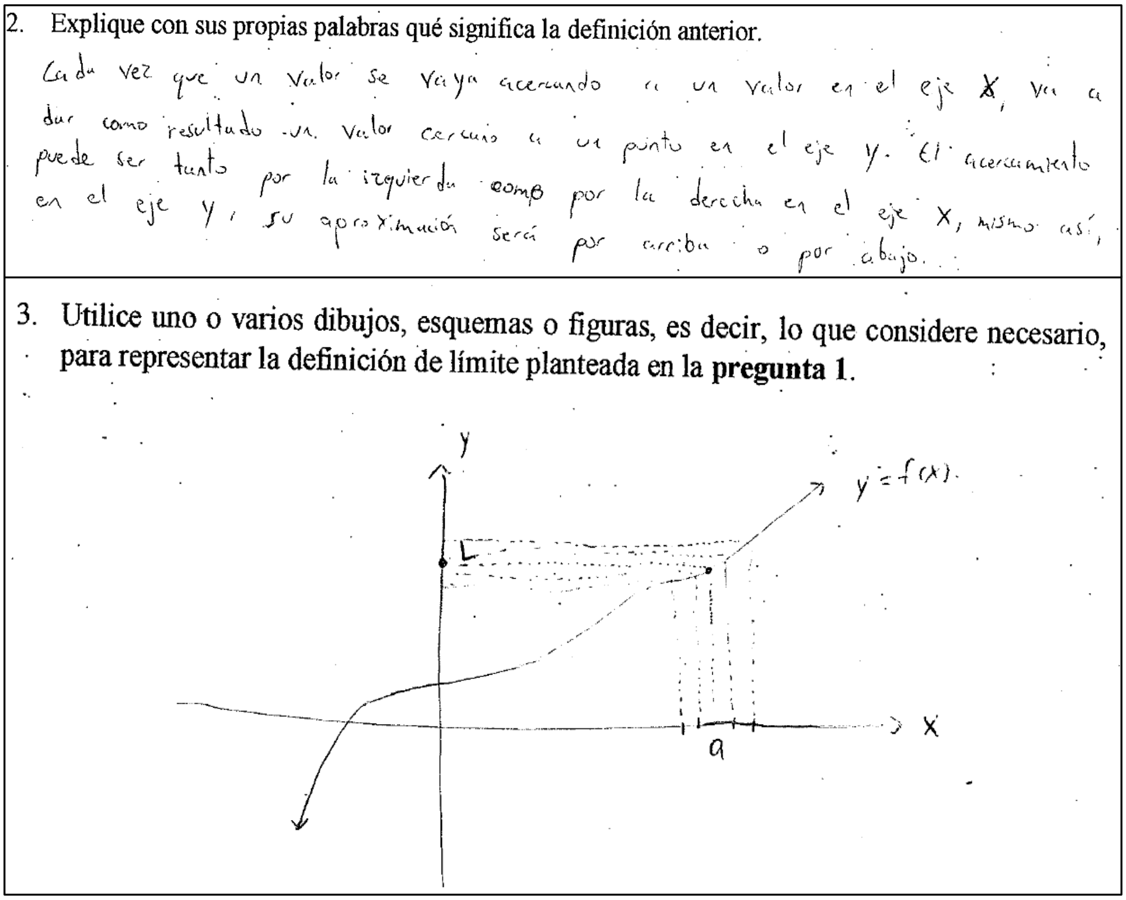
- Límite como objeto (LO), ya que indica en la figura 4.64 que el límite es una barrera,
- Vinculación entre límite e imagen (LI), pues en la figura 4.62 en la representación anota que el límite es L y marca con un puntito “cerrado” indicando que la imagen de a es L,
- Límite como proceso (LP), dado que en la figura 4.62 en la definición, habla de acercamiento a un valor al eje x y aproximación por arriba y por abajo en el eje y, y en la representación, apreciamos de manera gráfica esos acercamientos alrededor de a y de L,
- Coordinación entre las variables x e y (CV), puesto que en la figura 4.62, en la definición, indica que es un proceso en el que están implicadas las dos variables (x e y), donde una depende de otra, esto se aprecia de manera gráfica en la representación, con los puntitos discontinuos que dibuja relacionando las preimágenes con las imágenes,
- Referencia a las variables x e y (RV), pues en la figura 4.62, alude a la variable independiente como valor en el eje x, y a la dependiente como punto en el eje y,
- Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR), dado que en la figura 4.64 indica que el límite es una barrera y nos habla de límites fronterizos,
- Términos de posición relativa (PR), pues en la figura 4.62 usa los términos izquierda, derecha, arriba y abajo para referirse a acercamientos,
- Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC), ya que en la figura 4.62, en la definición, observamos en toda la explicación que realiza, que el límite por la izquierda y por la derecha, debe ser el mismo,
- Representación gráfica (RG), pues apreciamos en la figura 4.62 como realiza una representación en el plano cartesiano del límite,
- Situaciones (ST), pues en la figura 4.63 indica que el límite se puede usar en la economía.

Observamos que después de la enseñanza del concepto de límite, el estudiante SIS032318 evidencia las categorías:

- Límite como objeto (LO), pues señala en la figura 4.65, en el punto *c*, que el límite es *L*,
- Vinculación entre límite e imagen (LI), pues en la figura 4.65, en el punto *c*, anota que el límite es L y marca con un puntito "cerrado" indicando que la imagen de *a* es *L*,
- Límite como proceso (LP), dado que en la figura 4.65 habla de acercamiento a puntos en el eje *x* como en el eje *y*, y en el punto *c*, apreciamos de manera gráfica esos acercamientos alrededor de *a* y de *L*,
- Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV), puesto que en la figura 4.65, en el punto *b* y *c* señala que es un proceso en el que están implicadas las dos variables (*x* e *y*), donde una depende de otra, esto se aprecia, respectivamente, tanto de manera verbal como de manera gráfica, con los puntitos discontinuos que dibuja relacionando las preimágenes con las imágenes,
- Referencia a las variables *x* e *y* (RV), ya que en la figura 4.65 alude a la variable independiente como punto en el eje *x*,
- Términos de posición relativa (PR), pues en la figura 4.65, en el punto *c*, hace acercamientos por la izquierda y por la derecha de *a* y de *L*,
- Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC), dado que en la figura 4.65, en el punto *c*, observamos en la representación que el límite por la izquierda y por la derecha de *a*, debe ser el mismo *L*,
- Representación gráfica (RG), pues apreciamos en la figura 4.65, en el punto *c*, como realiza una representación en el plano cartesiano del límite,
- Situaciones (ST), ya que en la figura 4.66 indica que el límite se puede usar en la economía.

Figura 4.62

Respuestas a las tareas T1_C1 y T2_C1 del estudiante SIS032318.



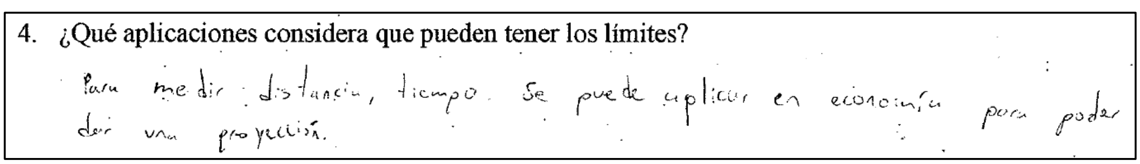
2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

Cada vez que un valor se vaya acercando a un valor en el eje X, va a dar como resultado un valor cercano a un punto en el eje y. El acercamiento puede ser tanto por la izquierda como por la derecha en el eje X, mismo así, en el eje y, su aproximación será por arriba o por abajo.

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

Figura 4.63

Respuesta a la tarea T3_C1 del estudiante SIS032318.



4. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

Para medir distancia, tiempo. Se puede aplicar en economía para poder dar una proyección.

Figura 4.64

Respuesta a la tarea T4_C1 del estudiante SIS032318.

Actividad N°2

1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

Límite, fuera del concepto matemático, tiene como significado una barrera, donde no se puede traspasar más allá de eso. Marca una división en espacio, por lo general, físico.

Un ejemplo de ello, son los límites fronterizos de cada país. tanto terrestres como marítimos.

Figura 4.65

Respuesta a la tarea T1_C2 del estudiante SIS032318.

1. Sobre la definición de límite de una función en un punto.

a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).

b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a**.

a) Sean f una función real de variable real, $a, L \in \mathbb{R}$. Si cada vez que las preimágenes de f son cercanas a a se sigue que las imágenes son cercanas a L. Se dice que el límite de f en a ~~es~~ L.

b) Por cada vez que en la gráfica se vaya acercando a algún punto del eje x, simultáneamente en el eje y también se acercan a un punto en específico.

c)

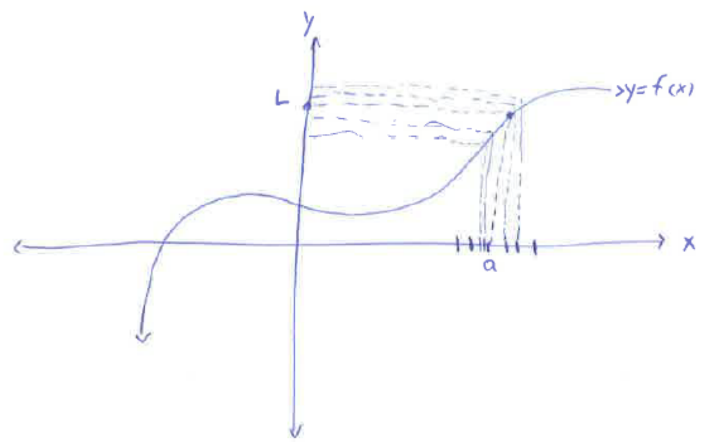
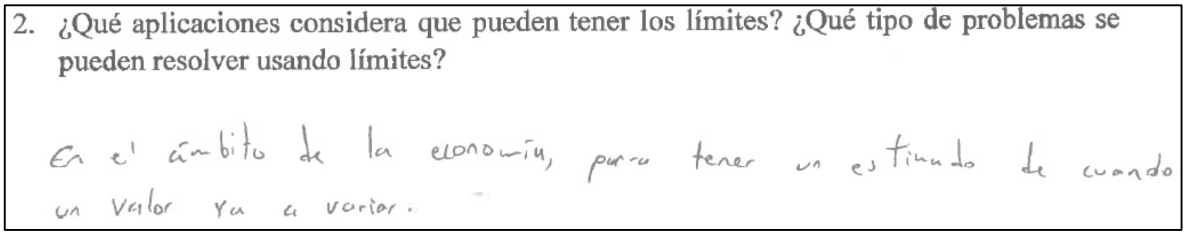


Figura 4.66

Respuesta a la tarea T2_C2 del estudiante SIS032318.


2. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites? ¿Qué tipo de problemas se pueden resolver usando límites?

En el ámbito de la economía, para tener un estimado de cuando un valor va a variar.

4.4 RAZONAMIENTOS ASOCIADOS AL CONCEPTO DE LÍMITE

Después de la enseñanza del concepto de límite, el cuestionario que completaron los estudiantes tenía una parte para el análisis de sus razonamientos al resolver tareas sobre límites y su relación con otros conceptos como la continuidad y derivabilidad (T3_C2, T4_C2, T5a_C2 y T5b_C2). En este apartado nos centraremos en la realización de dicho análisis, que corresponde al momento 2B de la investigación. Dicho cuestionario (cuestionario 2) está compuesto por tres tareas que se enfocan en el desempeño de los estudiantes al resolver tareas de cálculo de límites, tanto considerando las destrezas como analizando los argumentos que proporcionan para justificar las respuestas.

4.4.1 TAREA 3 (T3_C2): CÁLCULO DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN A TROZOS

En la tarea T3_C2 se les pedía a los estudiantes que calcularan $\lim_{x \to 0} g(x)$ sabiendo que g es una función real de variable real, tal que $g(x) = \begin{cases} x & si\ x < 0 \\ 2^{-100} & si\ 0 \le x \le 2^{-100} \\ x & si\ x > 2^{-100} \end{cases}$.

En la tabla 4.6 detallamos las ocho componentes que hemos interpretado en las respuestas de los estudiantes a esta tarea, organizadas siguiendo la descripción de las tablas 3.6 y 3.7 del apartado 3.4.1.2.

Tabla 4.6
Componentes observados en la tarea T3_C2.

COMPONENTE	FRECUENCIA
Elemento matemático evidenciado por los estudiantes	
El límite de la función en el punto es finito (existe) y coincide con el valor de los límites laterales *(P)* si, y solo si, los límites laterales de una función real de variable real en un punto son finitos (existen) e iguales *(Q)* (teorema 12).	78 (el 36%)
Modos de argumentar evidenciados por los estudiantes	
Si los límites laterales son finitos e iguales entonces el límite existe $(Q \Rightarrow P)$.	19 (el 8%)
Si los límites laterales son finitos y no son iguales entonces el límite no existe $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.	13 (el 6%)
Si los límites laterales son finitos y no son iguales entonces el límite existe $(\neg Q \Rightarrow P)$.	1
Modo de representar evidenciado por los estudiantes	
Simbólico	129 (el 59%)
Afirmaciones	
El límite no existe	14 (el 6%)
El límite existe o es infinito	68 (el 31%)
Datos	
Cálculos del límite lateral izquierdo	75 (el 34%)
Cálculos sobre el límite lateral derecho	75 (el 34%)
Como los límites laterales son distintos el límite no existe	13 (el 6%)
Los límites laterales son iguales el límite existe	18 (el 8%)
Como los límites laterales son distintos el límite existe	1
Garantías	
Si los límites laterales son finitos e iguales entonces el límite existe	19 (el 8%)
Si los límites laterales son finitos y no son iguales entonces el límite no existe	13 (el 6%)
Si los límites laterales son finitos y no son iguales entonces el límite existe	1
Respaldos	
Indicación de manera explícita (verbal o simbólica) argumentos relacionados con la caracterización de la existencia del límite a través de los límites laterales (teorema 12).	3 (el 1%)
Errores	
Cálculo del límite de manera errada, ya sea al determinar el valor numérico o al calcular límites laterales o infinitos	86 (el 39%)

La tabla 4.6 nos muestra que 129 (el 59%) estudiantes usan un modo de representación simbólico para el argumento matemático, que coinciden con los estudiantes que responden a la T3_C2, ya que anotamos este modo de representar siempre que un estudiante brindara un argumento matemático en el que incluyera una afirmación, datos, garantías, respaldos, elemento matemático, modos de argumentar, o varios de estos elementos.

De los 129 estudiantes que responden a la T3_C2, únicamente 82 (el 38%) brindan una afirmación, es decir, es una minoría de estudiantes los que responden y explicitan el resultado del límite. De esos 82 que lo hacen, sólo 14 (el 6%) dan una respuesta correcta al afirmar que el límite no existe, puesto que determinan el valor numérico de los límites laterales de forma incorrecta. Además, el hecho de que la función sea a trozos parece que supone una dificultad para determinar el límite, ya que no pueden aplicar un procedimiento, como el de simplificación de fracciones algebraicas, o una regla, como la de L'Hopital.

La tabla 4.6 muestra también que 78 (el 36%) estudiantes evidencian el teorema 12 como elemento matemático presente en la tarea T3_C2 y los modos de argumentar de los estudiantes se basan en distintas variaciones de dicho elemento. También apreciamos que 32 (el 15%) estudiantes exhiben un modo de argumentar correcto y solo uno de ellos no lo hace. Observamos que los modos de argumentar de los estudiantes coinciden las garantías, esto obedece a que esta tarea, T3_C2, involucra las funciones a trozos, y el cálculo de límite no es un procedimiento aritmético, algebraico o de aplicación de una regla, sino que requiere realizar un razonamiento, único, basado en la caracterización por límites laterales para su resolución (el teorema 12). Veamos las respuestas de los estudiantes SIQ022101 en la figura 4.67 y SIS032318 en la figura 4.68.

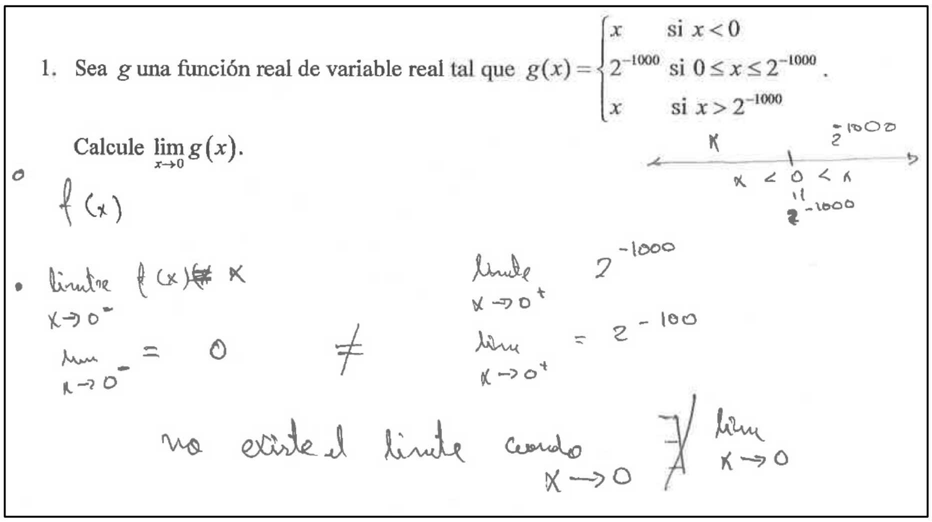
Como puede observarse en la figura 4.67, el estudiante evidencia varios componentes en el argumento:

- como elemento matemático exhibe que los límites laterales de una función real de variable real en un punto son finitos (existen) e iguales sí y sólo sí el límite de la función en el punto es finito (existe) y coincide con el valor de los límites laterales,
- su modo de argumentar y a la vez su garantía es que si los límites laterales son finitos y no son iguales entonces el límite no existe,
- y utiliza un modo de representar simbólico,

- afirma que no existe el límite,
- los datos exhibidos son cálculos de los límites laterales por izquierda y derecha de cero, además señala que los límites laterales son diferentes y que no existe el límite,
- respalda su garantía al explicitar de manera verbal y simbólica argumentos relacionados con la caracterización de la existencia del límite a través de los límites laterales.

Figura 4.67

Respuesta a la tarea T3_C2 del estudiante SIQ022101.



1. Sea g una función real de variable real tal que $g(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ 2^{-1000} & \text{si } 0\le x\le 2^{-1000} \\ x & \text{si } x>2^{-1000}\end{cases}$.

Calcule $\lim_{x\to 0} g(x)$.

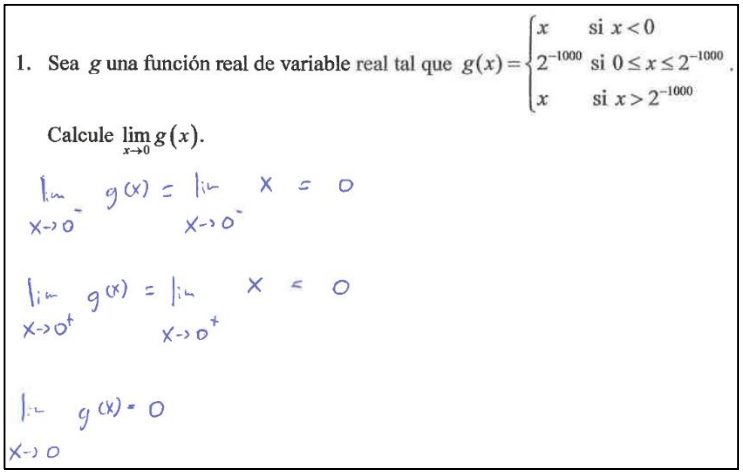
Como puede observarse en la figura 4.68, el estudiante evidencia varios componentes en el argumento:

- como elemento matemático manifestó que los límites laterales de una función real de variable real en un punto son finitos (existen) e iguales sí y sólo sí el límite de la función en el punto es finito (existe) y coincide con el valor de los límites laterales,
- su modo de argumentar y a la vez su garantía fue que si los límites laterales son finitos e iguales entonces el límite existe,
- utiliza un modo de representar simbólico,
- afirmó que existe el límite al indicar que es cero,
- los datos, mostrados fueron cálculos de los límites laterales por izquierda y derecha de cero, además evidenció que los límites laterales son iguales y que existe el límite,
- no respalda su garantía,

- presentó un error al determinar el valor numérico de un límite lateral y del límite global.

Figura 4.68

Respuesta a la tarea T3_C2 del estudiante SIS032318.



1. Sea g una función real de variable real tal que $g(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ 2^{-1000} & \text{si } 0\le x\le 2^{-1000} \\ x & \text{si } x>2^{-1000} \end{cases}$.

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

4.4.2 TAREA 5 *PARTE A (T5a_C2)*: CÁLCULO DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

En la tarea 5 *parte a*, se les pedía a los estudiantes que calcularan $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)}\right]$.

En la tabla 4.7 detallamos las ocho componentes que hemos interpretado en las respuestas de los estudiantes a la tarea 5 *parte a* del cuestionario 2.

Tabla 4.7

Componentes observados en la tarea T5a_C2.

COMPONENTE	FRECUENCIA
Elemento matemático evidenciado por los estudiantes	
La Regla de L'Hopital (teorema 18)	40 (el 18%)
Algoritmo de simplificación de fracciones algebraicas	146 (el 67%)
El límite es infinito y coincide con el infinito de los límites laterales (P) sí y solo sí los límites laterales son infinitos e iguales *(Q)* (teorema de los límites laterales infinitos, teorema 13)	17 (el 8%)
Modos de argumentar evidenciados por los estudiantes	
La Regla de L'Hopital (aplicación del procedimiento)	40 (el 18%)
Algoritmo de simplificación de fracciones algebraicas (aplicación del algoritmo)	146 (el 67%)
Si los límites laterales son infinitos e iguales entonces el límite es infinito y coincide con el infinito de los límites laterales $(Q \Rightarrow P)$	3 (el 1%)

Tabla 4.7

Componentes observados en la tarea T5a_C2.

COMPONENTE	FRECUENCIA
Si los límites laterales son infinitos e iguales entonces el límite existe $(Q \Rightarrow \neg P)$	1
Si los límites laterales son infinitos e iguales entonces el límite no existe $(Q \Rightarrow P)$	1
Si los límites laterales son infinitos y distintos entonces el límite no existe $(\neg Q \Rightarrow P)$	1
Si los límites laterales son infinitos y distintos entonces el límite es infinito $(\neg Q \Rightarrow P)$	2
Si los límites laterales son finitos e iguales entonces el límite no existe $(\neg Q \Rightarrow P)$	1
Modo de representar evidenciado por los estudiantes	
Simbólico	204 (el 94%)
Afirmaciones	
El límite no existe o es infinito	37 (el 17%)
El límite existe o es menos infinito	75 (el 34%)
Es una constante distinta de cero entre cero	17 (el 8 %)
Datos	
Transformaciones aritméticas o algebraicas	190 (el 87%)
Garantías	
Evalúan directamente en la fracción dada, únicamente, sin hacer ningún otro procedimiento	12 (el 6%)
No evalúan en un primer momento, sino que transforman la fracción dada en otra equivalente que les permita evaluar	83 (el 38%)
Evalúan directamente en la fracción dada y obtienen la forma $\frac{0}{0}$ por lo que transforman la fracción en otra equivalente que les permita evaluar	61 (el 28%)
Hacen cálculos de límites laterales	16 (el 7%)
Aplican de forma parcial La Regla de L'Hopital al derivar el numerador y el denominador de la fracción dada sin evaluar en la fracción resultante	16 (el 7%)
Aplican La Regla de L'Hopital al derivar el numerador y el denominador de la fracción dada y evalúan en la fracción resultante	26 (el 12%)
Respaldos	
Explicitación de manera verbal o simbólica que aplican una técnica infinitesimal, como lo es La Regla de L'Hopital	30 (el 14%)
Errores	
Errores de transformación de expresiones algebraicas (factorización expresiones algebraicas o expansión de expresiones algebraicas)	77 (el 35%)

Tabla 4.7

Componentes observados en la tarea T5a_C2.

COMPONENTE	FRECUENCIA
Errores de simplificación de fracciones algebraicas,	4 (el 2%)
Errores en el momento de calcular el límite, al determinar el valor numérico o calcular límites laterales o límites infinitos	17 (el 8%)
Errores de derivación al utilizar La Regla de L'Hopital	28 (el 13%)
Errores al igualar el límite de una función con su criterio de asociación	30 (el 14%)

La tabla 4.7 muestra que 204 (el 94%) estudiantes usan un modo de representación simbólico para el argumento matemático, cantidad que coincide, a su vez con el número de estudiantes que responden a la tarea T5a_C2, ya que anotamos este modo de representar siempre que un estudiante brindara un argumento matemático en el que incluyera una afirmación, datos, garantías, respaldos, elementos matemáticos, modos de argumentar, o varios de estos elementos.

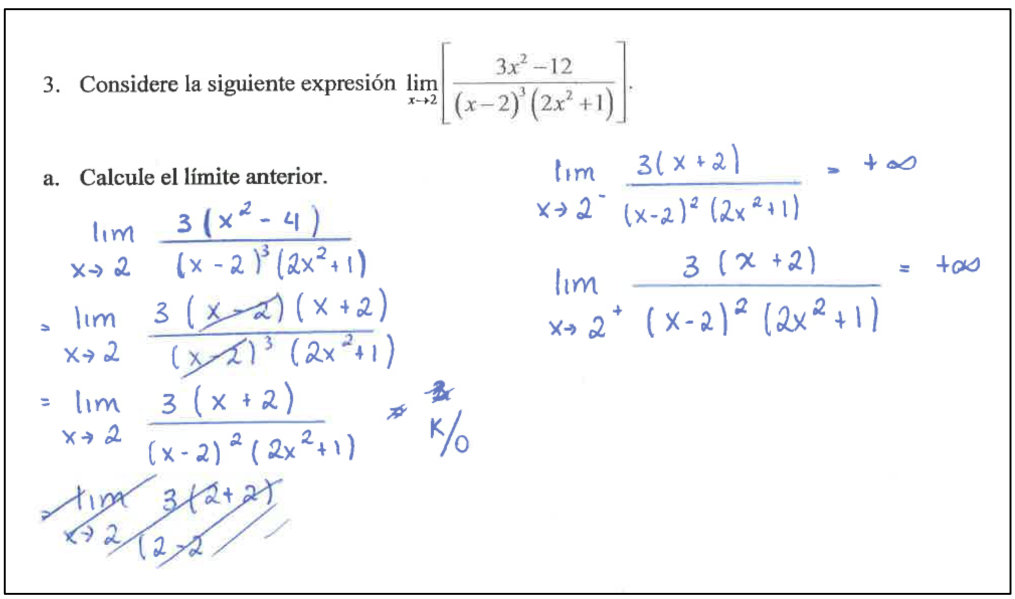
De los 204 estudiantes que responden a la T5a_C2, únicamente 129 (el 59%) brindan una afirmación, es decir, hay aproximadamente un 35% de estudiantes que no explicitan cual el resultado del límite. Y de esos 129 que responden y explicitan cual el resultado del límite solo 37 (el 17%) brindan una afirmación correcta al manifestar que el límite no existe o es infinito, pues escriben literalmente como afirmaciones el límite: no existe ($\neg\exists$), es $+\infty$, es infinito, es ∞. Como podemos observar esas respuestas son correctas, sin embargo como investigadores solo esperábamos que indicaran que el límite es $+\infty$. Son 17 (el 8%) estudiantes los que brindan una afirmación incompleta pues afirman que el límite es una constante distinta de cero entre cero, y son 75 (el 34%) estudiantes los que afirman una respuesta incorrecta ya que indican el límite existe o es menos infinito, pues indican literalmente que el límite es un número real, una expresión algebraica o $\pm\infty, -\infty$. Estas afirmaciones incompletas o incorrectas pueden estar explicadas por los errores que evidencian. En el que más incurren es en las transformaciones de expresiones algebraicas, ya que factorizan o desarrollan de manera incorrecta dichas expresiones.

Una diferencia notable de esta tarea, T5a_C2, con la otra, T3_C2, es que en la T5a_C2 involucra 3 elementos matemáticos en su resolución, los 2 primeros son más mecánicos o procedimentales como lo son la Regla de L'Hopital (teorema 18) y el algoritmo de simplificación de fracciones algebraicas, siendo este último el más utilizado por los estudiantes. El otro elemento matemático que usan es más conceptual, y corresponde a la caracterización de límites laterales infinitos que establece que, si los límites laterales son infinitos e iguales sí y solo sí el límite es infinito y coincide con el infinito de los límites laterales (teorema 13), esta caracterización la usan una minoría de estudiantes.

También, como se puede apreciar en la tabla 4.7 dos de los elementos matemáticos coinciden con dos de los modos de argumentar ya que, basta con un procedimiento como la Regla de L'Hopital (teorema 18) o el algoritmo de simplificación de fracciones algebraicas para elaborar el razonamiento. Los restantes modos de argumentar se basan en distintas variaciones del teorema 13. Veamos las respuestas de los estudiantes SIQ020103 en la figura 4.69 y SEC133230 en la figura 4.70.

Figura 4.69

Respuesta a la tarea T5a_C2 del estudiante SIQ020103.



3. Considere la siguiente expresión $\lim_{x\to 2}\left[\frac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)}\right]$.

a. Calcule el límite anterior.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3(x^2-4)}{(x-2)^3(2x^2+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}^3(2x^2+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x+2)}{(x-2)^2(2x^2+1)} \neq \frac{K}{0}$$

$$\cancel{\lim_{x\to 2}\frac{3(2+2)}{(2-2}}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3(x+2)}{(x-2)^2(2x^2+1)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x+2)}{(x-2)^2(2x^2+1)}=+\infty$$

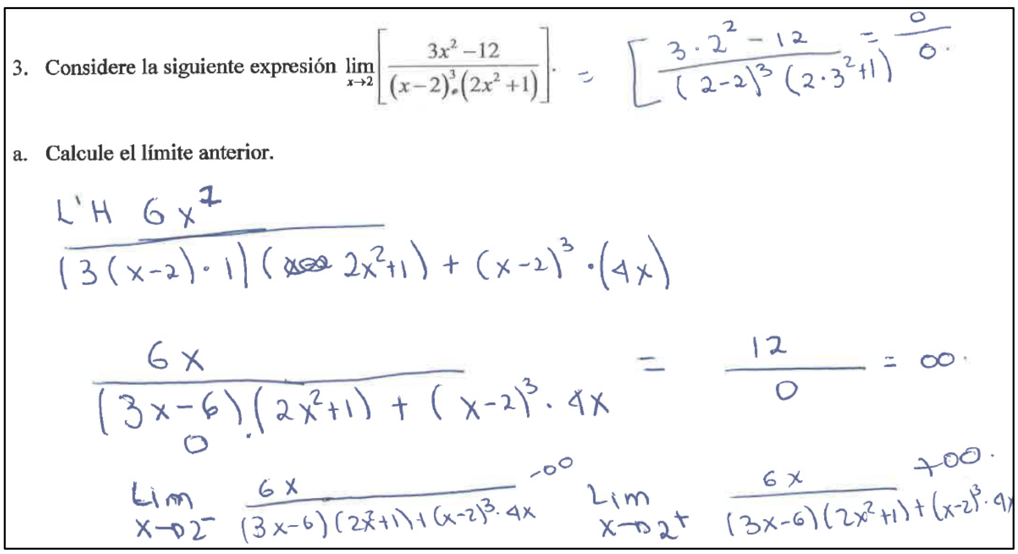
Como puede observarse en la figura 4.69, el estudiante evidencia varios componentes en el argumento:

- usó 2 elementos matemáticos, el algoritmo de simplificación de fracciones algebraicas, que a la vez es también su modo de argumentar, y el teorema que dice que si los límites laterales son infinitos e iguales sí y solo sí el límite es infinito y coincide con el infinito de los límites laterales, para este elemento matemático no hay modo de argumentar, porque se mencionó en el marco metodológico, no se concluye sobre el límite global,

- utilizó un modo de representación simbólico,
- afirmó que el límite es $\frac{k}{0}$,
- los datos mostrados son las transformaciones aritméticas o algebraicas,
- las garantías que evidenció son transformar la fracción dada en otra equivalente que permita evaluar y hacer el cálculo de límites laterales,
- no respalda sus garantías, y
- no presenta errores en el argumento.

Figura 4.70

Respuesta a la tarea T5a_C2 del estudiante SEC133230.



3. Considere la siguiente expresión $\lim_{x\to 2}\left[\frac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)}\right]$. $= \left[\frac{3\cdot 2^2-12}{(2-2)^3(2\cdot 3^2+1)}\right] = \frac{0}{0}$.

a. Calcule el límite anterior.

L'H $\frac{6x^2}{(3(x-2)\cdot 1)(2x^2+1)+(x-2)^3\cdot(4x)}$

$\frac{6x}{(3x-6)(2x^2+1)+(x-2)^3\cdot 4x} = \frac{12}{0} = \infty$.

$\lim_{x\to 2^-}\frac{6x}{(3x-6)(2x^2+1)+(x-2)^3\cdot 4x}$ $-\infty$ $\lim_{x\to 2^+}\frac{6x}{(3x-6)(2x^2+1)+(x-2)^3\cdot 4x}$ $+\infty$.

Como puede observarse en la figura 4.70, el estudiante evidencia varios componentes en el argumento:

- usó 2 elementos matemáticos, La Regla de L'Hopital que a la vez es también su modo de argumentar, y el teorema que dice que si los límites laterales son infinitos e iguales sí y solo sí el límite es infinito y coincide con el infinito de los límites laterales, para este elemento matemático, el modo de argumentar que evidencia es que, si los límites laterales son infinitos y distintos entonces el límite es infinito,

- utiliza un modo de representación simbólico,
- afirmó que el límite es ∞,
- los datos exhibidos son las transformaciones aritméticas o algebraicas,
- las garantías que evidencia son aplicar La Regla de L'Hopital al derivar el numerador y el denominador de la fracción dada y evaluar en la fracción resultante, así como hacer el cálculo de límites laterales,
- respalda la garantía asociada a La Regla de L'Hopital, al indicar de manera explícita L'H lo que resalta que está aplicando una técnica infinitesimal (Regla de L'Hopital),
- presentó un error de derivación al utilizar La Regla de L'Hopital y un error de igualación del límite de una función con su criterio de asociación.

4.4.3 TAREA 5 PARTE B (*T5b_C2*): IDENTIFICACIÓN DE UN LÍMITE CON SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

En la tarea 5 *parte b*, se les pedía a los estudiantes que identificaran el siguiente límite $\lim_{x \to 2} \left[\frac{3x^2 - 12}{(x-2)^3 (2x^2+1)} \right]$ con alguna de las representaciones gráficas dadas en una plantilla y que justificaran su elección.

En la tarea 5 *parte b*, se les pedía a los estudiantes que identificaran la gráfica de la función con alguna de las representaciones gráficas dadas. Tenemos entonces que de los 218 estudiantes: 30 (el 14%) seleccionaron la *opción a*, 28 (el 13%) seleccionaron la *opción b*, 11 (el 5%) seleccionaron la *opción c*, 61 (el 28%) seleccionaron la *opción d*, 20 (el 9%) seleccionaron la *opción e*, 16 (el 7%) seleccionaron la *opción f*. De esos 166 estudiantes que seleccionaron una representación gráfica tenemos que 98 (el 45%) justifican porque la han seleccionado y 68 no lo hacen. Son 52 estudiantes los que no seleccionaron ninguna de las representaciones gráficas.

En la tabla 4.8 mostramos las justificaciones que brindan los estudiantes al seleccionar cada una de las opciones, es decir, de las posibles representaciones gráficas del límite dado.

Tabla 4.8

Justificaciones brindadas por los estudiantes al elegir una representación gráfica para el límite dado.

Opción	Justificación
A, D,	Porque tiene una asíntota o tiene asíntotas, en algunas ocasiones especifican que es vertical o que es en $x=2$
A, B, D, F	Por el tipo de función, algunos estudiantes indican que la función es cúbica, es fraccionaria, es una parábola, es exponencial, es cuadrática, o no es lineal
A, B, F	Porque satisface el resultado obtenido, haciendo referencia a la tarea T5a_C2 donde tenían que calcular el límite
A	Por un crecimiento sin límite, refiriéndose a las imágenes que crecen sin límite o a que el límite crece a números positivos
A, B, D, E, F	Por la lateralidad del límite, aludiendo a que por "ambos lados" o por la derecha y por la izquierda el límite da un número o infinito
A, B, C, D, E, F	Porque el límite es infinito, aquí los estudiantes dicen que el límite tiende, es, se acerca, va hacia, da infinito, o dicen que tiende a más infinito y a menos infinito, lo hacen tanto de forma verbal como simbólica
B, E	Debido a la existencia del límite, en este caso los estudiantes indican que el límite existe o indican que el límite es un número real
B	Ya que la función es continua, en este caso lo indican tal cual
B, D, E	Porque la función es discontinua en *2*, aquí lo estudiantes resaltan que la función es continua menos en *2*, que el punto de discontinuidad es *2*, que $f(x)$ no es continua en *2*
B, D, E, F	Porque $f(x)$ se indefine en $x=2$, en este caso se refieren a que en $x=2$ la función no está definida, a que existe una indeterminación en *2*, a que *2* no puede pertenecer a la gráfica, a que *2* indefine el *Df*, también indican que la función se indefine en *2*
D	Porque el límite es más infinito, aquí lo estudiantes dicen que el límite es, tiende, se acerca, su resultado es, se dirigen a, o va hacia más infinito, el más infinito lo representan de manera verbal usualmente y en algunas ocasiones de manera simbólica
D	Porque se acerca a *2*, aquí indican que la gráfica de la función se acerca a *2* pero nunca lo toca, los valores de x se aproximan a *2* pero no toman su valor, se acerca a *2* pero no es *2*
D	Por un crecimiento sin límite, refiriéndose a las imágenes que crecen sin límite o a que el límite crece a números positivos
E	Por la imagen de *2*, aquí los estudiantes se enfocan en la imagen de *2*
E	Porque el límite no existe, aquí lo indican tal cual;
E	Porque no existe la imagen de *2* ni de *-2*, aquí los estudiantes indican que no incluye el *2* ni el *-2* que les dan problemas en la función y que *2* ni *-2* poseen imagen
F	Debido al dominio de la función, aquí lo indican tal cual
A, B, C, D, E, F	No dan una explicación comprensible de la elección de la *opción a*, *opción b*, *opción c*, *opción d*, *opción e*, u *opción f* según sea el caso

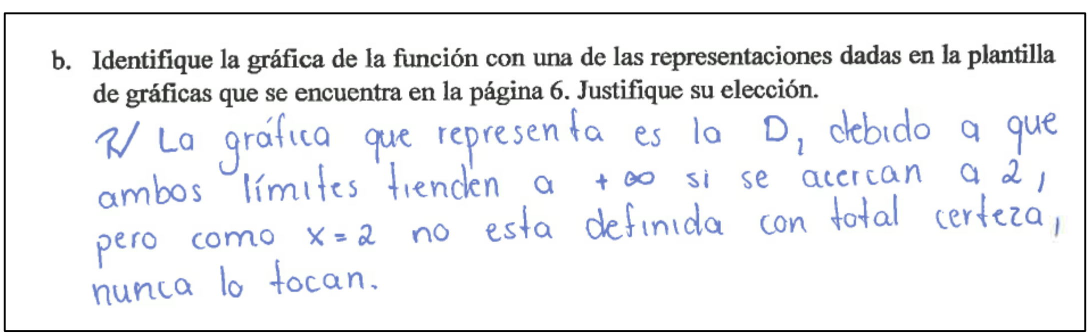
Como vemos en la tabla 4.8, son 17 las justificaciones diferentes que brindan los estudiantes al elegir alguna de las representaciones gráficas dadas en la plantilla. Hay estudiantes solo eligen la representación gráfica que creen que representa el límite y no brindan una justificación de su elección, también hay estudiantes que brindan una justificación, o inclusive hasta 2 justificaciones de la elección que hacen.

En el apartado 3.3.3 del marco metodológico resaltamos que elegimos las imágenes A y D (figura 3.5) porque el límite no existe. Concretamente, en la imagen A porque el límite por la izquierda de 2 es menos infinito y por la derecha de 2 es más infinito, y en la imagen D porque el límite tanto por izquierda como por derecha de 2 es más infinito. Seleccionamos las imágenes B y F (figura 3.6) porque la representación gráfica de ambas funciones es similar. Pues en la imagen B la imagen de 2 no existe, lo mismo que en la imagen F y además en esta, la imagen de -2 tampoco, sin embargo, en ambas imágenes el límite cuando *x* se acerca a 2 sí existe y es 4. Elegimos las imágenes C y E porque corresponden a funciones lineales que no están definidas en algunos puntos, aunque el límite en dicho punto sí existe (Figura 3.7). Concretamente, en E la imagen de 2 no existe, y en el caso de la gráfica E la imagen de -2 tampoco.

Cómo podemos apreciar en la tabla 4.8, los estudiantes son detallados en sus justificaciones al elegir la representación gráfica del límite, pues son más numerosas que las que como investigadores habíamos previsto. Veamos las respuestas de los estudiantes SIQ020103 en la figura 4.71 y SBL120307 en la figura 4.72.

Figura 4.71

Respuesta a la tarea T5b_C2 del estudiante SIQ020103.



b. **Identifique la gráfica de la función con una de las representaciones dadas en la plantilla de gráficas que se encuentra en la página 6. Justifique su elección.**

R/ La gráfica que representa es la D, debido a que ambos límites tienden a +∞ si se acercan a 2, pero como x=2 no esta definida con total certeza, nunca lo tocan.

Vemos como en la figura 4.71 el estudiante indica que selecciona la opción D porque ambos límites tienden a más infinito y porque la función se indefine en x=2. Nótese como el estudiante SIQ020103 coincide con el elemento matemático que habíamos previsto como investigadores, y además añade más elementos, al decir que la función no está definida en 2, y al decir que nunca lo toca, parece que alude de manera indirecta a una asíntota vertical en x=2.

Figura 4.72

Respuesta a la tarea T5b_C2 del estudiante SBL120307.

b. Identifique la gráfica de la función con una de las representaciones dadas en la plantilla de gráficas que se encuentra en la página 6. Justifique su elección.

La A ya que posee 2 asintotas, por lo tanto no es lineal

Vemos como en la figura 4.72 el estudiante indica que selecciona la opción A porque tiene dos asíntotas, y por el tipo de función, aludiendo a que la función no es lineal. Nótese como el estudiante SBL120307 no coincide explícitamente con el elemento matemático que habíamos previsto como investigadores, puesto que nosotros habíamos señalado para la imagen A que el límite no existe, y que particularmente el límite por la izquierda de 2 es menos infinito y por la derecha de 2 es más infinito, sin embargo, el estudiante al mencionar que posee 2 asíntotas, de forma implícita resalta lo que habíamos previsto, también añade otro elemento matemático más, y es que la elige porque la función no es lineal.

4.4.4 TAREA 4 (T4_C2): RELACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE CON LOS CONCEPTOS DE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

La tarea 4 decía: Sea f una función real de variable real tal que $\lim_{x\to 2} f(x)=3.$ Encierre con un círculo la letra de las proposiciones que considere verdaderas (puede encerrar más de una si lo considera necesario). Si no considera ninguna verdadera, encierre con un círculo la proposición f.

a. f es continua en el punto $x=2.$

b. f está definida en $x=2.$

c. $f(2)=3.$

d. $\lim_{h\to 0}\left[f(2+h)-3\right]=0.$

e. $f'(2)$ existe.

f. Ninguna de las proposiciones mencionadas es verdadera.

Tenemos que de los 218 estudiantes: 79 (el 36%) señalaron la *opción a*, 78 (el 36%) la *opción b*, 124 (el 57%) la *opción c*, 19 (el 9%) la *opción d*, 66 (el 30%) la *opción e*, 34 (el 16%) la *opción f* y 8 no seleccionaron ninguna de ellas.

En la tabla 4.9 observamos la interpretación que hemos realizado de esta selección que han realizado los estudiantes, en modos de argumentar.

Tabla 4.9

Modos de argumentar que hemos interpretado de la selección de los estudiantes en la tarea T4_C2.

Modo de argumentar	Frecuencia
Si existe el límite de una función en un punto entonces la función es continua en ese punto $(P \Rightarrow Q)$, (basado en la definción 4)	79 (el 36%)
Si existe el límite de una función en un punto entonces la función está definida en dicho punto $(P \Rightarrow R)$, (basado en la definción 4)	78 (el 36%)
Si existe el límite de una función en un punto entonces la función está definida en dicho punto y además su imagen coincide con el valor del límite $(P \Rightarrow S)$, (basado en la definción 4)	124 (el 57%)
Si existe el límite de una función en un punto entonces existe el límite en otro punto a través de un cambio de variable válido $(P \Rightarrow T)$, (teorema 5)	19 (el 9%)
Si existe el límite de una función en un punto entonces la derivada de la función existe en ese punto $(P \Rightarrow U)$, (basado en el teorema 17)	66 (el 30%)

Además, hubo 34 estudiantes que seleccionaron la *opción f*, lo que significa que no se puede decir que tipo de argumento manifiestan. Vemos como en la tarea 4 nos centramos en los 5 modos de argumentar que evidencian los estudiantes.

En la tabla 4.9, observamos cómo los primeros tres modos de argumentar son producto de un mal uso de la definición de continuidad, y por ende son incorrectos. Lo adecuado sería que, si una función es continua en un punto, entonces el límite existe en ese punto y además su imagen coincide con el valor del límite (definición 4).

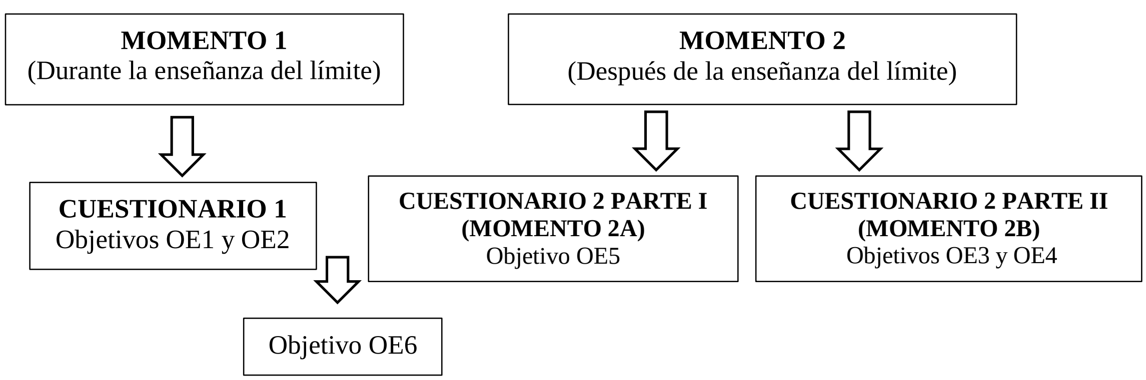
El cuarto modo de argumentar es el único que es correcto y se basa en el teorema 5 y el quinto modo de argumentar corresponde a la contra positiva del teorema 17, lo que no siempre es válido.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este último capítulo presentamos algunas conclusiones y reflexiones sobre el trabajo desarrollado. Para ello, discutimos el logro de cada uno de los objetivos propuestos, destacando los aportes de nuestra investigación según los diferentes momentos de la misma; posteriormente, describimos algunas dificultades que se presentaron durante la investigación y detallamos algunas líneas de investigación que darían continuidad al trabajo realizado. Concluimos con algunos documentos en los que se refleja la difusión que se le ha dado a la tesis hasta el momento.

En esta investigación nos propusimos como objetivo general: Caracterizar los significados atribuidos por estudiantes universitarios de la Universidad Nacional de Costa Rica al concepto de límite de una función en un punto. Para abordarlo planteamos 6 objetivos específicos. A continuación, detallamos el logro de cada uno de ellos, organizándolos según los momentos propuestos en la metodología (Figura 5.1).

Figura 5.1
Diagrama simplificado de la metodología de investigación.



El trabajo comenzó abordando el problema del significado del concepto de límite que expresaban los estudiantes universitarios cuando estaban iniciando su formación sobre cálculo (momento 1). Estos significados se caracterizaron utilizando un sistema de categorías específicamente diseñado a tal efecto. Posteriormente, utilizando el mismo sistema de categorías y los resultados en términos de perfiles de significado, se describieron los significados de los estudiantes una vez acabada su formación (momento 2A), lo que nos permitió comparar los significados de límite manifestados en ambos momentos.

Además, en el momento en el que la formación había concluido, se les plantearon tareas que involucran límites para analizar los razonamientos que utilizan, lo que nos permitió describir aspectos de significado de complejidad cognitiva superior a lo anteriormente descrito (momento 2B).

Todos estos resultados se han mostrado en el capítulo 4. A la vista de los mismos, pasamos a sintetizar alguna de la información obtenida.

5.1 SIGNIFICADO DE LÍMITE DURANTE SU ENSEÑANZA (OE1 y OE2)

Para el momento 1, durante la enseñanza del concepto del límite, propusimos dos objetivos relacionados con los significados iniciales de la noción de límite que expresaban los estudiantes:

Objetivo específico 1: *Describir el significado del concepto de límite de una función en un punto, que manifiestan estudiantes universitarios, durante su enseñanza.*

Objetivo específico 2: *Agrupar los significados del concepto de límite de una función en un punto, que manifiestan estudiantes universitarios, durante su enseñanza.*

Para abordarlos diseñamos el cuestionario 1, compuesto por 4 tareas o preguntas. Tal como señalamos en el apartado 4.1, el análisis de las respuestas dadas nos permitió examinar elementos de los tres componentes de la terna semántica: estructura conceptual, sistemas de representación, y sentidos y modos de uso, considerando un nivel inicial de complejidad cognitiva. La descripción proporcionada en el apartado 4.1.1, resultado de un análisis de contenido, nos permite asegurar que el objetivo 1 se alcanzó satisfactoriamente.

El análisis requirió construir y validar un sistema de categorías (apartado 3.5) que ampliase los utilizados previamente por diversos autores. Como se ha comentado con anterioridad, este proceso fue laborioso pero el resultado nos proporcionó una potente herramienta.

En este sentido, tenemos que una gran mayoría de estudiantes evidencian las categorías: Límite como objeto (LO), Límite como proceso (LP) por lo que manifiestan elementos de estructura conceptual, Representación gráfica (RG) expresando así sistemas de representación, Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR), Términos de posición relativa (PR) por lo que exhiben componentes de los sentidos y modos de uso. Estas categorías surgen de investigaciones previas. Concretamente, las categorías Límite como objeto (LO) y Límite como proceso (LP) proceden de autores tales como Cottrill et al. (1996), Fernández-Plaza et al. (2013b), Sfard, (1991) y Tall (1980); y las categorías Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR) y Aspectos de no alcanzabilidad (NA) de Cornu (2002), Fernández-Plaza et al. (2013b) y Monaghan (1991). Además, es natural la presencia de la categoría Representación gráfica (RG) porque estamos en clase de matemáticas.

Un poco menos de la mitad de los exhiben categorías como: Otra Representación (OR) y Situaciones (ST). Por el contrario, las categorías: Vinculación entre límite e imagen (LI), Coordinación entre las variables *x* e *y* (CV), Referencia a las variables *x* e *y* (RV), Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC), Propiedades matemáticas (PM), y Aspectos de no alcanzabilidad (NA) las evidencian una minoría de estudiantes. Es decir, en nuestros datos, la idea de que el límite no se puede alcanzar (NA) no se observa tanto como en investigaciones previas.

Además, hicimos un análisis *cluster* que nos permitió identificar cuatro perfiles del significado del límite que se pusieron de manifiesto, lo que nos permite asegurar que el objetivo 2 se alcanzó satisfactoriamente. Vemos a través de los 4 *clusters* realizados que los significados que manifiestan los estudiantes se pueden caracterizar, tomando en cuenta las categorías que evidencian, la cantidad y el tipo, como ingenuo, enriquecido, representado gráficamente y no gráficamente (Figura 4.46).

A continuación, realizamos algunos comentarios particulares sobre el sistema de categorías y su aplicación a las tareas del cuestionario 1.

5.1.1. SOBRE EL SISTEMA DE CATEGORÍAS

Aunque no se ha presentado en el capítulo de resultados, uno de los mayores logros de la tesis ha sido poder establecer un sistema de categorías validado y contenedor de otros utilizados en investigaciones previas (Blázquez y Ortega, 1998; Cornu, 2002; Cottrill et al., 1996; Fernández-Plaza et al., 2013b; Monaghan, 1991; Sfard, 1991; Tall, 1980). El proceso de elaboración se describe en detalle en el apartado 3.5.

Destacamos que se siguió un método sistemático, el análisis de contenido, que hemos organizado en fases (Figura 3.12). Puntualmente, la reiteración de las fases 4 y 5 nos permitió tener un sistema de categorías fiable, debido a que conseguimos un índice de coincidencia entre investigadores de un 92% y, específicamente, 12 de las categorías consiguieron más de un 90% de acuerdo entre los tres investigadores y el resto entre un 86% y un 88%. Este índice de acuerdo nos permite concluir que los resultados obtenidos son fiables. Es decir, el detalle con el que son descritas las categorías y el proceso de análisis proporciona información suficiente para replicarlo. Además, se describe la forma de proceder a la hora de diseñar y validar el proceso, mostrando un procedimiento válido para crear categorías de análisis de definiciones de otros conceptos o tareas diferentes.

Otro aspecto a destacar es que el sistema final de categorías es útil no solo para analizar las definiciones o los aspectos estructurales como hacen los autores anteriormente citados sino que, además, permite analizar información expresada en distintos sistemas de representación y también la información proporcionada al responder a modos de uso o aplicaciones del concepto de límite. Deseamos puntualizar en que las categorías son exhaustivas, puesto que no dejan ninguna respuesta sin poder analizarse.

En resumen, el sistema de categorías es consistente, replicable y suficiente para estudiar el significado. Además, con él complementamos trabajos previos (Blázquez y Ortega, 1998; Cornu, 2002; Cottrill et al., 1996; Fernández-Plaza et al., 2013b; Monaghan, 1991; Sfard, 1991; Tall, 1980) al aportar más categorías, que ponemos a prueba en otro contexto y con otros sujetos de investigación.

5.1.2. CÓMO LAS REPRESENTACIONES Y LOS MODOS DE USO ENRIQUECEN LAS DEFINICIONES

En los apartados 3.5.2 y 3.5.3 se han presentado ejemplos de cómo los estudiantes manifiestan aspectos específicos de estructura conceptual cuando se les pregunta por representación o por aplicaciones (Figuras 3.19, 3.20 y 3.21). Esto nos llevó a deducir que la relación entre las preguntas, unívocamente asociadas a aspectos concretos del significado, y la asociación de las respuestas a dichos aspectos del significado (estructura conceptual, representación y modos de uso) no era posible.

De esta forma, aunque se podría pensar a priori que cuando se pregunta por representaciones esperamos que las respuestas se refieran a representaciones (gráficas RG, u otras OR); en las respuestas a la pregunta T2_C1 (representar) los sujetos proporcionan información en casi todas las categorías, salvo en las situaciones (ST). Al limitarnos a analizar los aspectos estructurales del límite en la definición se perdía mucha información sobre el significado del concepto de límite que manifestaba el estudiante, y lo mismo ocurría con el resto de componentes y preguntas. En la tabla 5.1 se puede ver las categorías a las que proporcionan información las diferentes preguntas del cuestionario.

Tabla 5.1.

Asociación empírica de las categorías de análisis en las respuestas a las preguntas.

Sistema de categorías	Preguntas del cuestionario 1			
	1	2	3	4
Límite como objeto (LO)	X	X	---	X
Límite como proceso (LP)	X	X	---	---
Vinculación entre límite e imagen (LI)	X	X	---	---
Coordinación entre las variables x e y (CV)	X	X	---	---
Referencia a las variables x e y (RV)	X	X	---	---
Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)	X	X	---	---
Propiedades matemáticas (PM)	X	X	---	---
Representación gráfica (RG)	---	X	---	---
Otras representaciones (OR)	---	X	---	X
Aspectos de no alcanzabilidad (NA)	X	X	---	X
Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR)	X	X	---	X
Términos de posición relativa (PR)	X	X	---	---
Situaciones (ST)	---	---	X	---

Resaltamos que la categoría Límite como Objeto (LO) es una categoría que evidencian mucho los estudiantes en las respuestas a las preguntas del primer cuestionario sobre la definición (pregunta T1_C1), la representación (T2_C1) y sobre los términos y modos de uso (T4_C1).

Es peculiar que la categoría Límite como Proceso (LP) no aparece dentro de las definiciones del límite en la Real Academia de la Lengua Española y, como era esperable, los estudiantes no lo incorporaron como una interpretación fuera del contexto de la matemática. Sin embargo, es la característica que más se detecta en las respuestas a las definiciones de límite y a las representaciones. En cierto sentido, se puede decir que cuando los estudiantes responden a preguntas de matemáticas, el límite casi siempre es considerado un proceso, pero que cuando responden a usos de límite, se ven obligados por el uso del lenguaje a identificarlos como un objeto, debido a los modos de uso establecidos por el lenguaje.

Preguntar por definiciones y representaciones proporciona variedad de categorías de respuestas y, por tanto, son básicas para determinar los significados. Preguntar sobre modos de uso no proporciona tanta variedad de categorías, pero ayuda a completar los significados. Los modos de uso suelen proceder de usos cotidianos o conocidos fuera de la matemática, por lo que las características del concepto matemático que expresan son limitadas.

Así, concluimos que expresar ideas sobre la noción de límite de maneras variadas, y no solo usando la definición matemática, no hace más que enfatizar aspectos propios del significado del concepto. Hay aspectos que son difíciles de expresar mediante una definición o solo verbalmente, por lo que otras formas de expresarlos se hacen necesarias para que los investigadores y los docentes tengan la información completa sobre las concepciones de los estudiantes.

5.2. COMPARACIÓN DE SIGNIFICADOS DURANTE Y DESPUÉS DE LA ENSEÑANZA

En el momento 2A, nos planteamos dos objetivos específicos:

Objetivo específico 5: *Describir y agrupar los significados del concepto de límite de una función en un punto, que manifiestan estudiantes universitarios, posterior a su enseñanza.*

Objetivo específico 6: *Comparar los significados del concepto de límite de una función en un punto, que manifiestan los estudiantes durante y posterior a la enseñanza del tema de límites.*

Para abordar estos objetivos diseñamos el cuestionario 2 PARTE I, compuesto por 3 tareas o preguntas muy similares a las del cuestionario 1: explicar con sus propias palabras la definición de límite (T1_C2 inciso b), representarla (T1_C2 inciso c), y nombrar aplicaciones del límite o problemas resuelven (T2_C2).

Tal como señalamos en su apartado correspondiente, el análisis de las respuestas dadas nos permitió examinar elementos de los tres componentes de la terna semántica: estructura conceptual, sistemas de representación, y sentidos y modos de uso, en un primer nivel de complejidad cognitiva. Para analizar las respuestas de los estudiantes al cuestionario 2 PARTE I nos basamos en el sistema de categorías que ya habíamos creado, validado y usado en la caracterización de significados durante la enseñanza de límite (momento 1). Parecía, pues, natural tratar de comparar los resultados para ver qué influencia tiene la docencia sobre el significado que poseen los estudiantes, lo que se realiza en el apartado 4.3.

Las características que mayoritariamente describen el límite tanto durante su enseñanza como después de la misma son: en los aspectos estructurales, el límite como objeto y como proceso; en los aspectos de representación, la representación gráfica; y en los aspectos de sentido, los términos de posición relativa. Las nociones de alcanzabilidad y no rebasabilidad se evidencian en su mayoría durante la enseñanza, mas no después de la enseñanza del concepto de límite, quizá debido a la omisión de una pregunta directa en el segundo cuestionario.

La referencia que hacen los estudiantes al límite de forma procesual, como procesos dinámicos de aproximación, también la han expuesto autores como Williams (1991), quien muestra en su estudio que los estudiantes tienen una visión procedimental y dinámica del límite, es decir, como una idealización de la evaluación de la función en puntos sucesivamente más cercanos a un punto de interés.

Resaltamos que, tanto durante la enseñanza del concepto de límite como después de su enseñanza, la categoría Coordinación entre las variables x e y (CV) es evidenciada en una minoría de estudiantes, lo cual puede estar relacionado con lo que manifiestan Arce y Ortega (2015) al indicar que los estudiantes en las “anotaciones verbales sólo aluden al proceso dinámico de aproximación en una de las dos variables. Muy pocas coordinan ambos procesos de aproximación” (p. 140).

Nuestros estudiantes evidencian en sus respuestas las nociones de alcanzabilidad y no rebasabilidad, en esta dirección coincidimos con Fernández-Plaza et al. (2013b) ya que en su estudio manifiestan la importancia que los escolares le dan a las propiedades del concepto de límite al evidenciar en la mayoría de las familias de definiciones aspectos estructurales alcanzabilidad y rebasabilidad. Como se puede observar hay coincidencia en ambos estudios, sin embargo, en nuestro estudio las nociones de alcanzabilidad y no rebasabilidad las observamos tanto en las definiciones como en las representaciones y en los términos y modos de uso que brindan los estudiantes para el concepto de límite.

Sin embargo, la descripción no se complementó con un análisis *cluster*, como en el momento 1, sino que, al abordar el objetivo 6, se incorporaron los estudiantes a los conglomerados ya construidos, clasificando los significados en los cuatro grupos: ingenuo, enriquecido, representado gráficamente y no gráficamente. Esta asignación se realizó de manera efectiva, por medio de un análisis *cluster* de k-Medias.

Este análisis se complementa con la comparación de los conglomerados obtenidos, lo que robustece la comparación (apartado 4.1.3). Y, aunque quedan muchas preguntas abiertas, consideramos que se ha logrado el objetivo 6. A continuación, presentamos algunas reflexiones sobre la comparación tras la realización de un primer análisis cualitativo y tras el tratamiento de los datos de manera cuantitativa.

5.2.1. COMPARACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS MEDIANTE UN ANÁLISIS CUALITATIVO

En este apartado recogemos algunas ideas que queremos recuperar.

Los estudiantes han respondido con mayor riqueza durante la enseñanza del concepto de límite que después de la enseñanza de dicho concepto. Esto lo podemos apreciar en la disminución del porcentaje de respuestas de estudiantes por categoría después de la enseñanza del límite. También fue evidente en el nivel de detalle que brindaban a las respuestas del cuestionario 2 PARTE I pues usan menos palabras y símbolos. Aparentemente, tras la enseñanza del límite, los estudiantes reducen el uso de vocabulario y símiles fuera de las matemáticas para proporcionar descripciones más escuetas, cuando lo que parecería normal sería que los estudiantes propusiesen respuestas más ricas en el segundo momento que en el primero.

No tenemos justificación para esto, pero recordamos que los significados expresados por los estudiantes no manifiestan todo lo que saben, solo evidencian lo que han elegido para responder a las preguntas. Además, menos riqueza de categorías en una respuesta no es lo mismo que menor precisión. Así, podemos pensar que esta disminución en las respuestas obedece a que una vez estudiado el concepto de límite, y conforme estudian otros conceptos matemáticos relacionados, son capaces de sintetizar y expresar estrictamente lo que consideran oportuno, esto es, mayor formación permite elaborar respuestas más eficientes.

Las categorías que predominan en ambos momentos son las referentes al límite como objeto y como proceso (LO y LP), con el uso de representaciones gráficas (RG) y, en el caso de los usos, la mención a las posiciones relativas de límite (PR) y a la no rebasabilidad (ANR) en el momento 1. La figura 4.43 nos permite observar esto de manera visual, destacando aspectos interesantes de las frecuencias y repeticiones de la aparición y evolución de las categorías de análisis en las respuestas de los estudiantes. Por ejemplo, nótese como las menciones a la vinculación entre el límite y la imagen (LI), la coordinación y la referencia entre las variables (CV, RV), la doble convergencia (CLCD), las propiedades matemáticas (PM) y la no alcanzabilidad (NA) son elementos poco evidenciados por los estudiantes (en azul en la figura 4.43), lo que indica que son categorías poco importantes para caracterizar las respuestas de los estudiantes. Mientras, límite como objeto, como proceso y las representaciones gráficas (LO, LP y RG, en verde, figura 4.43) son las categorías presentes "al inicio" y "al final", es decir que los estudiantes las evidencian durante la enseñanza del concepto de límite y después de la enseñanza de dicho concepto.

Este predominio de categorías abre una nueva línea de investigación relacionada con la necesidad de 13 categorías para caracterizar el significado de límite. Quizá podríamos haber reducido el número. No lo hemos intentado porque los requerimientos metodológicos son complejos, ya que la técnica apropiada hubiese sido un análisis factorial. Al haber recogido valores dicotómicos (aparición–no aparición), los requisitos para poder aplicar un análisis factorial, como la normalidad de los datos, son de difícil validación.

En cualquier caso, queda pendiente para posibles investigaciones si el sistema de categorías se podría haber simplificado y las descripciones de los significados podrían ser más sencillas.

5.2.2. COMPARACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS MEDIANTE UN ANÁLISIS CUANTITATIVO

El análisis *cluster* de k-Medias fue la excusa para determinar en cuál de los cuatro perfiles de significado de límite se podían incorporar los estudiantes tras haber recibido la formación. Este paso se podría haber realizado con un sencillo cálculo de distancias, pero elegimos el k-Medias porque está implementado en el software. De nuevo, como en el análisis comparativo descriptivo, encontramos diferencias, pero en este caso, son positivas, ya que:

- el aumento de estudiantes en los *clusters* 2, 3 y 4 en detrimento de los del *cluster* 1 (correspondiente a las respuestas ingenuas) nos hace pensar que la enseñanza recibida enriquece las expresiones de límite de los estudiantes.
- La estabilidad de significado en el *cluster* 3, aquel que llamábamos perfiles enriquecidos, se debe a que los estudiantes con concepciones iniciales más ricas, son más estables cuando son formados y fortalecen su formación previa.
- Aunque las representaciones gráficas son más frecuentes en el momento 1, cuando se analizan los datos del momento 2A, se aprecia un aumento de otro tipo de representaciones, lo que podría obedecer a que los estudiantes tienen más recursos y no necesitan responder a las representaciones tan estandarizadas.

En resumen, consideramos que el cambio de categorías, en general, manifestadas en los dos momentos podría ser resultado de haber recibido instrucción, que cambia los puntos de interés de los estudiantes.

5.3 RAZONAMIENTOS

Otro aspecto novedoso de esta tesis es la inclusión de los razonamientos en el análisis de los significados del concepto de límite que manifiestan los estudiantes tras finalizar su formación (Momento 2B). Recordamos que los razonamientos involucran un segundo nivel de complejidad cognitiva y, por ello, no consideramos adecuado preguntar por ello en su primera toma de contacto con el concepto. Concretamente, relativo al análisis de razonamientos nos propusimos dos objetivos específicos:

Objetivo específico 3: *Identificar los razonamientos que emplean los estudiantes en la resolución de tareas matemáticas que involucran el concepto de límite, posterior a su enseñanza.*

Objetivo específico 4: *Vincular el concepto de límite con los conceptos de continuidad y derivabilidad en los razonamientos que emplean los estudiantes en la resolución de tareas matemáticas que involucran estos conceptos, posterior a la enseñanza de dichos conceptos.*

Para abordar estos objetivos diseñamos tres tareas que se incorporaron al cuestionario 2 (Parte II). Para abordar el objetivo específico 3, se les pide a los estudiantes que calculen un límite de una función definida a trozos (T3_C2), que calculen un límite de una función, pero de una función que no es a trozos (T5a_C2) y que identifiquen, dada una plantilla con seis representaciones gráficas, la representación gráfica de la función a la que han calculado el límite (T5b_C2). En esta última pregunta se pedía también justificar el porqué de su elección. En el caso del objetivo específico 4, se diseñó una tarea en las que se dan una serie de proposiciones que involucran los conceptos de límites, continuidad y derivabilidad y se les pide seleccionar aquellas que son verdaderas, sabiendo que el límite de una función cuando x tienden a 2 es 3 (T4_C2).

Tal como señalamos en su apartado correspondiente, el análisis de las respuestas nos permitió examinar varios aspectos, entre ellos las justificaciones que brindan los estudiantes al resolver una tarea matemática. Las justificaciones nos interesan porque forman parte de los razonamientos, tal y como lo resalta Reid y Knipping (2010) con la actualización del modelo de Toulmin (1958) para la educación Matemática.

Para analizar las respuestas de los estudiantes a la tarea 3 (T3_C2) y a la tarea 5 *parte a* (T5a_C2) nos basamos en los cuatro elementos que proponen Reid y Knipping (2010) del modelo de Toulmin (1958) adaptado a la educación matemática: la afirmación, los datos, la garantía o justificación, y el respaldo. También nos basamos en los tres componentes que manifiesta Stylianides (2007) que debe tener de un argumento: el elemento matemático, el modo de argumentar y el modo de representarlo. Creamos de manera inductiva unas modalidades de respuesta para cada uno de estos 7 elementos que observamos en los argumentos de los estudiantes. Finalmente, decidimos evidenciar los errores cometidos por los estudiantes, para lo cual nos basamos en los errores asociados a la resolución de tareas sobre el concepto de límite que detallan Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza (2013) en su estudio, aunque nosotros agregamos 2 más que surgieron de manera inductiva de las respuestas de los estudiantes.

En cuanto a la tarea 5 *parte b* (T5b_C2) hicimos un registro de los elementos matemáticos que ponen de manifiesto los estudiantes al elegir una representación gráfica del concepto de límite en un ejemplo concreto.

Todo lo anterior nos permite asegurar que el objetivo 3 se alcanzó satisfactoriamente.

El análisis de las respuestas a la tarea T4_C2 nos permitió examinar los modos de argumentar que brindan los estudiantes en tareas que involucran los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad. Los modos de argumentar nos interesan porque, tal y como lo indica Stylianides (2007), es uno de los tres componentes de un argumento matemático y los argumentos matemáticos forman parte de los razonamientos (Reid y Knipping, 2010). Para analizar las respuestas a esta tarea nos basamos en la estructura lógica del condicional, y consideramos el antecedente como “el límite cuando *x* tiende a 2 de una función es 3”, y los consecuentes son cada una de las proposiciones que debían señalar como verdaderas. Lo anterior nos permite asegurar que el objetivo específico 4 se alcanzó satisfactoriamente.

Presentamos ahora algunas reflexiones basadas en los resultados obtenidos. Como lo hemos mencionado, en esta parte II del cuestionario 2, nuestro foco principal se encuentra en las justificaciones que manifiestan los estudiantes en sus argumentos al realizar cada una de las tareas matemáticas.

5.3.1. SÍNTESIS DE ARGUMENTOS

En los argumentos matemáticos que anotan los estudiantes para la tarea 3 (T3_C2), observamos 3 justificaciones diferentes: si los límites laterales son finitos e iguales entonces el límite existe (teorema 12, $Q \Rightarrow P$), si los límites laterales son finitos y no son iguales entonces el límite no existe (teorema 12, $\neg Q \Rightarrow \neg P$), y si los límites laterales son finitos y no son iguales entonces el límite existe (teorema 12, $\neg Q \Rightarrow P$). De las tres justificaciones, la última es la que menos anotan, ya que solo una persona lo hace. Sin embargo, en general, menos de la sexta parte de los estudiantes evidencian justificaciones. Estas justificaciones que brindan los estudiantes son mutuamente excluyentes, es decir, no hubo un estudiante que evidenciara dos de las justificaciones al mismo tiempo en su argumento. Las justificaciones y los modos de argumentar coinciden. Todos los argumentos se representan de manera simbólica y giran en torno a un mismo elemento matemático, el teorema 12. El error que se aprecia en algunas resoluciones de esta tarea es el cálculo del límite de manera errada, ya sea al determinar el valor numérico o al calcular límites laterales.

En los argumentos matemáticos que anotan los estudiantes para la tarea 5 *parte a* (T5a_C2), observamos 6 tipos de justificaciones diferentes: evaluar directamente en la función dada, únicamente, sin hacer ningún otro procedimiento; no evaluar en un primer momento en la función, sino que transformarla en otra equivalente que permita evaluar; evaluar directamente en la función dada y obtener la forma $0/0$ y hacer una transformación de la fracción en otra equivalente que permita evaluar; hacer cálculos de límites laterales; aplicar de forma parcial La Regla de L'Hopital al derivar el numerador y el denominador de la función dada sin evaluar en la fracción resultante; y finalmente, aplicar La Regla de L'Hopital al derivar el numerador y el denominador de la función dada y evaluar en la fracción resultante. Estas justificaciones que evidenciaron los estudiantes en sus argumentos no son mutuamente excluyentes, es decir, hubo estudiantes que evidenciaron 2 justificaciones al mismo tiempo, sin embargo, prevalecieron los estudiantes que evidenciaron una única justificación en su argumento para la tarea 5 *parte a* (T5a_C2).

Las justificaciones que más exhiben los estudiantes en comparación con las demás son: no evaluar en un primer momento en la función, sino que transformarla en otra equivalente que permita evaluar; evaluar directamente en la función dada y obtener la forma $0/0$ y hacer una transformación de la fracción en otra equivalente que permita evaluar. Los estudiantes evidencian tres elementos matemáticos diferentes: el algoritmo de simplificación de fracciones algebraicas, la Regla de L'Hopital, y si los límites laterales son infinitos e iguales sí y solo sí el límite es infinito y coincide con el infinito de los límites laterales (teorema 13), los primeros dos elementos matemáticos son a la vez los dos modos de argumentar de los estudiantes en los argumentos matemáticos. Todos los argumentos son representados de manera simbólica. Y finalmente, en esta tarea los estudiantes exhiben 5 tipos de errores diferentes, siendo el de transformación de expresiones algebraicas (factorización expresiones algebraicas o expansión de expresiones algebraicas) el que más evidencian.

En general podemos decir que la tarea 3 (T3_C2) presenta menor variedad en los argumentos matemáticos brindados por los estudiantes, en comparación con la tarea 5 *parte a* (T5a_C2), ya que observamos en esta última tarea hay más variedad en las modalidades de respuesta en cada una de las ocho componentes que describimos de los argumentos matemáticos exhibidos por los estudiantes. Creemos que esto puede obedecer a que la tarea 5 *parte a* (T5a_C2) es una tarea que permite esa diversidad de argumentos para su resolución.

En los argumentos matemáticos que anotan los estudiantes para la tarea 5 *parte b* (T5b_C2), observamos que los estudiantes ponen su atención en diferentes elementos matemáticos para justificar cuál es la representación gráfica del límite dado. Tenemos que la opción más seleccionada por los estudiantes fue la opción D, que es la opción correcta.

En cuanto a los elementos matemáticos que prestaron atención los estudiantes al escoger cada una de las 6 opciones de representación disponible, tenemos que puntualizan en varios, entre ellos podemos resaltar que: aluden de manera recurrente a un crecimiento o decrecimiento sin límite de las imágenes de la función, para ello usan palabras como: tiene asíntotas, el límite es infinito o más infinito, hay un crecimiento sin límite; resaltan también lo que ocurre con las preimágenes, indican que 2 no está en el dominio de la función, pero que las preimágenes se acercan a 2, usan palabras como: los x se aproximan a 2 pero no toman su valor, existe una indeterminación en 2, etc. Cómo podemos observar en estas dos modalidades de respuesta, hay una desconexión de lo que ocurre con las preimágenes, en función de lo que hacen las imágenes. Es decir, solo se observa uno de los elementos, y por ende no hay vinculación entre ellos.

Otros elementos por los que escogen una u otra representación gráfica, son por el tipo de función, por la lateralidad del límite, por la existencia o no del límite, debido al dominio de la función, porque no existe la imagen de 2 ni de -2.

En cuanto a la relación entre el concepto de límite con el de continuidad y derivabilidad, de las respuestas a la tarea T4_C2, encontramos que una tercera parte de los estudiantes relacionan el concepto de límite con el concepto de continuidad, ya que exhiben que “si existe el límite de una función en un punto entonces la función es continua en ese punto”, sin embargo, observamos que este modo de argumentar no siempre es verdadero, lo que sí es verdadero siempre es que si una función es continua en un punto entonces el límite siempre existe en ese punto.

Por otro lado, casi una tercera parte de los estudiantes vinculan el concepto de límite con el concepto de derivabilidad, ya que señalan que “si existe el límite de una función en un punto entonces la derivada de la función existe en ese punto”, sin embargo, como podemos apreciar este modo de argumentar no se garantiza que siempre sea verdadero, lo que sí se garantiza siempre es que si una función es derivable en un punto entonces el límite siempre existe en ese punto.

5.3.2. LOS SIGNIFICADOS ELEMENTALES Y LOS RAZONAMIENTOS

En este apartado pretendemos relacionar los significados en un primer nivel de demanda cognitiva y los razonamientos, que son también parte del significado, pero con un segundo nivel de demanda cognitiva. Para ello, hemos revisado las respuestas de los estudiantes a las preguntas T3_C2 y T5_C2, especialmente el elemento matemático, el modo de argumentar y la representación usada, intentando extraer semejanzas o diferencias entre las repuestas de los estudiantes dependiendo del perfil de límite que manifestaron tras la enseñanza, en el momento 2A. Hemos elegido dichas categorías porque son las que se pueden identificar de manera clara con los aspectos de significado de los conglomerados. Así, el elemento matemático estaría asociado a los elementos estructurales, los teoremas; el modo de razonar a los modos de uso (en este caso, de la justificación) y, finalmente, la representación con la representación.

Destacamos que no hubo ningún caso donde la representación usada para justificar, fuese diferente de la simbólica, por lo que descartamos esta categoría en nuestra comparación.

No podemos realizar afirmaciones precisas, sino que nos limitaremos a comentar las características más llamativas que hemos observado, siempre teniendo en cuenta que se requeriría un estudio más profundo para corroborar estas ideas.

En primer lugar, hemos observado que en la tarea T3_C2, la afirmación correcta, A11, $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe ($\neg\exists$) (ver tabla 3.5), solo la eligieron 14 estudiantes (6%), lo que muestra la dificultad de la pregunta. De ese 6% de estudiantes, ninguno pertenecía al perfil de significados ingenuos.

Consideremos las respuestas que proporcionaron una justificación en la que se incluye un elemento matemático (el teorema 12), que son el 36% de las respuestas. Se trata de pocas respuestas, pero esta tarea solicitaba un cálculo, no que indicasen los razonamientos utilizados. El cruce de datos (Tabla 5.2) indica que los estudiantes de perfil “ingenuo” son los que, claramente, menos utilizan un elemento matemático para resolver la tarea y los de significado enriquecido los que más.

Tabla 5.2

Estudiantes, por cluster al que pertenecen, que emplean un elemento matemático cuando resuelven la tarea T3_C2.

Cluster	N. estudiantes que expresan un elemento matemático	% de estudiantes con respecto a su perfil
C1. Significado ingenuo	15	19%
C2. Significado representado gráficamente	25	49%
C3. Significado enriquecido	17	52%
C4. Significado representado no gráficamente	21	38%

Si además del elemento matemático, consideramos el modo de justificar y cuantificamos los estudiantes que ejecutan un razonamiento completo (33, el 15%), encontramos que, de nuevo, los estudiantes que pertenecen al perfil de significado enriquecido (*cluster* 3) son los que utilizan en mayor proporción las tres categorías consideradas (elemento matemático, modo de argumentar y representación) y los de perfil ingenuo los que menos.

Aunque son solo hipótesis que no hemos contrastado cuantitativamente, parece sensato pensar que estos datos fortalecen las clasificaciones realizadas.

Con respecto a la pregunta T5_C2, en la que los estudiantes sí eran animados a proporcionar una justificación, contamos con muchas más respuestas que la pregunta anterior. Al fijarnos en los elementos matemáticos que proponen, EM31, EM32, EM33 (Tabla 3.6), los estudiantes eligen los métodos procedimentales EM31 (Regla de L'Hopital) y, especialmente, EM32 (simplificación algebraica) al uso de un resultado conceptual (EM33).

Los estudiantes de los *clusters* 2 y 4, aquellos que utilizan representaciones para caracterizar el límite, son los que más utilizan elementos matemáticos (más del 80% de los miembros de cada conglomerado), y sorprende que los estudiantes de significado enriquecido (*cluster* 3) sean los que menos elementos matemáticos utilizan, incluso menos que los del *cluster* 1, el de significados ingenuos. Sin embargo, cuando centramos la atención al elemento matemático EM32, el más utilizado, son los estudiantes del *cluster* 3 los que sobresalen por su utilización.

Con respecto a la identificación de las gráficas, los estudiantes que manifiestan significados representados (*clusters* 2 y 4) son los que identifican con mayor corrección la gráfica que corresponde a la función de la tarea.

De nuevo, casi todas las comparaciones datos fortalecen las clasificaciones realizadas.

5.4. LIMITACIONES DEL ESTUDIO

En todo proceso de investigación se presentan dificultades durante su desarrollo, sin embargo, en nuestro caso, ninguna fue un obstáculo que impidiera su realización. Consideramos que la tesis se realizó de manera satisfactoria, y si hemos de señalar algunas limitaciones son las siguientes:

- Dado que el marco del significado de un contenido matemático escolar que utilizamos considera una gran variedad de elementos y componentes, es complicado abordarlos todos en una misma investigación, es por esto que muchos aspectos concretos se quedaron fuera del estudio, como por ejemplo los contextos, los fenómenos, el campo actitudinal, etc. Consideramos que dichas nociones se pueden ampliar en estudios posteriores.

- En correspondencia con lo señalado en el punto anterior, pese a que estamos satisfechos con los instrumentos empleados, somos conscientes que estos no favorecían el estudio de otros elementos del sentido, como los contextos y la fenomenología del límite, siendo la componente del sentido la menos estudiada. Por lo que se hace necesario profundizar en esta.

- La limitación propia del modelo de tesis doctoral, donde el tiempo es un condicionante, nos ha acotado la profundización de algunos elementos. Así, en el desarrollo de los objetivos 1, 2, 5 y 6 se ha invertido más tiempo del esperado y ha restringido la dedicación a los objetivos 3 y 4, por lo que manifestamos que habría que realizar un análisis más profundo de los razonamientos empleados por los estudiantes.

5.5. LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

Como señalamos en el apartado 1.4 el estudio que realizamos es un aporte a las investigaciones que se han venido desarrollando sobre el concepto de límite de una función en un punto. Sin embargo, hay mucho más por indagar, los resultados alcanzados posibilitan investigaciones que permitan profundizar y ampliar el estudio realizado. Entre ellas podemos destacar:

- Ampliar la investigación sobre la componente de sentido, analizando los contextos y los fenómenos que dan origen al límite, dentro del marco del significado de los contenidos matemáticos escolares y no como objetos aislados.
- Aunque hay investigaciones que han resaltado los errores en que incurren los estudiantes al resolver tareas sobre el concepto de límite, debe seguirse identificando errores y dificultades asociadas a este concepto.
- Ampliar el estudio de forma tal que en el instrumento se planteen tareas de respuesta abierta asociadas a los conceptos de continuidad, derivabilidad e integración para analizar los argumentos que brindan los estudiantes en su resolución de una manera más profunda. Ya que el concepto de límite está presente en estos conceptos matemáticos.
- Contrastar las relaciones de los significados expresados de nivel elemental de complejidad cognitiva y los razonamientos utilizados al realizar tareas.

- Un aspecto más concreto es el perfeccionamiento del sistema de categorías de análisis, que, aunque validado, no ha sido refinado.

5.6. DIFUSIÓN DE LOS RESULTADOS DE LA TESIS

Los resultados de este trabajo no solo se encuentran presentados aquí, sino que han sido o están siendo difundidos por diversos medios.

- González-Flores et al. (2021) es un artículo publicado en la revista Uniciencia, indexada en Scopus, que recopila los resultados del momento 1 y el proceso de elaboración, valoración y aplicación del sistema de categorías que sirve de instrumento para toda la tesis.
- González-Flores et al. (2022a, 2022b) son dos comunicaciones presentadas en congresos nacional e internacional, respectivamente, que sintetizan las ideas de enriquecimiento de los significados que expresan los estudiantes cuando a las definiciones les incluyen representaciones, modos de uso y aplicaciones.
- González-Flores et al. (en prensa) es un documento que está siendo valorado en una revista indexada en Scopus, con el que se pretende dar difusión a los resultados obtenidos en el momento 1 de la investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apostol, T. (1967a). Continuous functions. En T. Apostol (Ed.), *Calculus* (Second Edition., Vol. 1, pp. 126-155). John Wiley & Sons, Inc.

Apostol, T. (1967b). Differential Calculus. En T. Apostol (Ed.), *Calculus* (Second Edition., Vol. 1, pp. 156-201). John Wiley & Sons, Inc.

Arce, M. y Ortega, T. (2015). ¿Qué anotan los estudiantes durante una presentación intuitiva del concepto de límite? Relación con el significado del concepto. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 133-141). SEIEM.

Banach, S. (1967a). Límite de una función. En G. Garcia, A. Barra, C. Job y L. Margulez (Eds.), *Cálculo diferencial e integral* (Segunda Edición., pp. 40-54). Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. [Original publicado en ruso].

Banach, S. (1967b). Continuidad de las funciones. En G. Garcia, A. Barra, C. Job y L. Margulez (Eds.), *Cálculo diferencial e integral* (Segunda Edición., pp. 55-70). Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. [Original publicado en ruso].

Banach, S. (1967c). Derivada y diferencial de una función. En G. Garcia, A. Barra, C. Job y L. Margulez (Eds.), *Cálculo diferencial e integral* (Segunda Edición., pp. 71-108). Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. [Original publicado en ruso].

Bartle, R. y Sherbert, D. (2000a). Limits. En R. Bartle y D. Sherbert (Eds.), *Introduction to real analysis* (Third Edition, pp. 96-118).

Bartle, R. y Sherbert, D. (2000b). Continuous functions. En R. Bartle y D. Sherbert (Eds.), *Introduction to real analysis* (Third Edition, pp. 119-156).

Bartle, R. y Sherbert, D. (2000c). Differentiation. En R. Bartle y D. Sherbert (Eds.), *Introduction to real analysis* (Third Edition, pp. 157-192).

Bell, A.W., Costello, J. & Küchemann, D. E. (1983). *A review of research in mathematical education: research on learning and teaching.* The NFER-NELSON Publishing Company Ltd.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: The concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-81). Springer.

Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. En T. Ortega (Ed.), *Investigación en Educación Matemática III* (pp. 167-184). SEIEM.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales* [Tesis doctoral no publicada, Universidad de Valladolid].

Blázquez, S., y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula, 10*, 1998, 119-135.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *4*(3), 219-236.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30,* 67-82.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME, 12*(1), 145-168.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(2), 189-209.

Bokhari, M. A. y Yushau, B. (2006). Local (L,e)-approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*(5), 515-526.

Bruner, J. (1990). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Alianza.

Bunge, M. (2008). *Semántica I. Sentido y referencia*. Gedisa editorial.

Burns-Childers, A. y Vidakovic, D. (2017). Calculus students'understanding of the vertex of the quadratic function in relation to the concept of derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, online. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1409367

Byerley, C. y Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *Journal of Matheatical Behavior, 48,* 168-193. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En Rico,L. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Horsori.

Castro-Rodríguez, E. (2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros.* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/40316

Castro, A., Prat, M. y Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación, 374, 43-68*

Claros, F. J. (2010). *Límite finito de sucesiones: Fenómenos que organiza* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. https://digibug.ugr.es/handle/10481/5663

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA*, *1*(3), 125-137.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8th ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167- 192. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90015-2

Cornu, B. (2002). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

Courant, R. y John, F. (1999a). Introducción. En S. Hahn, R. Jiménez y J. Florio (Eds.), *Introducción al cálculo y al análisis matemático* (Vol. 1, pp. 25-40). Limusa. [Original en inglés publicado en 1965].

Courant, R. y John, F. (1999b). Las ideas fundamentales del cálculo diferencial e integral. En S. Hahn, R. Jiménez y J. Florio (Eds.), *Introducción al cálculo y al análisis matemático* (Vol. 1, pp. 141-221). Limusa. [Original en inglés publicado en 1965].

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17-24.

Dummett, M.A.E. (1991). ¿Qué es una teoría del significado? En, L.M. Valdés (Ed.), *La búsqueda del significado*. Tecnos. [original en inglés publicado en 1975]

Estrella, M. (2015). *Significados escolares de la noción de tendencia de una función en un punto, perfiles y singularidades* [Trabajo de fin de máster, Universidad de Granada].

Fernández-Plaza, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto.* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/40370

Fernández-Plaza, J. (2016). Análisis del contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 103-118). Ediciones Pirámide.

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2013a). Concept of Finite Limit of a Function at a Point: Meanings and Specific Terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 699-710.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Castro, E. (2013b). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, *7*(3), 117-130.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2013c). Análisis conceptual de términos específicos. Concepto de límite finito de una función en un punto. *Gaceta de la RSME*, *16*(1), 131-145.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias*. *33*(2), 211-229.

Frege, G. (1998). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de Semántica y Lógica* (pp. 84-111). Tecnos.

González-Flores, Y., Montoro-Medina A. B. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2021). Análisis de las definiciones de límite que brindan estudiantes universitarios. *UNICIENCIA*, *35*(2), 1-20. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.18

González-Flores, Y., Montoro, A.B. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022a), Cómo las representaciones y los modos de uso enriquecen las definiciones de límite. En J. M.

Palomares-Rodríguez (Comp.), *Avances en Ciencias de la Educación y en otras áreas, Vol. 1* (p. 69). Editorial Dykinson.

González-Flores, Y., Montoro, A.B. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022b), Meanings of limit of a function enriched by means of representations and modes of use. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, p. 216). PME and Universidad de Alicante.

González-Flores, Y., Montoro, A.B. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (en prensa), Significado del límite expresado por estudiantes universitarios.

Güçler, B. (2013). Examinando el discurso sobre el concepto de límite en un aula de cálculo de nivel inicial. *Educational Studies in Mathematics, 82* , 439–453. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9438-2

Härdle, W. y Simar, L. (2015). *Applied multivariate statistical analysis* (4th ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-45171-7

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (Sexta edición). McGraw Hill.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: The case of Mathematics* (pp. 1-28). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Jacques, A. y Viol, J. (2020). Uma Experiência de Ensino por meio do Uso de Tarefas: limites e possibilidades para a aprendizagem de Matemática em um contexto universitário. *Acta Scientiae*, *22*(2), 67-85. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5411

Jiménez, A. (2017). S*ignificados de la derivada en las pruebas de evaluación de bachillerato para el acceso a la universidad.* [Trabajo de fin de máster, Universidad de Granada].

Kaput, J. (1987). Representations Systems and Mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Lawrence Erlbaum Associated.

Khalloufi-Mouha, F. y Smida, H. (2012). Constructing mathematical meaning of a trigonometric function through the use of an artefact. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), 207-224. http://dx.doi.org/10.1080/10288457.2012.10740740

Kidron, I. (2011). Constructing knwledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(6), 1261-1279.

Kidron, I. (2014). Calculus teaching and learning. En *Encyclopedia of mathematics education*. (pp. 69-75). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_18

Kidron, I. y Tall, D. (2014). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics, 88,* 183-199. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9567-x

Kilpatrick, J., Hoyles, C. y Skovsmose, O. (Eds.). (2005). Meanings of meaning of mathematics. En *Meaning in Mathematics Education* (pp. 9-16). Springer.

Knipping, C. y Reid, D. (2013). Revealing structures of argumentations in classroom proving processes. En A. Aberdein y I. Dove (Eds.), *The argument of mathematics* (pp. 119-146). Springer.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology* (Second Edition). Sage Publisingh.

Lang, S. (1968a). Limits and continuous functions. En S. Lang (Ed.), *Analysis I* (pp. 30-55). Addison- Wesley Publishing Company.

Lang, S. (1968b). Differentiation. En S. Lang (Ed.), *Analysis I* (pp. 56-64). Addison- Wesley Publishing Company.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 225-276. https://doi.org/10.1007/sl0649-007-91

López, M., Valls, J. y Llinares, S. (2013). Un experimento de enseñanza sobre el límite de una función. Factores determinantes en una trayectoria de aprendizaje. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *36*, 89-107.

Martín-Fernández, E. (2021). *Meanings shown by students and teachers in training on the sine and cosine of an angle.* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/68166

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de Las Ciencias*, *34*(3), 51-71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2019). Meaning and Understanding of School Mathematical Concepts by Secondary Students: The Study of Sine and Cosine. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15* (12), em 1782. https://doi.org/10.29333/ejmste/110490

Matthewson, L. (2004). On the methodology of semantic fieldwork. *International Journal of American Linguistics*, *70* (4), 369-415. https://doi.org/10.1086/429207

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 243/2022, de 5 de marzo, por el que se establecen la ordenación y enseñanzas mínimas del bachillerato. *Boletín Oficial del Estado, 8.*

Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, *11*(3), 20-24. https://flm-journal.org/Articles/3905D8E2472320B3602153840B1E86.pdf

Montiel, M., Wilhelmi, M. R., Vidakovic, D. y Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*, *72*, 139-160. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9184-2

Neuendorf, K. (2017). *The Content Analysis Guide*book (Second Edition). Sage publications. https://doi.org/10.4135/9781071802878

Palomino, J. C., Hurtado, J. y Barrios, E. (2009). Dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite y su relación con los sistemas de representación. En *Encuentro Internacional de Matemáticas* (pp.18-21). EIMAT.

Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence in children*. W.W. Norton.

Piaget, J. y Garcia, R. (1991). *Toward a logic of meanings*. Lawrence Erlbaum Associates.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. Routledge.

Pozniak, V. (1991a). Concepto de función. Valor límite de la función. Continuidad. En M. Andriánova (Ed.), *Fundamentos del análisis matemático* (Tomo 1, pp. 88-143). Mir. [Original en ruso publicado en 1982].

Pozniak, V. (1991b). Fundamentos del cálculo diferencial. En M. Andriánova (Ed.), *Fundamentos del análisis matemático* (Tomo 1, pp. 144-177). Mir. [Original en ruso publicado en 1982].

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, *55*, 103-132. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017667.70982.05

Reid, D. y Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education*. Sense Publishers.

Rencher, A. C. (2002). *Methods of Multivariable Analysis*. John Wiley and Sons.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Unión. Revista iberoamericana de matemática educativa*, *33*, 11-27.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Horsori.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *(1)*, 39-63. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *(33)*, 11–27. http://funes.uniandes.edu.co/15988/1/Rico2013El.pdf

Rico, L. (2016a). Matemática y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85-100). Ediciones Pirámide.

Rico, L. (2016b). Significados de los contenidos matemáticos. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 153-174). Ediciones Pirámide.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis Didáctico y metodología de investigación. En L. Rico., J. Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. (pp.1-22). Comares.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. Y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en educación matemática*. Comares.

Rico, L. y Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria.* Ediciones Pirámide.

Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Ideas to Work for the Curriculum Change in School Mathematics. En Y. Shimizu y R. Vital (Eds.), *ICMI Study 24 Conference proceedings. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities* (pp. 301-308). ICMI.

Romero, I. (1997). *La introducción del número real en educación secundaria: una experiencia de investigación-acción*. Comares.

Royden, H. (1968). The real number system. En H. Royden (Ed.), *Real Analysis* (Second Edition., pp.29-51). Macmillan Publishing Co., Inc.

Ruiz-Hidalgo, J. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 139-151). Ediciones Pirámide.

Ruiz-Hidalgo, JF. y Fernández-Plaza, JA. (2013). Análisis de tareas de cálculo de límites en un punto en las que intervienen identidades notables. En L. Rico., M.C. Cañadas., J. Gutierrez., M. Molina. y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro.* (pp.127-134). Comares.

Sánchez, M. (2012). *Límite finito de una función: Fenómenos que organiza*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. https://digibug.ugr.es/handle/10481/23782

Serrano, J. (2017). *Estudio comparativo de manuales universitarios de cálculo sobre el cálculo integral*. [Trabajo de fin de máster, Universidad de Granada].

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematics, 22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(4), 371-397.

Sierpinska, A. (1990), Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*, 3, p. 24-36.

Sierra, M., González, M. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(1), 71-85.

Sim, J. y Wright, C. (2005). The Kappa Statistic in Reliability Studies: Use, Interpretation, and Sample Size Requirements. *Physical Therapy*, *85*(3), 257-268. https://doi.org/10.1093/ptj/85.3.257

Skovmose, O. (2005). Meaning in mathematics education. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 83-100). Springer.

Solow, D. (2006). *Introducción al razonamiento matemático* (Segunda edición). Limusa.

Spivak, M. (1992a). Límites. En B. Frontera (Ed.), *Cálculo infinitesimal* (Segunda Edición, pp. 106-140). Reverté. [Original publicado en inglés].

Spivak, M. (1992b). Funciones continuas. En B. Frontera (Ed.), *Cálculo infinitesimal* (Segunda Edición, pp. 141-150). Reverté. [Original publicado en inglés].

Spivak, M. (1992c). Tres teoremas fuertes. En B. Frontera (Ed.), *Cálculo infinitesimal* (Segunda Edición, pp. 151-170). Reverté. [Original publicado en inglés].

Spivak, M. (1992d). Derivadas. En B. Frontera (Ed.), *Cálculo infinitesimal* (Segunda Edición, pp. 197-226). Reverté. [Original publicado en inglés].

Sprecher, D. (1970a). Continuity. En D. Sprecher (Ed.), *Elements of Real Analysis* (pp. 151-182). Dover Publications, Inc.

Sprecher, D. (1970b). Differentiability. En D. Sprecher (Ed.), *Elements of Real Analysis* (pp. 183-203). Dover Publications, Inc.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(1), 49-92. https://doi.org/10.1023/A:1002919830949

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 133-162. https://doi.org/10.1007/s10649-006-5892-z

Stylianides, A. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike, *The Journal of Mathematical Behavior, 7*(4), 765-790.

Tall D. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 170-176). PME.

Tall, D. y Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit, and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9531-9

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Thompson, P. (2013). In the absence of meaning…. En K. Leatham (Ed.), *Vital directions for research in mathematics education* (pp. 57-93). Springer.

Thompson, P. (2016). Researching mathematical meanings for teaching. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 435-461). Taylor and Francis.

Thompson, P., Carlson, M. P., Byerley, C. y Hatfield, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: A hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra. En L. P. Steffe, L. L. Hatffield y K. C. Moore (Eds.), *Epistemic algebra students: Emerging models of students' algebraic knowing, WISDOMe Monographs: Vol. 4* (pp. 1-24). University of Wyoming.

Thompson, P. y Milner, F. (2019). Teachers' Meanings for Function and Function Notation in South Korea and the United States. En H. G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand y G. Schubring (Eds.), *The Legacy of Felix Klein* (pp. 55-66). Springer.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambrige University Press.

Vargas, M. (2017). S*ignificado que le atribuyen los futuros profesores al concepto de derivada de una función en un punto* [Trabajo de fin de máster]. Universidad de Granada.

Vargas, M. F. (2020). *La derivada de una función desde la perspectiva de los profesores de matemática de 1º de Bachillerato* [Tesis doctoral, Universidad de Granada] http://hdl.handle.net/10481/63624

Vargas, M.F., Fernández-Plaza, J.A. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2020). La derivada en los libros de texto de 1º de bachillerato: Un análisis a las tareas propuestas. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 18, 87-102. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.288

Vargas, M.F., Fernández-Plaza, J.A. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2023). Pre-service teachers' understanding of the derivative of a function at a point. *International journal of mathematical education in science and technology, 54*, 1-28. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1957504

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development, 52*, 83-94. https://doi.org/10.1159/000202727

Vergnaud, G. (2013). Conceptual development and learning. *Revista Curriculum*, *26*, 39-59. https://qurriculum.webs.ull.es/0_materiales/articulos/Qurriculum%2026/Qurriculum%2026-2013(3).pdf

Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D. y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA*, *8*(29), 9-19.

Wang, W. (2011). *A Content Analysis of Reliability in Advertising Content Analysis Studies* [Tesis de maestría, East Tennessee State University]. https://dc.etsu.edu/etd/1375/

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for research in Mathematics Education, 22*(3), 219-236.

Wrede, R. y Spiegel, M. (2002a). Functions, limits, and continuity. En R. Wrede y M. Spiegel (Eds.), *Theory and problems of advanced calculus* (Second Edition, pp.39-64). McGraw-Hill.

Wrede, R. y Spiegel, M. (2002b). Derivatives. En R. Wrede y M. Spiegel (Eds.), *Theory and problems of advanced calculus* (Second Edition, pp.65-89). McGraw-Hill.

ANEXOS DEL ESTUDIO

ANEXO 1: CUESTIONARIO APLICADO A LOS ESTUDIANTES DURANTE LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE LÍMITE

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Se ha elaborado este cuestionario con el propósito de recoger información sobre los conceptos de límites de funciones reales de variable real.

No es un examen. Es una exploración inicial para que revisar algunos conocimientos sobre el tema de "Límite de una función" en este curso.

Contéstelo de forma individual, con creatividad e interés.

- Responda a cada actividad en los lugares facilitados para ello.
- Si se equivoca no borre, sino tacha la respuesta con una raya o escríbala entre paréntesis. Esto es necesario para analizar sus respuestas.

Muchas gracias de antemano.

Nombre y apellidos: ____

Edad: ____

Sexo: ____

Carrera matriculada por la que lleva este curso: ____________________________

Nombre del colegio del que es egresado: _________________________________

Indique la modalidad del colegio del que es egresado (público, privado, científico, u otro):
____

Ha aprobado cursos de matemática en la Universidad Nacional o en alguna otra universidad (pública o privada), o en alguna otra modalidad (ejemplo MATEM): _______________

En caso afirmativo escriba todos los cursos que ha aprobado: __________________
____
____
____
____

Actividad N°1

1. Escriba la definición de **límite de una función en un punto** que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).

2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior. **(Tarea 1: T1_C1)**

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**. **(Tarea 2: T2_C1)**

4. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites? **(Tarea 3: T3_C1)**

Actividad N°2

1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario. **(Tarea 4: T4_C1)**

ANEXO 2: CUESTIONARIO APLICADO A LOS ESTUDIANTES DESPUÉS DE LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Cuestionario 2

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Se ha elaborado este cuestionario con el propósito de recoger información sobre sus conocimientos del concepto de límites de funciones reales de variable real.

No es un examen. Es una exploración inicial para revisar algunos conocimientos sobre el tema de "Límite de una función" en este curso.

Contéstelo de forma individual, con creatividad e interés.

- Responda a cada actividad en los lugares facilitados para ello.
- Si se equivoca no borre, sino tache la respuesta con una raya o escríbala entre paréntesis. Esto es necesario para analizar sus respuestas.

Muchas gracias de antemano.

Nombre y apellidos: ____________________

Edad: ____________________

Sexo: ____________________

Carrera matriculada por la que lleva este curso: ____________________

Nombre del colegio del que es egresado: ____________________

Indique la modalidad del colegio del que es egresado (público, privado, científico, u otro): ____________________

Ha aprobado cursos de matemática en la Universidad Nacional o en alguna otra universidad (pública o privada), o en alguna otra modalidad (ejemplo MATEM): ____________________

En caso afirmativo escriba todos los cursos que ha aprobado: ____________________

____

____

____

____

Actividad N°1

5. Sobre la definición de límite de una función en un punto.
a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).
b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior. **(Tarea 1: T1_C2)**
c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a**. **(Tarea 1: T1_C2)**

6. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites? ¿Qué tipo de problemas se pueden resolver usando límites? **(Tarea 2: T2_C2)**

Actividad N°2

2. Sea g una función real de variable real tal que $g(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ 2^{-1000} & \text{si } 0\le x\le 2^{-1000} \\ x & \text{si } x>2^{-1000} \end{cases}$.

   Calcule $\lim\limits_{x\to 0} g\left(x\right)$. **(Tarea 3: T3_C2)**

3. Sea f una función real de variable real tal que $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=3$. Encierre con un círculo la letra de las proposiciones que considere verdaderas (puede encerrar más de una si lo considera necesario). Si no considera ninguna verdadera, encierre con un círculo la proposición f. **(Tarea 4: T4_C2)**

a. f es continua en el punto $x=2$.

b. f está definida en $x=2$.

c. $f\left(2\right)=3$.

d. $\lim\limits_{h\to 0}\left[f\left(2+h\right)-3\right]=0$.

e. $f'\left(2\right)$ existe.

f. Ninguna de las proposiciones mencionadas es verdadera.

4. Considere la siguiente expresión $\lim_{x \to 2} \left[\frac{3x^2 - 12}{(x-2)^3 (2x^2 + 1)} \right]$.

a. Calcule el límite anterior. **(Tarea 5a: T5a_C2)**

b. Identifique la gráfica de la función con una de las representaciones dadas en la plantilla de gráficas que se encuentra en la página 6. Justifique su elección. **(Tarea 5b: T5b_C2)**

Plantilla de gráficas