UNIVERSITÄT BAYREUTH

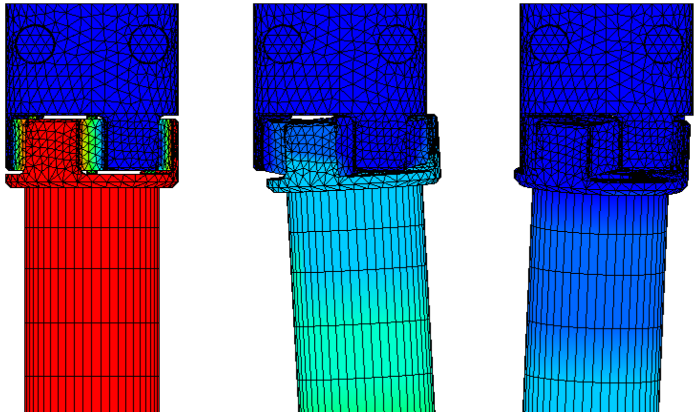
Frequenzganganalyse reduzierter FE-Strukturen

Stationäre strukturdynamische Simulation im Frequenzbereich auf Basis von Z88

Johannes Wittmann, Florian Hüter

24. Bayreuther 3D-Konstrukteurstag

Bayreuth,13.09.2023



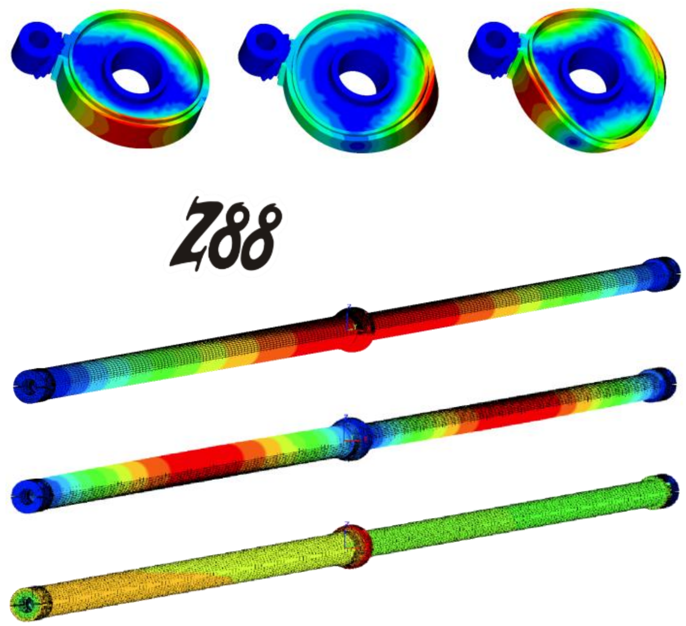
[rw-kupplungen]

Lehrstuhl für
Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel

Frequenzganganalyse reduzierter FE-Strukturen

Gliederung

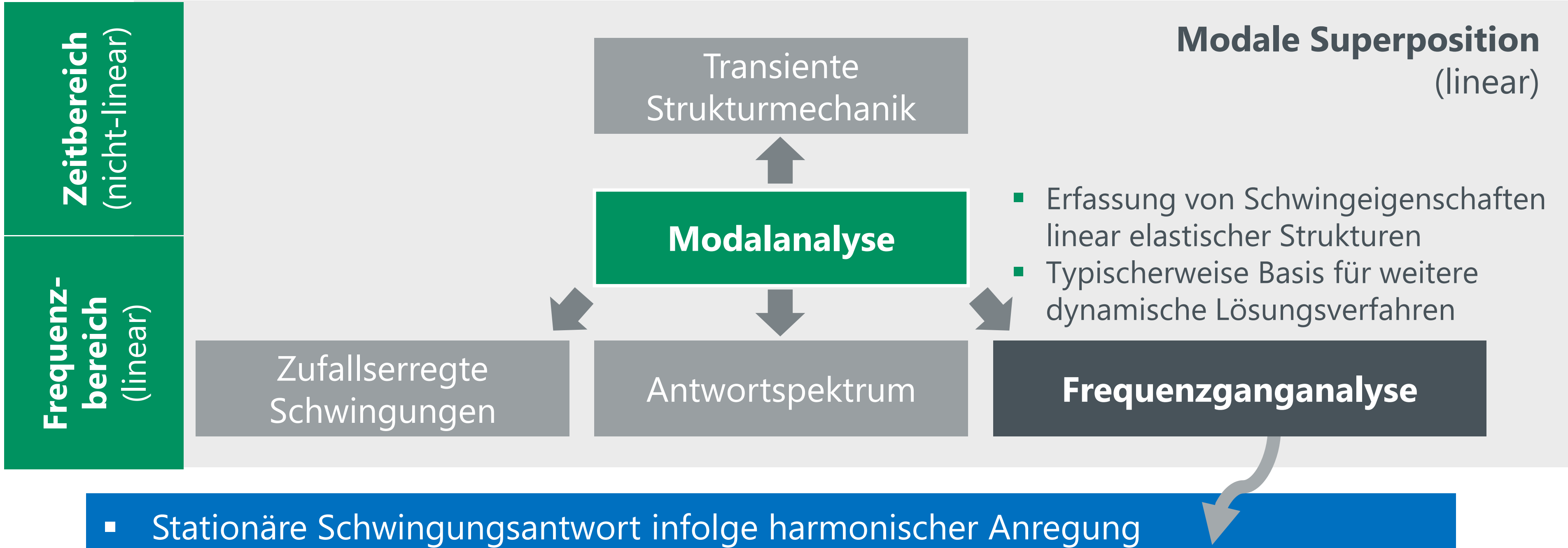
- Überblick möglicher Lösungsverfahren in der FE-Strukturdynamik
- Modalanalyse mit Z88
- Frequenzganganalyse
  - Modalanalyse und dynamische Reduktion als Basis
  - Akademisches Beispiel: Analytischer Kragbalken
- Anwendungsfall: Gelenkwelle
- Zusammenfassung, Fazit & Ausblick



Frequenzganganalyse reduzierter FE-Strukturen

Überblick möglicher Lösungsverfahren in der Strukturdynamik

UNIVERSITÄT BAYREUTH



- Stationäre Schwingungsantwort infolge harmonischer Anregung
- Nichtlinearitäten können nicht betrachtet werden
- Einteilung erfolgt in Ansätze zur direkten Lösung des Vollmatrizensystems bzw. zur Lösung via modaler Superposition (kraftangeregte, modale Superposition)

[STELZMANN, CAE-WIKI.INFO]

Frequenzganganalyse reduzierter FE-Strukturen

Modalanalyse als Grundlage der Frequenzganganalyse

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Ungedämpftes Eigenwertproblem (EWP)

- Allgemeine **Bewegungsgleichung** des FE-Modells

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}(t)$$

- Vernachlässigung der Dämpfung in Bewegungsgleichung
→ reelle Eigenwerte und Eigenvektoren als Ergebnis

- Freie Schwingungen
→ keine Berücksichtigung äußerer Kräfte

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0}$$

- Lösungsansatz $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\phi} e^{i\omega t}$ ergibt allgemeines Eigenwertproblem (EWP)

$$\left(\boldsymbol{K} - \omega_k^2 \boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{\phi} = 0$$

mit **Eigenkreisfrequenzen** ω_k und **Eigenmoden** $\boldsymbol{\phi}$ als Ergebnis

Transformation EWPs für bessere Lösbarkeit

- Transformation ins Standard-Eigenwertproblem:

$$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi}$$

mit $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ und $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{L}^{-\mathrm{T}}$

- Shift & invert spectral transformation:

$$(\boldsymbol{K} - \sigma\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi} = \nu\boldsymbol{\phi}$$

mit $\lambda = \sigma + \frac{1}{\nu}$

  - ➢ Rücktransformation größter Eigenwerte ν führt zu kleinsten Eigenwerten λ des Originalsystems
  - ➢ Lösungsverfahren: Implicitly Restarted Arnoldi Method (IRAM) mit ARPACK (ARnoldi PACKage)

→ Effektive Berechnung von Eigenwerten nahe σ im **relevanten Frequenzbereich**

[SCHWARZ, KÖCKLER, HETMANIUK, DOI:10.1137/1.9780898719628]

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Reduktion der Modellordnung

- Vorabreduktion der Bewegungsgleichung auf interessierende Freiheitsgrade zur numerischen Aufwandsminimierung in der Frequenzganganalyse
- **Dynamische Reduktionsverfahren**
  - HURTY/CRAIG-BAMPTON (statisch-modal gemischt)

$$\boldsymbol{T}_{dyn}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{K}_{sm} & \boldsymbol{\Phi}_s \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{K}_{red}^{dyn} &= \boldsymbol{T}_{dyn}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}_{dyn} \\ \boldsymbol{M}_{red}^{dyn} &= \boldsymbol{T}_{dyn}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}_{dyn} \end{aligned}$$

  - Modale Entkopplung & Reduktion mittels ungedämpfter Eigenmoden

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{y} \approx \sum_{j=1}^{\bar{n} \ll n} \boldsymbol{\varphi}_j \cdot y_j \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{M}_d &= \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi} \rightarrow m_j \\ \boldsymbol{K}_d &= \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi} \rightarrow k_j \end{aligned}$$

Modalanalyse λ, Φ

↓ ↓

Modellordnungs-Reduktion

Modale Reduktion ($\boldsymbol{K}_d, \boldsymbol{M}_d$ entkoppelt)	*oder*	**HURTY/CRAIG-BAMPTON** ($\boldsymbol{K}_{red}^{dyn}, \boldsymbol{M}_{red}^{dyn}$ dicht besetzt)

↓ ↓

Frequenzganganalyse $u(\Omega)$
(Modenüberlagerung)

→ Effiziente Berechnung erzwungener Schwingungen im Frequenzbereich möglich

[HURTY/CRAIG-BAMPTON, NASDALA, GASCH]

Frequenzganganalyse reduzierter FE-Strukturen

Frequenzganganalyse – Grundlagen

FE-Frequenzganganalyse

FE-Vollmodell (ohne Reduktion) mit Frequenzgangmatrix $\boldsymbol{H}(\Omega) = [\boldsymbol{K} - \Omega^2\, \boldsymbol{M} + i\Omega \boldsymbol{C}]^{-1}$ und Anregungsfrequenz Ω

$$[K - \Omega^2 M + i\Omega C]\{u_{Re} + iu_{im}\} = \{F_{Re} + iF_{Im}\}$$

$$\underline{\boldsymbol{u}} = \underline{\boldsymbol{H}}(\Omega)\underline{\boldsymbol{F}}$$

- Bewegungsgleichung des reduzierten FE-Modells nach HURTY/CRAIG-BAMPTON

$$\boldsymbol{M}^{dyn}_{red} \begin{bmatrix} \ddot{u}_m \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \left[\alpha \boldsymbol{M}^{dyn}_{red} + \beta \boldsymbol{K}^{dyn}_{red}\right] \begin{bmatrix} \dot{u}_m \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \boldsymbol{K}^{dyn}_{red} \begin{bmatrix} u_m \\ q \end{bmatrix} = f^{dyn}_{red}$$

- Bewegungsgleichung der modal reduzierten, entkoppelten Diagonalstruktur

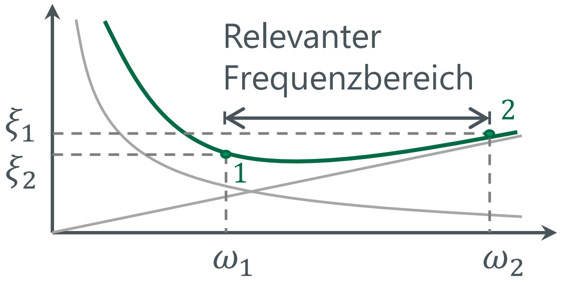
$$[\Phi]^T\,[M][\Phi]\{\ddot{y}\} + [\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{y}\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{y\} = [\Phi]^T\{F\}$$

Berücksichtigung von Dämpfungseffekten

- Proportionale Dämpfungsmatrix nach RAYLEIGH

$$\boldsymbol{C} = \alpha \boldsymbol{M} + \beta \boldsymbol{K}$$

→ Masse- & Steifigkeitsverteilung als Maß der Dämpfung



$$\xi_j = \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta\omega_j}{2}$$

- Direkte Vorgabe des Dämpfungsgrades je Eigenmode

$$\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi} = c_j = \xi_j \cdot 2m_j\omega_j$$

→ Kenntnis der Dämpfungsgrade ξ_j in der Praxis schwierig

→ Bestimmung beispielsweise über Halbwertsbreitenansatz oder werkstoffspezifischen Verlustfaktor möglich (experimentelle Modalanalyse erforderlich)

[COOK, DRESIG, CADFEM, FRANCK, DOI:10.1007/S00502-022-01010-7]

Frequenzganganalyse – akademisches Beispiel: Kragbalken

UNIVERSITÄT BAYREUTH

FE-Frequenzganganalyse

FE-Vollmodell (ohne Reduktion) mit Frequenzgangmatrix $\boldsymbol{H}(\Omega) = [\boldsymbol{K} - \Omega^2 \boldsymbol{M} + i\Omega\boldsymbol{C}]^{-1}$ und Anregungsfrequenz Ω

$$[K - \Omega^2 M + i\Omega C]\{u_{Re} + iu_{im}\} = \{F_{Re} + iF_{Im}\}$$

$$\underline{\boldsymbol{u}} = \underline{\boldsymbol{H}}(\Omega)\underline{\boldsymbol{F}}$$

- Bewegungsgleichung des reduzierten FE-Modells nach HURTY/CRAIG-BAMPTON

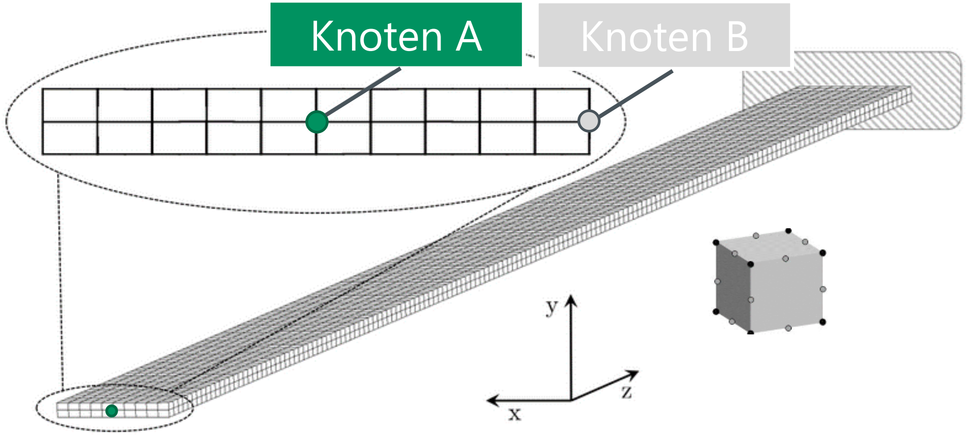
$$\boldsymbol{M}_{red}^{dyn} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{u}}_m \\ \ddot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} + \left[\alpha \boldsymbol{M}_{red}^{dyn} + \beta \boldsymbol{K}_{red}^{dyn} \right] \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_m \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{K}_{red}^{dyn} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_m \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}_{red}^{dyn}$$

- Bewegungsgleichung der modal reduzierten, entkoppelten Diagonalstruktur

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{y}\} + [\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{y}\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{y\} = [\Phi]^T\{F\}$$

Akademisches Berechnungsbeispiel

Position der zu Anregungs- bzw. Auswertungs-Freiheitsgrade



$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{F}_{0,y}^{C}\cos(\Omega t)$$

Harmonische Kraftanregung am freien Ende und Verformungsauswertung Knoten A

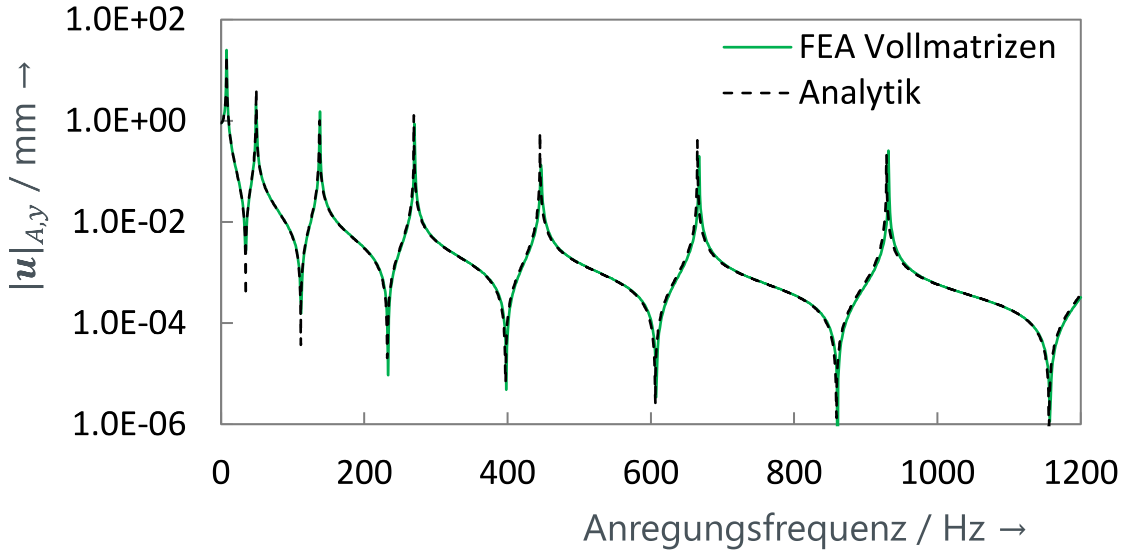
→ Abgleich mit analytischer Lösung am EULER-BERNOULLI-Balken

[PIETRUSZKA, GASCH, CADFEM]

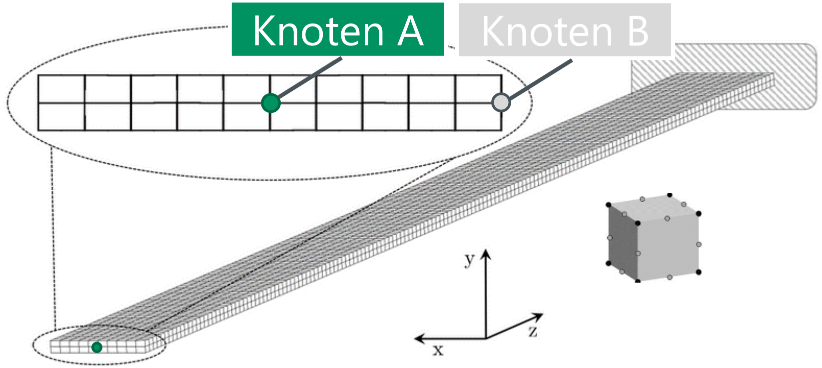
Frequenzganganalyse reduzierter FE-Strukturen

Frequenzganganalyse – akademisches Beispiel: Kragbalken

FE-Frequenzganganalyse ohne Reduktion vs. analytische Lösung



Position der zu Anregungs- bzw. Auswertungs-Freiheitsgrade



$\boldsymbol{F}_\mathrm{A} = \boldsymbol{F}^{C}_{0,y}\cos(\Omega t)$

- Durch Anregung und Auswertung an Knoten A sind Amplitudenpeaks bei allen im Frequenzbereich liegenden Biegeschwingungen erkennbar
- Gute Übereinstimmung zwischen FEA und Analytik

→ Analytische Lösung am EULER-BERNOULLI-Balken

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_y\frac{d^2W}{dx^2}\right)\cos\Omega t-\Omega^2\rho A W\cos\Omega t=q_0\cos\Omega t$$

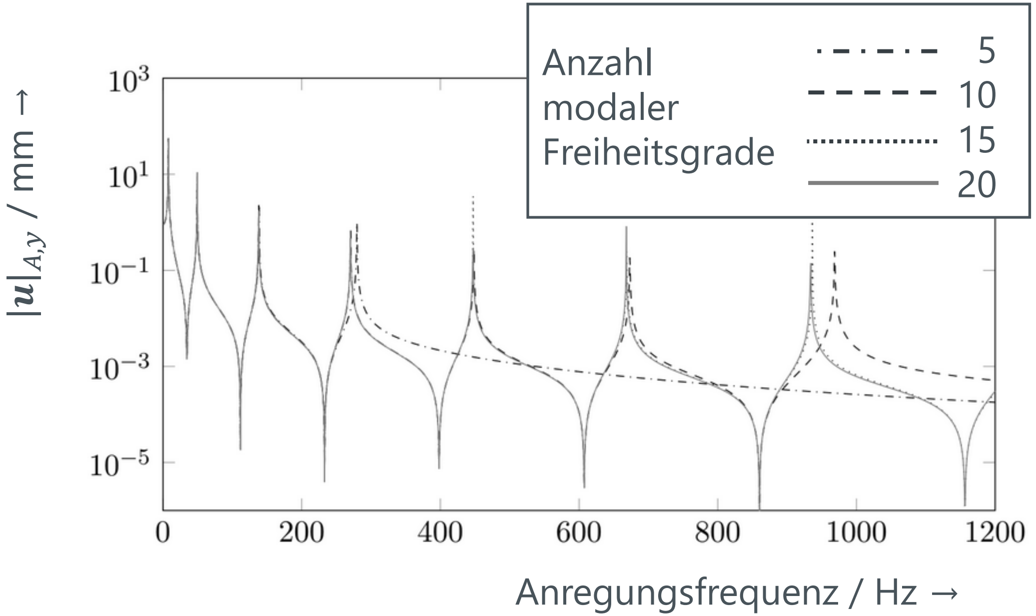
[WANDINGER, PIETRUSZKA]

Frequenzganganalyse reduzierter FE-Strukturen

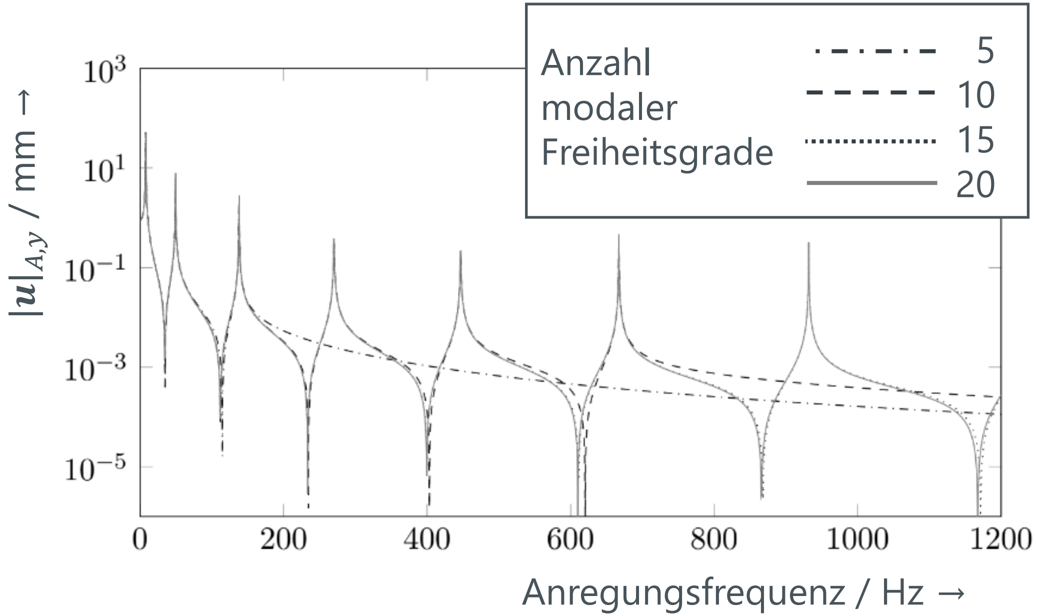
Frequenzganganalyse – akademisches Beispiel: Kragbalken

FE-Frequenzganganalyse mit dynamischer & modaler Reduktion

HURTY/CRAIG-BAMPTON



Modale Reduktion



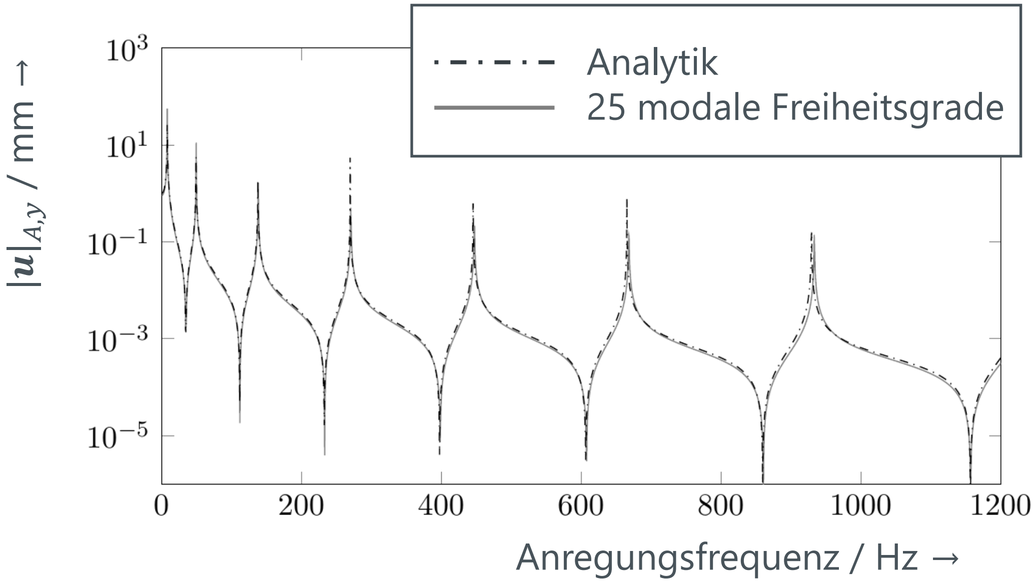
➢ **Für vollständige Erfassung der dynamischen Information im relevanten Frequenzbereich ist eine erhöhte Anzahl überlagerter Eigenmoden (modaler Freiheitsgrade) erforderlich**

Frequenzganganalyse reduzierter FE-Strukturen

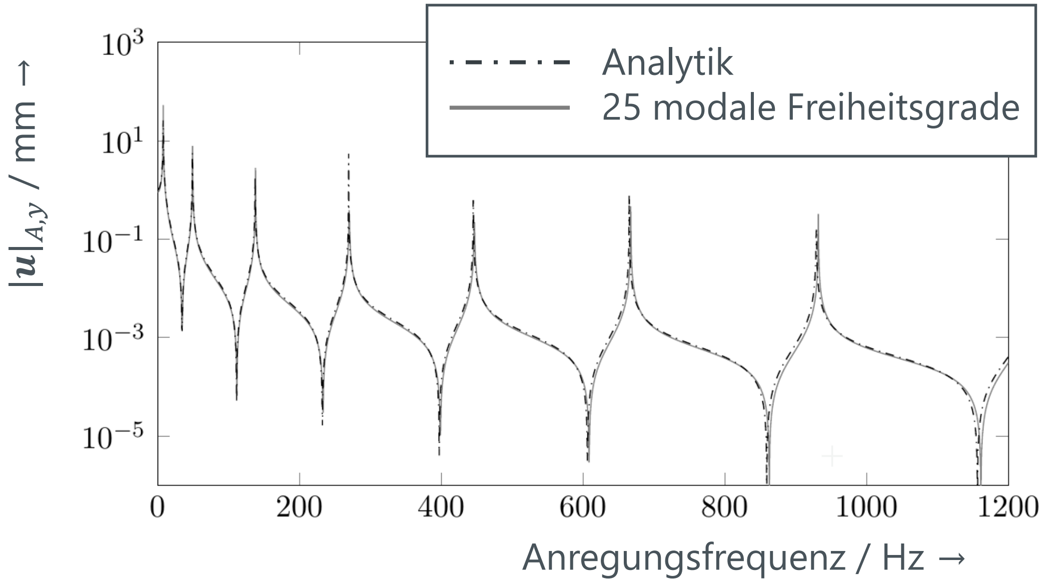
Frequenzganganalyse – akademisches Beispiel: Kragbalken

FE-Frequenzganganalyse mit Reduktion vs. analytische Lösung

HURTY/CRAIG-BAMPTON vs. Analytik



Modale Reduktion vs. Analytik

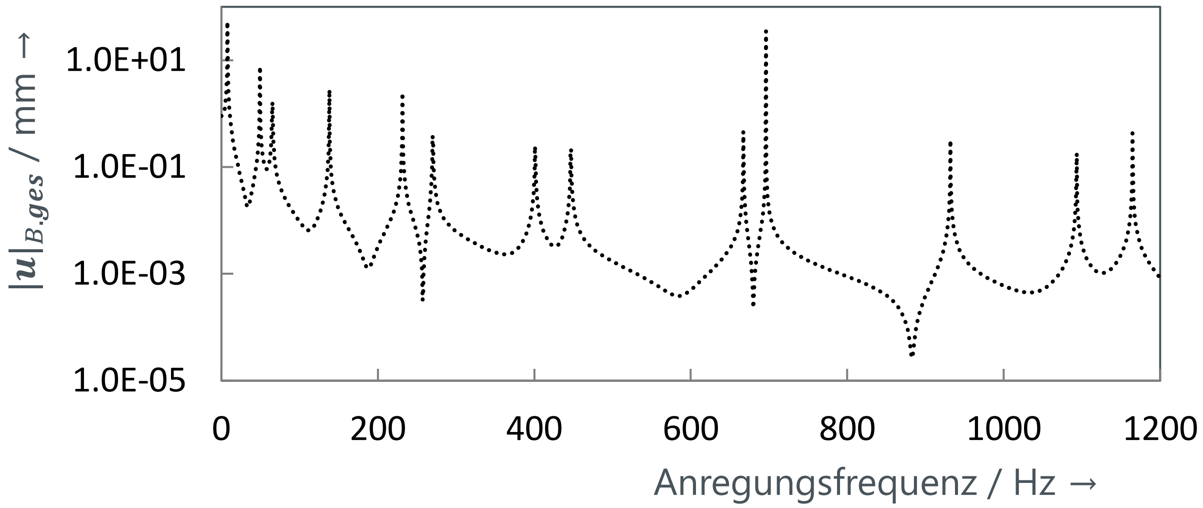


➢ **Gute Übereinstimmung zwischen FE-Frequenzganganalyse auf Basis dynamischer & modaler Reduktion und analytischer Beschreibung nach EULER-BERNOULLI**

Frequenzganganalyse reduzierter FE-Strukturen

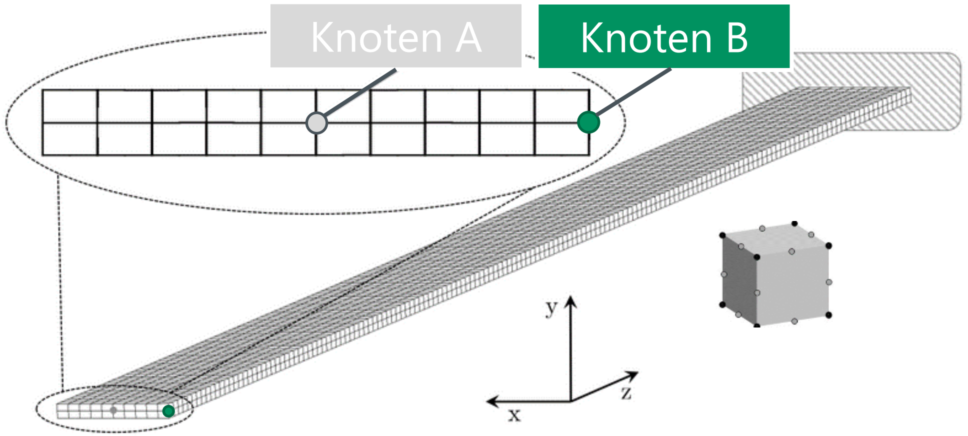
Frequenzganganalyse – akademisches Beispiel: Kragbalken

Frequenzganganalyse (modale Reduktion)



- Zusätzliche Amplitudenpeaks bei Torsionsschwingungen bzw. in-plane Biegeschwingungen durch Auswertung an Knoten B erkennbar

Position der zu Anregungs- bzw. Auswertungs-Freiheitsgrade



$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{F}^{C}_{0,y}\cos(\Omega t) + \boldsymbol{F}^{S}_{0,x}\sin(\Omega t)$$

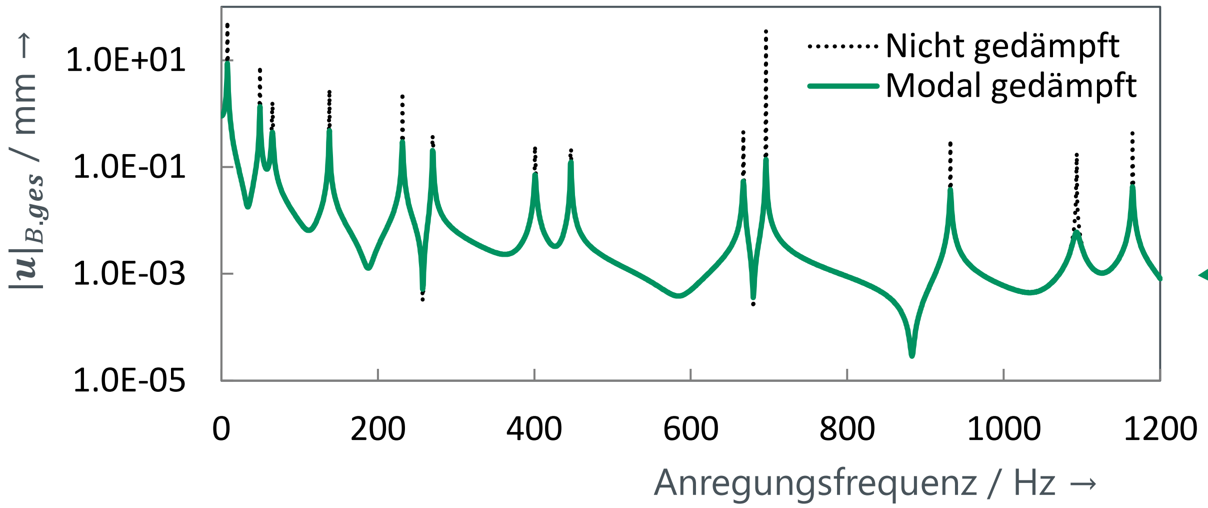
Harmonische, umlaufende Kraftanregung am freien Ende, Gesamtverformungsauswertung

[Gasch, Abbey, CADFEM]

Frequenzganganalyse reduzierter FE-Strukturen

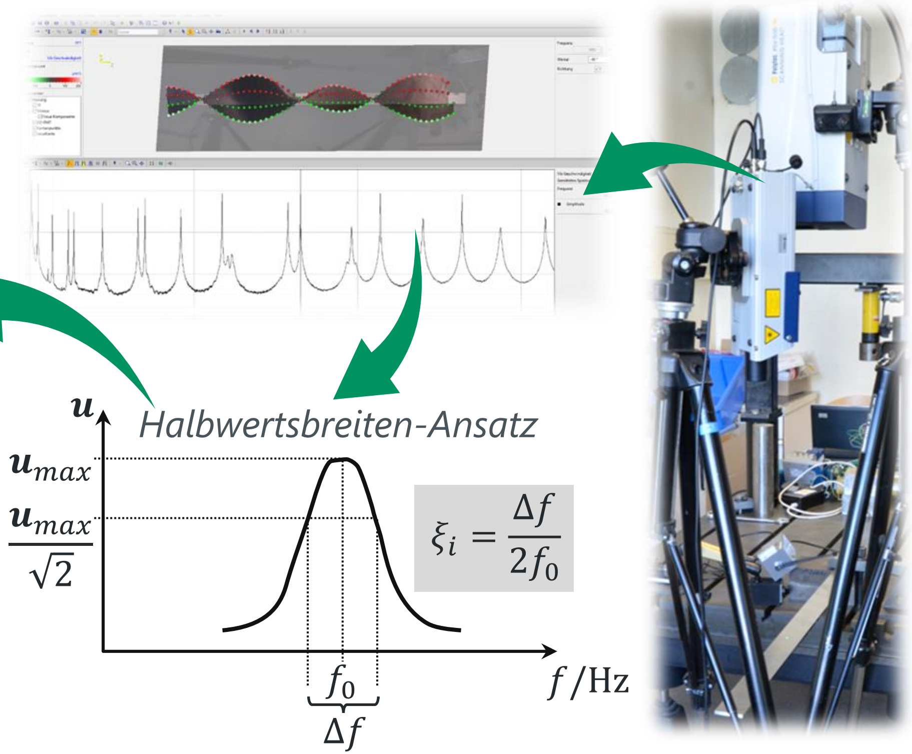
Frequenzganganalyse – akademisches Beispiel: Kragbalken

Frequenzganganalyse mit modaler Dämpfung



- Berücksichtigung des modalen Dämpfungsgrads ξ_i je Eigenmode
- Verwendung des Halbwertsbreiten-Ansatzes in den gemittelten Amplitudenspektren aus experimenteller Modalanalyse

Experimentelle Modalanalyse



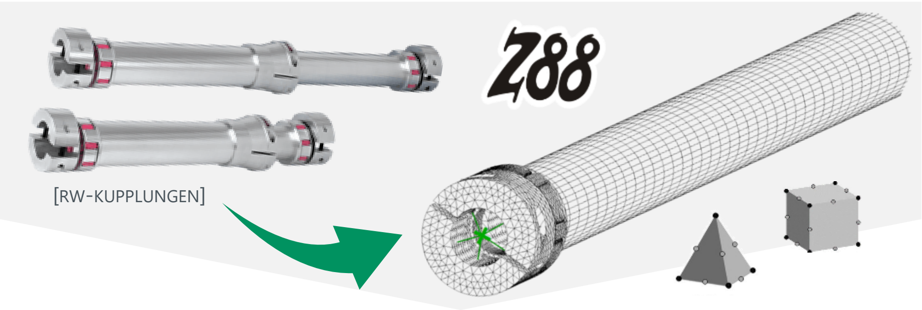
[Abbey, Dresig, DIN1311, Polytec]

Frequenzganganalyse reduzierter FE-Strukturen

Anwendungsfall: Gelenkwelle

UNIVERSITÄT BAYREUTH

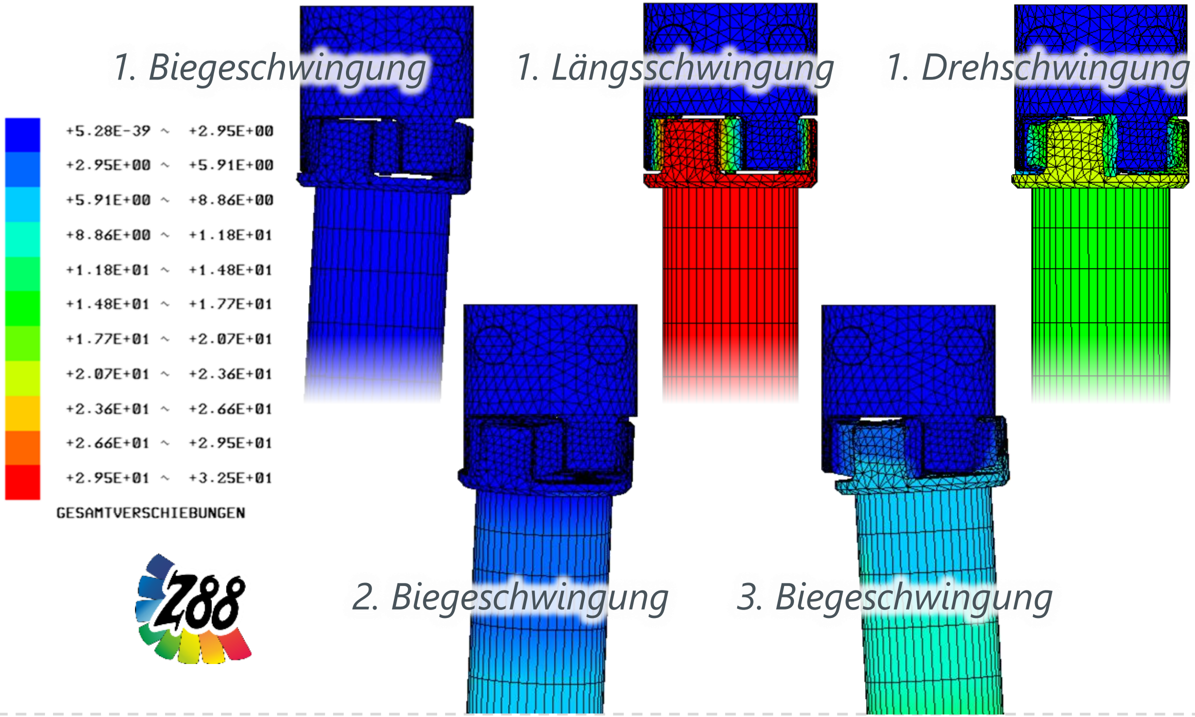
Strukturdynamik im Frequenzbereich



- **Fesselung der Halbschalen-Klemmnaben über gekoppelte Referenzpunkte in der Bohrung**
- **FE-Modalanalyse mit Kontakt- und Koppelbedingungen**
- Frequenzganganalyse mit modaler Reduktion
- Harmonische Schwingungsanregung über umlaufendes Drehmoment
- Auswertung der Wellenmitten-Verlagerung

Detailansicht der Eigenschwingungen am Festlager

(massennormierte Überzeichnung, Faktor 20)

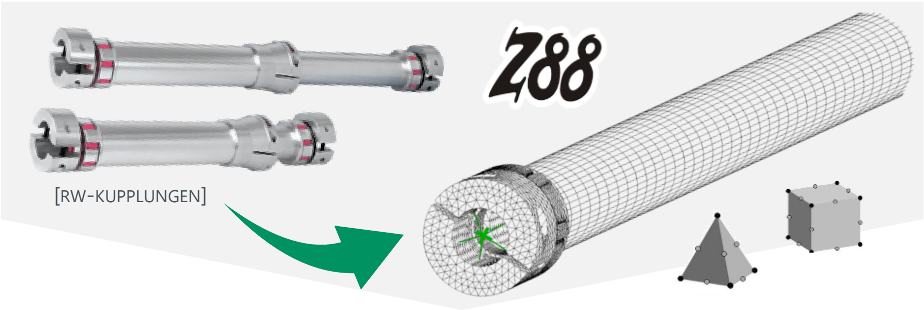


[RW-KUPPLUNGEN, BILLENSTEIN]

Frequenzganganalyse reduzierter FE-Strukturen

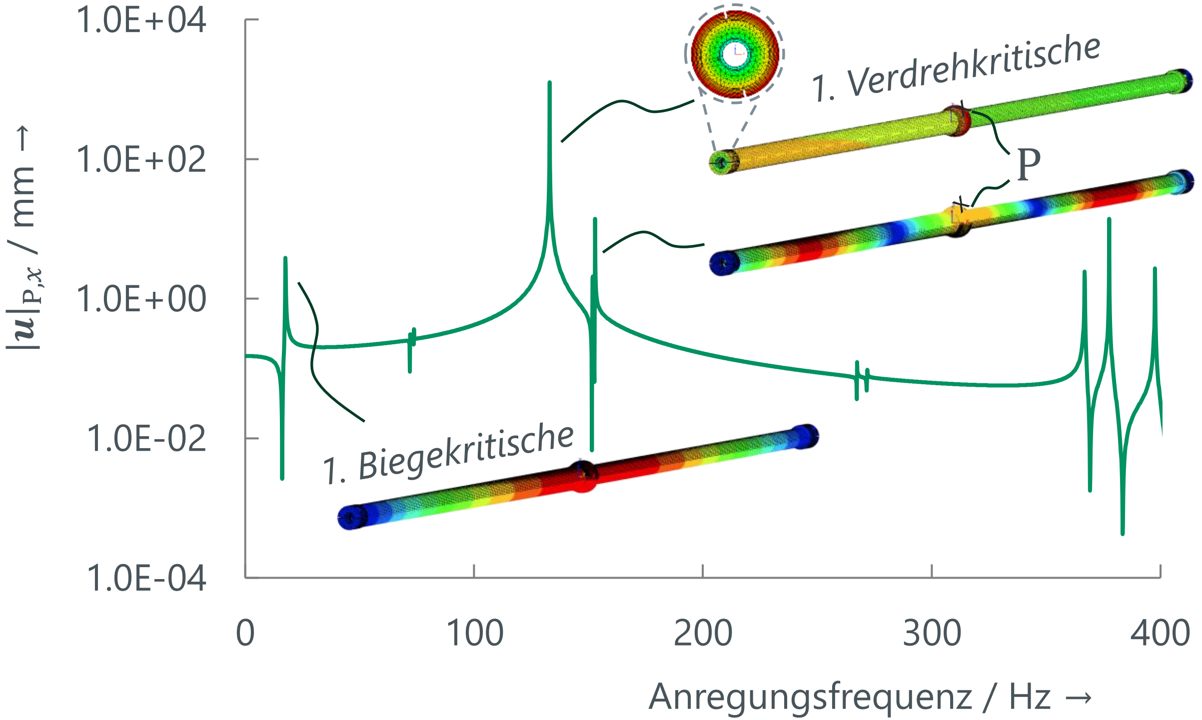
Anwendungsfall: Gelenkwelle

Strukturdynamik im Frequenzbereich



- Fesselung der Halbschalen-Klemmnaben über gekoppelte Referenzpunkte in der Bohrung
- FE-Modalanalyse mit Kontakt- und Koppelbedingungen
- **Frequenzganganalyse mit modaler Reduktion**
- **Harmonische Schwingungsanregung über umlaufendes Drehmoment**
- **Auswertung der Wellenmitten-Verlagerung**

Amplitudenfrequenzgang (Wellenmitte, ungedämpft)



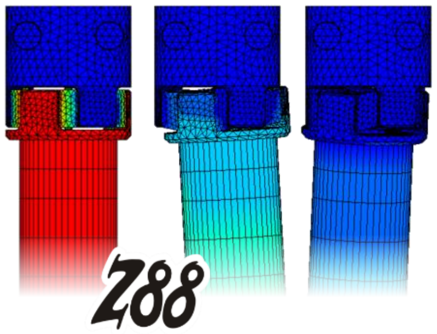
Frequenzganganalyse reduzierter FE-Strukturen

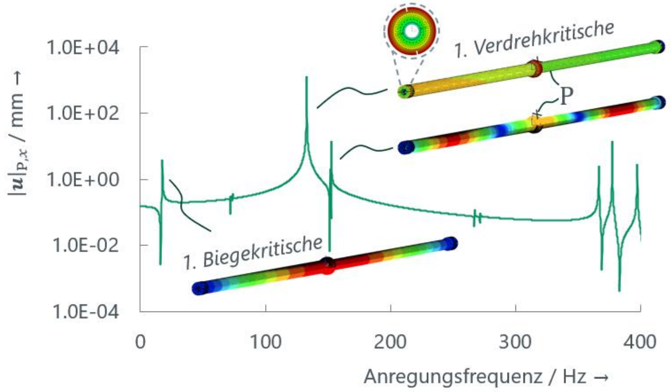
Zusammenfassung, Fazit & Ausblick

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Zusammenfassung

- Modalanalyse mit Kontakt- & Zwangsbedingungen zur Bereitstellung von Eigenschwingungen
- Verifizierung der Frequenzganganalyse
  → Absicherung durch analytische Beschreibung
- Frequenzganganalyse auf Basis modaler Superposition & dynamischer Reduktion nach CRAIG-BAMPTON
- Berücksichtigung der modalen Dämpfung und weiterer Dämpfungsansätze (proportional nach RAYLEIGH) möglich





Fazit

- Frequenzganganalyse mit Vollmatrix-Struktur möglich, aber numerisch sehr aufwendig
- Interessiert als Zielgröße das lokale Strukturverhalten, kann über dynamische Substrukturtechnik das linearisierte Umfeld reduziert und assembliert werden
- Frequenzganganalyse mit modaler Superposition ist eine effiziente Methode, wenn eine schnelle Lösung für das globale Baugruppenmodell verlangt wird

Ausblick

- Berechnung von Spannungsamplituden-Frequenzgang
- Frequenzganganalyse im Betriebspunkt
- Modale Superposition und dynamische Reduktion für beschleunigte, lineare transiente Analyse