Vol.11,№5　　东北工学院学报　　总第68期
Oct. 1990　　JOURNAL OF NORTHEAST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY　　SUM № 68

关于矩阵广义逆的几个性质*

刘双喆
（数学系）

摘　要　Magnus 和 Neudecker 曾讨论 Moore-Penrose 广义逆所具有的“乘积化简”和“加减分拆”等若干较好性质．本文推广得到最小二乘广义逆和最小范数广义逆等也具有这些性质，为其进一步应用提供了方便．

关键词　MP 广义逆，最小二乘广义逆，最小范数广义逆，自反广义逆．

0　引　言

矩阵广义逆概念被 Moore 和 Penrose 分别提出后，目前在代数、数理统计、计算方法、微分方程、泛函分析、物理学、测量学和自动控制等方面都有愈加广泛的应用[1]．对其研究，也愈引起人们的重视[2-4]．本文给出其中 Moore-Penrose 广义逆性质的某些结论的推广，使得最小二乘广义逆和最小范数广义逆等同样具有这些较好性质，方便于应用．

1　准备知识

本文限定于讨论实矩阵．

定义　对于矩阵 $A_{m\times n}$，如果存在 $G_{n\times m}$，满足下面 Moore-Penrose 方程

$$AGA=A \tag{1}$$

$$GAG=G \tag{2}$$

$$(AG)'=AG \tag{3}$$

$$(GA)'=GA \tag{4}$$

中的某些方程，则称 G 是 A 关于这些方程的广义逆．较重要的有满足所有 4 条的 Moore-Penrose 广义逆，有时称作加号逆，记 $G=A^{+}$；满足(1)、(3)的最小二乘广义逆，记 $G=A_{13}^{-}$；满足(1)、(4)的最小范数广义逆，记 $G=A_{14}^{-}$；满足(1)、(2)的自反广义逆，记 $G=A_{12}^{-}$．还有其它广义逆，此处不一一列举了，可参见文献〔4〕，只有 A^{+} 存在且唯一，其它广义逆存在但不唯一．

下面是 Moore-Penrose 广义逆的几个性质[3]：

性质 1：$(A^{+})^{+}=A$；

1989 年 7 月 19 日收到．

* 关颖男副教授曾给予有益的指导．

性质 2：$A^{+}=A$，若 A 对称幂等；

性质 3：$A'AA^{+}=A'=A^{+}AA'$；

性质 4：$A'A^{+\prime}A^{+}=A^{+}=A^{+}A^{+\prime}A'$；

性质 5：$(A'A)^{+}=A^{+}A^{+\prime}$，$(AA')^{+}=A^{+\prime}A^{+}$；

性质 6：$(AA^{+})^{+}=AA^{+}$，$(A^{+}A)^{+}=A^{+}A$.

对照上面，给出下面引理，其中若干将用于本文主要结果的证明.

引理 1：$A\in(A^{-}_{12})^{-}_{12}$；

引理 2：$A\in A^{-}$，若 A 幂等；

引理 3：$A'AA^{-}_{13}=A'=A^{-}_{14}AA'$；

引理 4：$A'A^{-\prime}_{24}A^{-}_{24}\in A^{-}_{24}$，$A^{-}_{23}A^{-\prime}_{23}A'\in A^{-}_{23}$；

引理 5：$A^{-}_{13}A^{-\prime}_{13}\in(A'A)^{-}$，$A^{-\prime}_{14}A^{-}_{14}\in(AA')^{-}$，$A^{-}_{134}A^{-\prime}_{134}\in(A'A)^{-}_{134}$，

$A^{-\prime}_{134}A^{-}_{134}\in(AA')^{-}_{134}$；

引理 6：$AA^{-}_{12}\in(AA^{-}_{12})^{-}_{12}$，$A^{-}_{12}A\in(A^{-}_{12}A)^{-}_{12}$.

证明：引理 1　注意到：$A^{-}_{12}AA^{-}_{12}=A^{-}_{12}$ 且 $AA^{-}_{12}A=A$.

引理 3　$A'AA^{-}_{13}=A'(AA^{-}_{13})'=(AA^{-}_{13}A)'=A'=(AA^{-}_{14}A)'=(A^{-}_{14}A)'A'=A^{-}_{14}AA'$.

引理 2，4，5，6 考虑使用定义.

2　主要定理

定理 1　若 B 行满秩，则 $(AB)(AB)^{-}_{13}=AA^{-}_{13}$

证明：$(AB)(AB)^{-}_{13}=(AB)^{-\prime}_{13}(AB)'=(AB)^{-\prime}_{13}B'A'=(AB)^{-\prime}_{13}B'A'AA^{-}_{13}$

$$=AB(AB)^{-}_{13}AA^{-}_{13}=AB(AB)^{-}_{13}ABB^{+}A^{-}_{13}=AA^{-}_{13}.$$

定理 2　若 H 列满秩，则 $(HA)^{-}_{14}(HA)=A^{-}_{14}A$

证明：$(HA)^{-}_{14}(HA)=A'H'(HA)^{-\prime}_{14}=A^{-}_{14}AA'H'(HA)^{-\prime}_{14}$

$$=A^{-}_{14}H^{+}HA(HA)^{-}_{14}(HA)=A^{-}_{14}A$$

定理 3　若 $A=A'=A^{2}$，则 $AB=B$ 且 $r(A)=r(B)\Longleftrightarrow A=BB^{-}_{13}$

证明：$\Leftarrow$ $AB=BB^{-}_{13}B=B$，进而

$r(A)=r(BB^{-}_{13})\leqslant r(B)=r(AB)\leqslant r(A)$ 即 $r(A)=r(B)$

$\Rightarrow$ 令 $P=A-BB^{-}_{13}$，易知 $P'=P$ 且 $B^{-}_{13}A\in\{B^{-}_{13}\}$，

$BB^{-}_{13}A=(BB^{-}_{13})'A'=(ABB^{-}_{13})'=(BB^{-}_{13})'=BB^{-}_{13}$

于是 $P^{2}=A^{2}-ABB^{-}_{13}-BB^{-}_{13}A+BB^{-}_{13}BB^{-}_{13}=A-BB^{-}_{13}-BB^{-}_{13}+BB^{-}_{13}=A-BB^{-}_{13}=P$

$r(P)=\mathrm{tr}(P)=\mathrm{tr}(A)-\mathrm{tr}(BB^{-}_{13})=r(A)-r(BB^{-}_{13})=r(A)-r(B)=0$

即 $A=BB^{-}_{13}$.

定理 4　若 $A=A'=A^{2}$，则 $HA=H$ 且 $r(A)=r(H)\Longleftrightarrow A=H^{-}_{14}H$

证明：$\Leftarrow$ $HA=HH^{-}_{14}H=H$ 进而 $r(A)=r(H)$

$\Rightarrow$ 令 $P=A-H^{-}_{14}H$，易知 $P'=P$ 且 $AH^{-}_{14}H=H^{-}_{14}H$

于是　$P^{2}=A^{2}-AH^{-}_{14}H-H^{-}_{14}HA+H^{-}_{14}HH^{-}_{14}H$

$$=A-H^{-}_{14}H-H^{-}_{14}H+H^{-}_{14}H=A-H^{-}_{14}H=P$$

$r(P)=\mathrm{tr}(P)=\mathrm{tr}(A)-\mathrm{tr}(H^{-}_{14}H)=r(A)-r(H^{-}_{14}H)=r(A)-r(H)=0$

即　　$A = H_{14}^{-}H$

定理 5　已知 $A_{n\times n}$ 对称幂等，$AB=0$，且 $r(A)+r(B)=n$

则 $A = I - BB_{13}^{-}$

证明：令 $C = I_n - A$，则C对称幂等，且 $CB = B$，进一步 $r(C) = n - r(A) = r(B)$

由定理 3 知 $C = BB_{13}^{-}$，即 $A = I_n - BB_{13}^{-}$.

定理 6　已知 $A_{n\times n}$ 对称幂等，$HA=0$，且 $r(A)+r(H)=n$，则 $A = I - H_{14}^{-}H$.

证明：令 $C = I_n - A$，则C对称幂等，且 $HC = H$，进一步 $r(C) = n - r(A) = r(H)$，

由定理 4 知 $C = H_{14}^{-}H$，即 $A = I_n - H_{14}^{-}H$.

定理 7 和定理 8 与文献〔3〕中定理 1.1 有关。

定理 7　$A'AB = A'C \Longleftrightarrow AB = AA_{13}^{-}C$

证明：$\Leftarrow$ $A'AB = A'AA_{13}^{-}C = A'C$，根据前面的引理

$\Rightarrow$ $AA_{13}^{-}C = (AA_{13}^{-})'C = A_{13}^{-\prime}A'C = A_{13}^{-\prime}A'AB = AB$

定理 8　$HAA' = GA' \Longleftrightarrow HA = GA_{14}^{-}A$

证明：$\Leftarrow$ $HAA' = GA_{14}^{-}AA' = GA'$，根据前面的引理。

$\Rightarrow$ $GA_{14}^{-}A = G(A_{14}^{-}A)' = GA'A_{14}^{-\prime} = HAA'A_{14}^{-\prime} = HA$

注：特别地，上面所有定理对 Moore-Penrose 广义逆全部成立，故文献〔3〕中有关结论是本文的特例。本文主要定理的应用可参见文献〔3〕中定理 3.20 到定理 3.24 等，待另文探讨。

参考文献

1　钱吉林，李照海。矩阵及其广义逆。武汉：华中师范大学出版社，1988.133　169

2　张尧庭，方开泰。多元统计分析引论。北京：科学出版社，1982.35—45

3　Magnus J R, Neudecker H. Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics. New York: Wiley, 1988.1—64

4　孙文瑜。数学研究与评论，1989(1):153—155

Some Properties of Generalized Inverse of Martrices

Liu Shuangzhe

Key Words: MP inverse, least-squares g-inverse, minimum norm g-inverse, reflexive g-inverse.

ABSTRACT

Such properties as "product simplification" and "disassembly of addition and substraction" were discussed and given by J. R. Magnus and H. Neudecker to the Moore-Penrose inverse. The least-squares and minimum norm g-inverses are proved having the same properties. Maybe they are helpful to finding further applications.

(*Received July* 19,1989)