UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

TESIS

Para optar al título de Dr. en Matemática

sobre: VARIEDADES ABSTRACTAS

Presentada por la Lic. Marta S. Sagastume

La Plata, marzo de 1973

A la memoria de mi padre

Quiero hacer constar aquí mi agradecimiento a las personas que hicieron posible este trabajo: al Profesor Jorge Bosch, que lo dirigió, a quien le debo la adquisición no solo de conocimientos, sino también del método en la investigación matemática; a la Doctora Lía Oubiña, quien supervisó mi trabajo durante un año, dándome cordial apoyo y asesoramiento; a mi madre, mi hermana y otros familiares, quienes aliviándome de mis tareas domésticas y maternales, me permitieron usar mi tiempo para el trabajo científico; a mi esposo, quien además de impulsarme y alentarme en todo momento, tuvo la enorme paciencia de dactilografiar mi manuscrito y finalmente a todos los que de un modo u otro facilitaron o apoyaron mi tarea.

Marta Sagastume

La Plata 1973

Indice

PROLOGO

El propósito de este trabajo es establecer el fundamento de una teoría categorial de variedades diferenciables, que podría generalizar definiciones y teoremas de la geometría diferencial. Se tiene la idea de que nociones tales como atlas y variedades diferenciables y aplicaciones entre ellos pueden expresarse en una forma muy general mediante el lenguaje de la teoría de categorías. Así surgen los atlas abstractos, los morfismos entre ellos, las variedades abstractas, etc. Esa definición general admite como ejemplos, además de los entes que generaliza, otros sin vinculación aparente con aquellos, como sucede en el § 5 de la primera parte, en que la proposición 5.6 y su corolario 5.7 proveen ajemplos "algebraicos" de atlas abstractos, que no surgen naturalmente del modelo "topológico" que se tuvo en mente.

A partir de las definiciones "abstractas" mencionadas se tratan de obtener propiedades análogas a las que tienen los entes de los cuales se partió. Así por ejemplo, en el § 4 de la primera parte se obtiene una categoría de variedades abstractas y morfismos entre ellas. Otra tarea importante, que ocupa toda la segunda parte, es la de construir en ciertas condiciones muy generales (ver postulados (1) a (6), § 1) el atlas tangente a uno dado, así como también el morfismo tangente asocia do a un morfismo dado (y luego por supuesto, las variedades tangentes correspondientes). Para la definición del atlas tangente se usó la idea (ver [1]) de "pegar" sus codominios de mapa mediante morfismos de la forma ($\varphi \circ$ pr,$D\varphi$) si se considera que los respectivos codominios del atlas dado se "pegan" mediante los morfismos φ .

También se caracteriza el morfismo tangente asociado a uno dado $\underline{f}$ por medio de los morfismos que quedan inducidos entre los modelos de los atlas tangentes, que serán de la forma ($\varphi \circ$ pr,$D\varphi$), con φ inducido por f entre los modelos de los atlas dados. Con estas definiciones se logra además construir un funtor tangente "generalizado" y, aplicadas al caso concreto, se demuestra que se obtienen las nociones conocidas (ver §6) relacionándose asimismo el funtor tangente "concreto" con el "abstracto" (teorema 6.9)

Se obtienen además algunos resultados como por ejemplo una realización de atlas abstractos (ver teorema 2.5, primera parte), el isomorfismo entre una categoría de variedades abstractas y otra de sus realizaciones (teorema 4.5, primera parte), una "restricción" que constituye una equivalencia de atlas abstractos, que se aplica en el caso particular del atlas dominio de un morfismo dado (ver proposición 3.6 y teorema 3.8), etc.

Se espera de esta manera seguir obteniendo resultados que llevarán a la generalización de teoremas conocidos, así como a poner en evidencia la raiz categorial o funtorial de algunos resultados clásicos.

Primera Parte

Definición de variedad abstracta

§1 INTRODUCCION

1.1 Terminología:

Las topologías de Grothendieck serán llamadas G-topologías; su definición es la de [2]. En lo que sigue $\mathcal{E}$ es la categoría de conjuntos y funciones, y G-$\mathcal{E}$ es la G-topología que se obtiene de $\mathcal{E}$ adjuntándole, como Cov(G-$\mathcal{E}$) la familia de los conjuntos Φ de morfismos tales que, para cada Φ, las imágenes de las funciones pertenecientes a Φ cubren en sentido habitual un cierto conjunto U_Φ. Se hará uso de los funtores y transformaciones naturales generalizados introducidos por Ehresmann (ver [3]): un funtor generalizado F, de la categoría C en la categoría C' asocia a cada morfismo de C una clase no vacía de morfismos de C', de tal manera que, si $\underline{e}$ es la unidad del objeto A de C, F(e) es la clase de las unidades de los objetos de F(A), y si $h = g \circ f$ en C, entonces:

$$F(h) = F(g) \circ F(f) = \{ z \mid \exists u \in F(f) \text{ y } v \in F(g) \text{ con } z = v \circ u \}$$

Nuestra definición de transformación generalizada será ligeramente diferente de la de Ehresmann: si F y F' son funtores generalizados de C en C', una transformación generalizada $\underline{t}$ de F en F' asocia a cada objeto A de C una clase de morfismos que tienen por dominio un objeto de F(A) y por codominio un objeto de F'(A), de tal manera que: (i) Para todo $X \in F(A)$ existe al menos una flecha de $t(A)$ cuyo dominio es X, (ii) Si $X \in F(A)$, $X' \in F(B)$, $Y \in F'(A)$, $Y' \in F'(B)$, $u: X \longrightarrow Y$ con $u \in t(A)$, $v: X' \longrightarrow Y'$ con $v \in t(B)$ y $g \in F(f)$ con $f: A \longrightarrow B$ y $g: X \longrightarrow X'$, entonces existe $f':A \to B$ y $h:Y \to Y'$ tales que $h \in F'(f')$ y $h \circ u = v \circ g$. Se componen las transformaciones generalizadas de C en C' por la fórmula: $(t_2 \circ t_1)(A) = t_2(A) \cdot t_1(A)$. Se obtiene así una categoría cuyos objetos son los funtores generalizados de C en C' y cuyos morfismos son las transformaciones generalizadas entre tales funtores. Si el segundo funtor F' es constante, entonces para cada $X \in F(A)$ hay exactamente un morfismo perteneciente a $t(A)$ cuyo dominio es X.

Una transformación generalizada $t:F \to F'$ (funtores generalizados de C en C') tal que, para todo objeto A de C, $\forall h \in t(A)$, h sea un isomorfismo en C' será llamada <u>equivalencia débil</u> de F en F'.

Un funtor generalizado de la G-topología T en la G-topología T' es un funtor generalizado $F:\text{Cat } T \to \text{Cat } T'$, tal que se verifican las dos condiciones siguientes: (i) Para todo conjunto $\{\varphi_i : V_i \to V\} \in \text{Cov } T$ y para todo $X \in F(V)$, si Φ es la familia de todos los morfismos de la forma $g:Y \to X$ con $g \in F(\varphi_i)$ para para al menos un índice <u>i</u>, entonces $\Phi \in \text{Cov } T'$. (ii) Dado el diagrama $V_1 \xrightarrow{g_1} V \xleftarrow{g_2} V_2$, $g_i \in F(f_i)$ $(i=1,2)$, $f_i : U_i \to U$; si existe en Cat T' un objeto no inicial A y morfismos $a_i : A \to V_i$ tales que $g_1 \circ a_1 = g_2 \circ a_2$, entonces $\exists\ \bar{U}$, $\bar{V} \in F(\bar{U})$, $h_i : \bar{U} \to U_i$, $k_i \in F(h_i)$ tales que el siguiente es un diagrama de producto fibrado en Cat T':

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[dr, "g_1"'] & \bar{V} \arrow[l, "k_1"'] \arrow[r, "k_2"] & V_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Si se tiene un diagrama de producto fibrado en Cat T:

$$\begin{array}{ccccc} U_i & \xleftarrow{p_i} & U_{ij} & \xrightarrow{p_j} & U_j \\ & \searrow^{\varphi_i} & & \swarrow_{\varphi_j} & \\ & & U & & \end{array}$$

entonces existe un diagrama de producto fibrado en Cat T':

$$\begin{array}{ccccc} V_i & \xleftarrow{r_i} & \overline{U}_{ij} & \xrightarrow{r_j} & V_j \\ & \searrow^{f_i} & & \swarrow_{f_j} & \\ & & V & & \end{array}$$

siendo r_α ($\alpha = i,j$) valores del funtor F y $f_\alpha \in F(\varphi_\alpha)$

Hay una noción evidente de cofuntor generalizado y de transformación generalizada entre tales cofuntores.

1.2 Teorema de Kan sobre la existencia de límites:

Hay una noción evidente de límite de un funtor (o de un cofuntor) generalizado, con respecto a una transformación generalizada y el teorema de existencia de Kan [4] vale bajo la forma siguiente:

Teorema de Kan para funtores generalizados en $\mathcal{C}$:

A todo funtor generalizado $F:\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ se puede asociar, de manera canónica, un conjunto A y una transformación generalizada $\underline{t}$, de manera que A sea límite directo de F con respecto a $\underline{t}$.

La demostración sigue el esquema de la de (4). En el conjunto de ternas (U,V,x) tales que U es un objeto de $\mathbf{C}$, $V \in F(U)$ y $x \in V$ se define una relación (reflexiva y transitiva), denotada $\sim$, por la condición siguiente: $(U,V,x) \sim (U',V',x')$ si y sólo si existen morfismos $f:U \longrightarrow U'$ y $g:V \longrightarrow V'$ tales que $g \in F(f)$ y $g(x) = x'$. Sea R la relación de equivalencia generada por $\sim$: (U,V,x) R (U',V',x') si y sólo si existe una sucesión finita de ternas $t_o,\ldots,t_n$, tales que: $t_o=(U,V,x)$, $t_n=(U',V',x')$ y $t_{i-1}\sim t_i$ ó $t_i\sim t_{i-1}$, para $i=1,\ldots,n$.

Sea A el conjunto cociente por R. Se define una transformación generalizada $\underline{t}$, de F en el funtor "constante" de dominio $\mathbb{C}$ y "valor" A, definiendo como t(U) el conjunto de aplicaciones $t(U)_V:V\longrightarrow A$ (donde $V\in F(U)$) dadas por: $t(U)_V(x)=\overline{(U,V,x)}$ donde la barra indica la clase de equivalencia con respecto a $\underline{t}$. En el caso en que los valores de F en los morfismos sean todos inclusiones, el conjunto A es isòmorfo a $\bigcup_{V\in F(U),\, U\in Ob(\mathbb{C})} V$ (unión de los valores de F en los objetos de $\mathbb{C}$).

En todo lo que sigue, escribiremos simplemente "límite" en lugar de "límite directo".

§2 ATLAS ABSTRACTOS

2.1 Definición:

Un atlas abstracto es una terna (F,X,s), donde F es un funtor generalizado de la G-topología T en la G-topología $\bar{T}$, X es un límite de F con respecto a una transformación generalizada $\underline{t}$, y $\underline{s}$ es una equivalencia débil de F en el funtor idéntico sobre Cat T; esto implica que Cat T debe ser una subcategoría de Cat $\bar{T}$. Diremos que X es el soporte del atlas abstracto y que $\underline{t}$ es la transformación asociada al atlas.

Sea el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[dr, "g_1"'] & \bar{V} \arrow[l, "k_1"'] \arrow[r, "k_2"] & V_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

de producto fibrado en Cat $\bar{T}$, siendo $k_i \in F(h_i)$, $g_i \in F(f_i)$ $(i=1,2)$. Si son f_i', h_i' $(i=1,2)$ los morfismos de Cat T dados por postulado (ii) de transformación generalizada aplicado a $\underline{s}$, tales que, para ciertos $\bar{u} \in s(\bar{U})$, $u_i \in s(U_i)$, $u \in s(U)$ hacen conmutativos los diagramas:

$$\begin{tikzcd} \bar{V} \arrow[r, "k_i"] \arrow[d, "\bar{u}"'] & V_i \arrow[d, "u_i"] \\ \bar{U} \arrow[r, "h_i'"] & U_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "u_i"'] & V \arrow[d, "u"] \\ U_i \arrow[r, "f_i'"] & U \end{tikzcd}$$

entonces es:

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[dr, "f_1'"'] & \bar{U} \arrow[l, "h_1'"'] \arrow[r, "h_2'"] & U_2 \arrow[dl, "f_2'"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

un diagrama de producto fibrado en Cat $\bar{T}$.

2.2 Aplicación a los atlas diferenciables:

Diremos que un atlas $\mathcal{A}$, diferenciable de clase C^r, o C^r-atlas en el sentido de [5], es hereditario si se verifican las dos condiciones siguientes:

(i) Si $\varphi \in \mathcal{A}$, con $\varphi: A \longrightarrow U$; si $B \subset A$ es un abierto y $V \subset U$ es un abierto, entonces $\varphi|_B \in \mathcal{A}$ y $\varphi|_{\varphi^{-1}(V)} \in \mathcal{A}$.

(ii) Si $\varphi \in \mathcal{A}$, con $\varphi: A \longrightarrow U$, para todo espacio de Banach E que interviene en la definición de $\mathcal{A}$, para todo abierto $V \subset E$ y para todo C^r-isomorfismo $f: U \longrightarrow V$, se tiene que: $f \circ \varphi \in \mathcal{A}$

Sea $\mathcal{A}$ un C^r-atlas hereditario. Llamaremos Cat T a la categoría cuyos objetos son los codominios de los mapas de $\mathcal{A}$ y cuyos morfismos son: los cambios de mapa de $\mathcal{A}$, las inclusiones entre objetos de Cat T y las composiciones (en número finito cualquiera) de tales morfismos. Sea Cov T la familia de conjuntos de morfismos de Cat T que cubren en sentido habitual un cierto objeto de Cat T. Se obtiene así la G-topología T. Sea $\bar{T}$ la G-topología que hemos llamado <u>G-$\mathcal{C}$</u> (1.1). Sea F el funtor generalizado de T en $\bar{T}$ construído de la siguiente manera: si U es un objeto de Cat T, F(U) es la clase de dominios de mapas cuyo codominio es U. Para un morfismo $\varphi: U \longrightarrow V$ en Cat T, se distinguen tres casos: si φ es una equivalencia (cambio de mapa), $F(\varphi)$ es la clase de identidades de los objetos pertenecientes a $F(U) \cap F(V)$; si φ es una inclusión entonces para todo V' tal que $f_{V'}: V' \longrightarrow V$ sea un mapa de $\mathcal{A}$, ponemos $U' = f_{V'}^{-1}(U)$ y se define entonces $F(\varphi)$ como la clase de todas las inclusiones de la forma: $U' \hookrightarrow V'$; si φ es una composición de equivalencias e inclusiones, se define $F(\varphi)$ de manera evidente tomando todas las composiciones posibles. Sea X el conjunto subyacente al atlas $\mathcal{A}$. Entonces X es el límite de F con respecto a una transformación generalizada t que a cada objeto U de Cat T asocia el conjunto de las inclusiones $U' \hookrightarrow X$, donde U' recorre F(U). Sea ahora s la transformación generalizada de F en el funtor idéntico sobre Cat T, que a cada objeto U de Cat T asocia la clase de mapas de $\mathfrak{A}$ cuyo codominio es U : es una equivalencia débil. La terna (F,X,s) es un atlas abstracto de soporte X y de transformación asociada t.

2.3 Subcategorías inclusivas:

Llamaremos así a toda subcategoría D de C tal que: Ob(D) = Ob(C) y para A y B objetos cualesquiera de D, el conjunto $D(A,B) \cup D(B,A)$ tiene a lo sumo un elemento.

El ejemplo típico de subcategoría inclusiva es la subcategoría de $\mathcal{C}$ cuyos morfismos son las inclusiones.

2.4 C^r-categorías:

Sea S un conjunto de espacios de Banach; una categoría será llamada C^r-categoría de tipo S si sus objetos son abiertos de los espacios de S y sus morfismos son: C^r-isomorfismos, inclusiones ó composiciones en número finito cualquiera de tales morfismos con la propiedad siguiente: todo abierto incluido en un objeto es un objeto, todas las inclusiones entre objetos son morfismos, y todo C^r-isomorfismo de un objeto sobre un abierto de un espacio $E \in S$ es un morfismo.

Una C^r-G-topología de tipo S es una G-topología T tal que Cat T es una C^r-categoría de tipo S y Cov T es la familia de conjuntos de morfismos que cubren en sentido habitual un cierto objeto de Cat T.

2.5 <u>Teorema de realización:</u>

Teorema: Sea (F,X,s) con $F:T \to G\text{-}\mathcal{C}$, un atlas abstracto de transformación asociada $\underline{t}$, tal que:

(i) T es una C^r-G-topología de tipo S.

(ii) F toma sus valores en una subcategoría inclusiva de Cat $\bar{T} = \mathcal{C}$.

Entonces existe un C^r-atlas hereditario $\mathcal{A}$, de tipo S, cuyo conjunto subyacente es X y cuyos mapas son las composiciones de la forma $h \circ \hat{g}^{-1}$, con $h \in s(U)$, $g \in t(U)$, y donde $\hat{g}$ es la restricción de g a su imagen.

<u>Demostración:</u> Probaremos en primer lugar que, para todo $f:U_1 \to U_2$ en Cat T y para todo $g \in F(f)$, la aplicación g es inyectiva.

Sea $g:V_1 \to V_2$. Como $\underline{s}$ es una transformación generalizada de F en el funtor idéntico sobre Cat T, existe $h \in s(U_1)$, $k \in s(U_2)$ con $h:V_1 \to U_1$, $k:V_2 \to U_2$. Por definición de transformación generalizada, existe entonces un morfismo $f':U_1 \to U_2$ tal que: $f' \circ h = k \circ g$. Pero f' (siendo un morfismo de Cat T) es inyectiva, y $\underline{h}$ es inyectiva puesto que $\underline{s}$ es una equivalencia débil. Luego $\underline{g}$ es inyectiva.

Sea ahora $V \in F(U)$, y llamemos $t(U)_V : V \longrightarrow X$ a la única aplicación de dominio V perteneciente a $t(U)$. Probaremos que esta aplicación es inyectiva. Es suficiente hacer la demostración para el caso en el que X es el límite de F con respecto a $\underline{t}$ construido de manera canónica por aplicación del teorema de Kan (1.2).

Supongamos $t(U)_V(x) = t(U)_V(y)$. Luego $\overline{(U,V,x)} = \overline{(U,V,y)}$. Entonces existe una sucesión finita de ternas $t_o,\ldots,t_n$, tal que (con las notaciones de 1.2) $t_{i-1} \sim t_i$ ó $t_i \sim t_{i-1}$, para $i=1,\ldots,n$, y $t_o = (U,V,x)$, $t_n = (U,V,y)$. Para n=o se tiene x=y. Supongamos n=1; luego existe $f:U \longrightarrow U$, $g:V \longrightarrow V$ con $g \in F(f)$ y $g(x)=y$, o bien $g(y)=x$. Por la hipótesis (ii) del enunciado del teorema se tiene $g=1_V$, luego x=y. Supongamos ahora n=2. Entonces existe (U_1,V_1,x_1) tal que se verifica uno de los siguientes casos:

(a) $(U,V,x) \sim (U_1,V_1,x_1) \sim (U,V,y)$

(b) $(U,V,y) \sim (U_1,V_1,x_1) \sim (U,V,x)$

(c) $(U,V,x) \sim (U_1,V_1,x_1)$ y $(U,V,y) \sim (U_1,V_1,x_1)$

(d) $(U_1,V_1,x_1) \sim (U,V,x)$ y $(U_1,V_1,x_1) \sim (U,V,y)$

En lo que sigue supondremos siempre $g_i \in F(f_i)$, i=1,2.

En el caso (a) se tiene: $f_1:U \longrightarrow U_1$, $f_2:U_1 \longrightarrow U$, $g_1:V \longrightarrow V_1$, $g_2:V_1 \longrightarrow V$, con $g_2(g_1(x)) = y$. Pero $g_2 \circ g_1 = 1_V$, luego x=y. El caso (b) es análogo. En el caso (c) existen $f_1,f_2:U \longrightarrow U_1$, $g_1,g_2:V \longrightarrow V_1$, con $g_1(x) = g_2(y)$. Pero de acuerdo a lo que se ha probado al principio de esta demostra -

ción, g_1 es inyectiva y, por la hipótesis (ii), $g_1 = g_2$, luego $x = y$. El caso (d) es análogo.

Se demostrará por inducción que, si existe una sucesión de $\underline{n}$ ternas $t_o, \ldots, t_n$ con las propiedades ya enunciadas, entonces $x=y$. Esto ya ha sido demostrado para $n = 0,1,2$. Supongámoslo verdadero para $n \geq 2$ y supongamos que existe una sucesión de longitud $n+1$ con las propiedades enunciadas: $t_o, \ldots, t_{n+1}$. Si existiera un índice $\underline{j}$ tal que $1 \leq j \leq n$ y $t_{j-1} \sim t_j \sim t_{j+1}$, ó $t_{j+1} \sim t_j \sim t_{j-1}$, se tendría una sucesión de longitud $\underline{n}$ con las mismas propiedades, pues la relación es transitiva; luego, en virtud de la hipótesis inductiva, el teorema estaría demostrado. Entonces, reemplazando el símbolo $\sim$ por una flecha, sólo quedan por considerar los dos casos siguientes:

(1) $(U,V,x) \to (U_1,V_1,x_1) \leftarrow (U_2,V_2,x_2) \to (U_3,V_3,x_3) \ldots$

(2) $(U,V,x) \leftarrow (U_1,V_1,x_1) \to (U_2,V_2,x_2) \leftarrow (U_3,V_3,x_3) \ldots$

En el caso (1) se tiene un diagrama no necesariamente conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "u"'] & V_1 \arrow[d, "v"] & V_2 \arrow[l, "g_2"'] \arrow[d, "w"] \\ U \arrow[r, "f_1"] & U_1 & U_2 \arrow[l, "f_2"'] \end{tikzcd}$$

con $u \in s(U)$, $v \in s(U_1)$, $w \in s(U_2)$. Pero como $\underline{s}$ es una transformación generalizada, existen f_1', f_2' en Cat T tales que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "u"'] & V_1 \arrow[d, "v"] & V_2 \arrow[l, "g_2"'] \arrow[d, "w"] \\ U \arrow[r, "f_1'"] & U_1 & U_2 \arrow[l, "f_2'"'] \end{tikzcd}$$

Como $g_1(x) = g_2(x_2) = x_1$, se tiene que $W = g_1(V) \cap g_2(V_2)$ es no vacío. Por ser g_1, g_2 inyectivas es el siguiente diagrama de producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[dr, "g_1"'] & W \arrow[l, "\hat{g}_1^{-1}"'] \arrow[r, "\hat{g}_2^{-1}"] & V_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & V_1 & \end{tikzcd}$$

donde $\hat{g}_i$ $(i=1,2)$ es la restricción de g_i a su imagen. Luego por definición de funtor generalizado entre G-topologías (1.1) existe $\bar{U}$ objeto de Cat T, existe $\bar{V} \in F(\bar{U})$ tales que, si es $k_i \in F(h_i)$ $(i=1,2)$, $h_1 : \bar{U} \to U$, $h_2 : \bar{U} \to U_2$ se tiene un diagrama de producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[dr, "g_1"'] & \bar{V} \arrow[l, "k_1"'] \arrow[r, "k_2"] & V_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & V_1 & \end{tikzcd}$$

Sea $h : W \to \bar{V}$ tal que $k_i \circ h = \hat{g}_i^{-1}$ $(i=1,2)$, dada canónicamente por ser V un $V \underset{V_1}{\times} V_2$ y sea $x_1' = h(x_1)$. Entonces: $k_1(x_1') = x$, $k_2(x_1') = x_2$.

Luego, se tiene la siguiente sucesión de n+1 términos de (U,V,x) a (U,V,y):

$$(U,V,x) \leftarrow (\bar{U},\bar{V},x_1') \to (U_2,V_2,x_2) \to (U_3,V_3,x_3) \; \ldots$$

que tiene dos flechas consecutivas del mismo sentido, que se reduce, entonces, a una sucesión de longitud $\underline{n}$, de donde se obtiene $x=y$.

Para el caso (2) la demostración es análoga.

Se ha probado entonces que, para todo $U \in Ob(\text{Cat } T)$ y para toda $g \in t(U)$, g es inyectiva. Si llamamos $\hat{g}$ a la restricción de g a su imagen, existirán mapas de la forma $h \circ \hat{g}^{-1}$ con $h \in s(U)$ y es claro que sus dominios cubren a X. Basta probar entonces que los cambios de mapa son C^r-isomorfismos. Sean $h_1 \circ \hat{g}_1^{-1}$, $h_2 \circ \hat{g}_2^{-1}$ dos mapas con el mismo dominio A y codominios U_1, U_2 respectivamente. Debemos comprobar que la composición: $k = h_2 \circ \hat{g}_2^{-1} g_1 \circ h_1^{-1}: U_1 \to U_2$ es una C^r-equivalencia. Es evidentemente biyectiva, luego es suficiente probar que es localmente un isomorfismo de clase C^r.

Sean $x_1 \in U_1$, $x_2 = k(x_1)$, $y_1 = h_1^{-1}(x_1)$, $y_2 = h_2^{-1}(x_2)$. Luego: $g_1(y_1) = g_2(y_2)$, y como $g_i \in t(U_i)_{V_i}$, se tiene (U_1, V_1, y_1) R (U_2, V_2, y_2). Existe entonces una sucesión $\{t_i\}_{i=1}^n$, con $t_i = (W_i, Z_i, z_i)$ y tal que: $t_{i-1} \sim t_i$ ó $t_i \sim t_{i-1}$, siendo $t_1 = (U_1, V_1, y_1)$ y $t_n = (U_2, V_2, y_2)$.

Entonces, para cada $i = 1, \ldots, n-1$ existe un morfismo f_i perteneciente a Cat T $(W_i, W_{i+1}) \cup$ Cat T (W_{i+1}, W_i) y un morfismo a_i perteneciente a Cat $\bar{T}$ $(Z_i, Z_{i+1}) \cup$ Cat $\bar{T}$ (Z_{i+1}, Z_i), con $a_i \in F(f_i)$ tal que:

$$a_i(z_i) = z_{i+1} \quad \text{ó} \quad a_i(z_{i+1}) = z_i \qquad (*)$$

Por definición de transformación generalizada, existe para cada $i = 1, \ldots, n$ un isomorfismo en Cat $\bar{T}$. $m_i: Z_i \longrightarrow W_i$, tal que $m_i \in s(W_i)$; tomaremos $m_1 = h_1$, $m_n = h_2$. También por definición de transformación generalizada, existe f_i' con igual dominio e igual codominio que f_i $(i = 1, \ldots, n-1)$, tal que el cuadrado formado por m_i, a_i, m_{i+1}, f_i' es conmutativo. Teniendo en cuenta este hecho, y $(*)$, se ve que existen abiertos $W_i' \subset W_i (i = 1, \ldots, n)$ con $x_1 \in W_1'$, $x_2 \in W_n'$, y C^r-isomorfismos f_i'' $(i = 1, \ldots, n-1)$ tales que f_i'' es la restricción de f_i' a W_i' y W_{i+1}', y los f_i''

o sus inversas (convenientemente elegidos para cada $\underline{i}$) dan por composición un C^r-isomorfismo $f'':W_1' \to W_n'$, con $f''(x_1) = x_2$. Sea ahora $x_1' \in W_1'$, y sea $y_1' = h_1^{-1}(x_1')$. Por conmutatividad de los cuadrados m_i, a_i, m_{i+1}, f_i', existe $y_2' \in Z_n$, $x_2' \in W_n'$ tales que:

$$f''(x_1') = x_2' \quad , \quad h_2(y_2') = x_2' \qquad (**)$$

Pero como $a_i \in F(f_i)$, se tiene que $(U_1,V_1,y_1')\ R\ (U_2,V_2,y_2')$, luego:

$$g_1(y_1') = g_2(y_2') \qquad (***)$$

De la segunda fórmula de (**) y de (***) se deduce:

$$(h_2 \circ \hat{g}_2^{-1} \circ g_1 \circ h_1^{-1})\ (x_1') = x_2'$$

Entonces el C^r-isomorfismo $\underline{f}''$ coincide con $\underline{k}$ en un entorno de x_1, lo que prueba que $\underline{k}$ es localmente un isomorfismo.

2.6 <u>Proposición:</u>

Sea $\mathcal{A}$ un C^r-atlas hereditario (en el sentido de 2.2) de conjunto subyacente X, y sea (F,X,s) el atlas abstracto asociado a él por el método de 2.2, con $F:T \to G\text{-}\mathcal{C}$. Entonces (F,X,s) verifica las hipótesis del teorema 2.5, y la aplicación de ese teorema a (F,X,s) da el atlas $\mathcal{A}$. En efecto, si S es el conjunto de espacios de Banach que intervienen en la definición del atlas $\mathcal{A}$, la G-topología T verifica la condición (i) de 2.5 puesto que $\mathcal{A}$ es hereditario, y el funtor F verifica la condición (ii) de 2.5 por construcción. El resto de la demostración es evidente.

§ 3 MORFISMOS DE ATLAS ABSTRACTOS

3.1 <u>Definición:</u>

Estando dada una clase C de atlas abstractos $\{(F_i,X_i,s_i)\}$ para $i \in I$, tal que para todo $i \in I$, F_i sea un funtor generalizado de la G-topología T_i en la G-topología $\bar{T}$ (con $\bar{T}$ constante), se dirá que la G-topología K es <u>intermedia</u> para la clase C si se satisfacen las condiciones siguientes:

(i) K es una sub-topología de $\bar{T}$.

(ii) Para todo $i \in I$, T_i es una sub-G-topología de K.

(iii) Para todo $i \in I$ y para todo objeto U de Cat T_i, si $\{\varphi_j:U_j \longrightarrow U\} \in$ Cov K, entonces $\{\varphi_j: U_j \rightarrow U\} \in$ Cov T_i

3.2 <u>Ejemplo:</u>

Si C es una clase de C^r-atlas hereditarios, se puede tomar como Ob(Cat K) la unión de las clases de objetos de las categorías Cat T_i obtenidas por el método de 2.2, como morfismos de Cat K <u>todas</u> las aplicaciones C^r-diferenciables entre tales objetos, y como Cov K la unión de todos los Cov T_i Se obtiene así una G-topología K, intermedia para la clase C.

3.3 <u>Definición:</u>

Sean (F_1,X_1,s_1), (F_2,X_2,s_2) atlas abstractos con $F_1:T_1 \longrightarrow \bar{T}$, $F_2:T_2 \longrightarrow \bar{T}$ y transformaciones asociadas t_1,t_2. Sea K una G-topología intermedia para la clase formada por esos atlas. Un <u>K-morfismo</u> de (F_1,X_1,s_1) en (F_2,X_2,s_2) es un morfismo de Cat $\bar{T}$: $f:X_1 \longrightarrow X_2$ tal que para todo diagrama de Cat $\bar{T}$:

$$U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X_1$$

con $U' \in F_1(U)$, $h \in t_1(U)$, $m \in s_1(U)$, existe

$$\{\varphi_j : U_j \to U\}_{j \in J} \in \mathrm{Cov}\ T_1$$

tal que, para cada $j \in J$ existe un diagrama en Cat $\bar{T}$,

$$V_j \xleftarrow{n} V'_j \xrightarrow{k} X_2$$

con $V'_j \in F_2(V_j)$, $k \in t_2(V_j)$, $n \in s_2(V_j)$, y un morfismo de Cat K $f_j : U_j \to V_j$, de manera que el diagrama siguiente sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[r, "f"] & X_2 & \\
U' \arrow[ur, "h"] & & & V'_j \arrow[ul, "k"'] \\
U \arrow[u, "m^{-1}"] & U_j \arrow[l, "\varphi_j"'] \arrow[r, "f_j"] & V_j \arrow[ur, "n^{-1}"'] &
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

3.4 Proposición:

Sea C una clase de atlas abstractos, y sea K una G-topología intermedia para C. Si se toma como clase de objetos la clase C, como morfismos los K-morfismos entre atlas de C (3.3), y como composición la de $\bar{T}$ (siendo $\bar{T}$ la G-topología "blanco" para todos los atlas de C), entonces se obtiene una categoría.

En efecto: para todo atlas $(F,X,s) \in C$, la aplicación 1_X es un K-morfismo de ese atlas en sí mismo; para verlo, basta tomar como $\{\varphi_j : U_j \to U\}$ la clase de un elemento $\{1_U\}$, como V_j el mismo objeto U, como f_j la identidad 1_U, y $n=m$, $k=h$.

Además, si $f:(F_1,X_1,s_1) \to (F_2,X_2,s_2)$, $g:(F_2,X_2,s_2) \to (F_3, X_3,s_3)$ son K-morfismos, la composición $g \circ f$ es un K-morfismo de (F_1,X_1,s_1) en (F_3,X_3,s_3). Para verlo, sea en Cat $\bar{T}$ el diagrama $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X_1$ como en 3.3 . Puesto que f es un K-morfismo existe $\{\varphi_j : U_j \to U\}_{j\in J} \in \mathrm{Cov}\ T_1$, tal que, para todo $j\in J$ existe $f_j : U_j \to V_j$ en Cat K y el diagrama conmutativo (1). Pero, estando dado el diagrama $V_j \xleftarrow{n} V'_j \xrightarrow{k} X_2$ y puesto que g es un K-morfismo, existirá: $\{\psi_{jr} : V_{jr} \to V_j\}_{r\in R} \in \mathrm{Cov}\ T_2$, y para cada $r\in R$ un morfismo de Cat K, $g_r : V_{jr} \to W_r$, de manera que hay un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & X_2 \arrow[r, "g"] & X_3 & \\
V'_j \arrow[ur, "k"] & & & W'_r \arrow[ul, "u"'] \\
V_j \arrow[u, "n^{-1}"] & V_{jr} \arrow[l, "\psi_{jr}"] \arrow[r, "g_r"] & W_r \arrow[ur, "q^{-1}"'] &
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

con $u\in t_3(W_r)$, $q\in s_3(W_r)$. Como $\Psi = \{\psi_{jr} : V_{jr} \to V_j\} \in \mathrm{Cov}\ T_2$, se tiene $\Psi \in \mathrm{Cov}\ K$ puesto que T_2 es una sub-G-topología de K. Luego, si llamamos $V_{jr}\times U_j$ al producto fibrado de V_{jr} por U_j sobre V_j con respecto a ψ_{jr} y f_j, se tiene: $\Phi = \{V_{jr}\times U_j \to U_j\}_{r\in R} \in \mathrm{Cov}\ K$. Pero K es intermedia y U_j es un objeto de Cat T_1; luego $\Phi \in \mathrm{Cov}\ T_1$. Entonces:

$$\Sigma = \{V_{jr}\times U_j \to U_j \xrightarrow{\varphi_j} U\}_{j,r} \in \mathrm{Cov}\ T_1.$$

Pongamos: $\Sigma = \{\sigma_s\}$ para $s\in S$. Para cada $s\in S$ existe un morfismo de Cat K, $d_s : V_{jr}\times U_j \to W_r$ obtenido por composición de la proyección de producto fibrado: $V_{jr}\times U_j \to V_j$ con $g_r : V_{jr} \to W_r$. Se ve entonces fácilmente que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[r, "g\circ f"] & X_3 & \\
U' \arrow[ur, "h"] & & & W'_r \arrow[ul, "u"'] \\
U \arrow[u, "m^{-1}"] & V_{jr}\times U_j \arrow[l, "\sigma_s"] \arrow[r, "d_s"] & W_r \arrow[ur, "q^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

lo que prueba la proposición.

3.5 Proposición:

Sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ C^r-atlas hereditarios de tipo S, cuyos conjuntos subyacentes son X_1, X_2 respectivamente. Sea A_i (i=1,2) el atlas abstracto obtenido de $\mathcal{A}_i$ por aplicación de 2.2; sean K la G-topología intermedia descripta en 3.2 tomando como C la clase $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ y $f: X_1 \to X_2$ una función. Entonces $\underline{f}$ es una C^r-aplicación diferenciable de la estructura de C^r-variedad diferenciable definida por $\mathcal{A}_1$ en la definida por $\mathcal{A}_2$ si y sólo si f es un K-morfismo de A_1 en A_2, en el sentido de 3.3.

3.6 Proposición:

Sean A_1, A_2 atlas abstractos que satisfacen las hipótesis (i) y (ii) del teorema 2.5; $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ los C^r-atlas correspondientes por aplicación del teorema 2.5; K la G-topología intermedia para la clase $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ descripta en 3.2 ; y $f: X_1 \to X_2$ una función (siendo X_i el soporte de A_i, i=1,2) Sea $\mathcal{V}_i$ la C^r-variedad definida por el atlas $\mathcal{A}_i$. Entonces $\underline{f}$ es un K-morfismo de A_1 en A_2, en el sentido de 3.3, si y sólo si $\underline{f}$ es una aplicación C^r-diferenciable de $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$.

§4 VARIEDADES ABSTRACTAS

4.1 Definición:

Sea C una clase de atlas abstractos y sea K una G-topología intermedia para C. Sean $A_i=(F_i,X_i,s_i) \in C$, para $i=1,2$. Diremos que A_1 es K-equivalente a A_2 si y sólo si $X_1=X_2$ y 1_X es un K-morfismo de A_1 en A_2 y de A_2 en A_1 (y es entonces un isomorfismo).

Es ésta una relación de equivalencia en C.

4.2 Definición:

En las condiciones de 4.1, se llama K-variedad abstracta a cada una de las clases de equivalencia en C por la relación de K-equivalencia. Un K-morfismo entre tales variedades es un K-morfismo entre dos representantes respectivos.

4.3 Teorema:

En las condiciones de 4.2, las K-variedades abstractas y los K-morfismos entre ellas forman una categoría.

4.4 Proposición:

Sea A un atlas abstracto que satisface (i) y (ii) de 2.5. Sean $\mathfrak{A}$ el C^r-atlas obtenido por aplicación de 2.5 y A' el atlas abstracto obtenido de $\mathfrak{A}$ por aplicación de 2.2. Entonces A y A' son K-equivalentes (siendo K como en 3.2) y pertenecen, entonces, a la misma K-variedad abstracta.

En efecto: sea el diagrama $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X$, con $U' \in F(U)$, $m \in s(U)$

$h \in t(U)$. Existen entonces $\{1_U : U \longrightarrow U\} \in \mathrm{Cov}\ T$, el diagrama: $U \xleftarrow{m \circ \hat{h}^{-1}} h(U') \hookrightarrow X$ en Cat T_2 = Cat T y el morfismo 1_U (en lugar de f_j), tales que 1_X satisface la definición de morfismo 3.3 .

Recíprocamente: estando dado el diagrama:

$$U \xleftarrow{m \circ \hat{h}^{-1}} h(U') \hookrightarrow X$$

el cubrimiento $\{1_U : U \longrightarrow U\}$, el diagrama $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X$ y el morfismo de Cat K $1_U : U \longrightarrow U$, permiten establecer que 1_X es un morfismo de A' en A.

4.5. Teorema:

Sea S una clase de espacios de Banach y sea K la G-topología definida por: los objetos de Cat K son abiertos de los espacios de S, los morfismos de Cat K son las aplicaciones C^r-diferenciables entre esos objetos, y los elementos de Cov K son las clases de morfismos que son C^r-isomorfismos en su imagen y que cubren U en el sentido habitual (donde U recorre Ob(Cat K)). Sea V^r la categoría de C^r-variedades de tipo S y de C^r-morfismos, y sea VA^r la categoría siguiente: Los objetos de VA^r son las variedades abstractas construidas sobre C^r-G-topologías de tipo S (en el sentido de 2.4) cuyos respectivos funtores generalizados (los que definen los respectivos atlas) toman sus valores en subcategorías inclusivas de $\mathcal{E}$; los morfismos de VA^r son los K-morfismos entre los objetos. Entonces, la construcción 2.2 y la proposición 3.5 definen un funtor ordinario de

V^r en VA^r, y el teorema 2.5 y la proposición 3.6 definen un funtor de VA^r en V^r. Estos funtores son inversos uno del otro, y las categorías V^r y VA^r son entonces isomorfas.

4.6 <u>Remarque:</u>

En todo lo anterior se puede reemplazar "espacios de Banach" por "espacios localmente convexos" y "$\mathcal{C}^r$-variedad" por "variedad diferenciable" en el sentido de [6].

§5 UN EJEMPLO DE ATLAS ABSTRACTO

5.1 <u>Proposición:</u>

Sea S un funtor fiel ordinario $S:\mathbf{C}\longrightarrow\mathcal{C}$, $\mathbf{C}$ una categoría cualquiera, $\mathcal{C}$ como en 1.1. Si $\mathbf{C}$ tiene productos fibrados y si S los conserva, es decir: si, cada vez que C es un $A_1\times_B A_2$ es $S(C)$ un $S(A_1)\times_{S(B)} S(A_2)$, entonces:

$\operatorname{Cov} T = \left\{ \{\varphi_i\}_{i\in I} \,\middle|\, \{S(\varphi_i)\}_{i\in I} \in \operatorname{Cov}(G\text{-}\mathcal{C}) \right\}$ es una clase de cubrimientos tal que: $T = \left\{ \mathbf{C}, \operatorname{Cov} T \right\}$ es una G-topología, y S un funtor $S:T\longrightarrow G\text{-}\mathcal{C}$.

5.2 <u>Definición:</u>

Llamaremos "de tipo G-$\mathcal{C}$" a una G-topología T tal que:

(i) Existe un funtor $S:T\longrightarrow G\text{-}\mathcal{C}$ tal que $S:\operatorname{Cat} T\longrightarrow\mathcal{C}$ es un funtor fiel ordinario.

(ii) Si $\{S(\varphi_i)\}_{i\in I}\in\operatorname{Cov}(G\text{-}\mathcal{C})$, entonces $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ Cov **T**.

Como se ve, (i) y (ii) implican la siguiente equivalencia: $\{\varphi_i\}_{i\in I}\in\operatorname{Cov} T$ si y sólo si $\{S(\varphi_i)\}_{i\in I}\in\operatorname{Cov}(G\text{-}\mathcal{C})$. Además, en la proposición 5.1 se ve que esta condición caracteriza a Cov T.

5.3 <u>Definición:</u>

Llamaremos a T, en las condiciones de la proposición 5.1, <u>una G-topología de tipo G-$\mathcal{C}$ definida por $\mathbf{C}$.</u>

Las categorías "algebraicas": de grupos y homomorfismos de grupos, de anillos, de módulos, etc., son ejemplos de categorías que dan lugar a G-topologías de tipo G-$\mathcal{C}$, siendo S el correspondiente funtor de subyacencia.

5.4 <u>Lema:</u>

Sea T = $\{$Cat T, Cov T$\}$ una G-topología, $\mathbf{C}$ una subcategoría de Cat T. Existe una subcategoría $\bar{\mathbf{C}}$ de Cat T que contiene a $\mathbf{C}$ y tal que T' = $\{\bar{\mathbf{C}}, \text{Cov } T|_{\bar{\mathbf{C}}}\}$ es una sub-G-topología de T, siendo Cov $T|_{\bar{\mathbf{C}}}$ la clase de cubrimientos inducida por Cov T en $\bar{\mathbf{C}}$.

<u>Demostración:</u>

La categoría $\bar{\mathbf{C}}$ es la generada por la clase de objetos que se obtiene adjuntándole a Ob($\mathbf{C}$) todos los productos fibrados entre los objetos de $\mathbf{C}$ y por la clase de morfismos formada por los de $\mathbf{C}$ y las correspondientes proyecciones canónicas de los productos fibrados mencionados

5.5 <u>Definición:</u>

Llameremos a T' (en las condiciones del lema 5.4) una sub-G-topología de T <u>generada por $\mathbf{C}$.</u>

5.6 <u>Proposición:</u>

Sea T= $\{$Cat T, Cov T$\}$ una G-topología, $\mathbf{C}$ una subcategoría de Cat T. Sea T' como en el lema 5.4, $I: T' \hookrightarrow T$ el funtor inclusión. Entonces, si I tiene un límite X, es $(I, X, 1_I)$ un atlas abstracto.

5.7 Corolario:

Todo módulo M sobre un anillo A es soporte de un atlas abstracto de la forma $(I,M,1_I)$, siendo $I:T'\hookrightarrow T$ el funtor inclusión, T' una G-topología generada por la categoría de sub-módulos de M finitamente generados e inclusiones y T una G-topología de tipo G-$\mathcal{C}$ definida por la categoría de A-módulos y homomorfismos de A-módulos.

Demostración:

Sea $\mathbf{C}$ la categoría que genera T', y $\mathcal{M}$ la que define a T. Si se tiene una transformación natural $t:I\longrightarrow M'$, con M' funtor "constante" igual al objeto M' de $\mathcal{M}$ existe un único homomorfismo $h:M\longrightarrow M'$ definido por:

$h(m)=(t(A.m))(m)$, siendo A.m el submódulo de M generado por $\{m\}$. Luego, si es $I_1:\mathbf{C}\longrightarrow\mathcal{M}$ el funtor inclusión, se tiene que: $\varinjlim I_1= M$. Además, si consideramos $\bar{\mathbf{C}}$ definida por:

$Ob(\bar{\mathbf{C}}) = \{$intersecciones finitas de objetos de $\mathbf{C}\}$

$Morf(\bar{\mathbf{C}}) = \{$inclusiones entre objetos de $\bar{\mathbf{C}}\}$

y $T' = \{\bar{\mathbf{C}}, Cov\ T|_{\bar{\mathbf{C}}}\}$, también será $\varinjlim I=M$ siendo $I:T'\hookrightarrow T$ el funtor inclusión.

Segunda Parte

Definición de variedad tangente

Nota: En lo que sigue, las referencias que aparecen en el texto serán, salvo mención en lo contrario, correspondientes a los parágrafos y números de la segunda parte.

§1 MODELOS TANGENTES

1.1 Consideraciones previas:

Tomaremos (F,X,s) como representante de una K-variedad abstracta, siendo $F:T \longrightarrow \bar{T}$, y llamaremos modelos a los objetos de Cat T.

Consideraremos además que valen los siguientes postulados para T y $\bar{T}$:

(1) (Existencia de productos fibrados en Cat $\bar{T}$) Dado el diagrama: $A_1 \xrightarrow{f_1} B \xleftarrow{f_2} A_2$ en Cat $\bar{T}$, si existe un objeto no inicial A y morfismos $a_i : A \longrightarrow A_i$, $i=1,2$, tales que $f_1 \circ a_1 = f_2 \circ a_2$ entonces existe el producto fibrado $A_1 \times_B A_2$. En particular, si existe un $U_1' \times_X U_2'$, siendo $U_i' \in F(U_i)$, $i=1,2$, respecto de los morfismos $h_i \in t(U_i)$, $h_i : U_i' \longrightarrow X$, entonces existe un diagrama:

$$\begin{tikzcd} U_1' & W_{12}' \arrow[l, "q_1"'] \arrow[r, "q_2"] & U_2' \arrow[dl, "h_2"] \\ & X \arrow[from=ul, "h_1"'] & \end{tikzcd}$$

de producto fibrado, con $q_i \in F(p_i)$.

(2) Si se tiene un diagrama conmutativo en Cat $\bar{T}$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & V \arrow[d, "g"] \\ & W \end{tikzcd}$$

y si son h un morfismo de Cat K, g uno de Cat T, entonces f es un morfismo de Cat K

(3) Si es $\Phi_1=\{\varphi_i:U_i\longrightarrow U\}\in$ Cov $\bar{T}$, $\Phi_2=\{\psi_j:V_j\longrightarrow U\}$ una familia cualquiera de morfismos de Cat $\bar{T}$, entonces $\Phi_1\cup\Phi_2$ $\in$ Cov $\bar{T}$.

(4) ("Pegado" de funciones) Sea $\Phi=\{\varphi_i:U_i\longrightarrow U\}\in$ Cov T. Sea C_Φ una subcategoría de Cat T definida por:

$$Ob(C_\Phi) = \{U_i, W_{ij} \mid W_{ij} \text{ es un } U_i\times_U U_j \text{ respecto de } \varphi_i, \varphi_j\}$$

$$Morf(C_\Phi) = \{\text{identidades, composiciones de proyecciones de productos fibrados}\}$$

Entonces, si es $I:C_\Phi\longrightarrow$ Cat $\bar{T}$ el funtor inclusión, se tiene que: $\varinjlim I = U$, respecto de la transformación natural t_U dada sobre las U_i por $t_U(U_i)=\varphi_i$.

(5) Si se tiene el diagrama $U\xrightarrow{\varphi}V\xleftarrow{n}V'$, con φ morfismo de Cat T y $n\in s(V)$, entonces existe $U'\in F(U)$, $m\in s(U)$, $\underline{f\in F(\varphi)}$ tales que:

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{f} & V' \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n} \\ U & \xrightarrow[\varphi]{} & V \end{array} \qquad (*)$$

conmuta, y "recíprocamente", dado un diagrama conmutativo (*) con $m\in s(U)$, $n\in s(V)$, φ morfismo de Cat T y $f\in F(\varphi_1)$ (para algún φ_1), se tiene que $\underline{f\in F(\varphi)}$.

(6) Si es $m_i\in s(U)$, $i=1,2$, $m_i:U'\longrightarrow U$, entonces $m_1=m_2$.

1.2 <u>Definición:</u>

En las condiciones anteriores diremos que la sub-G-topología L de $\bar{T}$ <u>tiene modelos tangentes de K</u>, siendo K una sub-Gtopología de L, si existe un objeto E de Cat L tal que:

(i) Existe una función inyectiva T_a:Ob(Cat K)$\rightarrow$Ob(Cat L) tal que $T_a(U)$ es un $U \times E$.

(ii) Para todo objeto U de Cat K, $pr_1:T_a(U)\rightarrow U$ es un morfismo suryectivo de Cat L.

1.3 Teorema:

Todo objeto U de Cat K es soporte de un atlas abstracto tal que: si U es un modelo, entonces los morfismos de la forma $h \circ m^{-1}$ con $m \in s(U)$, $h \in t(U)$ son K^*-morfismos de atlas, siendo K^* la unión disjunta de K y T_U, T_U definida por: Ob(Cat T_U)=$\{U\}$, Morf(Cat T_U) = $\{1_U\}$, Cov T_U = $\{\{1_U\}\}$. Si L tiene modelos tangentes de K, entonces la proyección $pr_1:T_a(U)\rightarrow U$ es un K_U-morfismo de atlas, siendo K_U definida por: Ob(Cat K_U) = $\{U, T_a(U)\}$, Morf(Cat K_U)=$\{1_U$, pr , $1_{T_a(U)}\}$, Cov K_U = $\{\{1_U\}, \{1_{T_a(U)}\}\}$.

Demostración: Se tiene que $(1_{T_U}, U, 1_U)$ es un atlas abstracto. Análogamente lo es $(1_{T_{T_a(U)}}, T_a(U), 1_{T_a(U)})$, y $pr_1:T_a(U)\rightarrow U$ es un K_U-morfismo entre ambos.

1.4 Definición:

Si L tiene modelos tangentes de K y si existe una función D:Morf(Cat K)$\rightarrow$Morf(Cat $\bar{T}$) tal que:

(i) Si $\varphi:U\rightarrow V$, entonces $D\varphi:T_a(U)\rightarrow E$

(ii) Si $\varphi=1_U$, entonces $D\varphi=pr_2:T_a(U)\rightarrow E$

(iii) $D(\psi\circ\varphi) = D\psi\circ((\varphi\circ pr_1),D\varphi)$

(iv) $(\varphi\circ pr_1, D\varphi)$ es un morfismo de Cat L,

entonces diremos que L <u>tiene derivadas de K</u>.

1.5 <u>Proposición:</u>

Si L tiene derivadas de K, si se define T_a:Cat K $\longrightarrow$ Cat L sobre los morfismos por: $T_a(\varphi)=(\varphi\circ pr_1, D\varphi)$, entonces T_a es un funtor y su imagen es una subcategoría de Cat L isomorfa a Cat K, sea Cat $\bar{K}$; si además definimos:

$$\text{Cov } \bar{K} = \left\{ \{T_a(\varphi_i):T_a(U_i)\longrightarrow T_a(U) \mid \{\varphi_i\}\in \text{Cov } K\} \right\},$$

entonces es $\bar{K}$ una G-topología. Además T_a(Cat T) es una subcategoría de Cat $\bar{K}$, sea Cat T'. Definiendo:

$$\text{Cov } T' = \left\{ \{T_a(\varphi_i):T_a(U_i)\longrightarrow T_a(U) \mid \{\varphi_i\}\in \text{Cov } T\} \right\}$$

se tiene que T' es una sub-G-topología de $\bar{K}$.

<u>Demostración:</u>

Por definición, dados $\varphi:U_1\longrightarrow U_2$, $\psi:U_2\longrightarrow U_3$ morfismos de Cat K, será: $T_a(\psi\circ\varphi)$ el único morfismo tal que:

$$p_3\circ T_a(\psi\circ\varphi) = \psi\circ\varphi\circ p_1$$

$$q_3\circ T_a(\psi\circ\varphi) = D(\psi\circ\varphi)$$

siendo $p_i:T_a(U_i)\longrightarrow U_i$, $q_i:T_a(U_i)\longrightarrow E$ proyecciones canónicas, i=1,2,3. Además:

$$p_3\circ T_a(\psi)\circ T_a(\varphi) = \psi\circ p_2\circ T_a(\varphi) = \psi\circ\varphi\circ p_1$$

$$q_3\circ T_a(\psi)\circ T_a(\varphi) = D\psi\circ T_a(\varphi) = D(\psi\circ\varphi),$$

esto último por definición 1.4. Luego se ve que:

$T_a(\psi\circ\varphi) = T_a(\psi)\circ T_a(\varphi)$. Además: $T_a(1_U)=(1_U\circ p, D(1_U))=(p,q)=1_{U\times E}$

(siendo $p:T_a(U) \to U$ y $q:T_a(U) \to E$ las proyecciones canónicas). Luego, T_a es un funtor y, por ser inyectivo sobre los objetos, es Cat $\bar{K}$ una subcategoría de Cat L. Veamos que también es inyectivo sobre los morfismos; sean $\varphi, \varphi' : U_1 \to U_2$, tales que $T_a(\varphi) = T_a(\varphi')$. Se tiene que: $\varphi \circ p_1 = p_2 \circ T_a(\varphi) = p_2 \circ T_a(\varphi') = \varphi' \circ p_1$ (siendo $p_i : T_a(U_i) \to U_i$, $i=1,2$). Por ser p_1 suryectiva (definición 1.2) será $\varphi = \varphi'$. Luego T_a es un isomorfismo de Cat K sobre Cat $\bar{K}$, de lo cual se deducen trivialmente las demás afirmaciones del lema.

1.6 Definición:

Llamaremos <u>modelos tangentes</u> a los objetos de Cat T'.

1.7 Proposición:

Las proyecciones $pr_1 : T_a(U) \to U$ constituyen una transformación natural $\underline{pr}$ del funtor T_a en el funtor idéntico en Cat K.

1.8 Definición:

Diremos que L es <u>una G-topología de derivadas de K</u> si tiene derivadas de K y si es intermedia para $\{K, \bar{K}\}$ (según definición 3.1 de la primera parte).

1.9 Corolario:

Si L es una G-topología de derivadas de K, es intermedia para $\{T, T'\}$.

§2. DEFINICIÓN DEL ATLAS TANGENTE

2.1 Definición:

Con referencia a la definición 1.4 se dirá que L tiene derivadas conservativas de K si T_a conserva cubrimientos y productos fibrados de T, es decir si se verifica:

(i) Si $\{\varphi_i\} \in$ Cov T, entonces $\{T_a(\varphi_i)\} \in$ Cov $\bar{T}$.

(ii) Si:

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[dr, "f_1"'] & W \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & U_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

es un diagrama de producto fibrado en Cat T, entonces:

$$\begin{tikzcd} T_a(U_1) \arrow[dr, "T_a(f_1)"'] & T_a(W) \arrow[l, "T_a(p_1)"'] \arrow[r, "T_a(p_2)"] & T_a(U_2) \arrow[dl, "T_a(f_2)"] \\ & T_a(U) & \end{tikzcd}$$

lo es en Cat $\bar{T}$.

(iii) Si es $\Phi = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in$ Cov T, $I : C_\Phi \hookrightarrow$ Cat T el funtor inclusión (C_Φ como en el postulado (4), § 1) se tiene que:

$$T_a(U) = \varinjlim\, (T_a \circ I) \text{ en Cat } \bar{T}.$$

2.2 Definición:

Diremos que una sub-G-topología T de $\bar{T}$ es G-plena en $\bar{T}$ si se verifica:

(i) Si $\{\varphi_i\} \in$ Cov $\bar{T}$ y para todo $\underline{i}$, $\varphi_i \in$ Morf(Cat T), entonces: $\{\varphi_i\} \in$ Cov T.

(ii) Todo diagrama de producto fibrado: $\begin{tikzcd}[cramped] U_1 \arrow[dr, "f_1"'] & W \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & U_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & U & \end{tikzcd}$ en Cat $\bar{T}$, donde p_i, f_i (i=1,2) son morfismos de Cat T, es un diagrama de producto fibrado en Cat T.

2.3 Proposición:

Sea (F,X,s) como en § 1, sea T G-plena en $\overline{T}$ y supongamos que existe una G-topología L que tiene derivadas conservativas de K. Si, además, existe una función inyectiva Φ, $\Phi : V(F) \to Ob(Cat\ T)$, siendo $V(F)$ la clase de valores de F en los objetos de Cat T, tal que para todo $U' \in V(F)$, $\Phi(U')$ es un producto $U' \times E$, entonces existe un funtor generalizado $\overline{F}: T' \to \overline{T}$ (T' definido como en la proposición 1.5) que tiene las siguientes propiedades:

(i) Existe una transformación generalizada $q: \overline{F} \to F$

(ii) Existe una equivalencia débil $\overline{s}$ de $\overline{F}$ en el funtor idéntico en Cat T'.

Demostración:

Definimos $\overline{F}$ sobre los objetos por:

$$\overline{F}(T_a(U)) = \{\Phi(U') \mid U' \in F(U)\}$$

Sea, para cada $U' \in F(U)$ el morfismo $m: U' \to U$, $m \in s(U)$ (es único por postulado (6), § 1); si llamamos $\overline{m} = m\ 1_E$, siendo 1_E la identidad en E, quedará bien definida, para $\varphi : U_1 \to U_2$ morfismo de Cat T, la clase:

$$\overline{F}(T_a(\varphi)) = \{\overline{m}_2^{-1} \circ T_a(\varphi') \circ \overline{m}_1 \mid \exists f \in F(\varphi) \text{ con: } \varphi' \circ m_1 = m_2 \circ f\}$$

(nótese que, para cada $f \in F(\varphi)$ existe φ' por definición de transformación generalizada aplicada a $\underline{s}$, y es única por ser m_1 y m_2 isomorfismos).

Veamos que $\overline{F}$ es, en efecto, un funtor generalizado. Sean $\varphi : U_1 \to U_2$, $\psi : U_2 \to U_3$ morfismos de Cat T, sea $\overline{h} \in \overline{F}(T_a(\psi \circ \varphi))$.

Luego, existirán $h \in F(\psi \circ \varphi)$, $h: U_1' \to U_3'$, $\eta': U_1 \to U_3$, tales que: $\bar{h} = \bar{m}_3^{-1} \circ T_a(\eta') \circ \bar{m}_1$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} U_1' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m_1"'] & U_3' \arrow[d, "m_3"] \\ U_1 \arrow[r, "\eta'"'] & U_3 \end{tikzcd}$$

Por ser: $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$, existirán $f \in F(\varphi)$, $f: U_1' \to U_2'$, $g \in F(\psi)$, $g: U_2' \to U_3'$ tales que $h = g \circ f$, y, dados f y g existirán φ', ψ', tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} U_1' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m_1"'] & U_2' \arrow[d, "m_2"] \\ U_1 \arrow[r, "\varphi'"'] & U_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U_2' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "m_2"'] & U_3' \arrow[d, "m_3"] \\ U_2 \arrow[r, "\psi'"'] & U_3 \end{tikzcd}$$

Luego: $\psi' \circ \varphi' \circ m_1 = m_3 \circ h$ por lo que, por unicidad de η', se tiene que $\psi' \circ \varphi' = \eta'$ y entonces, si llamamos:

$\bar{f} = \bar{m}_2^{-1} \circ T_a(\varphi') \circ \bar{m}_1$, $\bar{g} = \bar{m}_3^{-1} \circ T_a(\psi') \circ \bar{m}_2$, será $\bar{h} = \bar{g} \circ \bar{f}$, con $\bar{f} \in \bar{F}(T_a(\varphi))$, $\bar{g} \in \bar{F}(T_a(\psi))$.

Recíprocamente, sea $\bar{h} = \bar{g} \circ \bar{f} \in \bar{F}(T_a(\psi)) \circ \bar{F}(T_a(\varphi))$. Serán entonces $\bar{f}, \bar{g}$ de la forma: $\bar{f} = \bar{m}_2^{-1} \circ T_a(\varphi') \circ \bar{m}_1$, $\bar{g} = \bar{m}_3^{-1} \circ T_a(\psi') \circ \bar{m}_2$ siendo φ', ψ' asociados a algún valor $f \in F(\varphi)$, $g \in F(\psi)$ respectivamente. Puesto que $\bar{f}$ y $\bar{g}$ son componibles y por la inyectividad de Φ, lo serán también f y g y entonces es: $\bar{h} = \bar{m}_3^{-1} \circ T_a(\psi' \circ \varphi') \circ \bar{m}_1$ siendo, según se vió antes, $\psi' \circ \varphi'$ asociado a $g \circ f \in F(\psi \circ \varphi)$.

Sea $1_{T_a(U)}$ la identidad en $T_a(U)$; luego: $1_{T_a(U)} = T_a(1_U)$

Sea $f \in F(1_U)$, $\varphi': U \to U$ tales que:

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"'] & U'' \arrow[d, "m'"] \\ U \arrow[r, "\varphi'"'] & U \end{tikzcd}$$

conmuta; por ser F funtor generalizado y por postulado (6), § 1 eso implica: $f = 1_U$, $(U'' = U')$ y $\varphi' = 1_U$. Luego si es $\bar{f} \in \bar{F}(T_a(1_U))$

necesariamente será $\bar{f}=1_{\overline{U'}}$, con $\overline{U'}=\Phi(U')$.

Definimos $\underline{q}$ por:

$q(U)=\left\{ pr_1 : \Phi(U') \longrightarrow U' \mid U' \in F(U) \text{ y } pr_1 \text{ proyección canónica}\right\}$
considerando aquí el funtor T_a^{-1} como el que une las categorías dominio de $\bar{F}$ y F.

Dado el morfismo $\varphi : U \longrightarrow V$ en Cat T, sea el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \overline{U'} & \xrightarrow{\bar{f}} & \overline{V'} \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ U' & & V', \end{array} \qquad (*)$$

con $\bar{f} \in \bar{F}(T_a(\varphi))$, $u \in q(U)$, $v \in q(V)$. Entonces existen $f \in F(\varphi)$, $\varphi' : U \longrightarrow V$ tales que: $\bar{f} = \bar{n}^{-1} \circ T_a(\varphi') \circ \bar{m}$ y $\varphi' \circ m = n \circ f$. Además f hace conmutativo el diagrama $(*)$. En efecto:

$$\begin{aligned} v \circ \bar{f} &= v \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\varphi') \circ \bar{m} = n^{-1} \circ pr_V \circ T_a(\varphi') \circ \bar{m} \\ &= n^{-1} \circ \varphi' \circ pr_U \circ \bar{m} = n^{-1} \circ \varphi' \circ m \circ u \\ &= f \circ u \end{aligned}$$

(siendo, en las igualdades anteriores, $pr_U : T_a(U) \longrightarrow U$, $pr_V : T_a(V) \longrightarrow V$ las proyecciones canónicas). Por lo tanto, es $\underline{q}$ una transformación generalizada.

Definimos $\bar{s} : \bar{F} \longrightarrow 1_{\text{Cat } T'}$ por:

$\bar{s}(T_a(U)) = \left\{ \bar{m} : \overline{U'} \longrightarrow T_a(U) \mid \overline{U'} \in \bar{F}(T_a(U)),\ \bar{m} = m \times 1_E,\ m \in s(U) \right\}$
Sea $T_a(\varphi) : T_a(U) \longrightarrow T_a(V)$ un morfismo de Cat T', $\bar{f} \in \bar{F}(T_a(\varphi))$. Entonces, $\bar{f}$ es de la forma: $\bar{f} = \bar{n}^{-1} \circ T_a(\varphi') \circ \bar{m}$, con $\bar{m} \in \bar{s}(T_a(U))$, $\bar{n} \in \bar{s}(T_a(V))$. Luego el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \overline{U'} & \xrightarrow{\bar{f}} & \overline{V'} \\ {\scriptstyle \bar{m}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{n}} \\ T_a(U) & \xrightarrow[T_a(\varphi')]{} & T_a(V) \end{array}$$

conmuta, con lo que se prueba que $\underline{\bar{s}}$ es una transformación generalizada y, obviamente, una equivalencia débil.

Probemos finalmente que $\bar{F}:T' \longrightarrow \bar{T}$ es un funtor entre G-topologías. Sea $\{T_a(\varphi_i):T_a(U_i) \longrightarrow T_a(U)\} \in \mathrm{Cov}\ T'$. Por definición, será entonces $\{\varphi_i\} \in \mathrm{Cov}\ T$. Sea $U' \in F(U)$, $\overline{U'} \in \bar{F}(T_a(U))$. Entonces: $\{f_i^\alpha : U_i^\alpha \longrightarrow U'\} \in \mathrm{Cov}\ \bar{T}$, siendo $f_i^\alpha \in F(\varphi_i)$. Dada f_i^α existe $\varphi_i^\alpha : U_i \longrightarrow U$ morfismo de Cat T tal que $\varphi_i^\alpha \circ m_i = m \circ f_i^\alpha$, o sea $\varphi_i^\alpha = m \circ f_i^\alpha \circ (m_i^\alpha)^{-1}$. Luego: $\{\varphi_i^\alpha\} \in \mathrm{Cov}\ \bar{T}$ y, puesto que T es G-plena en $\bar{T}$ será: $\{\varphi_i^\alpha\} \in \mathrm{Cov}\ T$. Como L tiene derivadas conservativas de K, es $\{T_a(\varphi_i^\alpha)\} \in \mathrm{Cov}\ \bar{T}$. Si definimos $\overline{f_i^\alpha}$ por: $\overline{f_i^\alpha} = \bar{m}^{-1} \circ T_a(\varphi_i^\alpha) \circ \overline{m_i^\alpha}$ es $\overline{f_i^\alpha} \in \bar{F}(T_a(\varphi_i))$ y además, por lo que se ha visto y por ser $\bar{m}$, $\overline{m_i^\alpha}$ equivalencias, se tiene que: $\{\overline{f_i^\alpha} : \overline{U_i^\alpha} \longrightarrow \overline{U'}\} \in \mathrm{Cov}\ \bar{T}$. Es decir, se verifica el axioma (i) de funtor entre G-topologías.

Sea el diagrama $\overline{U_1'} \xrightarrow{\bar{g}_1} \overline{U'} \xleftarrow{\bar{g}_2} \overline{U_2'}$, $\bar{g}_i \in \bar{F}(T_a(\varphi_i))$ (i=1,2) y supongamos que es $a_i : A \longrightarrow \overline{U_i'}$ morfismo de Cat $\bar{T}$ tal que: $\bar{g}_1 \circ a_1 = \bar{g}_2 \circ a_2$. Si son $g_i \in F(\varphi_i)$, φ_i' tales que: $\bar{g}_i = \bar{m}^{-1} \circ T_a(\varphi_i') \circ \bar{m}_i$, $m \circ g_i = \varphi_i' \circ m_i$ (con $m \in s(U)$, $m_i \in s(U_i)$) será: $g_1 \circ a_1 \circ p_1 = g_2 \circ a_2 \circ p_2$, donde $p_i \in q(U_i) : \overline{U_i'} \longrightarrow U_i'$.

Luego, por ser F funtor entre G-topologías, existirá un objeto W de Cat T, un $W' \in F(W)$ y morfismos $k_i \in F(\psi_i)$ (i=1,2) tales que:

$$\begin{array}{ccccc} U_1' & \xleftarrow{k_1} & W' & \xrightarrow{k_2} & U_2' \\ & {\scriptstyle g_1}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle g_2} & \\ & & U' & & \end{array}$$

es un diagrama de producto fibrado, siendo $\psi_i : W \longrightarrow U_i$ en Cat T.

Si es ψ_i' un morfismo de Cat T tal que: $m_i \circ k_i = \psi_i' \circ n$ con $n \in s(W)$ entonces:

$$\begin{array}{ccccc} U_1 & \xleftarrow{\psi_1'} & W & \xrightarrow{\psi_2'} & U_2 \\ & {\scriptstyle \varphi_1'}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \varphi_2'} & \\ & & U & & \end{array}$$

es un diagrama de producto fibrado en Cat $\bar{T}$, y, por ser T G-plena en $\bar{T}$, lo es también en Cat T. Como L tiene derivadas

conservativas de K, se tiene que:
$$\begin{tikzcd} T_a(U_1) \arrow[dr, "T_a(\varphi'_1)"'] & T_a(W) \arrow[l, "T_a(\psi'_1)"'] \arrow[r, "T_a(\psi'_2)"] & T_a(U_2) \arrow[dl, "T_a(\varphi'_2)"] \\ & T_a(U) & \end{tikzcd}$$
es un diagrama de producto fibrado en Cat $\bar{T}$. Si tomamos:
$\bar{k}_i=\bar{m}_i^{-1} \circ T_a(\psi'_i) \circ \bar{n}$, entonces $\bar{k}_i \in \bar{F}(T_a(\psi'_i))$ y si es $\overline{W'} = \Phi(W')$
el siguiente diagrama:
$$\begin{tikzcd} \overline{U'_1} \arrow[dr, "\bar{g}_1"'] & \overline{W'} \arrow[l, "\bar{k}_1"'] \arrow[r, "\bar{k}_2"] & \overline{U'_2} \arrow[dl, "\bar{g}_2"] \\ & \overline{U'} & \end{tikzcd}$$
es de producto fibrado.

2.4 <u>Definición:</u>

Llamaremos <u>semicompleta</u> a una categoría $\mathbb{C}$ tal que todo funtor generalizado F a valores en $\mathbb{C}$ tiene límite directo si y sólo si existe una transformación generalizada $k:F \longrightarrow A$, siendo (por abuso de notación) A el funtor "constante" igual a un objeto A de $\mathbb{C}$.

2.5 <u>Teorema:</u>

Si existe una G-topología L de derivadas conservativas de K (según 1.8 y 2.1) y si Cat $\bar{T}$ es semicompleta, entonces en las condiciones de 2.3 existe $\bar{X}$ tal que $(\bar{F},\bar{X},\bar{s})$ es un atlas abstracto. Además, si son $\underline{t}$ y $\underline{\bar{t}}$ las transformaciones generalizadas asociadas a los límites $\underline{X}$ y $\underline{\bar{X}}$ respectivamente, entonces existe un único morfismo $p:\bar{X}\longrightarrow X$ en Cat $\bar{T}$ tal que: $p \circ \bar{t}=t \circ q$ (considerando a $\underline{p}$ como transformación natural entre funtores constantes) que es un L-morfismo entre los atlas $(\bar{F},\bar{X},\bar{s})$ y (F,X,s).

Demostración:

Sea $k:\bar{F} \longrightarrow X$ definida por: $k=t \circ q$. Entonces puesto que Cat $\bar{T}$ es semicompleta, existirá $\bar{X}=\varprojlim \bar{F}$. Obviamente, $(\bar{F},\bar{X},\bar{s})$ es un atlas abstracto. Además, por la propiedad universal del límite, existirá un único morfismo $p:\bar{X} \longrightarrow X$ tal que: $p \circ \bar{t}=k$, o sea: $p \circ \bar{t}=t \circ q$, y que es un L-morfismo de atlas; en efecto, dado el diagrama: $T_a(U) \xleftarrow{\bar{m}} U' \xrightarrow{\bar{h}} X$, con $\bar{m} \in \bar{s}(T_a(U))$, $\bar{h} \in \bar{t}(T_a(U))$ tomando el cubrimiento trivial para $T_a(U)$ y el morfismo $pr(U):T_a(U) \longrightarrow U$ de Cat L, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{p} & X \\ \bar{h}\uparrow & & \uparrow h \\ \bar{U'} & \xrightarrow{r} & U' \\ \bar{m}\downarrow & & \downarrow m \\ T_a(U) & \xrightarrow{pr(U)} & U \end{array}$$

siendo $h \in t(U)$, $m \in s(U)$, pues existe $r:\bar{U'} \longrightarrow U'$, $r \in q(U)$ que hace conmutativos los dos diagramas parciales.

2.6 Definición:

En las condiciones del teorema 2.5, se llamará a $(\bar{F},\bar{X},\bar{s})$ un atlas tangente al (F,X,s) y al morfismo p su proyección natural.

§ 3. RESTRICCION DEL ATLAS DOMINIO DE UN MORFISMO DADO

Comenzaremos este parágrafo demostrando algunas conclusiones que se pueden obtener de los postulados (1) a (6) del § 1.

3.1 Lema:

Sea W'_{12} como en el postulado (1), § 1. Entonces:

$$\begin{tikzcd} U_1 & W_{12} \arrow[l, "p'_1"'] \arrow[r, "p'_2"] & U_2 \arrow[dl, "h_2 \circ m_2"] \\ & X \arrow[from=ul, "h_1 \circ m_1^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

es un diagrama de producto fibrado, siendo p'_i $(i=1,2)$ tal que: $m_i^{-1} \circ p'_i = q_i \circ m_{12}^{-1}$, con $m_{12} \in s(W_{12})$, $m_i \in s(U_i)$

3.2 Lema:

Sea $\Phi = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}\ T$. Entonces para todo $U' \in F(U)$ existe $\Phi' = \{f_i : U'_i \longrightarrow U'\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}\ \overline{T}$ tal que para todo $\underline{i}$: $f_i \in F(\varphi_i)$ y f_i es tal que $m \circ f_i = \varphi_i \circ m_i$, siendo $m \in s(U)$, $m_i \in s(U_i)$.

Demostración:

Inmediata usando el postulado (5), § 1 y por el axioma de composición de cubrimientos.

3.3 Definición:

Llamaremos a Φ' una <u>imagen de Φ por F asociada a U'</u>.

3.4 Lema:

Sea T G-plena en $\overline{T}$. Si es $\Phi = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in \mathrm{Cov}\ T$ y $\Psi = \{\psi_j : V_j \longrightarrow U\}$ una familia de morfismos de Cat T, entonces $\Phi \cup \Psi$ Cov T.

3.5 Lema:

Sea C_Φ como en el postulado (4), §1, $U' \in F(U)$, $\Phi' = \{ f_i : U'_i \longrightarrow U' \}$ una imagen de Φ por F asociada a U'. Si es $C_{\Phi'}$ la categoría definida por:

$\mathrm{Ob}(C_{\Phi'}) = \{ U'_i, U'_{ij} \mid U'_{ij}$ valor de F que es un $U'_i \underset{U'}{\times} U'_j$ respecto de f_i, $f_j \}$

$\mathrm{Morf}(C_{\Phi'}) = \{$identidades, composiciones de proyecciones de productos fibrados $\}$

entonces $\varinjlim I' = U'$, siendo $I' : C_{\Phi'} \longrightarrow \mathrm{Cat}\ \overline{T}$ el funtor inclusión.

Demostración:

Por ser $\Phi' \in \mathrm{Cov}\ \overline{T}$ existe para todo i, para todo j, $U'_i \underset{U'}{\times} U'_j$ luego, por ser F un funtor entre G-topologías, existe un producto fibrado de esa forma que es valor del funtor. Es decir, se tiene un diagrama:

$$\begin{tikzcd} U'_i & U'_{ij} \arrow[l, "q_i"'] \arrow[r, "q_j"] & U'_j \arrow[dl, "f_j"] \\ & U' \arrow[from=ul, "f_i"', crossing over] & \end{tikzcd}$$

con $q_\alpha \in F(p_\alpha)$, $\alpha = i, j$.

Sean π_i, π_j tales que $m_i \circ q_i = \pi_i \circ m_{ij}$, $m_j \circ q_j = \pi_j \circ m_{ij}$ para $m_\alpha \in s(U_\alpha)$, $\alpha = i, j$, $m_{ij} \in s(U_{ij})$. Luego por el postulado (5), § 1, será $q_\alpha \in F(\pi_\alpha)$. Además, por 2.1 (primera parte) se tiene el diagrama:

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[dr, "\varphi_i"'] & U_{ij} \arrow[l, "\pi_i"'] \arrow[r, "\pi_j"] & U_j \arrow[dl, "\varphi_j"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

que es de producto fibrado. Sea D_Φ una categoría análoga a la C_Φ que figura en el postulado (4), § 1, que contiene a los U_{ij}, π_i, π_j. Evidentemente, existe un funtor ordinario $A : D_\Phi \longrightarrow C_{\Phi'}$, que es un isomorfismo (A lleva U_i en U'_i, U_{ij} en

U'_{ij} , π_i en q_i). Existe también una transformación natural $a:I \longrightarrow I'$ (siendo $I:D_\Phi \longrightarrow \mathrm{Cat}\,\overline{T}$ el funtor inclusión) que es una equivalencia débil, dada por: $a(W):I(W) \longrightarrow I'A(W)$, $a(W)=(m_W)^{-1}$, con $m_W \in s(W)$ (nótese que hemos considerado una transformación natural entre funtores con distintos dominios, con el funtor A como vínculo entre esos dominios). Si es $m:U' \longrightarrow U$, $m \in s(U)$, se tiene que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{u} & U \\ a\downarrow & & \downarrow m^{-1} \\ I' & \xrightarrow{u^{-1}} & U' \end{array} \qquad (*)$$

conmuta, siendo $\underline{u}$ la transformación natural asociada al límite (dada sobre los U_i por la familia $\{\varphi_i\}$). y u' la análoga dada sobre los U'_i por la familia $\{f_i\}$.

Si es Y un objeto de $\mathrm{Cat}\,\overline{T}$, $h:I' \longrightarrow Y$ una transformación natural, existirá, por la propiedad universal del límite, un único morfismo $k:U \longrightarrow Y$ de $\mathrm{Cat}\,\overline{T}$ tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{u} & U \\ a\downarrow & & \downarrow k \\ I' & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

conmuta. Luego, si tomamos $l=k \circ m$, se ve ,tomando en cuenta el diagrama (*), que $\underline{l}$ es el único morfismo tal que:

$$\begin{array}{ccc} I' & \xrightarrow{u'} & U' \\ & \searrow^{h} & \downarrow l \\ & & Y \end{array}$$

conmuta.

3.6 <u>Proposición:</u> ("restricción" de un atlas dado)

Sea (F,X,s) un atlas abstracto como en 1.1 .

Sea $\widetilde{T}$ una sub-G-topología de T tal que:

(i) $\widetilde{T}$ es G-plena en T.

(ii) Si es $\varphi: U_1 \longrightarrow U_2$ un morfismo de Cat T y U_2 un objeto de Cat $\widetilde{T}$, entonces U_1 es un objeto y φ un morfismo de Cat $\widetilde{T}$.

(iii) Para todo objeto U de Cat T existe $\{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in \mathrm{Cov}\, T$ con U_i objeto de Cat $\widetilde{T}$.

Entonces, existe un funtor $\widetilde{F}: \widetilde{T} \longrightarrow \overline{T}$ y una transformación generalizada $\widetilde{s}$ tales que: (1) Para todo $\widetilde{U}' \in \widetilde{F}(\widetilde{U})$ vale la siguiente condición: (R) existe $U' \in F(\widetilde{U})$, existe $\Phi = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in \mathrm{Cov}\, T$ con $U_{i_0} = \widetilde{U}$ y $\Phi' = \{f_i : U_i' \longrightarrow U'\}$ imagen de Φ por F asociada a U', con $U'_{i_0} = \widetilde{U'}$.

(2) $\widetilde{s} = s|_{\widetilde{F}}$

(3) $(\widetilde{F}, X, \widetilde{s})$ es un atlas K-equivalente al (F,X,s).

<u>Demostración:</u>

Se define $\widetilde{F}$ por:

$\widetilde{F}(\widetilde{U}) = \{\widetilde{U}' \in F(\widetilde{U})$ tales que verifican (R)$\}$

$\widetilde{F}(\widetilde{\varphi}) = \{f \in F(\widetilde{\varphi}) \mid f : \widetilde{U}_1' \longrightarrow \widetilde{U}_2',\ \widetilde{U}_i' \in \widetilde{F}(\widetilde{U}_i),\ i=1,2\}$

Se ve que $\widetilde{F}$ es un funtor generalizado, y que $\widetilde{s}$ queda definida por (2).

Sea $t: F \longrightarrow X$ la transformación asociada al límite, y sea $\widetilde{t} = t|_{\widetilde{F}}$. Probemos que $\varinjlim \widetilde{F} = X$, según $\widetilde{t}$. Sea Y un objeto de Cat $\widetilde{T}$, $\widetilde{u}: \widetilde{F} \longrightarrow Y$ una transformación generalizada y veamos que existe una extensión de $\underline{\widetilde{u}}$ en $\underline{u}$, $u: F \longrightarrow Y$. Sea U un objeto de Cat T, $U' \in F(U)$. Por hipótesis, existe $\Phi = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in \mathrm{Cov}\, T$ tal que para todo $\underline{i}$, U_i es un objeto de Cat $\widetilde{T}$. Luego, si es

$\Phi' = \{f_i : U'_i \longrightarrow U'\} \in \mathrm{Cov}\ \overline{T}$ una imagen de Φ por F asociada a U' , si son D_Φ , $C_{\Phi'}$ asociadas a Φ como en el lema 3.5, si son I,I', A también como en esa demostración, se ve que: $\tilde{F}|_{D_\Phi} = I' \circ A$. Además, teniendo en cuenta el hecho general (demostrable inmediatamente) de que, si es W un límite de un funtor $G: C \longrightarrow D$, lo es también de cualquier funtor de la forma $G \circ A$, con A un isomorfismo, $A: C' \longrightarrow C$, se tiene que: $U' = \varinjlim I' \circ A$. Luego, existirá un único morfismo $\underline{1}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} I' \circ A \arrow[r, "u' \circ A"] \arrow[dr, "\tilde{u}_{U'}"'] & U' \arrow[d, "1"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

siendo $\tilde{u}_{U'} = \tilde{u}|_{I' \circ A}$. Es decir que para todo $\underline{i}$ conmutará el diagrama:

$$\begin{tikzcd} U'_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "h_i"'] & U' \arrow[d, "1"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad (*)$$

con $h_i \in \tilde{u}(U_i)$, siendo $\underline{1}$ el único que hace esos diagramas conmutativos. Luego definimos el valor de $\underline{u}$ en U' por: $1: U' \longrightarrow Y$ ($1 \in u(U)$). Sea $\Psi = \{\varphi_j : V_j \longrightarrow U\} \in \mathrm{Cov}\ T$, con V_j objeto de Cat $\tilde{T}$, para todo j. Sea $\Psi' = \{g_j : V'_j \longrightarrow U'\}$ una imagen de Ψ por F asociada a U'. Por lo ya visto, existirá un único morfismo $1' : U' \longrightarrow Y$ tal que, para todo j, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V'_j \arrow[r, "g_j"] \arrow[dr, "h_j"'] & U' \arrow[d, "1'"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad (**)$$

conmuta, siendo $h_j \in \tilde{u}(V_j)$. Por el postulado (3), se tiene que $\Psi' \cup \Phi' \in \mathrm{Cov}\ \overline{T}$ y, por el lema 3.4 que $\Phi \cup \Psi \in \mathrm{Cov}\ T$, y obviamente $\Psi' \cup \Phi'$ es una imagen de $\Phi \cup \Psi$ por F asociada a U'.

Entonces, existe un único morfismo $h:U' \to Y$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} U'_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "h_i"'] & U' \arrow[d, "h"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V'_j \arrow[r, "g_j"] \arrow[dr, "h_j"'] & U' \arrow[d, "h"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Luego, por (*) y (**) debe ser $h=l=l'$, por lo que se ve que $\underline{l}$ no depende del cubrimiento elegido, es decir que $u:F \to Y$ está bien definida. Además, es una transformación generalizada. En efecto: sea $\varphi:U \to V$ morfismo de Cat T, sean $f \in F(\varphi)$, $f:U' \to V'$ $k \in u(U)$, $k:U' \to Y$, $l \in u(V)$, $l:V' \to Y$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r, "\varphi_i"] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ V_j \arrow[r, "\psi_j"] & V \end{tikzcd}$$

en Cat T, siendo $\Phi = \{\varphi_i\} \in \text{Cov } T$, $\Gamma = \{\psi_j\} \in \text{Cov } T$, U_i, V_j objetos de Cat $\tilde{T}$ para todo i, para todo j. Sean $\Phi' = \{f_i : U'_i \to U'\}$ imagen de $\{\varphi_i\}$ por F asociada a U' , $\Gamma' = \{g_j : V'_j \to V'\}$ idem de $\{\psi_j\}$ asociada a V'. Si es $\varphi':U \to V$ tal que $n \circ f = \varphi' \circ m$ (con $m \in s(U)$, $n \in s(V)$) se tiene, por lema 3.4 que: $\{\varphi' \circ \varphi_i\} \cup \Gamma$ $\in$ Cov T, y además $\{f \circ f_i\} \cup \Gamma' \in$ Cov $\overline{T}$ y éste es imagen por F del anterior, asociada a V'. Entonces, por lo visto, se tiene que:

$$\begin{tikzcd} U'_i \arrow[r, "f \circ f_i"] \arrow[dr, "h_i"'] & V' \arrow[d, "l"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

conmuta, como $\underline{l}$ es el único tal que: $l \circ f_i = h_i$, se tiene que: $m \circ f = l$.

Entonces, por la propiedad universal del límite, se tiene que existe un único morfismo $p:X \to Y$ tal que:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "u"'] & X \arrow[d, "p"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

conmuta, en particular conmutará también:

$$\begin{tikzcd} \tilde{F} \arrow[r, "\tilde{t}"] \arrow[dr, "\tilde{u}"'] & X \arrow[d, "p"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

es decir que $\varinjlim \tilde{F} = X$; luego $(\tilde{F},X,\tilde{s})$ es un atlas abstracto.

Trivialmente se ve que si K es una G-topología intermedia para $\{\tilde{T},T\}$, 1_X es un K-morfismo de $(\tilde{F},X,\tilde{s})$ en (F,X,s). Recíprocamente, dado el diagrama $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X$, con $m \in s(U)$, $h \in t(U)$ sea $\{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in$ Cov T, dado por la hipótesis (iii) de la proposición. Se tiene entonces que, si es $\{f_i : U'_i \longrightarrow U'\}$ imagen por F de $\{\varphi_i\}$ asociada a U', existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "1_X"] & X & \\ U' \arrow[ur, "h"] & & & U'_i \arrow[ul, "h_i"'] \\ U \arrow[u, "m^{-1}"] & & & \\ & U_i \arrow[ul, "\varphi_i"] \arrow[r, "1_{U_i}"] & U_i \arrow[uur, "m_i^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto: $h \circ m^{-1} \circ \varphi_i = h \circ f_i \circ m_i^{-1} = h_i \circ m_i^{-1}$. Entonces también sería 1_X un K-morfismo de (F,X,s) en $(\tilde{F},X,\tilde{s})$. Además, K es intermedia para $\{T\}$, siendo $\tilde{T} \subset T \subset K \subset \bar{T}$. Si es $\{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in$ Cov K, U un objeto de Cat $\tilde{T}$, se tiene que U_i es un objeto y φ_i un morfismo de Cat $\tilde{T}$ (por hipótesis (ii)) y entonces, como U es en particular un objeto de Cat T, será $\{\varphi_i\} \in$ Cov T, lo que implica, por ser $\tilde{T}$ G-plena en T, que $\{\varphi_i\} \in$ Cov $\tilde{T}$. Es decir que K es intermedia para $\{\tilde{T},T\}$ y, por lo anterior, resulta (3).

3.7 <u>Definición:</u>

Dado un morfismo α entre los atlas $A_1=(F_1,X_1,s_1)$ y $A_2=(F_2,X_2,s_2)$, dado un modelo U de A_1 y un $U' \in F(U)$, existe $\Phi = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in$ Cov T_1 y morfismos $\alpha_i : U_i \longrightarrow V_i$ de Cat K, con V_i modelo de A_2, tales que:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & X_1 \arrow[rr, "\alpha"] & & X_2 & \\
U' \arrow[ur, "h"] & & & & V_i' \arrow[ul, "h_i"'] \\
U \arrow[u, "m^{-1}"] & & & & \\
 & U_i \arrow[ul, "\varphi_i"] \arrow[rr, "\alpha_i"] & & V_i \arrow[uur, "n_i^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo $m \in s_1(U)$, $h \in t_1(U)$, $n_i \in s_2(V_i)$, $h_i \in t_2(V_i)$.

Llamaremos a Φ un <u>cubrimiento de U asociado a (α, U')</u>.

3.8 <u>Teorema:</u>

Sea $\alpha : X_1 \longrightarrow X_2$ un morfismo de Cat $\bar{T}$. Sea para $i=1,2$, V_i una K-variedad de soporte X_i, $A_i=(F_i,X_i,s_i)$ un atlas de V_i. Entonces α es un morfismo de V_1 en V_2 sii existe $\widetilde{A}_1=(\widetilde{F}_1,X_1,\widetilde{s}_1) \in V_1$ tal que α es un morfismo de $\widetilde{A}_1$ en A_2 y para todo modelo de $\widetilde{U}$ de $\widetilde{A}_1$, para todo $\widetilde{U}' \in \widetilde{F}_1(\widetilde{U})$ un cubrimiento de $\widetilde{U}$ asociado a $(\alpha, \widetilde{U}')$ es el trivial.

<u>Demostración:</u>

Si α es un morfismo de $\widetilde{A}_1$ en A_2, por definición es de V_1 en V_2. Recíprocamente, sea α un morfismo de V_1 en V_2 sea Cat $\widetilde{T}_1$ la subcategoría plena de Cat T_1 tal que:

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Cat}\ \widetilde{T}_1) = \Big\{ \widetilde{U} \text{ modelo de } A_1 \ \Big|\ \exists\ U \text{ modelo de } A_1,\ U' \in F_1(U)$$
$$\Phi = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \text{ con } U_{io} = \widetilde{U},$$
$$\Phi \text{ cubrimiento de } U \text{ asociado a } (\alpha, U') \Big\}$$

Sea $\mathrm{Cov}\ \widetilde{T}_1 = \mathrm{Cov}\ T_1 \big|_{\mathrm{Cat}\ \widetilde{T}_1}$

Obviamente, $\widetilde{T}_1$ es G-plena en T_1.

Veamos que se verifican las hipótesis (ii) y (iii) de la proposición 3.6. Sea $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ un morfismo de Cat T_1, U_2 un objeto de Cat $\tilde{T}_1$. Luego existen un modelo U de A_1 , $U' \in F_1(U)$ Φ un cubrimiento de U asociado a (α, U') tales que es $\Phi = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\}$ con $U_{io} = U_2$. Si tomamos $\Phi_1 = \Phi \cup \{\varphi_{io} \circ \varphi\}$ se tiene que $\Phi_1 \in \mathrm{Cov}\ T_1$ (por lema 3.4) y si son V_{io} modelo de A_2 , α_{io} morfismo de Cat K, dados por ser Φ cubrimiento asociado a (α, U') entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[r, "\alpha"] & X_2 & \\
U' \arrow[ur, "h"] & & & V'_{io} \arrow[ul, "k"'] \\
U \arrow[u, "m^{-1}"] & & & \\
& U_1 \arrow[ul, "\varphi_{io}\circ\varphi"] \arrow[r, "\alpha_{io}\circ\varphi"] & V_{io} \arrow[uur, "n"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo $m \in s_1(U)$, $h \in t_1(U)$, $n \in s_2(V_{io})$, $k \in t_2(V_{io})$; luego Φ_1 es un cubrimiento de U asociado a (α, U') y entonces resulta U_1 un objeto y φ un morfismo de Cat $\tilde{T}_1$ (esto último por ser Cat $\tilde{T}_1$ subcategoría plena de Cat T).

Entonces, puesto que la hipótesis (iii) se verifica trivialmente, por la proposición 3.6 tenemos que $\tilde{A}_1$ es K-equivalente a A_1. Luego, será α un morfismo de $\tilde{A}_1$ en A_2.

Sea el diagrama: $W \xleftarrow{o} W' \xrightarrow{l} X_1$, con $o \in \tilde{s}_1(W)$, $l \in \tilde{t}_1(W)$ Entonces por definición de Cat $\tilde{T}_1$ y de $\tilde{F}_1$ existirá un $\Phi = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\}$ tal que $U_{io} = W$ y si es $\Phi' = \{f_i : U_i \longrightarrow U'\}$ imagen de Φ por F asociada a U' , será $U'_{io} = W'$. Luego, se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, "f_{io}"] \arrow[d, "o"'] & U' \arrow[d, "m"] \\
W \arrow[r, "\varphi_{io}"'] & U
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, "f_{io}"] \arrow[dr, "l"'] & U' \arrow[d, "h"] \\
& X_1
\end{tikzcd}
\qquad (*)$$

con $m \in s_1(U)$, $h \in t_1(U)$. Por ser Φ un cubrimiento de U asociado a (α, U') existirán un morfismo de Cat K $\alpha_{io} : W \longrightarrow V_{io}$, siendo V_{io} un modelo de A_2 y un $V'_{io} \in F_2(V_{io})$ tales que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[r, "\alpha"] & X_2 & \\
U' \arrow[ur, "h"] & & & V'_{i_0} \arrow[ul, "k"'] \\
U \arrow[u, "m^{-1}"] & W \arrow[l, "\varphi_{i_0}"] \arrow[r, "\alpha_{i_0}"] & V_{i_0} \arrow[ur, "n^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo $n \in s_2(V_{io})$, $k \in t_2(V_{io})$. Luego, por (*) conmutará también:

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[r, "\alpha"] & X_2 & \\
W' \arrow[ur, "1"] & & & V'_{i_0} \arrow[ul, "k"'] \\
 & W \arrow[ul, "\sigma^{-1}"] \arrow[r, "\alpha_{i_0}"] & V_{i_0} \arrow[ur, "n^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Es decir que el cubrimiento: $\{1_W : W \longrightarrow W\}$ es asociado a (α, W').

3.9 Corolario:

Sean V_1 , V_2 K-variedades de soportes X_1 , X_2 respectivamente. Sea $A_i=(F_i,X_i,s_i) \in V_i$, i=1,2. Entonces, un morfismo $\alpha : X_1 \longrightarrow X_2$ en Cat $\overline{T}$ es un K-morfismo de variedades sii existe una transformación generalizada $k:\widetilde{F}_1 \longrightarrow X_2$ ($\widetilde{F}_1$ como en el teorema 3.8) tal que: (1) Para todo $U' \in \widetilde{F}_1(U)$, $k' \in k(U)$, el morfismo. $k' : U' \longrightarrow X_2$ es de la forma: $k'=v \circ n^{-1} \circ \alpha' \circ m^{-1}$, con $m \in \widetilde{s}_1(U)$, $n \in s_2(V)$, $v \in t_2(V)$, α' morfismo de Cat K.

(2) El morfismo $\underline{\alpha}$ es el único que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{F}_1 \arrow[r, "\widetilde{t}_1"] \arrow[dr, "k"'] & X_1 \arrow[d, "\alpha"] \\
 & X_2
\end{tikzcd}$$

Demostración:

Si $\underline{\alpha}$ es un morfismo de variedades, por el teorema 3.8 se ve que existe $\underline{k}$ de esa forma. Veamos que es transformación generalizada. Sea $f:U_1'\longrightarrow U_2'$, $f\in\tilde{F}_1(\varphi)$ y $\varphi:U_1\longrightarrow U_2$ un morfismo de Cat $\tilde{T}_1$. Veamos que $k_2\circ f=k_1$, siendo

$$k_i=v_i\circ n_i^{-1}\circ\alpha_i'\circ m_i \quad (i=1,2),\ k_i\in k(U_i)$$

$$\begin{aligned} k_2\circ f &= v_2\circ n_2^{-1}\circ\alpha_2'\circ m_2\circ f=\alpha\circ h_2\circ f \quad \text{(por ser } \alpha \text{ un morfismo)}\\ &= \alpha\circ h_1 = v_1\circ n_1^{-1}\circ\alpha_1'\circ m_1\\ &= k_1 \end{aligned}$$

Luego, debe existir un único morfismo $h:X_1\longrightarrow X_2$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \tilde{F}_1 \arrow[r, "\tilde{t}_1"] \arrow[dr, "k"'] & X_1 \arrow[d, "h"] \\ & X_2 \end{tikzcd}$$

conmuta (por ser $\varinjlim \tilde{F}_1=X_1$). Como $\underline{\alpha}$ verifica esa condición, será $h=\alpha$.

La recíproca es trivial.

3.10 <u>Definición:</u>

Sean A_1 , A_2 , $\tilde{A}_1$ como en el teorema 3.8; dado el diagrama $U_1\xleftarrow{m_1}U_1'\xrightarrow{h_1}X_1$, con $m_1\in\tilde{s}_1(U_1)$, $h_1\in\tilde{t}_1(U_1)$, existirá uno correspondiente: $V_1\xleftarrow{n_1}V_1'\xrightarrow{k_1}X_2$, con $n_1\in s_2(V_1)$, $k_1\in t_2(V_1)$ y un morfismo $\alpha_1:U_1\longrightarrow V_1$ de Cat K tales que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[r, "\alpha"] & X_2 & \\ U_1' \arrow[ur, "h_1"] & & & V_1' \arrow[ul, "k_1"'] \\ & U_1 \arrow[ul, "m_1^{-1}"] \arrow[r, "\alpha_1"] & V_1 \arrow[ur, "n_1^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $\alpha_1'=n_1^{-1}\circ\alpha_1\circ m_1$.

Llamaremos a V_1' (respectivamente V_1) un <u>valor de F_2 correspondiente a U_1'</u> (respectivamente a un <u>modelo correspondiente a</u> U_1) respecto de U_1 , V_1 (respectivamente de U_1' , V_1') por α , y a α_1' (respectivamente α_1) un <u>morfismo inducido</u> por α entre U_1' y V_1' (respectivamente entre U_1 y V_1).

3.11 <u>Corolario:</u>

En las mismas condiciones que el teorema 3.8, si son $a:U_1' \to U_2'$, $a \in \widetilde{F}_1(\varphi)$; $\varphi:U_1 \to U_2$; $\alpha_2':U_2' \to V_2'$ un morfismo inducido por α entre U_2' y V_2' , entonces existe un valor W_1' de F_2 correspondiente a U_1' (respecto de U_1 , W_1 para algún W_1) y existe $b:W_1' \to V_2'$, $b \in F_2(\psi)$, $\psi:W_1 \to V_2$ tales que:

$$\begin{array}{ccc} U_1' & \xrightarrow{\alpha_1'} & W_1' \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ U_2' & \xrightarrow{\alpha_2'} & V_2' \end{array}$$

conmuta, siendo α_1' un morfismo inducido por α entre U_1' y W_1'.

<u>Demostración:</u>

Sea $\beta_1':U_1' \to V_1'$ un morfismo inducido por α , $\beta_1' = n_1^{-1} \circ \beta_1 \circ m_1$, con $m_1 \in \widetilde{s}_1(U_1)$, $n_1 \in s_2(V_1)$.

Sea $\varphi':U_1 \to U_2$ tal que $m_2 \circ a = \varphi' \circ m_1$, con $m_2 \in \widetilde{s}_1(U_2)$

Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} V_1' & \xleftarrow{\beta_1 \circ m_1^{-1}} & U_1 & \xrightarrow{\alpha_2' \circ \varphi'} & V_2' \\ & {\scriptstyle k_1}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle k_2} & \\ & & X_2 & & \end{array}$$

siendo $k_i \in t_2(V_i)$, i=1,2. En efecto:

$$\begin{aligned} k_2 \circ \alpha_2' \circ \varphi' &= \alpha \circ h_2 \circ m_2^{-1} \circ \varphi' \quad \text{(con } h_2 \in t_1(U_2) \text{ por ser } \alpha \text{ un morfismo)} \\ &= \alpha \circ h_2 \circ a \circ m_1^{-1} = \alpha \circ h_1 \circ m_1^{-1} \\ &= k_1 \circ \beta_1' \circ m_1^{-1} \end{aligned}$$

Luego, por el postulado (1), § 1, existe un $W_1' \in F_2(W_1)$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V_1' \arrow[dr, "k_1"'] & W_1' \arrow[l, "q_1"'] \arrow[r, "q_2"] & V_2' \arrow[dl, "k_2"] \\ & X_2 & \end{tikzcd}$$

es de producto fibrado, siendo $q_i \in F_2(p_i)$, $i=1,2$. Entonces, por el lema 3.1 será también:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[dr, "k_1 \circ n_1^{-1}"'] & W_1 \arrow[l, "p_1'"'] \arrow[r, "p_2'"] & V_2 \arrow[dl, "k_2 \circ n_2^{-1}"] \\ & X_2 & \end{tikzcd}$$

un diagrama de producto fibrado, con p_i' , $i=1,2$ tales que (1) $p_i' \circ o = n_i \circ q_i$ siendo $o:W_1' \longrightarrow W_1$, $o \in s_2(W_1)$. Se ve entonces que existe un único morfismo $\alpha_1 : U_1 \longrightarrow W_1$ tal que: (2) $p_1' \circ \alpha_1 = \beta_1$ y (3) $p_2' \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi'$. Como β_1 es un morfismo de Cat K y p_1' de Cat T , resulta α_1 un morfismo de Cat K (por postulado (2), § 1).

Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[r, "\alpha"] & X_2 & \\ U_1' \arrow[ur, "h_1"] & & & W_1' \arrow[ul, "1"'] \\ & U_1 \arrow[ul, "m_1^{-1}"] \arrow[r, "\alpha_1"] & W_1 \arrow[ur, "o^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

con $1 \in t_2(W_1)$, lo que se deduce inmediatamente de (1),(2) y (3) Luego, α_1 es un morfismo inducido por α entre U_1 y W_1 y $\alpha_1' = o^{-1} \circ \alpha_1 \circ m_1$ lo es entre U_1' y W_1'.

Si es $b = q_2$, se tiene además que:

$$\begin{aligned} \alpha_2' \circ a &= n_2^{-1} \circ \alpha_2 \circ m_2 \circ a = n_2^{-1} \circ \alpha_2 \circ \varphi' \circ m_1 = n_2^{-1} \circ p_2' \circ \alpha_1 \circ m_1 \\ &= b \circ o^{-1} \circ \alpha_1 \circ m_1 \\ &= b \circ \alpha_1' \end{aligned}$$

§4. DEFINICION DEL MORFISMO TANGENTE ASOCIADO A UNO DADO

Analizaremos, a modo de introducción, los postulados del §1 y conclusiones correspondientes del § 3, para el caso de un atlas tangente a uno dado. Es decir, deberemos reemplazar en los enunciados "T" por "T'" , "K" por "$\bar{K}$" (pues $\bar{K}$ será la G-topología intermedia para la variedad tangente a construirse) y (F,X,s) por ($\bar{F}$,$\bar{X}$,$\bar{s}$).

El postulado (1) vale trivialmente en este caso (puesto que $\bar{F}$ es a valores en $\bar{T}$) sin el caso particular, referente específicamente al funtor F.

El postulado (2) no vale en general; el (3) es válido obviamente. Probemos que el postulado (4) también es aplicable en el caso que estamos considerando:

4.1 Lema:

Sea $\Gamma = \{\bar{\varphi}_i : \bar{U}_i \longrightarrow \bar{U}\} \in$ Cov T'. Sea la categoría C_Γ definida por:

$Ob(C_\Gamma) = \{\bar{U}_i \ , \ \bar{W}_{ij} \mid \bar{W}_{ij}$ es un $\bar{U}_i \underset{\bar{U}}{\times} \bar{U}_j$ respecto de $\bar{\varphi}_i \ , \ \bar{\varphi}_j$ en Cat T'$\}$

$Morf(C_\Gamma) = \{$identidades, composiciones de proyecciones de productos fibrados $\}$

Entonces, si es $\bar{I}: C_\Gamma \longrightarrow$ Cat $\bar{T}$ el funtor inclusión, se tiene que: $\bar{U} = \varinjlim \bar{I}$ respecto de la transformación generalizada $t_{\bar{U}}$ dada sobre los $\bar{U}_i$ por $t_{\bar{U}}(\bar{U}_i) = \bar{\varphi}_i$.

Demostración:

Como T_a es un isomorfismo, existe una subcategoría de Cat T, sea C_Φ , asociada a $\Phi=\{\varphi_i:U_i \longrightarrow U\} \in$ Cov T como en el postulado(4),§1 tal que: $T_a(C_\Phi)=C_{\bar{\Phi}}$ (en particular, será $\bar{\varphi}_i=T_a(\varphi_i)$). Por la definición 2.1, se tiene que: $\varinjlim (T_a \circ I) = T_a(U)$ en Cat $\bar{T}$ y es, evidentemente (por ser $T_a \circ I$ e $\bar{I}$ funtores de igual imagen pero distinto dominio) $T_a(U) = \bar{U} = \varinjlim \bar{I}$.

Siguiendo con las consideraciones, mostremos la validez del postulado (5), que tomará la siguiente forma:

4.2 Lema:

Dado el diagrama: $\bar{U} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{V} \xleftarrow{\bar{n}} \bar{V}'$ con $\bar{\varphi}$ morfismo de Cat T' , $\bar{n} \in \bar{s}(\bar{V})$, existen $\bar{m} \in \bar{s}(\bar{U})$, $\bar{f} \in \bar{F}(\bar{\varphi})$ tales que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \bar{U}' \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{m}"'] & \bar{V}' \arrow[d, "\bar{n}"] \\ \bar{U} \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & \bar{V} \end{tikzcd} \qquad (*)$$

conmuta; además, dado un diagrama conmutativo (*), con $\bar{m} \in \bar{s}(\bar{U})$ $\bar{n} \in \bar{s}(\bar{V})$, $\bar{\varphi}$ morfismo de Cat T' y $\bar{f} \in \bar{F}(\bar{\varphi}_1)$ para algún morfismo $\bar{\varphi}_1$ de Cat T' , se tiene que $\bar{f} \in \bar{F}(\bar{\varphi})$.

Demostración:

Existe un diagrama $U \xrightarrow{\varphi} V \xleftarrow{n} V'$, con φ morfismo de Cat T, $n \in s(V)$, tal que $\bar{\varphi}=T_a(\varphi)$, $\bar{n}=n \times 1_E$; luego, por el postulado (5), § 1 existirán $m \in s(U)$, $f \in F(\varphi)$ tales que: $n \circ f = \varphi \circ m$. Entonces: $\bar{m}=m \times 1_E$, $\bar{f}=\bar{n}^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \bar{m}$ $(\bar{f} \in \bar{F}(\bar{\varphi}))$ satisfacen lo pedido.

Sea $\bar{f} \in \bar{F}(\bar{\varphi}_1)$ tal que: $\bar{n} \circ \bar{f} = \bar{\varphi} \circ \bar{m}$, es decir (I) $\bar{f} = \bar{n}^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \bar{m}$. Por definición de $\bar{F}$, existen $\varphi_1' : U \longrightarrow V$, $f \in F(\varphi_1')$ tales que: $n \circ f = \varphi_1' \circ m$ (para $m \in s(U)$, $n \in s(V)$) y $\bar{f} = \bar{n}^{-1} \circ T_a(\varphi_1') \circ \bar{m}$ Por (I) se ve que $\bar{\varphi} = T_a(\varphi_1')$ y por ser T_a un isomorfismo, si es $\bar{\varphi} = T_a(\varphi)$, será $\varphi = \varphi_1'$. Por lo tanto el diagrama:

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"'] & V' \arrow[d, "n"] \\ U \arrow[r, "\varphi"] & V \end{tikzcd}$$

conmuta, con $f \in F(\varphi_1)$. Por el postulado (5), § 1, se tiene entonces que $f \in F(\varphi)$ y luego, por definición de $\bar{F}$, será $\bar{f} \in \bar{F}(\bar{\varphi})$.

El postulado (6), § 1 vale trivialmente para $\bar{s}$ en lugar de s

Podemos demostrar asimismo, a modo de coroloarios, los siguientes lemas:

4.3 <u>Lema:</u> (análogo al lema 3.4)

Sea T G-plena en $\bar{T}$; si son $\Gamma = \{\bar{\varphi}_i\} \in$ Cov T', $\Delta = \{\bar{\varphi}_j\}$ una familia de morfismos de Cat T', entonces $\Gamma \cup \Delta \in$ Cov T'.

<u>Demostración:</u>

Trivial usando el lema 3.4 y la definición de Cov T'

4.4 <u>Lema:</u> (análogo al lema 3.2)

Sea $\Gamma = \{\bar{\varphi}_i : \bar{U}_i \longrightarrow \bar{U}\} \in$ Cov T'; entonces, para todo $\bar{U}' \in \bar{F}(\bar{U})$ existe $\Gamma' = \{\bar{f}_i : \bar{U}_i \longrightarrow \bar{U}'\} \in$ Cov $\bar{T}$ tal que, para todo <u>i</u>: $\bar{f}_i \in \bar{F}(\bar{\varphi}_i)$ y $\bar{f}_i$ es tal que: $\bar{m} \circ \bar{f}_i = \bar{\varphi}_i \circ \bar{m}_i$ siendo $\bar{m} \in \bar{s}(\bar{U})$, $\bar{m}_i \in \bar{s}(\bar{U}_i)$.

4.5 Definición:

Llamaremos a Γ' una imagen de Γ por $\bar{F}$ asociada a $\bar{U}'$.

4.6 Remarque:

Como en las demostraciones de: el lema 3.5, la proposición 3.6 y el teorema 3.8 sólo se usan los postulados (3), (4) y (5) del §1 y el lema 3.4, valdrán estos tres enunciados también para el atlas $(\bar{F},\bar{X},\bar{s})$ en lugar de (F,X,s); la única salvedad es que, en la demostración de la proposición 3.6 faltaría probar que $\bar{K}$ es intermedia para $\{T'\}$, lo que se deduce inmediatamente de la definición de Cov T' y del hecho de que K es intermedia para $\{T\}$.

4.7 Proposición:

Sean (F,X,s), $(\tilde{F},X,\tilde{s})$ como en la proposición 3.6. Sea $(\bar{F},\bar{X},\bar{s})$ un atlas tangente a (F,X,s), definido como en 2.6. Entonces, si es $\tilde{T}'$ la G-topología definida por: Cat $\tilde{T}'$= $T_a(\text{Cat } \tilde{T})$, Cov $\tilde{T}'$ = $\left\{ \{T_a(\varphi_i) \mid \{\varphi_i\} \in \text{Cov } \tilde{T}\} \right\}$, se tiene que existe un funtor $\bar{\bar{F}}$ y una transformación generalizada $\bar{\bar{s}}$ que verifican (1), (2) y (3) de la mencionada proposición para T' en lugar de T y $\tilde{T}'$ en lugar de $\tilde{T}$ (en particular, (3) se expresará: $(\bar{\bar{F}},\bar{X},\bar{\bar{s}})$ es $\bar{K}$-equivalente a $(\bar{F},\bar{X},\bar{s})$.

Demostración:

Por remarque 4.6, bastará probar que $\tilde{T}'$, T' verifican las hipótesis (i), (ii) y (iii) de la proposición 3.6, lo cual se deduce trivialmente de la validez de los mismos (i), (ii) y (iii) para $\tilde{T}$ y T y del hecho de que T_a es un isomorfismo.

4.8 Remarque:

En particular podemos tomar en el enunciado 4.7, si suponemos dado un morfismo α de (F_1, X_1, s_1) en (F_2, X_2, s_2), el $(\tilde{F}_1, X_1, \tilde{s}_1)$ dado por el teorema 3.8.

4.9 Teorema:

Sea $A_i=(F_i,X_i,s_i)$ un atlas abstracto, $\bar{A}_i=(\bar{F}_i,\bar{X}_i,\bar{s}_i)$ un atlas tangente a A_i, i=1,2. Dado un morfismo $\alpha: X_1 \to X_2$ que sea un K-morfismo de A_1 en A_2 existe una transformación generalizada $\bar{k}:\bar{\bar{F}}_1 \longrightarrow \bar{X}_2$ (siendo $(\bar{\bar{F}}_1, \bar{X}_1, \bar{\bar{s}}_1)$ como en 4.7 y 4.8) tal que: (1) Para todo $\bar{U}' \in \bar{\bar{F}}_1(T_a(U))$, $l \in \bar{k}(T_a(U))$, $l:\bar{U}' \longrightarrow \bar{X}_2$ es de la forma $l= \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\alpha') \circ \bar{m}$, con $\bar{m} \in \bar{\bar{s}}_1(T_a(U))$, $\bar{n} \in \bar{s}_2(T_a(V))$, $\bar{v} \in \bar{t}_2(T_a(V))$, siendo α' un morfismo inducido por α entre U y V.

(2) Existe un morfismo $\bar{\alpha}:\bar{X}_1 \longrightarrow \bar{X}_2$ único tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} \bar{\bar{F}}_1 \arrow[r, "\bar{t}_1"] \arrow[dr, "\bar{k}"'] & \bar{X}_1 \arrow[d, "\bar{\alpha}"] \\ & \bar{X}_2 \end{tikzcd}$$

(3) Si son $q_1:\bar{\bar{F}}_1 \longrightarrow F_1$ como en la proposición 2.3 k como en el corolario 3.9, $p_2:\bar{X}_2 \longrightarrow X_2$ la proyección canónica, será el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \bar{\bar{F}}_1 \arrow[r, "\bar{k}"] \arrow[d, "q_1"'] & \bar{X}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ \tilde{F}_1 \arrow[r, "k"] & X_2 \end{tikzcd}$$

conmutativo, (con $\tilde{q}_1 = q_1 |_{\bar{\bar{F}}_1}$).

(4) Si $p_i : \bar{X}_i \longrightarrow X_i$ $(i=1,2)$ es la proyección canónica, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_1 & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \bar{X}_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \end{array}$$

Demostración:

Sea $\bar{U}' \in \bar{\bar{F}}_1(\bar{U})$, con $\bar{U} = T_a(U)$. Entonces, $\bar{U}' = \Phi(U')$ (Φ como en 2.3), con $U' \in F_1(U)$. Tenemos entonces un diagrama: $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X_1$, con $m \in \tilde{s}_1(U)$, $h \in \tilde{t}_1(U)$. Puesto que α es un morfismo de A_1 en A_2 (también lo será de $\tilde{A}_1$ en A_2) existirán un objeto V de Cat T_2, un $V' \in F_2(V)$ y un morfismo $\alpha' : U \longrightarrow V$ de Cat K, inducido por α entre U y V. Sean $v : V' \longrightarrow X_2$, $v \in t_2(V)$, $n : V' \longrightarrow V$, $n \in s_2(V)$. Definimos entonces:

$$\bar{k}(T_a(U)) = \Big\{ \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\alpha') \circ \bar{m} \;\Big|\; \bar{v} \in \bar{t}_2(T_a(V)),\ \bar{m} \in \bar{\bar{s}}_1(T_a(U)),$$
$$\bar{n} \in \bar{s}_2(T_a(V)),\ \alpha' \text{ inducido por } \alpha \text{ entre U y V} \Big\}$$

Probemos la siguiente propiedad de $\bar{k}$: si son $l : \bar{U}' \longrightarrow \bar{X}_2$, $l_1 : \bar{U}' \longrightarrow \bar{X}_2$ dadas por $l = \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\alpha') \circ \bar{m}$; $l_1 = \bar{v}_1 \circ \bar{n}_1^{-1} \circ T_a(\alpha_1') \circ \bar{m}$, siendo $\bar{v}_1 \in \bar{t}_2(T_a(V_1))$, $\bar{n}_1 \in \bar{s}_2(T_a(V_1))$, α_1' morfismo inducido por α entre U y V_1 , entonces $l = l_1$; o sea: los valores de $\bar{k}$ no dependen del correspondiente V' de U' elegido en cada caso.

En efecto: puesto que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} V_1' & \xleftarrow{n_1^{-1} \circ \alpha_1'} & U & \xrightarrow{n^{-1} \circ \alpha'} & V' \\ & {\scriptstyle v_1}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle v} & \\ & & X_2 & & \end{array}$$

existirá (según el postulado (1),§1), un $W' \in F_2(W)$, para algún W, que es un $V_1' \underset{X_2}{\times} V'$ con proyecciones $q \in F(p)$, $q_1 \in F(p_1)$. De acuerdo con el lema 3.1, será además, para p', p_1' tales que: $p' \circ o = n \circ q$ y $p_1' \circ o = n_1 \circ q_1$ (con $o : W' \longrightarrow W$, $o \in s_2(W)$) W un $V_1 \underset{X_2}{\times} V$ respecto de los morfismos $v_1 \circ n_1^{-1}$ y $v \circ n^{-1}$ con proyecciones p' y p_1'. Entonces, por la propiedad universal del rpoducto fibrado existirá un único morfismo (de Cat K por postulado (2)) α_2' tal que:

$$p' \circ \alpha_2' = \alpha' \quad , \quad p_1' \circ \alpha_2' = \alpha_1'$$

Entonces, si son $\bar{W} = T_a(W)$, $\bar{W}' = \Phi(W')$, $\bar{o} = o \times 1_E$, $\bar{n} = n \times 1_E$, $\bar{n}_1 = n_1 \times 1_E$ y definiendo: $\bar{q} = \bar{n}^{-1} \circ T_a(p') \circ \bar{o}$, $\bar{q}_1 = \bar{n}_1^{-1} \circ T_a(p_1') \circ \bar{o}$, se tiene que: $\bar{q} \in \bar{F}_2(T_a(p))$, $\bar{q}_1 \in \bar{F}_2(T_a(p_1))$. Además, si es $\bar{w} : \bar{W}' \longrightarrow \bar{X}_2$, $\bar{w} \in \bar{t}_2(\bar{W})$, podemos probar que:

$$\bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\alpha') = \bar{v}_1 \circ \bar{n}_1^{-1} \circ T_a(\alpha_1')$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\alpha') &= \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(p') \circ T_a(\alpha_2') = \bar{v} \circ \bar{q} \circ \bar{o}^{-1} \circ T_a(\alpha_2') \\
&= \bar{w} \circ \bar{o}^{-1} \circ T_a(\alpha_2') = \bar{v}_1 \circ \bar{q}_1 \circ \bar{o}^{-1} \circ T_a(\alpha_2') \\
&= \bar{v}_1 \circ \bar{n}_1^{-1} \circ T_a(p_1') \circ T_a(\alpha_2') \\
&= \bar{v}_1 \circ \bar{n}_1^{-1} \circ T_a(\alpha_1')
\end{aligned}$$

lo que implica: $l = l_1$

Una vez definida $\bar{k}$ de la forma dada por (1), veamos que es en efecto, una transformación generalizada.

Sea $\bar{f} \in \bar{\bar{F}}_1(T_a(\varphi))$, $\bar{f} : \bar{U}_1' \longrightarrow \bar{U}'$, sea el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bar{U}_1' \arrow[r, "l_1"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & X_2 \\
\bar{U}' \arrow[ur, "l"'] &
\end{tikzcd}$$

con $l_1 \in \bar{k}(T_a(U_1))$, $l \in \bar{k}(T_a(U))$. Dada $\bar{f}$ existirán φ', $f \in \tilde{F}_1(\varphi)$

tales que: $\bar{f}=\bar{m}^{-1}\circ T_a(\varphi')\circ\bar{m}_1$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} U'_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m_1"'] & U' \arrow[d, "m"] \\ U_1 \arrow[r, "\varphi'"'] & U \end{tikzcd}$$

con $m\in\tilde{s}_1(U)$, $m_1\in\tilde{s}_1(U_1)$. Por el corolario 3.11 sabemos que: si es V' correspondiente de U', $\alpha''=n^{-1}\circ\alpha'\circ m$ un morfismo inducido por α entre U' y V' con $n\in s_2(V)$ existe un W' correspondiente de U'_1, un $\alpha''_1=o^{-1}\circ\alpha'_1\circ m_1$ con $o\in s_2(W)$ que es un morfismo inducido por α entre U'_1 y W' y un $g\in F_2(\psi)$ para algún ψ, $g:W'\longrightarrow V'$ tales que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} U'_1 \arrow[r, "\alpha''_1"] \arrow[d, "f"'] & W' \arrow[d, "g"] \\ U' \arrow[r, "\alpha''"'] & V' \end{tikzcd}$$

conmuta. Si es $\psi':W\longrightarrow V$ tal que $n\circ g=\psi'\circ o$, entonces $\bar{g}=\bar{n}^{-1}\circ T_a(\psi')\circ\bar{o}\in\bar{F}_2(T_a(\psi))$ y además se deduce trivialmente que: $\alpha'\circ\varphi'=\psi'\circ\alpha'_1$. Entonces se tiene que:

$\bar{v}\circ\bar{n}^{-1}\circ T_a(\alpha')\circ\bar{m}\circ\bar{f}=\bar{w}\circ\bar{o}^{-1}\circ T_a(\alpha'_1)\circ\bar{m}_1$ (siendo $\bar{w}:\bar{W}'\longrightarrow\bar{X}_2$ un valor de $\bar{t}_2$). En efecto:

$$\begin{aligned}\bar{v}\circ\bar{n}^{-1}\circ T_a(\alpha')\circ\bar{m}\circ\bar{f} &= \bar{v}\circ\bar{n}^{-1}\circ T_a(\alpha')\circ T_a(\varphi')\circ\bar{m}_1=\bar{v}\circ\bar{n}^{-1}\circ T_a(\psi')\circ T_a(\alpha'_1)\circ\bar{m}_1\\ &= \bar{v}\circ\bar{g}\circ\bar{o}^{-1}\circ T_a(\alpha'_1)\circ\bar{m}_1\\ &= \bar{w}\circ\bar{o}^{-1}\circ T_a(\alpha'_1)\circ\bar{m}_1\end{aligned}$$

Como según se probó, l_1 no depende del valor de F_2 correspondiente de U'_1 elegido, podemos tomar: $l_1=\bar{w}\circ\bar{o}^{-1}\circ T_a(\alpha'_1)\circ\bar{m}_1$ y también: $l=\bar{v}\circ\bar{n}^{-1}\circ T_a(\alpha')\circ\bar{m}$. Luego se ha probado que:

$$l\circ\bar{f}=l_1$$

Siendo $A_1=(\tilde{F}_1,X_1,\tilde{s}_1)$ como en el teorema 3.8, por 4.7 y 4.8 es $(\bar{\tilde{F}}_1,\bar{X}_1,\bar{\tilde{s}}_1)$ $\bar{K}$-equivalente a $(\bar{F}_1,\bar{X}_1,\bar{s}_1)$. En particular:

$\varinjlim \bar{\bar{F}}_1=\bar{X}_1$. Luego, (2) resulta trivial.

Sea para i=1,2 $p_i:\bar{X}_i\longrightarrow X_i$, $q_i:\bar{F}_i\longrightarrow F_i$ como en la hipó tesis. Entonces, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\bar{U}' \arrow[r, "l"] \arrow[d, "r_1"'] & \bar{X}_2 \arrow[d, "p_2"] \\
U' \arrow[r, "k'"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

siendo $r_1\in \tilde{q}_1(\bar{U})$, $k'\in k(U)$, $l\in \bar{k}(\bar{U})$.

En efecto: como k' y l no dependen de los correspondientes de U' elegidos, tomamos: V' correspondiente de U' (respecto de U,V) con α' morfismo inducido por α entre U y V. Si definimos entonces: $k'=v\circ n^{-1}\circ \alpha'\circ m$, $l=\bar{v}\circ \bar{n}^{-1}\circ T_a(\alpha')\circ \bar{m}$, con $v\in t_2(V)$, $n\in s_2(V)$, $m\in \tilde{s}_1(U)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
k'\circ r_1 &= v\circ n^{-1}\circ \alpha'\circ m\circ r_1 = v\circ n^{-1}\circ \alpha'\circ p_U\circ \bar{m} = \\
&= v\circ n^{-1}\circ p_V\circ T_a(\alpha')\circ \bar{m} = v\circ p_{V'}\circ \bar{n}^{-1}\circ T_a(\alpha')\circ \bar{m} \\
&= p_2\circ \bar{v}\circ \bar{n}^{-1}\circ T_a(\alpha')\circ \bar{m} \\
&= p_2\circ l
\end{aligned}$$

donde se han considerado p_U , p_V y $p_{V'}$ proyecciones canónicas, teniendo en cuenta además, en la anteúltima igualdad, el teorema 2.5. Hemos probado entonces la validez de (3).

Por último, consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bar{X}_1 \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "p_1"'] & \bar{X}_2 \arrow[d, "p_2"] \\
X_1 \arrow[r, "\alpha"] & X_2
\end{tikzcd}$$

Se tiene la transformación generalizada: $\bar{k}_1:\bar{\bar{F}}_1\longrightarrow X_2$ definida por: $\bar{k}_1=\alpha\circ \tilde{t}_1\circ \tilde{q}_1$. Luego, existe un único morfismo w que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bar{\bar{F}}_1 \arrow[r, "\bar{\bar{t}}_1"] \arrow[dr, "\bar{k}_1"'] & \bar{X}_1 \arrow[d, "w"] \\
& X_2
\end{tikzcd}$$

Además, es: $\bar{k}_1 = \alpha \circ t_1|_{\widetilde{\bar{F}}_1} \circ q_1|_{\widetilde{\bar{F}}_1} = \alpha \circ p_1 \circ \bar{t}_1|_{\widetilde{\bar{F}}_1} = (\alpha \circ p_1) \circ \bar{\bar{t}}_1$

y también: $\bar{k}_1 = \alpha \circ \widetilde{t}_1 \circ \widetilde{q}_1 = k \circ \widetilde{q}_1 = p_2 \circ \bar{k} = (p_2 \circ \bar{\alpha}) \circ \bar{\bar{t}}_1$

Entonces, debe ser: $\alpha \circ p_1 = p_2 \circ \bar{\alpha}$, lo que prueba (4).

4.10 <u>Corolario:</u>

Si es $\bar{\alpha} : X_1 \longrightarrow X_2$ como en el teorema 4.9 , entonces $\bar{\alpha}$ es un $\bar{K}$-morfismo de $(\bar{F}_1, \bar{X}_1, \bar{s}_1)$ en $(\bar{F}_2, \bar{X}_2, \bar{s}_2)$ y si α' es un morfismo inducido por α entre U y V, entonces $T_a(\alpha')$ lo será (entre $T_a(U)$ y $T_a(V)$) por $\bar{\alpha}$.

<u>Demostración:</u>

Inmediata usando 3.9 , 4.7 y 4.8 .

4.11 <u>Definición:</u>

Llamaremos a $\bar{\alpha}$ un <u>morfismo</u> <u>tangente</u> <u>asociado</u> <u>a</u> <u>α</u>.

§5. PROPIEDADES FUNTORIALES DE LOS MORFISMOS TANGENTES

5.1 Proposición:

Sea C una clase de atlas abstractos, K una G-topología intermedia para C. Sea $\overline{C}$ otra clase de atlas abstractos que contiene, para cada atlas A de C al menos un $\bar{A}$ tangente a A y supongamos que es $\overline{K}$ (definida a partir de K como en 1.5) una G-topología intermedia para $\overline{C}$. Sean $\mathbf{C}$ y $\overline{\mathbf{C}}$ las categorías cuyas clases de objetos son C y $\overline{C}$ respectivamente y cuyos morfismos son los K-morfismos y $\overline{K}$-morfismos de atlas, respectivamente. Entonces existe un funtor $\mathcal{T}_a:\mathbf{C}\longrightarrow\overline{\mathbf{C}}$ tal que si A es un atlas de C, $\mathcal{T}_a(A)$ es un atlas tangente a A y si $\underline{\alpha}$ es un K-morfismo de atlas, $\mathcal{T}_a(\alpha)$ es un morfismo tangente asociado a $\underline{\alpha}$.

Demostración:

Definimos $\mathcal{T}_a(A)=\bar{A}$, eligiendo como $\bar{A}$ un atlas tangente a A perteneciente a $\overline{C}$, y $\mathcal{T}_a(\alpha)=\overline{\alpha}$, siendo $\overline{\alpha}$ como se definió en § 4.

Sea $1_X:A\longrightarrow A$, con $A=(F,X,s)$ atlas de C y sea $\bar{A}=\mathcal{T}_a(A)$, de soporte $\overline{X}$. Por definición, el morfismo $\overline{1_X}$ es el único tal que:

$$\begin{tikzcd} \overline{\overline{F}} \arrow[r, "\overline{\overline{t}}"] \arrow[dr, "\overline{k}"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{1_X}"] \\ & \overline{X} \end{tikzcd}$$

conmuta, siendo $\overline{k}$ tal que, si $l\in\overline{k}(T_a(U))$, es de la forma: $l=\overline{v}\circ\overline{n}^{-1}\circ T_a(\varphi)\circ\overline{m}$, con $\overline{v}\in\overline{t}(T_a(V))$, $\overline{n}\in\overline{s}(T_a(V))$, $\overline{m}\in\overline{\overline{s}}(T_a(U))$, φ morfismo inducido por 1_X entre U y V. Luego se tiene que, si es $\overline{u}\in\overline{\overline{t}}(T_a(U))$, entonces:

$$(*)\qquad \overline{1_X}\circ\overline{u}=\overline{v}\circ\overline{n}^{-1}\circ T_a(\varphi)\circ\overline{m}$$

Dados $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{m}$, $\overline{n}$, existen $u:U'\longrightarrow X$, $v:V'\longrightarrow X$, m y n tales que: $u = v \circ n^{-1} \circ \varphi \circ m$, con $u \in \tilde{t}(U)$, $v \in t(V)$, $m \in \tilde{s}(U)$, $n \in s(V)$. Luego, por el postulado (1), § 1, existirá un $W' \in F(W)$ que es un $U' \underset{X}{\times} V'$ respecto de u, v con proyecciones $q_i \in F(p_i)$ $(i=1,2)$ para ciertos p_i y, por el lema 3.1 , si son p_i' tales que $m \circ q_i = p_i' \circ o$ (con $o:W' \longrightarrow W$, $o \in s(W)$) será W un $U \underset{X}{\times} V$ respecto de $u \circ m^{-1}$, $v \circ n^{-1}$. Por la propiedad universal del producto fibrado existirá entonces un morfismo $p_1'':U \longrightarrow W$ tal que: $p_1' \circ p_1'' = 1_U$ y $p_2' \circ p_1'' = \varphi$. Sean $\overline{W} = T_a(W)$, $\overline{W'} = \Phi(W')$ (siendo Φ como en la proposición 2.3), $\bar{o} = o \times 1_E$ $\bar{w}:\overline{W'} \longrightarrow \overline{X}$, $\bar{w} \in \bar{t}(\overline{W})$; si definimos $\bar{q}_1 = \bar{m}^{-1} \circ T_a(p_1') \circ \bar{o}$, $\bar{q}_2 = \bar{n}^{-1} \circ T_a(p_2') \circ \bar{o}$, entonces será $\bar{q}_i \in \bar{F}(T_a(p_i))$ y $\bar{w} = \bar{u} \circ \bar{q}_1 = \bar{v} \circ \bar{q}_2$ (por definición de transformación generalizada aplicada a $\bar{t}$). Por lo tanto se tiene que: $\bar{m}^{-1} = \bar{q}_1 \circ \bar{o}^{-1} \circ T_a(p_1'')$, lo que implica:

$$(**) \quad 1_{\overline{X}} \circ \bar{u} = \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\varphi) \circ \bar{m} \ . \qquad \text{En efecto:}$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \circ \bar{m}^{-1} &= \bar{u} \circ \bar{q}_1 \circ \bar{o}^{-1} \circ T_a(p_1'') = \bar{w} \circ \bar{o}^{-1} \circ T_a(p_1'') = \bar{v} \circ \bar{q}_2 \circ \bar{o}^{-1} \circ T_a(p_1'') \\ &= \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(p_2') \circ T_a(p_1'') \\ &= \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\varphi) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (*) y (**) se ve que $1_{\overline{X}} = \overline{1_X}$, o sea: $\mathcal{T}_a(1_A) = 1_{\mathcal{T}_a(A)}$.

Sean α y β , $\alpha:A_1 \longrightarrow A_2$, $\beta:A_2 \longrightarrow A_3$, morfismos de **C**, con $A_i = (F_i, X_i, s_i)$.

Dado el diagrama $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X$, con $m \in s_1(U)$, $h \in t_1(U)$, siguiendo el procedimiento de la proposición 3.4 de la primera parte, se obtiene un cubrimiento $\Sigma = \{\sigma_s:U_s \longrightarrow U\}$ asociado a

(α, U') tal que existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[r, "\alpha"] & X_2 \arrow[r, "\beta"] & X_3 & \\
U' \arrow[ur, "h"] & & & & W'_r \arrow[ul, "u"'] \\
U \arrow[u, "m^{-1}"] & U_s \arrow[l, "\sigma_s"] \arrow[rr, "d_s"] & & W_r \arrow[ur, "o^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $d_s = \beta_r \circ \alpha_s$ siendo, si se considera al atlas $\widetilde{A}_1$ "restringido" a los modelos U_s, α_s un morfismo inducido por α entre U_s y V_{jr} y, si se considera el atlas $\widetilde{A}_2$ "restringido" a los modelos V_{jr}, β_r un morfismo inducido por β entre V_{jr} y W_r.

Sean $\overline{k}_1:\overline{\overline{F}}_1 \longrightarrow \overline{X}_2$, $\overline{k}_2:\overline{\overline{F}}_2 \longrightarrow \overline{X}_3$, $\overline{k}_3:\overline{\overline{F}}_1 \longrightarrow \overline{X}_3$ las transformaciones generalizadas asociadas a los morfismos $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ y $\overline{\beta\circ\alpha}$ respectivamente (como en el teorema 4.9). Sean $\overline{U'} \in \overline{\overline{F}}_1(T_a(U))$, $l_3 \in \overline{k}_3(T_a(U))$, $l_3 = \overline{w} \circ \overline{o}^{-1} \circ T_a(d) \circ \overline{m}$, con $\overline{w}:\overline{W'} \longrightarrow \overline{X}_3$, $\overline{w} \in \overline{t}_3(T_a(W))$ $\overline{o} \in \overline{s}_3(T_a(W))$, $\underline{d}$ morfismo inducido por $\beta\circ\alpha$ entre U y W, $\overline{m} \in \overline{\overline{s}}_1(T_a(W))$. Por lo demostrado más arriba sabemos que existe V modelo correspondiente de U por α , existe α_1 , morfismo inducido por α entre U y V y existe β_1 ídem por β entre V y W, tales que: $d = \beta_1 \circ \alpha_1$. Sea V' correspondiente a U' (siendo $\overline{U'}$ un U' x E) por α respecto de U, V; sea $\overline{n}:\overline{V'} \longrightarrow T_a(V)$, $\overline{n} \in \overline{\overline{s}}_2(T_a(V))$ $\overline{V'}$ un V' x E , $\overline{u}:\overline{U'} \longrightarrow \overline{X}_1$, $\overline{u} \in \overline{\overline{t}}_1(T_a(U))$. Entonces:

$\overline{\beta}\circ\overline{\alpha}\circ\overline{u} = \overline{\beta}\circ\overline{v}\circ\overline{n}^{-1}\circ T_a(\alpha_1)\circ\overline{m}$ por ser $\overline{\alpha}$ el único morfismo tal que: $\overline{\alpha}\circ\overline{\overline{t}}_1 = \overline{k}_1$. Además $\overline{\beta}\circ\overline{v} = \overline{w}\circ\overline{o}^{-1}\circ T_a(\beta_1)\circ\overline{n}$, por ser $\overline{\beta}$ el único morfismo tal que: $\overline{\beta}\circ\overline{\overline{t}}_2 = \overline{k}_2$. Luego: $\overline{\beta}\circ\overline{\alpha}\circ\overline{u} = l_3$ lo que implica, por unicidad de $\overline{\beta\circ\alpha}$: $\overline{\beta}\circ\overline{\alpha} = \overline{\beta\circ\alpha}$. Es decir que: $\mathcal{E}_a(\beta\circ\alpha) = \mathcal{E}_a(\beta)\circ\mathcal{E}_a(\alpha)$.

Hemos probado entonces que $\mathcal{E}_a$ es un funtor.

5.2 Lema:

Sean los atlas $A=(F,X,s)$, $A'=(F',X,s')$, y sean $\bar{A}=(\bar{F},\bar{X},\bar{s})$, $\bar{A}'=(\bar{F}',\bar{X}',\bar{s}')$ atlas tangentes, respectivamente, a los anteriores. Si A es K-equivalente a A', entonces $\bar{X}$ es isomorfo a $\bar{X}'$ y $\bar{A}$ es $\bar{K}$-equivalente al atlas $(\bar{F}',\bar{X},\bar{s}')$.

Demostración:

Por la demostración de la proposición 5.1 se ve que pueden tomarse $\tilde{A}'$, $\tilde{A}$ de manera que existan k y k', $k:\tilde{F}\longrightarrow X$, $k':\tilde{F}'\longrightarrow X$ transformaciones generalizadas tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F} \xrightarrow{\tilde{t}} X \\ {\scriptstyle k}\searrow \quad \downarrow{\scriptstyle i} \\ \quad X \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \tilde{F}' \xrightarrow{\tilde{t}'} X \\ {\scriptstyle k'}\searrow \quad \downarrow{\scriptstyle i'} \\ \quad X \end{array}$$

siendo $i=i'=1_X$, $i:A\longrightarrow A'$, $i':A'\longrightarrow A$ (k y k' asociadas a i, i' como en 3.9) y tales que $i'\circ i = 1_A$.

Aplicando la proposición 5.1 al caso en que $\mathbf{C}$ y $\bar{\mathbf{C}}$ son dadas por: $Ob(\mathbf{C})=\{A,A'\}$, $Ob(\bar{\mathbf{C}})=\{\bar{A},\bar{A}'\}$ y como morfismos los K y $\bar{K}$-morfismos respectivamente, tenemos que si son $\lambda=\mathcal{T}_a(i)$, $\mu=\mathcal{T}_a(i')$ ($\mathcal{T}_a$ definido trivialmente, análogo al de 5.1), serán, en particular $\lambda:\bar{X}\longrightarrow\bar{X}'$, $\mu:\bar{X}'\longrightarrow\bar{X}$ tales que:

$\mu\circ\lambda=\mathcal{T}_a(i'\circ i)=\mathcal{T}_a(1_A)=1_{\mathcal{T}_a(A)}=1_{\bar{A}}$. Análogamente podría demostrarse que $\lambda\circ\mu=1_{\bar{A}'}$. Es decir, en particular $\mu\circ\lambda=1_{\bar{X}}$ y $\lambda\circ\mu=1_{\bar{X}'}$ por lo que resulta que λ y μ son isomorfismos, inversos uno del otro, de $\bar{X}$ en $\bar{X}'$ y de $\bar{X}'$ en $\bar{X}$ respectivamente.

Si tomamos la transformación generalizada $\bar{t}''=\mu\circ\bar{t}'$ (considerando, por abuso del lenguaje, a μ como transformación generalizada) es $\underline{\lim}$ $\overline{F}' = \overline{X}$ respecto de $\overline{t}''$ y, evidentemente, $\overline{A}$ es $\overline{K}$-equivalente a $(\overline{F}', \overline{X}, \overline{s}')$.

5.3 Teorema:

Sea $\mathbf{V}_K$ una categoría de K-variedades abstractas. Entonces existen una categoría de $\overline{K}$-variedades abstractas $\mathbf{V}_{\overline{K}}$ y un funtor $\mathcal{T}: \mathbf{V}_K \longrightarrow \mathbf{V}_{\overline{K}}$ tales que: si es V un objeto de $\mathbf{V}_K$, $\mathcal{T}(V)$ es una clase de atlas tangentes a los de V en correspondencia biunívoca con ellos y si es $\alpha: V_1 \longrightarrow V_2$, $A_i \in V_i$ $(i=1,2)$ entonces $\mathcal{T}(\alpha): \overline{A}_1 \longrightarrow \overline{A}_2$ es un morfismo tangente asociado a α (siendo $\overline{A}_i \in \mathcal{T}(V_i)$, $\overline{A}_i$ atlas tangente a A_i)

Demostración:

Sea V un objeto de $\mathbf{V}_K$, $A=(F,X,s) \in V$. Sea $\overline{A}=(\overline{F},\overline{X},\overline{s})$ un atlas tangente a A. Según el lema 5.2 existirá una $\overline{K}$-variedad $\overline{V}$ de soporte $\overline{X}$ tal que cada atlas de $\overline{V}$ es tangente a uno de V y recíprocamente.

Sea entonces $\mathbf{V}_{\overline{K}}$ la categoría cuyos objetos son las $\overline{K}$-variedades V construídas de esa manera y cuyos morfismos son los $\overline{K}$-morfismos entre ellas. Sea $\mathcal{T}: \mathbf{V}_K \longrightarrow \mathbf{V}_{\overline{K}}$ definido por: $\mathcal{T}(V)=\overline{V}$ $\mathcal{T}(\alpha)=\overline{\alpha}$, siendo, si consideramos $\alpha: A_1 \longrightarrow A_2$ $(A_i \in V_i$, $i = 1,2)$, $\overline{\alpha}: \overline{A}_1 \longrightarrow \overline{A}_2$ un morfismo tangente asociado a α entre los atlas $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ $(\overline{A}_i \in \overline{V}_i$, $i=1,2)$ tangentes a A_1, A_2 respectivamente. Por la proposición 5.1, $\mathcal{T}$ es un funtor.

5.4 Definición:

Llamaremos a $\mathcal{T}(V)$ una variedad tangente a V y, si es $\alpha: V_1 \longrightarrow V_2$ un K-morfismo de variedades, $\mathfrak{T}(\alpha)$ será un morfismo tangente asociado a α entre las variedades $\mathfrak{T}(V_1)$ y $\mathfrak{T}(V_2)$. Además, si es $p: \overline{X} \longrightarrow X$ la proyección natural (definición 2.6), será $p: \mathfrak{T}(V) \longrightarrow V$, y también la llamaremos proyección natural.

5.5 Observación:

Si es L una G-topología de derivadas conservativas de K (definiciones 1.8 y 2.1) es, en particular, L intermedia para $\{K, \overline{K}\}$. Luego una K-variedad abstracta (respectivamente una $\overline{K}$-variedad abstracta) es una L-variedad abstracta y un K-morfismo entre variedades (respectivamente un $\overline{K}$-morfismo) es un L-morfismo entre variedades.

Sea $\mathbb{V}_K^L$ (respectivamente $\mathbb{V}_{\overline{K}}^L$) la categoría cuyos objetos y morfismos son los mismos que los de $\mathbb{V}_K$ (respectivamente $\mathbb{V}_{\overline{K}}$) en 5.3, pero considerados como L-variedades y L-morfismos respectivamente. Sea $\mathbb{V}_L$ la categoría generada por $\mathbb{V}_K^L \cup \mathbb{V}_{\overline{K}}^L$ y sea $\mathfrak{I}: \mathbb{V}_K^L \longrightarrow \mathbb{V}_L$ el funtor inclusión. Entonces, se tiene el siguiente corolario de 5.3:

5.6 Corolario:

Existe una transformación natural $p: \mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{I}$ tal que $p(V): \mathfrak{T}(V) \longrightarrow V$ es la proyección natural de V.

Demostración:

Inmediata por el teorema 4.9 .

§6. APLICACION DEL ESQUEMA A UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE

Supondremos en lo que sigue que los C^r-atlas mencionados son E-atlas ([1] , II, § 1) hereditarios (según 2.2, primera parte) y cumplen la siguiente condición: si son m_1 , m_2 mapas con el mismo dominio y el mismo codominio, entonces $m_1=m_2$.

Veamos que valen los postulados (1) a (6) del § 1 para T, $\bar{T}$ definidos como en 2.2 (primera parte) y K definida como en 3.2 (primera parte).

La primera parte del postulado (1) vale trivialmente en $\bar{T}$=G-$\mathcal{C}$. Es decir: si existe un objeto $\dot{A}$ como se afirma, el producto fibrado será un conjunto no vacío. En la segunda parte, por ser h_1 , h_2 inclusiones (ver 2.2 primera parte) un producto fibrado será $U_1^{\prime} \cap U_2^{\prime}$ que, por ser el atlas hereditario, es un dominio de mapa.

El postulado (2) resulta trivialmente pues, por se $\underline{g}$ un morfismo de Cat T es un isomorfismo en su imagen y, si llamamos $\hat{\underline{g}}$ a ese isomorfismo, es $f = \hat{g}^{-1} \circ h$.

Por definición de Cov(G-$\mathcal{C}$), el postulado (3) se verifica también trivialmente.

Demostraremos ahora la validez del postulado (4).

Si es $\Phi = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in$ Cov T será cada φ_i un isomorfismo en su imagen y un $U_i \underset{U}{\times} U_j$ es $W_{ij} = \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j)$. Basta probarlo en este caso. Evidentemente t_U , definida sobre W_{ij} por: $t_U(W_{ij}) = inc_{W_{ij} \longrightarrow U}$ (inclusión) es una transformación natural. Sea $v : I \longrightarrow V$ otra, con V objeto de Cat T, sea $v_i = v(U_i)$

$v_{ij}=v(W_{ij})$. Entonces: $v_{ij}=v_i \circ p_i=v_j \circ p_j$, siendo $p_\alpha = \hat{\varphi}_\alpha^{-1}\big|_{W_{ij}}$ $(\alpha=i,j)$ la proyección canónica del producto fibrado. Sea $u\in U$; existirá i, $u_i\in U_i$ tal que $\varphi_i(u_i)=u$. Definimos $h(u)=v_i(u_i)$; si es $u_j\in U_j$ tal que $\varphi_j(u_j)=u$, entonces $u\in W_{ij}$ y se tiene que: $v_i(u_i)=(v_i\circ\hat{\varphi}_i^{-1})(u)=(v_i\circ p_i)(u)=(v_j\circ p_j)(u)=v_j(u_j)$. Luego, h está bien definida y para todo i, para todo j, hace conmutativos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "v_i"'] & U \arrow[d, "h"] \\ & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W_{ij} \arrow[r, hook, "inc"] \arrow[dr, "v_{ij}"'] & U \arrow[d, "h"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Verificaremos ahora el postulado (5)

Se tiene que $\varphi(U)$ es un abierto en V. Luego si son: $U'=n^{-1}(\varphi(U))$, $m=\hat{\varphi}^{-1}\circ n\big|_{n^{-1}(\varphi(U))}$ (donde $\hat{\varphi}=\varphi$ pero con codominio restringido a su imagen) por ser el atlas hereditario tendremos que: $m:U'\longrightarrow U$ es un mapa. Si es $\underline{f}$ la inclusión de U' en V' se obtiene lo requerido. La segunda parte es obvia por definición de F.

Por último, el postulado (6) se mencionó expresamente como hipótesis para los atlas a considerar, al pedir que exista un único mapa con dominio y codominio dados, en el principio del parágrafo.

6.1 <u>Lema:</u>

Sea $\mathfrak{A}$ un C^r-atlas perteneciente a una variedad $\mathcal{V}$. Si es K la G-topología definida en 3.2(primera parte) para la clase C de atlas de la variedad, sean O,M y N las siguientes clases:

$O = \{U\mathrm{x}E \mid U \text{ es objeto de Cat } K\}$

$M = \{(\varphi_1, \varphi_2): U\mathrm{x}E \longrightarrow V\mathrm{x}E \mid \exists\ \varphi: U \longrightarrow V,\ \varphi \in \mathrm{Morf(Cat\ } K) \text{ con}$
$(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi \circ pr, D\varphi)$, siendo $pr: U\mathrm{x}E \longrightarrow U$ la proyección cartesiana, $D\varphi$ la derivada usual$\}$

$N = \Big\{ \{(\varphi_1, \varphi_2) \in M,\ (\varphi_1, \varphi_2)_i : U_i\mathrm{x}E \longrightarrow U\mathrm{x}E$ tal que
$(\varphi_1, \varphi_2)_i = (\varphi_i \circ pr, D\varphi_i),\ \{\varphi_i\} \in \mathrm{Cov}\ K\}_i \Big\}$

Si definimos: Ob(Cat L)=Ob(Cat K) $\cup$ O $\cup$ $\{E\}$, Morf(Cat L) es la clase generada por Morf(Cat K) $\cup$ M $\cup$ $\{pr: U\mathrm{x}E \longrightarrow U$ tal que pr proyección cartesiana$\}$, Cov L=Cov K $\cup$ N , entonces L es una G-topología intermedia para $\{K, \bar{K}\}$, siendo $\bar{K}$ definida por: Ob(Cat $\bar{K}$) = O , Morf(Cat $\bar{K}$) = M , Cov $\bar{K}$ = N.

Demostración:

Probemos que si L está bien definida; es decir, que Cov L está bien definido.

Sea Φ una equivalencia en Cat L. Para probar $\{\Phi\} \in$ Cov L bastará suponer $\Phi \in$ M. Sea entonces $\Phi = (\varphi \circ pr_U, D\varphi)$, $\Psi = (\psi \circ pr_V, D\psi)$, con $\Psi = \Phi^{-1}$, donde $\varphi: U \longrightarrow V$, $\psi: V \longrightarrow U$, Entonces:

$$pr_U \circ \Psi \circ \Phi = \psi \circ pr_V \circ \Phi = \psi \circ \varphi \circ pr_U \text{ (pues } \Psi \circ \Phi = 1_{U\mathrm{x}E})$$

Luego, por ser pr_U suryectiva será $\psi \circ \varphi = 1_U$. Análogamente $\varphi \circ \psi = 1_V$.

Se ha probado entonces que si $(\varphi \circ pr_U, D\varphi)$ es una equivalencia, también φ lo es. Además $\{\varphi\} \in$ Cov K y, por defi nición de N será $\{\Phi\} \in$ Cov L.

Veamos que la"composición" de familias de N da una familia de N. Para eso mostraremos previamente que M es cerrado respecto a la composición.

Sea $\Phi = (\varphi \circ pr_U, D\varphi) \in M$, $\varphi: U \longrightarrow V$, $\Psi = (\psi \circ pr_V, D\psi)$, $\psi: V \longrightarrow W$, $\Psi \in M$. Sean $pr_A: A x E \longrightarrow A$, para $A = U, V, W$ y $pr_E: W x E \longrightarrow E$ proyecciones cartesianas. Entonces: $pr_W \circ \Psi \circ \Phi = \psi \circ \varphi \circ pr_U$

$$pr_E \circ \Psi \circ \Phi = D\psi \circ \Phi$$

Sean $u \in U$, $x \in E$. Se tiene que:

$$(D\psi \circ \Phi)(u,x) = D\psi(\varphi(u), D\varphi(u).x) = D\psi(\varphi(u)).(D\varphi(u).x)$$
$$= (D\psi(\varphi(u)) \circ D\varphi(u))(x)$$
$$= (D(\psi \circ \varphi)(u))(x)$$
$$= (D(\psi \circ \varphi))(u,x)$$

donde en la anteúltima igualdad se usó la regla de derivación de una función compuesta. Luego:

$$(*) \quad D\psi \circ \Phi = D(\psi \circ \varphi),$$

por lo que: $pr_E \circ \Psi \circ \Phi = D(\psi \circ \varphi)$. Hemos probado entonces:

$$(**) \quad \Psi \circ \Phi = (\psi \circ \varphi \circ pr_U, D(\psi \circ \varphi))$$

de donde resulta: $\Psi \circ \Phi \in M$.

Por ser Cov K cerrado respecto a la "composición" de familias y por lo que acabamos de probar de M, tenemos que también N es cerrado respecto a dicha "composición".

Verifiquemos por último el axioma (iii) de G-topologías. Los únicos casos posibles son:

1º) $\{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in$ Cov K, $\psi: V \longrightarrow U$, ψ morfismo de Cat K.

2º) $\{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in \mathrm{Cov}\ K$, $pr : U\mathrm{x}E \longrightarrow U$ (morfismo de Cat L)

3º) $\{\Phi_i : U_i\mathrm{x}E \longrightarrow U\mathrm{x}E\} \in N$, $\Psi : V\mathrm{x}E \longrightarrow U\mathrm{x}E$, $\Psi \in M$

4º) $\{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in \mathrm{Cov}\ K$, $G : V\mathrm{x}E \longrightarrow U$, $G = pr_U \circ \Psi$, $\Psi \in M$

5º) $\{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in \mathrm{Cov}\ K$, $H : V\mathrm{x}E \longrightarrow U$, $H = \psi \circ pr_V$, ψ morfismo de Cat K

1º) Obvio por ser K una G-topología.

2º) Sea el diagrama: $U_i \xrightarrow{\varphi_i} U \xleftarrow{pr} U\mathrm{x}E$, sea $pr_i : U_i\mathrm{x}E \longrightarrow U_i$, $\Phi_i = (\varphi_i \circ pr_i, D\varphi_i)$. Entonces el siguiente es un diagrama de producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[dr, "\varphi_i"'] & U_i \times E \arrow[l, "pr_i"'] \arrow[r, "\Phi_i"] & U \times E \arrow[dl, "pr"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Para probarlo, mostremos previamente que si es $\varphi : U \longrightarrow V$ una equivalencia, entonces $(\varphi \circ pr_U, D\varphi)$ también lo es.

Sea $\psi = \varphi^{-1}$, $\psi : V \longrightarrow U$. Entonces:

$$\begin{aligned}(\varphi \circ pr_U, D\varphi) \circ (\psi \circ pr_V, D\psi) &= (\psi \circ \varphi \circ pr_U, D(\psi \circ \varphi))\ (\text{por } (**)) \\ &= (pr_U, D(1_U)) \\ &= (pr_U, pr_E) \\ &= 1_{U\mathrm{x}E},\end{aligned}$$

donde $pr_E : U\mathrm{x}E \longrightarrow E$ es la proyección cartesiana, usando además aquí la siguiente igualdad conocida:

$$(***) \qquad D(1_U) = pr_E$$

Ahora la demostración de que el diagrama de más arriba es de producto fibrado se deduce trivialmente del hecho de que φ_i es un isomorfismo en su imagen. Además, por definición de N será $\{\Phi_i\} \in \mathrm{Cov}\ L$.

3º) Dado el diagrama $U_i xE \xrightarrow{\Phi_i} UxE \xleftarrow{\Psi} VxE$ existirán φ_i, ψ morfismos de Cat K tales que $\Phi_i=(\varphi_i \circ pr_i, D\varphi_i)$, $\Psi = (\psi \circ pr_U, D\psi)$ siendo $pr_i : U_i xE \longrightarrow U_i$, $pr_U : UxE \longrightarrow U$ proyecciones cartesianas, y $\{\varphi_i\} \in$ Cov K. Entonces existe V_i que es un $U_i \underset{U}{x} V$ respecto de φ_i y ψ, y si son $p_i : V_i \longrightarrow V$, $q_i : V_i \longrightarrow U_i$ las proyecciones canónicas, será $\{p_i\} \in$ Cov K.

Afirmamos que el siguiente es un diagrama de producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} U_i \times E \arrow[dr, "\Phi_i"'] & V_i \times E \arrow[l, "Q_i"'] \arrow[r, "P_i"] & V \times E \arrow[dl, "\Psi"] \\ & U \times E & \end{tikzcd}$$

siendo $P_i=(p_i \circ pr_{V_i}, Dp_i)$, $Q_i=(q_i \circ pr_i, Dq_i)$, $pr_{V_i} : V_i xE \longrightarrow V_i$ proyección. En efecto: evidentemente el diagrama conmuta, por ser $\varphi_i \circ q_i = \psi \circ p_i$ y por (**); además, si es S un objeto de Cat L y son $\Sigma_1 : S \longrightarrow U_i xE$, $\Sigma_2 : S \longrightarrow VxE$ morfismos de Cat L tales que $\Phi_i \circ \Sigma_1 = \Psi \circ \Sigma_2$, necesariamente $\Sigma_k \in M$ (k=1,2), o sea que S es de la forma: $S=WxE$, y $\Sigma_k=(\sigma_k \circ pr_W, D\sigma_k)$, siendo $pr_W : WxE \longrightarrow W$ proyección. Entonces será $\varphi_i \circ \sigma_1 = \psi \circ \sigma_2$ por lo cual existirá <u>h</u> (morfismo de Cat K) tal que: $q_i \circ h = \sigma_1$, $p_i \circ h = \sigma_2$. Si tomamos $H=(h \circ pr_W, Dh)$ será: $Q_i \circ H = \Sigma_1$, $P_i \circ H = \Sigma_2$. Además, por ser $\{p_i\} \in$ Cov K, será $\{P_i\} \in$ Cov L.

4º) Se deduce inmediatamente del 2º y 3º caso.

5º) Idem del 1º y 2º.

Por último, en el transcurso de la demostración ha sido probado que K está bien definida. En efecto, basta ver que toda equivalencia Φ de M es tal que $\{\Phi\} \in N$, que M y N son "cerradas respecto a la composición" y que vale el axioma (iii) de

G-topologías para N, lo que resulta del 3º caso que se probó. Es obvio también que L es intermedia para $\{K,\bar{K}\}$.

6.2 Lema:

Si es L como en el lema 6.1, entonces L es una G-topología de derivadas de K (según definición 1.8).

Demostración:

Veamos en primer lugar que L tiene modelos tangentes de K (según definición 1.2).

Trivialmente se ve que K es una sub-G-topología de L y que Cat L es una subcategoría de Cat $\bar{T}$ ($\bar{T}$=G-$\mathcal{C}$). Sea $\{\Phi_i\} \in$ Cov L y veamos que $\{\Phi_i\} \in$ Cov $\bar{T}$. Basta probar que N$\subset$ Cov $\bar{T}$. Sea $\{\Phi_i\} \in$ N ; luego para todo $\underline{i}$ existe un morfismo φ_i de Cat K tal que $\Phi_i=(\varphi_i \circ \mathrm{pr}, D\varphi_i)$ y $\{\varphi_i\} \in$ Cov K. Por definición de Cov K es φ_i un isomorfismo en su imagen, para todo i, y se tiene además que, si es $\varphi_i : U_i \longrightarrow U$, $\bigcup \varphi_i(U_i) = U$. Entonces, $D\varphi_i(x)$ es biyectiva para todo $\underline{x}$ y, si es $(u,y) \in U\mathrm{x}E$ existirá $(u_i,x) \in U_i\mathrm{x}E$ tal que $\Phi_i(u_i,x)=(u,y)$. Es decir que $\bigcup \Phi_i(U_i\mathrm{x}E)=U\mathrm{x}E$, y entonces N$\subset$Cov$\bar{T}$

Definimos T_a por $T_a(U)$=UxE, para U objeto de Cat K. Obviamente T_a es inyectiva y vale también (ii) de la definición 1.2.

Podemos considerar a la derivación usual como una función D: Morf(Cat K)$\longrightarrow$Morf(Cat T) tal que si $\varphi:U\longrightarrow V$ es un morfismo de Cat K, entonces es $D\varphi : U\mathrm{x}E \longrightarrow E$. Además, si $\varphi = 1_U$, por (***) de la demostración del lema 6.1 será $D\varphi = \mathrm{pr}_E$ (proyección cartesiana) y se verifica también (por (*) de la misma demostración) que: $D\psi \circ (\varphi \circ \mathrm{pr}, D\varphi) = D(\psi \circ \varphi)$. Es decir que, según la definición 1.4, L tiene derivadas de K.

Por ser además L intermedia para $\{K,\bar{K}\}$(lema 6.1) vale lo propuesto por el enunciado.

6.3 Lema:

La G-topología L tiene derivadas conservativas de K (según definición 2.1)

Demostración:

Como $\bar{K}$ es una sub-G-topología de L y ésta lo es de T, se ve que vale trivialmente (i) de dicha definición.

Sea el siguiente diagrama de producto fibrado en Cat T:

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[dr, "f_1"'] & W \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & U_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Entonces, por ser f_i (i=1,2) un isomorfismo en su imagen, podemos tomar $W=f_1(U_1)\cap f_2(U_2)$ (sinó sería $W'\approx W$ y por lo tanto $T_a(W)\approx T_a(W')$ por ser T_a funtor), y $p_i=\hat{f}_i^{-1}$, siendo $\hat{f}_i = f_i$ pero con codominio restringido a su imagen.

Siendo $T_a(f_i)$ (i=1,2) un isomorfismo en su imagen (por serlo f_i), un producto fibrado en G-$\mathcal{C}$ es:

$$W_{12} = T_a(f_1)(T_a(U_1))\cap T_a(f_2)(T_a(U_2))$$

Bastaría ver que es $W_{12}=T_a(W)$.

Probemos que: $T_a(f_i)(T_a(U_i)) = f_i(U_i)xE$ (i=1,2)

Sea $(u,y)\in f_i(U_i)xE$. Luego existe $u_i\in U_i$ tal que $f_i(u_i)=u$. Por ser f_i un isomorfismo en su imagen, será $Df_i(t)$ biyectiva para todo $\underline{t}$. Por lo tanto existirá $x\in E$ tal que $Df_i(u_i).x = y$

Es decir que: $(u,y) \in T_a(f_i)(T_a(U_i))$, con lo que queda probado lo propuesto (la otra inclusión es evidente).

Entonces:
$$\begin{aligned} W_{12} &= (f_1(U_1)xE) \cap (f_2(U_2)xE) \\ &= (f_1(U_1) \cap f_2(U_2))x(E \cap E) \\ &= W \times E \\ &= T_a(W) \end{aligned}$$

Luego, vale el punto (ii) de la definición 2.1.

Sea ahora $\Phi = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\} \in$ Cov T, $I : C_\Phi \longrightarrow$ Cat T el funtor inclusión. Si es $I' : C_\Gamma \longrightarrow$ Cat T' el funtor inclusión, Cat $T' = T_a$(Cat T) , $C_\Gamma = T_a(C_\Phi)$, si probamos que $\varinjlim I' = T_a(U)$, será $\varinjlim (T_a \circ I) = T_a(U)$ (por ser T_a un isomorfismo de C_Φ en C_Γ)

Siguiendo el procedimiento que se usó para demostrar la validez del postulado (4), al principio de este parágrafo, y teniendo en cuenta lo probado respecto al producto fibrado $T_a(U_1) \underset{T_a(U)}{\times} T_a(U_2)$ mas arriba, se ve que: $T_a(U) = \varinjlim I'$.

6.4 <u>Proposición:</u>

Dado un C^r-atlas $\mathfrak{A}$, que sea un E-atlas hereditario, si es K la G-topología definida como en 3.2(primera parte) entonces existe una G-topología L de derivadas conservativas de K (según definiciones 1.8 y 2.1)

6.5 <u>Nota:</u>

Consideraremos en lo que sigue la siguiente definición ([1]) de espacio tangente en un punto $x \in X$, siendo X el espacio subyacente a un atlas $\mathfrak{A}$: $T_x(X) = A/\sim$; siendo A el conjunto de ternas (U',m,v) con $m:U' \longrightarrow U$ mapa en $\underline{x}$ de $\mathcal{C}$, $v \in E$ y la relación de equivalencia definida por: $(U',m,v) \sim (V',n,w)$ sii $T_a(n \circ m^{-1})(m(x),v) = (n(x),w)$.

Se ve que, fijado un mapa (U',m) hay un isomorfismo: $T_x(X) \longrightarrow E$ dado por: $\overline{(U',m,v)} \longmapsto v$

Además, si es $T(X) = \bigvee_{x \in X} T_x(X)$ (unión disjunta), será $T(X)$ el soporte del atlas $T(\mathcal{C})$ tangente al $\mathcal{C}$, cuyos dominios de mapa son los $\pi^{-1}(U')$, siendo $\pi:T(X) \longrightarrow X$ la proyección: $\pi|_{T_x(X)} = \{x\}$, U' dominio de mapa de $\mathcal{C}$.

Se tiene entonces, para cada (U',m) mapa en $\underline{x}$) un isomorfismo $\alpha : \pi^{-1}(U') \longrightarrow U' \times E$ definido por: $\overline{(U',m,v)} \longmapsto (x,v)$.

Por último, si es $f:X_1 \longrightarrow X_2$ una aplicación diferenciable se define $T(f):T(X_1) \longrightarrow T(X_2)$ de la siguiente manera: sea $T_x(f)$: $T_x(X_1) \longrightarrow T_{f(x)}(X_2)$ tal que: $T_x(f)\ \overline{(U',m,v)} = \overline{(V',n,w)}$, siendo $w = Df'(m(x)).v$, f' definida en $m(f^{-1}(V') \cap U')$ por $f' = n \circ f \circ m^{-1}$; entonces $T_x(f) = T(f)|_{T_x(X_1)}$. Trivialmente resultará: $\pi_2 \circ T(f) = f \circ \pi_1$, siendo π_1, π_2 proyecciones canónicas.

6.6 <u>Proposición:</u>

El atlas abstracto $(G,T(X),u)$ obtenido como en 2.2 (primera parte) a partir de $T(\mathcal{C})$ es un atlas tangente (según la definición 2.6) al (F,X,s) obtenido por la misma construcción a partir de $\mathcal{C}$. Además, la proyección $\pi:T(X) \longrightarrow X$ es su proyección natural.

<u>Demostración:</u>

En primer lugar veamos que valen en este caso las hipótesis del teorema 2.5 (suficientes para la existencia del atlas tangente a (F,X,s)).

Trivialmente se ve que T es G-plena en $\bar{T}$ y, como $\mathcal{C}$ tiene límites directos (teorema de Kan) es en particular semicompleta; obviamente existe la función Φ como en 2.3 y, por proposición 6.4, se tiene la totalidad de las hipótesis.

Si es $G:T'' \longrightarrow \bar{T}$ definido como en 2.2(primera parte) a partir de $T(\alpha)$, será Cat T" la categoría cuyos objetos son los de la forma UxE con U modelo de α y cuyos morfismos son los $\Phi = (\varphi \circ pr_U, D\varphi)$ que son cambios de mapa en $T(\alpha)$ (luego φ es un cambio de mapa en α), las inclusiones entre objetos y las composiciones. Luego, es igual a Cat T', siendo T' definida como en § 2 a partir de T, donde T es el dominio del funtor F. Además Cov T" es la clase de familias $\{\Phi_i : U_i xE \longrightarrow UxE\}$ tales que $\bigcup \Phi_i(U_i xE) = UxE$; siendo Φ_i un morfismo de Cat T" será de la forma: $\Phi_i = (\varphi_i \circ pr_{U_i}, D\varphi_i)$, siendo $\varphi_i : U_i \longrightarrow U$, $pr_{U_i} : U_i xE \longrightarrow U_i$ proyección. Según se vió en la demostración del lema 6.3 es $\Phi_i(U_i xE) = \varphi_i(U_i)xE$. Luego: $\bigcup \Phi_i(U_i xE) = (\bigcup \varphi_i(U_i))xE = UxE$, por lo que: $\bigcup \varphi_i(U_i) = U$. Entonces Cov T"=Cov T' y entonces T' = T".

Veamos que (G,T(X),u) definido como sigue verifica la definición 2.6 para (F,X,s).

Según 2.2 G será:

$$G(UxE) = \{\pi^{-1}(U') \mid \exists\ m:U' \longrightarrow U, \text{ mapa de } \alpha\}$$

Sea $\Phi : U\times E \longrightarrow V\times E$ un cambio de mapa en $T(\alpha)$. Entonces:

$$G(\Phi) = \left\{ \mathrm{inc}: \pi^{-1}(U') \hookrightarrow \pi^{-1}(V') \;\middle|\; \exists \;\mathrm{inc}: U' \hookrightarrow V', \; U' \in F(U), \; V' \in F(V) \right\}$$

La transformación natural u está dada por:

$$u(U\times E) = \left\{ \bar{m}: \pi^{-1}(U') \longrightarrow U\times E,\; \bar{m} = (m\times 1_E)\circ\alpha, \;\; \alpha: \pi^{-1}(U') \longrightarrow U'\times E \text{ isomorfismo, } m: U' \longrightarrow U \text{ mapa de } \alpha \right\}.$$

Por ser $\pi^{-1}(U') \approx U'\times E$, es también $\pi^{-1}(U')$ un $U'\times E$ en Cat $\bar{T}$. Además: $\left\{ \mathrm{inc}: \pi^{-1}(U') \hookrightarrow \pi^{-1}(V') \right\} = \left\{ \bar{n}^{-1}\circ T_a(\varphi')\circ \bar{m} \;\middle|\; \bar{m} \in u(U\times E),\; \bar{n} \in u(V\times E), \exists\; f \in F(\varphi) \text{ tal que: } n\circ f = \varphi'\circ m \right\}$.

En efecto; si es (U',m) un mapa en $\underline{x}$, $v \in E$:

$$\begin{aligned}
(\bar{n}^{-1}\circ T_a(\varphi')\circ \bar{m})\overline{(U',m,v)} &= (\bar{n}^{-1}\circ T_a(\varphi'))((m\times 1_E)(x,v)) \\
&= (\bar{n}^{-1}\circ T_a(\varphi'))(m(x),v) \\
&= \bar{n}^{-1}(\varphi'(m(x)),w) \\
&= \bar{n}^{-1}(n(x),w)\;,
\end{aligned}$$

donde: $w = D\varphi'(m(x)).v$ y, por definición de F es f una inclusión, luego: $\varphi' = n\circ m^{-1}$, si es $\beta: \pi^{-1}(V') \xrightarrow{\approx} V'\times E$, se tiene que: $\bar{n} = (n\times 1_E)\circ\beta$, luego:

$$\begin{aligned}
\bar{n}^{-1}(n(x),w) &= \beta^{-1}(x,w) \\
&= \overline{(V',n,w)}
\end{aligned}$$

Como $T_a(n\circ m^{-1})(m(x),v) = (n(x),w)$, es $\overline{(U',m,v)} = \overline{(V',n,w)}$, luego: $\bar{n}^{-1}\circ T_a(\varphi')\circ \bar{m} = \mathrm{inc}: \pi^{-1}(U') \hookrightarrow \pi^{-1}(V')$ (inclusión).

Recíprocamente, sea $U' \in F(U)$, $V' \in F(V)$, $\bar{f} = \mathrm{inc}: \pi^{-1}(U') \hookrightarrow \pi^{-1}(V')$ Entonces será: $U' = (\pi\circ\pi^{-1})(U') \subset (\pi\circ\pi^{-1})(V') = V'$ (por ser π suryectiva); luego, si es $f = \mathrm{inc}: U' \hookrightarrow V'$, será $f \in F(\varphi)$ y si es $\varphi' = n\circ m^{-1}$, se ve que $\bar{f} = \bar{n}^{-1}\circ T_a(\varphi')\circ \bar{m}^{-1}$ (m y n están unívocamente determinados por el postulado (6)).

También los valores de $\underline{u}$ según la hemos definido, coinciden con los de $\bar{s}$ de § 2, pues, si consideramos: $U' \xleftarrow{pr_{U'} \circ \alpha} \pi^{-1}(U') \xrightarrow{pr_E \circ \alpha} E$, siendo $\alpha : \pi^{-1}(U') \xrightarrow{\approx} U'xE$ y $pr_{U'} : U'xE \longrightarrow U'$, $pr_E : U'xE \longrightarrow E$ proyecciones, es $\pi^{-1}(U')$ un $U'xE$ con proyecciones $pr_{U'} \circ \alpha$ y $pr_E \circ \alpha$, y $\bar{m}$ un $mx1_E$, para cada m, en Cat $\bar{T}$.

Entonces se ha visto que: $(G,T(X),u)$ es un atlas tangente a (F,X,s).

Por último, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U') \arrow[r, "\pi|_{\pi^{-1}(U')}"] \arrow[d, "\bar{m}"'] & U' \arrow[d, "m"] \\ U \times E \arrow[r, "pr_U"] & U \end{tikzcd}$$

En efecto: $(pr_U \circ (mx1_E) \circ \alpha)\overline{(U',m,v)} = (pr_U \circ (mx1_E))(x,v)$

$$= pr_U(m(x),v)$$

$$= m(x)$$

$$(m \circ \pi)\overline{(U',m,v)} = m(x)$$

Entonces conmutará también:

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\pi"] & X \\ \pi^{-1}(U') \arrow[u, hook, "inc"] \arrow[r, "\pi|_{\pi^{-1}(U')}"] & U' \arrow[u, hook, "inc"'] \\ U \times E \arrow[u, "\bar{m}^{-1}"] \arrow[r, "pr_U"] & U \arrow[u, "m^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

por lo que resulta π proyección natural entre $(G,T(X),u)$ y (F,X,s).

6.7 <u>Proposición</u>:

Sea $f:X_1 \longrightarrow X_2$ una aplicación diferenciable entre los atlas $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ y sea $T(f)$ su correspondiente aplicación tangente. Si es $\bar{A}_i$ (i=1,2) el atlas abstracto asociado a $T(\alpha_i)$ como en la proposición 6.6, entonces $T(f)$ es un morfismo tangente asociado a $\underline{f}$ (según definición 4.11), considerando $f:A_1 \longrightarrow A_2$, siendo A_i atlas abstracto asociado a α_i (como en 2.2, primera parte).

Demostración:

Vamos a definir en primer lugar el atlas $\tilde{\alpha}_1$ equivalente al α_1 mediante la siguiente construcción: si es U' un dominio de mapa α_1, tendremos que: $U' = \bigcup (U' \cap f^{-1}(V'))$, la unión extendida a todos los dominios de mapa V' de α_2. Por ser $\underline{f}$ diferenciable, en particular continua, será $U' \cap f^{-1}(V')$ abierto en U'. Por ser el atlas hereditario, será también un dominio de mapa. Consideramos entonces el atlas $\tilde{\alpha}_1$ cuyos dominios de mapa son sólo los de esa forma y los mapas son, naturalmente, las respectivas restricciones de los de α_1. Trivialmente será $\tilde{\alpha}_1$ equivalente a α_1. Además, si se toma el atlas abstracto $\tilde{A}_1$ asociado a $\tilde{\alpha}_1$ como en 2.2(primera parte), evidentemente satisface las hipótesis del teorema 3.8.

Sea $\bar{\tilde{A}}_1=(\tilde{G}_1,T(X_1),\tilde{u}_1)$ asociado a $T(\tilde{\alpha}_1)$, $\bar{A}_2=(G_2,T(X_2),u_2)$ asociado a $T(\alpha_2)$, como en la proposición 6.6. Definimos entonces la transformación generalizada $\bar{k}:\tilde{G}_1 \longrightarrow T(X_2)$ como sigue: sea $\pi_1^{-1}(U') \xrightarrow{\bar{m}} UxE$ un mapa de $T(\tilde{\alpha}_1)$; entonces, existirá un mapa $\pi_2^{-1}(V') \xrightarrow{\bar{n}} VxE$ de $T(\alpha_2)$ tal que $f(U') \subset V'$, por definición de $\tilde{\alpha}_1$. Luego, se puede definir $f'=n \circ f \circ m^{-1}$, $f':U \longrightarrow V$. Sea $\Phi'=(f' \circ pr_U, Df')$, $\Phi':UxE \longrightarrow VxE$; sea entonces el valor $\bar{l}$ de $\bar{k}$ en UxE de dominio $\pi_1^{-1}(U')$ definido por $\bar{l}=\bar{n}^{-1} \circ \Phi' \circ \bar{m}$.

Veamos que se verifica la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G}_1 \arrow[r, "\widetilde{u}_1"] \arrow[dr, "\bar{k}"'] & T(X_1) \arrow[d, "T(f)"] \\ & T(X_2) \end{tikzcd}$$

O sea que, para cada dominio de mapa U' de $\widetilde{\alpha}_1$, $T(f)|_{\pi_1^{-1}(U')} = \bar{l}$

Sea $x \in \pi_1^{-1}(U')$; luego $U' \xrightarrow{m} U$ es un mapa en $\underline{x}$. Consideremos identificado $\pi_1^{-1}(U')$ con $U' \times E$ por el isomorfismo α, $\alpha : \overline{(U',m,v)} \longmapsto (x,v)$ y análogamente $\pi_2^{-1}(V')$ con $\underline{V}' \times E$ por $\beta : \overline{(V',n,w)} \longmapsto (f(x),w)$ (siendo $V' \xrightarrow{n} V$ mapa en $f(x)$).

Entonces: $T(f)(x,v) = T_x(f)(x,v) = (f(x),w)$, siendo $w = Df'(m(x)).v$, $f' = n \circ f \circ m^{-1}$. Por otra parte:

$$\begin{aligned} \bar{l}(x,v) &= ((n^{-1} x 1_E) \circ \Phi' \circ (m x 1_E))(x,v) = (n^{-1} x 1_E)((f' \circ m)(x), \\ &\qquad Df'(m(x)).v) \\ &= (f(x),w) \end{aligned}$$

Trivialmente se ve además que $\pi_2 \circ T(f) = f \circ \pi_1$.

Luego, si definimos el valor $\underline{l}$ de la transformación generalizada $k : \widetilde{F}_1 \longrightarrow X_2$ (siendo $\widetilde{F}_1$ tal que: $\widetilde{A}_1 = (\widetilde{F}_1, X_1, \widetilde{s}_1)$) en U con dominio en U' por $l = n^{-1} \circ f' \circ m$, o sea: $l = f|_{U'}$ se tiene que:

$$\pi_2 \circ \bar{l} = l \circ \pi_1 \quad \text{en } \pi_1^{-1}(U').$$

Puesto que, por la proposición 3.5(primera parte) es f un morfismo de A_1 en A_2 , hemos probado entonces que $\bar{k}$, T(f) verifican las condiciones del teorema 4.9. En particular T(f) es un morfismo tangente asociado a f.

6.8 Nota:

Sea S una clase de espacios de Banach, sea K definida como en el teorema 4.5(primera parte) y sean $\mathbb{V}^r$, $\mathbb{V}A^r$ las subcategorías plenas de V^r, VA^r (definidas en ese teorema) cuyos objetos son las E-variedades ([1]) para E variando en S, y las correspondientes K-variedades abstractas según el isomorfismo entre V^r y VA^r, respectivamente.

Sea $\bar{S}$ la clase de espacios de Banach que "modela" a las variedades tangentes a las de $\mathbb{V}^r$, y sea $\bar{K}$ la G-topología definida por: los objetos de Cat $\bar{K}$ son los abiertos de la forma UxE con U abierto de E, U objeto de Cat K, E variando en S; los morfismos y la clase Cov $\bar{K}$ se definen como en el lema 6.1.

Sea $\mathbb{V}^{r-1}$ la categoría de C^{r-1} variedades de tipo S modeladas cada una sobre uno de los espacios de S y aplicaciones C^{r-1}, $\mathbb{V}A^{r-1}$ la categoría imagen por el isomorfismo, dado por el teorema 4.5 mencionado, de $\mathbb{V}^{r-1}$.

Entonces, podemos enunciar el siguiente teorema:

6.9 Teorema:

Si es $T:\mathbb{V}^r \longrightarrow \mathbb{V}^{r-1}$ el funtor tangente, $\Gamma^i:\mathbb{V}^i \longrightarrow \mathbb{V}A^i$ (i=r-1,r) el isomorfismo dado por el teorema 4.5 (primera parte), se tiene que existe un funtor $\mathcal{T}:\mathbb{V}A^r \longrightarrow \mathbb{V}A^{r-1}$ en las condiciones del teorema 5.3 tal que $\Gamma^{r-1} \circ T = \mathcal{T} \circ \Gamma^r$.

Demostración:

Sea $V \in \mathbb{V}A^r$. Por ser Γ^r un isomorfismo, será

$V = \Gamma^r(\mathcal{V})$, con $\mathcal{V}$ C^r-variedad de tipo S modelada sobre un espacio E.

Si tomamos los atlas tangentes a los de $\mathcal{V}$, se ve que por la proposición 6.6, aplicándoles la construcción 2.2 (primera parte) se obtienen los atlas abstractos tangentes (según definición 2.6) a los de V. Además, puesto que son equivalentes (forman la variedad $T(\mathcal{V})$), los atlas abstractos correspondientes serán $\bar{K}$-equivalentes, por proposición 3.5(primera parte); es decir que pertenecen a una misma $\bar{K}$-variedad abstracta $\bar{V}$.

Definimos entonces: $\mathcal{T}(V)=\bar{V}$ y, si es $\alpha: V_1 \longrightarrow V_2$ un K-morfismo de variedades, $\mathcal{T}(\alpha) = T(\alpha)$, que es una buena definición teniendo en cuenta la proposición 3.5(primera parte) y la 6.7.

Luego, existe $\mathcal{T}$ en las condiciones del teorema 5.3.

Se ve además trivialmente que: $\Gamma^{r-1} \circ T = \mathcal{T} \circ \Gamma^r$.

M. Sagastume

REFERENCIAS

[1] S. Lang: "Introduction to Differentiable Manifolds" Interscience. New York, 1962.

[2] M. Artin: "Grothendieck Topologies". Harvard University, 1962.

[3] Ch. Ehresmann: "Catégories et structures" Dunod. Paris, 1965.

[4] D. Kan: "Functors involving c.s.s. complexes" Trans. Amer. Math. Soc. 87, 330-346, 1958.

[5] N. Bourbaki: "Variétés différentielles et analytiques" Fascicule de résultats. Hermann. Paris.

[6] A. Bastiani: "Applications différentiables et variétes différentiables de dimension infinie" Jour. d'Analyse Math. XIII, 1-114,1964.

Otros textos consultados:

B. Mitchell: "Theory of categories" Academic Press. New York, 1965.

L. Auslander and R.E. MacKenzie: "Introduction to Differentiable Manifolds". Mc.Graw Hill, 1963.