Formación Universitaria
Vol. 16(3), 41-50 (2023)
http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062023000300041

Análisis de errores en tareas sobre el concepto de derivada: una mirada desde la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, y Esquema)

Claudio E. Fuentealba[1], Andrea D. Cárcamo[1], Edelmira R. Badillo[2] y Gloria M. Sánchez-Matamoros[3]
(1) Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería, Universidad Austral de Chile, Campus Miraflores, Valdivia-Chile (correo-e: cfuentealba@uach.cl; andrea.carcamo@uach.cl)
(2) Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, Universidad Autónoma de Barcelona, Campus UAB, Cerdanyola del Vallès-España
(correo-e: Edelmira.Badillo@uab.cat)
(3) Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Sevilla, Pirotecnia s/n, Sevilla-España (correo-e: gsanchezmatamoros@us.es)

Recibido Nov. 7, 2022; Aceptado Dic. 7, 2022; Versión final Ene. 29, 2023, Publicado Jun. 2023

Resumen

Este estudio se enfoca en lo visible, es decir, en el análisis de errores que los estudiantes cometen a fin de identificar posibles dificultades. Se considera el marco propuesto por la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, y Esquema), por medio de la definición de 27 variables en función de elementos matemáticos involucrados en tres tareas que conforman un cuestionario sobre el concepto de derivada. Los participantes son 103 estudiantes de primer año de ingeniería. Los datos corresponden a las producciones de los estudiantes, obtenidos de la aplicación del cuestionario y recolectados durante el primer semestre del año 2021. Los resultados muestran que existen dificultades asociadas a la construcción de la reversión de procesos que se manifiesta en el gran número de errores asociados al uso de las variables que se establecen a partir de las equivalencias lógicas. Se concluye que la encapsulación de la derivada como un objeto cognitivo, correspondiente a una función, es compleja de alcanzar.

Palabras clave: concepto de derivada; análisis de errores; cálculo; teoría APOE; objeto cognitivo; matemática universitaria

Analysis of errors in tasks related to the derivative concept: a look from the APOS theory (Action, Process, Object, and Schema)

Abstract

The present study focuses on the visible, that is, on analyzing errors that students make to identify possible causes. The framework proposed by the APOE (Action, Process, Object, and Schema) theory is applied through the definition of 27 variables based on mathematical elements involved in three tasks that conform a questionnaire on the concept of derivative. The participants are 103 first-year engineering students. The data gathered consist of students' answers to the questionnaire collected during the first semester of the year 2021. The results show that there are difficulties associated with the construction of the reversal of processes as revealed by the great number of errors associated with the use variables obtained from logical equivalences. It is concluded that encapsulating the derivative as a cognitive object, corresponding to its function, is difficult to achieve.

Keywords: derivative concept; error analysis; calculus; APOS theory; cognitive object; university mathematics

INTRODUCCIÓN

El Cálculo es la matemática que se dedica al análisis de la variación (derivada) y la acumulación (integral). En su desarrollo jugaron un papel fundamental el estudio de la velocidad y la distancia recorrida por un objeto en movimiento que condujo a los modelos clásicos de la tangente a una curva y el área bajo ella. El poder proporcionado por los métodos de la Geometría Analítica fue crucial para configurar este escenario y proporcionar un contexto inicial para estos dos problemas: la tangente y el área, los cuales finalmente se cristalizaron y formalizaron por medio del Teorema Fundamental del Cálculo que establece el vínculo profundo entre la tangente y el área bajo cualquier curva dada (Moreno-Armella, 2014). En la actualidad el Cálculo continúa teniendo un papel importante y forma parte de los currículos tanto de educación secundaria como terciaria de muchos países. Esto queda de manifiesto en el hecho de que los futuros profesores, ingenieros, médicos, economistas, científicos y, por supuesto, los matemáticos emprenden el esfuerzo cognitivo de aprender y comprender tanto los conceptos como las técnicas propias de este curso (Rasmussen et al., 2014).

En el mundo, año a año, millones de estudiantes inscriben el curso de Cálculo en una Variable (Cálculo I) en los niveles secundarios y terciarios. Sin embargo, existe una alta tasa de reprobación y abandono vinculada a los bajos resultados académicos asociados a este curso. Este problema no ha estado ajeno al foco de algunos investigadores del área de Didáctica de la Matemática que reportan su preocupación por las dificultades de aprendizaje asociadas a la comprensión de los temas referentes al Cálculo Diferencial e Integral, tanto en cursos introductorios como avanzados (Cooley et al., 2007; Domínguez et al., 2019; Czarnocha et al., 2001). Esta problemática no es ajena al ámbito universitario de nuestro país ya que las carreras con menor aprobación anual en las universidades chilenas, en general, pertenecen a las áreas Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM o CTIM en español). Un ejemplo de ello es lo que ocurre en Ingeniería, en donde de las diez carreras con menor tasa de aprobación anual, ocho corresponden a esta área (Atencio y Rolando, 2018) siendo el curso de Cálculo en una Variable uno de los que más tributa a esta triste estadística.

Dado el alto número de estudiantes que en nuestro país como en todo el mundo matriculan el curso de Cálculo en una Variable, ya sea a nivel secundario como universitario, la investigación sobre el aprendizaje, la enseñanza y la comprensión de sus conceptos tiene el potencial de tener un amplio impacto. Por esta razón, creemos que es fundamental ampliar el horizonte de la compresión de dichos aspectos. Concretamente, en este trabajo nos enfocamos en analizar los errores que los estudiantes universitarios comenten al enfrentarse a tareas que involucran el uso del concepto de derivada. Esto con el objetivo de poder interferir posibles dificultades que se manifiestan en por medio de dichos errores. Para este fin, haremos uso de la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema).

La teoría APOE

En el desarrollo de este trabajo hemos utilizado las herramientas teóricas y analíticas que proporciona la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Esta teoría es el resultado de la interpretación de las ideas piagetianas referentes a la abstracción reflexiva, aplicado a la investigación del Pensamiento Matemático Avanzado intentando estudiar y modelar la forma en que un estudiante aprende matemáticas, pero también, como éstas se pueden enseñar de forma más efectiva (Trigueros, 2005). Para la comprender esta teoría, es fundamental tener en presente que el principio de abstracción reflexiva era considerado por Piaget como el principal mecanismo para realizar toda construcción mental, y también como el mecanismo mediante el cual toda estructura lógica-matemática puede desarrollarse en la mente de un individuo (Arnon et al., 2014). A partir de esta premisa, APOE se plantea como objetivo describir tanto el camino como la construcción, de las estructuras cognitivas lógico-matemáticas, realizadas por un individuo durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático particular.

Concretamente, la teoría APOE plantea que, para lograr la comprensión de un determinado concepto matemático, un estudiante debe transitar por las construcciones mentales de Acción, Proceso, Objeto y Esquema (de aquí el acrónimo APOE), por medio de los mecanismos de interiorización, encapsulación, desencapsulación, reversión, coordinación, generalización, tematización y destematización (Arnon et al., 2014). En este sentido, para que un estudiante construya un concepto matemático él o ella deben comenzar con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente construidos, en términos de Acciones que se interiorizan para formar Procesos que se encapsulan para formar Objetos. Con relación a los Procesos, estos pueden ser generados a partir de la: coordinación, reversión o generalización de otros Procesos previamente construidos por el estudiante. Finalmente, las Acciones, los Procesos y los Objetos se pueden organizar en Esquemas (Asiala et al., 1997; Arnon et al., 2014). Cabe señalar que los Esquemas pueden ser tematizados en un nuevo Objeto cognitivo y destematizados para obtener sus estructuras mentales constitutivas en caso de ser necesarias en la resolución de una tarea matemática. La Figura 1 resumen la relación entre las estructuras y los mecanismos mentales de la teoría APOE.

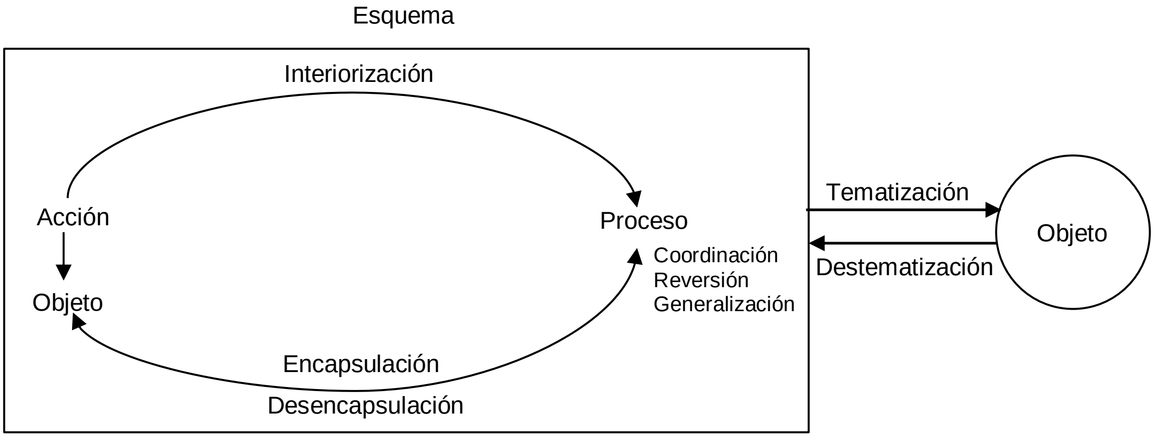


Fig.1: Estructuras y mecanismos mentales involucrados en la comprensión de un concepto matemático

Sobre los errores

Una dificultad es algo que inhibe al estudiante para realizar correctamente (o comprender rápidamente) una tarea o parte de ella (Centeno, 1988). Los errores se relacionan directamente a las dificultades que se presenta en el aprendizaje de las matemáticas en cualquier nivel educativo. En este sentido, Socas (1997) señala que las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas y se manifiestan en los estudiantes como errores. Asimismo, indica que el error de debe a la manifestación de un esquema cognitivo inadecuado en el estudiante y no sólo corresponde a la falta específica de conocimiento o una distracción. Concretamente, en este trabajo hablaremos de error cuando un estudiante efectúa una práctica matemática (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la matemática escolar (Godino, Batanero y Font, 2003). Por esta razón, asumimos una valoración de las respuestas de los estudiantes -acciones y argumentaciones- de carácter dicotómico, es decir, verdadero o falso (1 o 0).

METODOLOGÍA

Este trabajo se enmarca en los denominados métodos mixtos. Estos, según Johnson y Onwuegbuzie (2004) corresponden a estudios en donde el investigador mezcla o combina técnicas cualitativas y cuantitativas. Asimismo, Hernández et al. (2003) indican que los métodos mixtos añaden complejidad al diseño de la investigación debido a la planificación de su integración o combinación, la que se presenta en todo el proceso de investigación, o en algunas de sus etapas, aunque, contempla todas de las ventajas de cada uno de los enfoques. Concretamente, desde el punto de vista de Rocco et al. (2003) este trabajo es de modelo mixto caracterizado por tener un perfil exploratorio o confirmatorio y, además, utilizan tanto datos como análisis cualitativos y cuantitativos. En este sentido es importante señalar que los datos obtenidos son cualitativos y por medio de una valoración, también cualitativa, se obtienen puntuaciones dicotómicas para las 27 variables definidas.

Participantes y contexto

Los participantes de esta investigación fueron 103 estudiantes universitarios entre los cuales no existía gran variabilidad en cuanto a su rango etario, formación previa y nivel académico. Todos los estudiantes habían cursado y aprobado como mínimo una asignatura que incluía los tópicos de Cálculo Diferencial: cálculo de derivadas, análisis y representación de funciones, cálculo de valores extremos, problemas de optimización y la Regla de L'Hôpital.

El cuestionario

El instrumento de recolección de datos correspondió a un cuestionario (ver Tabla 1) construido en base a la selección y/o adaptación de tres tareas basadas en las descomposiciones genéticas de Asiala et al. (1997) y Font et al. (2016) que habían sido utilizadas en investigaciones previas sobre el concepto de derivada (Baker et al., 2000; Sánchez-Matamoros et al., 2006; García et al., 2011, Fuentealba, et al., 2022). Cabe señalar que el cuestionario no incluía tareas sobre aplicaciones del concepto de derivada fuera del contexto analítico-geométrico. Esto porque nos enfocamos en el análisis de los errores presentes en la construcción cognitiva de concepto previa a las aplicaciones en otros contextos. El cuestionario fue aplicado a los 103 participantes de esta investigación y su duración fue aproximadamente de 90 minutos.

Tabla 1: Tareas propuestas en el cuestionario y descripción de aspectos asociados a su resolución

Tarea 1

Enunciado:

Esboza la gráfica de una función f que satisface las siguientes condiciones:
a) f es continua en su dominio
b) $\mathrm{f}(2) = 0$
c) $\mathrm{f}'(2) = \mathrm{f}'(5) = 0$
d) $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{f}(x) = -4$
e) $\lim_{x \to -8^-} \mathrm{f}(x) = -\infty$
f) $\mathrm{f}'(x) < 0$ cuando $5 < x < 8$
g) $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ cuando $x < 5$
h) $\mathrm{f}''(x) < 0$ cuando $3 < x < 8$
i) $\mathrm{f}''(x) > 0$ cuando $x < 3$

Descripción de aspectos asociados a la resolución:

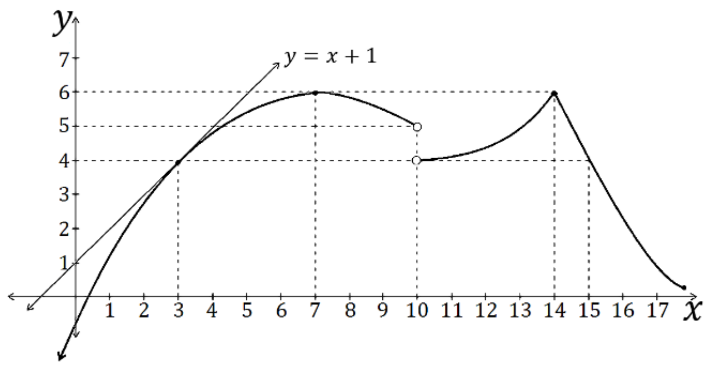
Modo de representación: analítico→gráfico

Elementos matemáticos: Interpretación analítica de la derivada y sus implicaciones sobre la gráfica de la función (existencia de valores extremos, puntos de inflexión). Signo de la primera derivada y su relación con respecto a los intervalos de monotonía de la función. Signo de la segunda derivada y su relación con respecto a los intervalos de convexidad de la función.

Tarea 2

Enunciado:

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a) Obtener los valores de $\mathrm{f}'(3)$, $\mathrm{f}'(7)$, $\mathrm{f}'(10)$, $\mathrm{f}'(14)$ y $\mathrm{f}'(15)$. Explicando cómo los obtienes.
b) Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica cómo los has obtenido.

Descripción de aspectos asociados a la resolución:

Modo de representación: gráfico→analítico→gráfico

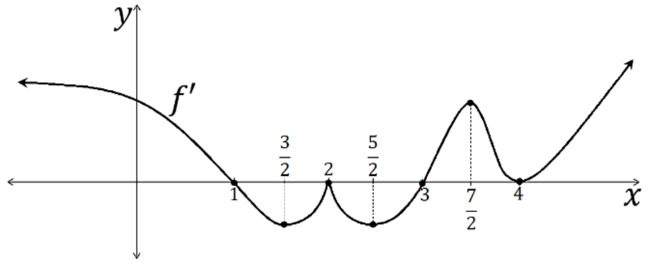
Elementos matemáticos: Interpretación geométrica y analítica de la derivada (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía y convexidad de la función y su relación con el signo de la primera derivada o segunda derivada según sea el caso. El operador derivada (si f es una parábola entonces f' es una recta).

Tabla 1: continuación

<table>
<tr><th>Tarea 3</th></tr>
<tr><td>

Enunciado:

La figura muestra la gráfica de la derivada de f, esboza las posibles gráficas de f.



Descripción de aspectos asociados a la resolución:

Modo de representación: gráfico→analítico→gráfico

Elementos matemáticos: Interpretación geométrica (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía de la primera derivada y su relación con el signo de la segunda derivada (intervalos de convexidad de la función). Intervalos de cambio de signo de la primera derivada y su relación con respecto a la monotonía de función.

</td></tr>
</table>

La resolución de estas tareas involucraba el uso de los elementos matemáticos (ver Tabla 2) tanto puntuales como globales que configuran el concepto de derivada en ambos modos de representación (analítico y gráfico). Estos elementos fueron claves a la hora de definir las 27 variables en estudio que fueron utilizadas para discretizar los protocolos de resolución de los estudiantes (respuestas de los estudiantes al cuestionario).

Tabla 2. Elementos matemáticos utilizados en la resolución de las tareas del cuestionario

Elemento matemático	Tarea
1. Si $f'(a)=0$, entonces en $x=a$ existe un máximo, un mínimo o un punto de inflexión de f.	1,2 y 3
2. Si f' es continua en $x=a$, y f tiene un cambio de curvatura en el punto de abscisa $x=a$ entonces en $(a, f(a))$ existe un punto de inflexión de f.	1, 2 y 3
3. $f'>0$ en un intervalo I, si y solo si f es estrictamente creciente en I.	1, 2 y 3
4. $f'<0$ en un intervalo I, si y solo si f es estrictamente decreciente en I.	1, 2 y 3
5. $f''>0$ en un intervalo I, si y solo si f es convexa en I.	1, 2 y 3
6. $f''<0$ en un intervalo I, si y solo si f es cóncava en I.	1, 2 y 3
7. $f'(a)$ es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=a$.	2
8. $f'(a)$ es igual al límite del cociente incremental de f en la vecindad del punto de abscisa $x=a$.	2
9. Si $f'_-(a)\neq f'_+(a)$ y f es continua, entonces f posee un punto cúspide o anguloso en $x=a$.	2 y 3
10. Si f es derivable en $x=a$, entonces f es continua en $x=a$ (directa).	3
11. Si f no es continua en $x=a$, entonces f no es derivable en $x=a$ (contrarrecíproco).	2
12. f es una parábola, entonces f' es una recta.	2

Establecimiento de variables y discretización de los cuestionarios

Con el propósito de discretizar los protocolos de resolución de los estudiantes y obtener puntuaciones que nos permitieran medir la frecuencia absoluta de ocurrencia de errores, se definieron 27 variables (ver Tabla 3) que corresponde al resultado de la descomposición de los elementos matemáticos (Tabla 2) en ambos modos de representación (analítico y gráfico), la utilización de relaciones lógicas y de otros estudios previos (Trigueros y Escandón, 2008; Fuentealba et al., 2017). Es importante señalar que los elementos matemáticos de la Tabla 2 no coinciden, de forma directa, con los de la primera columna de la Tabla 3. Esto se debe a que algunos elementos fueron separados y unidos otros, a fin de definir las variables de estudio. Por ejemplo, el elemento matemático que relaciona, por medio de la "equivalencia lógica", el signo positivo de la primera derivada con el crecimiento de la función (elemento matemático número 3 de la Tabla 2) fue separado en dos implicaciones, lo cual dio origen a las variables V_{11} (si $f'>0 \rightarrow f$ es creciente) y V_{12} (f es creciente $\rightarrow f'>0$). Del mismo modo, se establecieron otras variables y se construyeron otras que corresponden a descomposición de algunos de los elementos en ambos modos de representación (analítico y gráfico).

Tabla 3: Variables utilizadas para discretizar los protocolos de resolución de cada uno de los cuestionarios

Elemento matemático	Variable a observar
1. Derivada en un punto $f'(a)$	V_1. Usa correctamente el significado geométrico de la derivada en $x=a$. V_2. Usa correctamente el significado analítico de la derivada en $x=a$.
2. Función derivada $f'(x)$	V_3. Usa correctamente el significado de función derivada. V_4. Usa correctamente el significado del operador derivada.
3. Valor extremo de f	V_5. Usa correctamente el significado de máximo local geométricamente. V_6. Usa correctamente el significado de máximo local analíticamente. V_7. Usa correctamente el significado de mínimo local geométricamente. V_8. Usa correctamente el significado de mínimo local analíticamente.
4. Punto de inflexión de f	V_9. Usa correctamente el significado de punto de inflexión geométricamente. V_{10}. Usa correctamente el significado de punto de inflexión analíticamente.
5. Relación de equivalencia lógica entre el signo de f' en un intervalo I y, la monotonía de f en dicho intervalo	V_{11}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de f' en un intervalo I y el crecimiento estricto de f en dicho intervalo. V_{12}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el crecimiento estricto de f en un intervalo I y el signo positivo de f' en dicho intervalo. V_{13}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo f' en un intervalo I y el decrecimiento estricto de f en dicho intervalo. V_{14}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el decrecimiento estricto de f en un intervalo I y el signo negativo de f' en dicho intervalo.
6. Relación de equivalencia lógica entre el signo de f'' en un intervalo I y, la curvatura de f en dicho intervalo	V_{15}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de f'' en un intervalo I y la convexidad de f en dicho intervalo. V_{16}. Usa correctamente la relación de implicación entre: la convexidad de f en un intervalo I y el signo positivo de f'' en dicho intervalo. V_{17}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo de f'' en un intervalo I y la concavidad de f en dicho intervalo. V_{18}. Usa correctamente la relación de implicación entre: la concavidad de f en un intervalo I y el signo negativo de f'' en dicho intervalo.
7. Puntos de no derivabilidad de f	V_{19}. Usa correctamente las derivadas laterales. V_{20}. Usa correctamente el significado de los puntos conflictivos (cúspides y angulosos).
8. Continuidad y derivabilidad de f	V_{21}. Usa correctamente la relación directa: si f es derivable en $x=a$, entonces f es continua en $x=a$. V_{22}. Usa correctamente la relación contrarrecíproca: si f no es continua en $x=a$, entonces f no es derivable en $x=a$.
Otras variables generales observables	V_{23}. Es capaz de dividir correctamente una gráfica en distintos intervalos determinados por los elementos gráficos proporcionados (monotonía y curvatura). V_{24}. Es capaz de definir correctamente distintos intervalos del dominio de la función determinados por la información analítica proporcionada (signo y ceros). V_{25}. Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades gráficas. V_{26}. Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades analíticas. V_{27}. Es capaz para establecer correctamente relaciones entre la primera y segunda derivada.

En el proceso de discretización se cuantificó cada una de las 27 variables, en función de las acciones o argumentos precisados en los protocolos de resolución de los estudiantes. Las variables fueron medidas utilizando una escala de tipo dicotómica. La valoración de cada una de las variables se realizó utilizando los criterios que se especifican en la Tabla 4.

Tabla 4: Escala utilizada para medir las variables en los protocolos de resolución de los estudiantes

Puntuación	Descripción
0	Se observa explícitamente un uso erróneo de variable
1	Se observa el uso correcto de la variable o se infiere con base en un proceso de justificación claro

Considerando que la Tabla 4 puede resultar demasiado general para medir las variables en los protocolos de resolución de los estudiantes. Por esta razón se establecieron algunos descriptores específicos para cada una de ellas (ver Tabla 5). Dichos descriptores están redactados en términos positivos, es decir, cuando el valor de la variable asociada es 1, sin embargo, dada la medición dicotómica también obtenemos la información sobre el uso erróneo o incorrecto de cada una de ellas.

Tabla 5: Descriptores utilizados para discretizar cada una de las variables definidas

Variable	Descriptor
V_1	El estudiante menciona, explícita o implícitamente, que la derivada en un punto corresponde a la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.
V_2	El estudiante menciona, explícita o implícitamente, que la derivada en un punto corresponde al límite del cociente incremental en la vecindad del punto, o bien, aproxima el valor de la derivada utilizando la tasa de variación media.
V_3	El estudiante menciona, explícita o implícitamente, que la derivada de una función es otra función.
V_4	El estudiante menciona, explícita o implícitamente, que la derivada es una función que puede ser “derivada nuevamente”, es decir, que considera a la derivada como un operador que transforma a una función (si la función es una parábola entonces su derivada es una recta).
V_5	El estudiante determina, explícita o implícitamente, la existencia de un máximo local a partir de información gráfica.
V_6	El estudiante determina, explícita o implícitamente, la existencia de un máximo local a partir de información analítica.
V_7	El estudiante determina, explícita o implícitamente, la existencia de un mínimo local a partir de información gráfica.
V_8	El estudiante determina, explícita o implícitamente, la existencia de un mínimo local a partir de información analítica.
V_9	El estudiante determina, explícita o implícitamente, la existencia de un punto de inflexión a partir de información gráfica.
V_{10}	El estudiante determina, explícita o implícitamente, la existencia de un punto de inflexión a partir de información analítica.
V_{11}	El estudiante determina, explícita o implícitamente, que sí f' es positiva en un intervalo I, entonces f es estrictamente creciente en dicho intervalo.
V_{12}	El estudiante determina, explícita o implícitamente, que sí f es estrictamente creciente en un intervalo I, entonces f' es positiva en dicho intervalo.
V_{13}	El estudiante determina, explícita o implícitamente, que sí f' es negativa en un intervalo I, entonces f es estrictamente decreciente en dicho intervalo.
V_{14}	El estudiante determina, explícita o implícitamente, que sí f es estrictamente decreciente en un intervalo I, entonces f' es negativa en dicho intervalo.
V_{15}	El estudiante determina, explícita o implícitamente, que sí f'' es positiva en un intervalo I, entonces f es convexa en dicho intervalo.
V_{16}	El estudiante determina, explícita o implícitamente, que sí f es convexa en un intervalo I, entonces f'' es positiva en dicho intervalo.
V_{17}	El estudiante determina, explícita o implícitamente, que sí f'' es negativa en un intervalo I, entonces f es cóncava en dicho intervalo.
V_{18}	El estudiante determina, explícita o implícitamente, que sí f es cóncava en un intervalo I, entonces f'' es negativa en dicho intervalo.
V_{19}	El estudiante utiliza, explícita o implícitamente, derivadas laterales en puntos de no derivabilidad (puntos conflictivos o discontinuidades).
V_{20}	El estudiante analiza, explícita o implícitamente, los puntos en los cuales la función es continua pero no derivable.
V_{21}	El estudiante utiliza, explícita o implícitamente, la relación directa (si f es derivable en $x=a$, entonces f es continua en $x=a$).
V_{22}	El estudiante utiliza, explícita o implícitamente, la relación contrarrecíproca (si f no es continua en $x=a$, entonces f no es derivable en $x=a$).
V_{23}	El estudiante divide el dominio de la función en intervalos basándose en los elementos gráficos proporcionados en el enunciado.
V_{24}	El estudiante divide el dominio de la función en intervalos basándose en los elementos analíticos proporcionados.
V_{25}	El estudiante grafica una función a partir de los elementos gráficos proporcionados.
V_{26}	El estudiante grafica una función a partir de los elementos analíticos proporcionados.
V_{27}	El estudiante es capaz, explícita o implícitamente, de establecer relaciones entre la primera y segunda derivada.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Como ya se mencionó cada uno de los 103 protocolos de resolución se discretizó en términos dicotómicos, es decir, con base en la identificación del uso erróneo (incorrecto) o correcto de cada una de las 27 variables (0 o 1 para cada variable). Esto nos proporcionó como producto una matriz de datos de 103x27. A fin de conocer la estructura general de los datos, en términos de los errores cometidos por los estudiantes, se procedió a realizar un análisis descriptivo de las frecuencias porcentuales de uso erróneo (incorrecto) o correcto de las variables en estudio (ver Figura 2. Es importante señalar, que dada la naturaleza de nuestras variables no es correcto aplicar un Análisis de Correlación, pues las relaciones entre ellas no son de tipo simétrico.

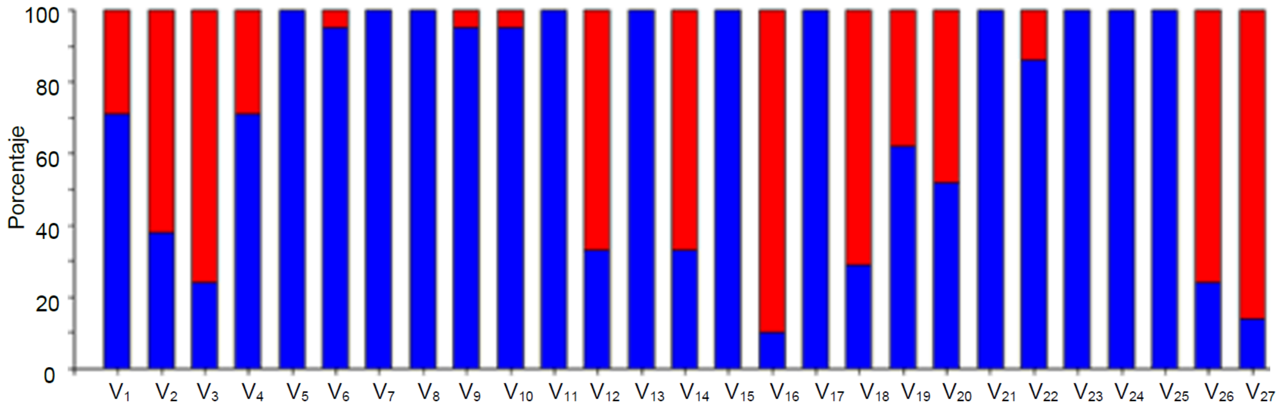


Fig. 2: Frecuencias porcentuales de uso correcto e incorrecto de las variables 27 variables (■ Correcto; ■ Incorrecto)

Realizando una mirada global sobre la distribución del uso erróneo (incorrecto) de las 27 variables, porción roja de las barras de la Figura 2, permite observar que los mayores porcentajes se encuentra localizados en algunas variables específicas. Por tanto, el análisis de dichas variables nos proporciona información vital para intentar inferir posibles dificultades vinculadas con ellos en términos de los elementos teóricos proporcionados por la teoría APOE. Concretamente, respecto al análisis de los errores, consideramos lo propuesto por Tall y Razali (1993) en cuanto a que una exploración inicial de los errores más frecuentes puede revelar una amplia gama de dificultades con conocimientos específicos, por ello nos enfocamos en aquellas variables que poseían un porcentaje de uso erróneo (incorrecto) mayor al 50% (ver Tabla 6). Cabe señalar que las frecuencias están aproximadas al entero más cercano.

Tabla 6: Frecuencias de uso incorrecto (erróneo) de las variables por elemento matemático y criterio que las define

Elementos	Criterio	Porcentaje
1. Derivada en un punto $f'(a)$.	V_1: Significado geométrico.	29 %
	V_2: Significado analítico.	61 %
2. Función derivada $f'(x)$.	V_3: Derivada como función.	76 %
	V_4: Derivada como operador.	27 %
3. Valor extremo de f.	V_5: Máximo local geométricamente.	2 %
	V_6: Máximo local analíticamente.	5 %
	V_7: Mínimo local geométricamente.	2 %
	V_8: Mínimo local analíticamente.	2 %
4. Punto de inflexión de f.	V_9: Punto de inflexión geométricamente.	5 %
	V_{10}: Punto de inflexión analíticamente.	5 %
5. Relación de equivalencia ilógica entre el signo de f' en un intervalo I y, la monotonía de f en dicho intervalo.	V_{11}: $f'>0 \to f$ estrictamente creciente.	2 %
	V_{12}: f estrictamente creciente $\to f'>0$.	67 %
	V_{13}: $f'<0 \to f$ estrictamente decreciente.	2 %
	V_{14}: f estrictamente decreciente $\to f'<0$.	67 %
6. Relación de equivalencia ilógica entre el signo de f'' en un intervalo I y, la curvatura de f en dicho intervalo.	V_{15}: $f''>0 \to f$ convexa.	2 %
	V_{16}: f convexa $\to f''>0$.	89%
	V_{17}: $f''<0 \to f$ cóncava.	2 %
	V_{18}: f cóncava $\to f''<0$.	70 %

Tabla 6: continuación

Elementos	Criterio	Porcentaje
7. Puntos de no derivabilidad de f .	V_{19}: Derivadas laterales.	39 %
	V_{20}: Puntos conflictivos.	49 %
8. Continuidad y derivabilidad de f .	V_{21}: Si f es derivable en $x=a \to f$ es continua en $x=a$.	2 %
	V_{22}: f no es continua en $x=a \to f$ no es derivable en $x=a$.	13 %
Otras variables generales observables.	V_{23}: Determinar intervalos para esbozar una función a partir de información gráfica.	2 %
	V_{24}: Determinar intervalos para esbozar una función a partir de información analítica.	2 %
	V_{25}: Esbozar una función a partir de sus propiedades gráficas.	2 %
	V_{26}: Esbozar una función a partir de sus propiedades analíticas.	77 %
Conexiones entre el par $f'-f''$.	V_{27}: Relaciones entre f' y f'' .	88 %

Como se observa las variables con un porcentaje mayor al 50% de uso erróneo (incorrecto) corresponden a las: V_2, V_3, V_{12}, V_{14}, V_{16}, V_{18}, V_{26} y V_{27}. Concretamente, la variable V_2 está asociada a la comprensión de la derivada como límite del cociente incremental, por tanto, inferimos que el alto porcentaje de uso erróneo de esta variable (61 %) está vinculado a dificultades con el concepto subyacente que, en este caso, corresponde al de límite. Esto porque es necesario, a lo menos, una concepción de límite a nivel de Proceso para la construcción correcta del concepto de derivada. Asimismo, existen porcentajes altos de uso erróneo (incorrecto) en las variables V_3 (76%) y V_{27} (88%), estas variables están asociadas a considerar a la derivada como función y al establecimiento de relaciones (coordinaciones) en un segundo nivel entre f' y f'', por tanto, podemos inferir la existencia de dificultades vinculadas a la encapsulación de la derivada como un Objeto correspondiente a una función

Por otra parte, llama la atención la presencia de grupo de variables: V_{12}, V_{14}, V_{16} y V_{18}, todas con un porcentaje de uso incorrecto mayor o igual al 67%. Estas variables corresponden a las implicaciones contrarias de los elementos matemáticos: 3, 4, 5 y 6, que están definidos en términos de equivalencias lógicas (Tabla 2). Lo anterior, en términos de la teoría APOE, nos proporciona evidencia solida de que estos errores cometidos por los estudiantes corresponden a la manifestación concreta de dificultades vinculadas la construcción de las reversiones de los Procesos que asocian los signos de la primera y segunda derivada de una función con las monotonía y curvatura de una función. También, se observa que la variable V_{26}, que está relacionada con la interpretación de la información analítica para determinar intervalos y esbozar una gráfica correcta a partir de esta información, posee un porcentaje de uso erróneo (incorrecto) mayor al 50% (77%). Esto nos proporciona información respecto a que existen dificultades asociadas con la coordinación de Procesos vinculados a elementos puntuales y globales cuando la información es proporcionada en el modo de representación analítico.

CONCLUSIONES

El análisis de los datos y su interpretación utilizando los elementos teóricos de APOE nos permitió inferir algunas dificultades con base en las cuales podemos plantear las siguientes conclusiones:

1.- La encapsulación de la derivada como un Objeto cognitivo, correspondiente a una función, es compleja de alcanzar.

2.- Las reversiones de los Procesos vinculados a elementos matemáticos que están definidos por medio de equivalencias lógicas (si y solo si) no son triviales de construir para los estudiantes.

3.- La coordinación de Procesos vinculados a elementos matemáticos de distinta naturaleza (puntuales y globales) es compleja de lograr, especialmente cuando dicho elementos son proporcionados en el modo de representación analítico (algebraico).

Consideramos que el desarrollo de este trabajo y las conclusiones planteadas pueden ser consideradas como un insumo importante a la hora de diseñar descomposiciones genéticas sobre el concepto de derivada. Asimismo, esperamos que estos aportes sean considerados en el diseño e implementación de actividades o tareas en los procesos instruccionales sobre este concepto.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo desarrollado gracias a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) por medio del proyecto N°11180899 y la colaboración de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la UACh.

REFERENCIAS

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Schwingendorf, K., The development of students' graphical understanding of the derivate, https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8, J. Math. Behav., 16(4), 399-430 (1997).

Arnon, I., Cottrill, J., y otros cinco autores, APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education, Springer, ISBN: 978-1-4614-7965-9, Berlin, Germany (2014)

Atencio, I., y Rolando, R., Avance curricular en educación superior - matrícula 2016. Servicio de Información de Educación Superior (SIES), MINEDUC, Santiago, Chile (2018).

Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M., A calculus graphing schema, https://doi.org/10.2307/749887, J. Res. Math. Educ., 31(5), 557–578 (2000)

Centeno, J., Números decimales: ¿por qué? ¿para qué?, 1era ed., Editorial Síntesis, ISBN: 84-7738-028-7, Madrid, España (1988)

Cooley, L., Trigueros, M., y Baker, B., Schema thematization: a framework and an example, https://doi.org/10.2307/30034879, J. Res. Math. Educ., 38(4), 370-392 (2007)

Czarnocha, B., Dubinsky, E., y otros tres autores, Conceptions of area: In students and in history, https://doi.org/10.1080/07468342.2001.11921861, Coll. Math. J., 32(2), 99-109 (2001)

Dominguez, A., Barniol, P., y Zavala, G., Evaluación del entendimiento gráfico de derivada e integral definida mediante un examen en castellano de opción múltiple, https://doi.org/10.4067/S0718-50062019000600041, Form. Univ., 12(6), 41-56 (2019)

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., y Rubio, N., Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA, https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6, Educ. Stud. Math., 91(1), 107-122 (2016)

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E., y Trigueros, M., Thematization of derivative schema in university students: Nuances in constructing relations between a function's successive derivatives, https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1248508, Int. J. Math. Educ. Sci., 48(3), 374-392 (2017).

Fuentealba, C., Trigueros, M., Sánchez-Matamoros, G., y Badillo, E., Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada, https://doi.org/10.35763/aiem21.4241, Av. Investig. Educ. Mat., 21, 23-44 (2022)

García, M., Llinares, S., y Sánchez-Matamoros, G., Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures, https://doi.org/10.1007/s10763-010-9227-2, Int. J. Sci. Math. Educ., 9(5), 1023-1045 (2011)

Godino, J., Batanero, C., y Font, V., Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Granada, España (2003)

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P., Metodología de la investigación, 3 era ed., McGraw-Hill, ISBN: 978-970-10-3632-7, Ciudad de México, México (2003)

Johnson, R.B., y Onwuegbuzie, A., Mixed methods research: a research paradigm whose time has come, https://doi.org/10.3102/0013189X0330070, Educ. Res., 33(7), 14-26 (2004)

Moreno-Armella, L. An essential tension in mathematics education, https://doi.org/10.1007/s11858-014-0580-4, ZDM, 46(4), 621-633 (2014)

Rasmussen, C., Marrongelle, K., y Borba, M.C., Research on calculus: what do we know and where do we need to go?, https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x, ZDM, 46(4), 507-515 (2014)

Rocco, T., Bliss, L., Gallagher, S., y Pérez-Prado, A., Taking the next step: Mixed methods research in organizational systems, Inf. Technol. Learn. Perform. J., ISSN: 1535-1556, 21(1), 19 (2003)

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S., El desarrollo del esquema de derivada, Ensen. Cienc., 24(1), ISSN: 0212-4521, 85–98 (2006)

Socas, M. M., Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. In: L. Rico (Coord.), La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria, Barcelona: ICE Universitat de Barcelona/HORSORI, 125-154, (1997).

Tall, D., y Razali, M. R., Diagnosing students' difficulties in learning mathematics, https://doi.org/10.1080/0020739930240206, Int. J. Math. Educ. Sci, 24(2), 209-222 (1993)

Trigueros, M., La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior, Educ. Mat., ISSN: 0187-8298, 17(1), 5-31(2005)

Trigueros, M., y Escandon, C., Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación, Rev. Mex. Inv. Educ., ISSN: 1405-6666, 13 (36), 59-85 (2008)