JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M.-L. DUBREIL-JACOTIN

Sur les théorèmes d'existence relatifs aux ondes permanentes périodiques à deux dimensions dans les liquides hétérogènes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 43-67.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_43_0>

Sur les théorèmes d'existence relatifs aux ondes permanentes périodiques à deux dimensions dans les liquides hétérogènes ;

PAR M.-L. DUBREIL-JACOTIN.

Introduction.

Nous nous proposons de montrer dans ce mémoire comment la méthode que nous avons utilisée pour l'étude des ondes permanentes à deux dimensions dans les liquides homogènes (1) se généralise et permet l'étude des ondes également périodiques permanentes à deux dimensions dans un liquide hétérogène.

Les mêmes changements de fonction inconnue et de variables permettent de remplacer ce problème physique par la résolution d'un problème aux limites non linéaire, dans une couronne ou un cercle, pour une équation aux dérivées partielles de type elliptique non linéaire dont la partie linéarisée est de la forme

$$\Delta v + a\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} + cv = f \qquad \text{avec} \quad c > 0.$$

Du fait que c est positif résulte que le problème de Dirichlet relatif à cette équation n'a pas nécessairement une solution unique comme c'était le cas dans les fluides homogènes où cette équation était remplacée par $\Delta v = 0$. C'est de ce fait que résulte la différence essentielle entre le cas homogène et le cas hétérogène et l'intérêt de l'étude

(1) *Journal de Mathématiques*, **13**, 1934, p. 217-291.

de ce dernier cas. En particulier dans ce mémoire nous étudierons complètement et essentiellement le problème nouveau des ondes à l'intérieur d'un liquide hétérogène d'épaisseur H compris entre deux plans horizontaux fixes ([2]) (problème $\mathcal{A}$).

Les résultats obtenus dans ce cas (et à plus forte raison dans le cas plus compliqué d'un liquide hétérogène avec surface libre, problème $\mathcal{B}$) ne sont pas aussi précis que les résultats obtenus dans le cas homogène. On arrive à la conclusion suivante : le problème d'onde n'a pas de solution pour p $\left(\text{paramètre égal à } \frac{\lambda g}{2\pi c^2}, \lambda \text{ longueur d'onde, } c \text{ vitesse de propagation}\right)$ quelconque; mais au voisinage d'une double infinité de valeurs de p et pour toute fonction f donnée arbitrairement, mais petite comme ε et continue au sens de Hölder, on peut affirmer qu'il y a « en général » une onde unique non triviale, symétrique, fonction d'un paramètre.

Le mot « en général » exprime deux restrictions. D'abord la valeur considérée de p, qui est caractérisée par la propriété que pour cette valeur une certaine équation intégrale doit avoir deux fonctions fondamentales, doit être telle qu'elle n'en ait pas plus de deux. D'autre part la fonction B donnée caractérisant l'hétérogénéité ne doit pas être solution d'une certaine équation fonctionnelle $\mathcal{F}(\mathrm{B}) = 0$. Nous précisons ceci dans le cas particulier intéressant pour les applications où $\mathrm{B}(\rho) = \frac{k^2}{\rho^2}$ de la façon suivante : quel que soit k, la fonctionnelle $\mathcal{F}\left(\frac{k^2}{\rho^2}\right)$ n'est jamais nulle et l'on est sûr qu'il y a une onde non triviale fonction d'un paramètre au voisinage de toutes les valeurs p_m^ν de la suite doublement infinie de valeurs caractéristiques de p si $\frac{\lambda^2}{\mathrm{H}^2}$ est incommensurable; si $\frac{\lambda^2}{\mathrm{H}^2}$ est rationnel mais n'est pas de la forme $\nu(\nu + 1)$

([2]) Lorsque l'hétérogénéité consiste simplement en deux fluides superposés le problème a été résolu complètement par Kotchine (*Math. Ann.*, t. 95, 1926). Le cas de la répartition continue qui nous occupe a déjà été considéré dans un cas particulier et sur les équations linéarisées par Lord Rayleigh (*Proc. Lond. Math. Soc*, vol. 22, 1891-1892).

ou $\frac{4\nu^2-1}{4}$ où ν est un entier, on est sûr qu'il y a une onde fonction d'un paramètre de longueur d'onde effective λ et sans plan nodal. Si $\frac{\lambda^2}{H^2}$ avait une des valeurs exceptionnelles signalées, il y aurait une équation de ramification de plus à discuter et notre méthode simple ne permet pas de donner le résultat.

Pour terminer, nous indiquons comment on peut résoudre d'une manière analogue le problème avec surface libre et profondeur finie. Le cas de la profondeur infinie se traiterait de même, et même plus simplement, mais du fait que $B(\rho)$ doit rester borné, on ne peut plus (dans ce cas) considérer le cas particulier intéressant de la répartition de densité exponentielle qui conduit à $B=\frac{k^2}{\rho^2}$ [3].

La méthode utilisée dans ce mémoire a été résumée dans une note aux *Comptes rendus* [4].

I.

1. Position du problème. — Nous étudions le mouvement supposé à deux dimensions dans un plan vertical. Le domaine fluide y est limité soit par deux horizontales (problème $\mathcal{A}$), soit inférieurement par une horizontale et supérieurement par une ligne l (problème $\mathcal{B}$). Nous ferons sur cette ligne l les mêmes hypothèses que dans le cas homogène, c'est-à-dire qu'elle n'est pas très différente d'une horizontale, son niveau moyen, et qu'elle se déplace sans changement de forme avec une vitesse constante c. Nous étudions le mouvement comme mouvement supposé permanent dans un système d'axes liés à l'onde. Nous prendrons l'axe des x dans le niveau moyen de l dans le cas de la surface libre, sur l'horizontale supérieure dans le cas du liquide com-

(3) Dans le cas de cette répartition de densité le problème a été étudié, en première approximation, par Burnside (*Proc. Lond. Math. Soc.*, **20**, 1889, p. 392), Love (*Proc. Lond. Math. Soc.*, **22**, 1891, p. 307); *voir* aussi Lamb (*Hydrodynamics fifth ed.*, p. 356, Cambridge, 1930). Les conclusions relatives à la profondeur infinie sont problématiques, en particulier il n'existe pas, quelle que soit la répartition de densité, d'onde irrotationnelle, voir *Rend. R. Acc. Lincei*, t. **15**, 1932, p. 814.

(4) Tome **200**, 1935, p. 210.

pris entre deux plans, mais toujours dirigé en sens inverse de la propagation de l'onde, de telle sorte que la composante horizontale de la vitesse des particules est toujours voisine de la quantité positive c; enfin nous prenons l'axe des y vertical descendant.

Nous désignerons encore par $\Psi(X, Y) = \text{const.}$ les lignes de courant, par $\Psi = 0$ la courbe l ou l'horizontale $Y = 0$, par $\Psi = q$ le fond $Y = H$.

On sait ([5]) que Ψ est solution de l'équation

$$(1) \qquad \Delta\Psi - \frac{h'(\Psi)}{h(\Psi)}\left\{gY - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\right)^2\right]\right\} = f_1(\Psi),$$

où f_1 est une fonction arbitraire et où $h(\Psi)$ est la densité qui, grâce à l'hypothèse d'un mouvement permanent sans diffusion, est comme on l'a montré constante sur chaque ligne de courant. La pression est donnée par la formule de Bernoulli généralisée, de telle sorte que les conditions aux limites peuvent s'écrire

$$\left.\begin{array}{lll} 2gY_l - \left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial X}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial Y}\right)^2 = \text{const.} & \text{sur} & \Psi = 0 \\ \Psi = q & \text{sur} & Y = H \end{array}\right\} \quad (\text{pour le problème } \mathcal{B})$$

et naturellement

$$\left.\begin{array}{lll} \Psi = 0 & \text{sur} & Y = 0 \\ \Psi = q & \text{sur} & Y = H \end{array}\right\} \quad (\text{pour le problème } \mathcal{A}).$$

2. Transformation du problème. — Comme dans le cas homogène, au lieu de prendre comme inconnue la fonction de courant $\Psi(X, Y)$, nous cherchons les lignes de courant sous la forme $Y = \varphi(\Psi, X)$ afin de remplacer le domaine inconnu du problème $\mathcal{B}$ par une bande et pour que les fonctions f_1 et h portent sur une variable et non plus sur la fonction inconnue. Le problème sous cette forme est équivalent au premier puisque $\frac{\partial\Psi}{\partial Y}$, toujours voisin de c, ne peut s'annuler. D'une façon plus précise nous chercherons Y sous la forme

$$Y = A\Psi + v(X, \Psi),$$

([5]) *Voir* par exemple M.-L. Dubreil-Jacotin, *Rend. R. Acc. Lincei*, t. 21, 1935, p. 344.

où v est petit et où $A = \frac{H}{q}$. En première approximation on a $c = \frac{1}{A}$, mais pour la définition précise de c nous renvoyons à ce qui a été dit dans le cas homogène ([6]).

L'équation donnant v peut s'écrire, en posant

$$A(\Psi) = \frac{\partial}{\partial\Psi}\log h(\Psi),$$

$$(1') \quad \frac{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\Psi^2} + A^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \left[\left(\dfrac{\partial v}{\partial X}\right)^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial\Psi^2} - 2\dfrac{\partial v}{\partial X}\dfrac{\partial v}{\partial\Psi}\dfrac{\partial^2 v}{\partial X\partial\Psi} + \left(\dfrac{\partial v}{\partial\Psi}\right)^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial X^2}\right] \\ \quad + 2A\left(\dfrac{\partial v}{\partial\Psi}\dfrac{\partial^2 v}{\partial X^2} - \dfrac{\partial v}{\partial X}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\Psi\partial X}\right)\end{array}\right\}}{\left(A + \dfrac{\partial v}{\partial\Psi}\right)^3}$$

$$+ A(\Psi)\left\{Ag\Psi - \frac{1}{2A^2} + gv + \frac{1}{2}\,\frac{\left(A + \dfrac{\partial v}{\partial\Psi}\right)^2 - A^2\left[1 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial X}\right)^2\right]}{A^2\left(A + \dfrac{\partial v}{\partial\Psi}\right)^2}\right\}$$

$$= -f_1(\Psi).$$

Cette équation montre que f_1 doit être de la forme

$$f_1(\Psi) = -A(\Psi)\left[Ag\Psi - \frac{1}{2A^2}\right] + f_2(\Psi),$$

où f_2 est petit du même ordre que v et arbitraire; nous supposerons de plus que f_2 est continu au sens de Hölder.

L'équation (1′) se met sous la forme

$$(1'') \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial\Psi^2} + A^2\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + A(\Psi)\left[A^3 gv + \frac{\partial v}{\partial\Psi}\right] + A^3 f_2(\Psi) = F_2,$$

où F_2 est un polynome du second ordre en v, ses dérivées des deux premiers ordres et f_2. La valeur de F_2 n'a aucune importance pour les démonstrations qui suivent, il suffit de retenir que F_2 est pair en X en même temps que v. Mais la forme actuelle du problème étant la plus commode pour le calcul effectif de la solution développée par rapport à un paramètre petit jusqu'à tel ordre d'approximation désiré,

---

([6]) *Loc. cit.*, ([1]), p. 233.

nous donnons l'expression effective de F_2

$$
\begin{aligned}
F_2 = & -\left[\left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \Psi^2} - 2\frac{\partial v}{\partial X}\frac{\partial v}{\partial \Psi}\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial \Psi} + \left(\frac{\partial v}{\partial \Psi}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial X^2}\right. \\
& \left. \qquad + 2A\left(\frac{\partial v}{\partial \Psi}\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} - \frac{\partial v}{\partial X}\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial \Psi}\right)\right] \\
& + f_2(\Psi)\frac{\partial v}{\partial \Psi}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \Psi}\right)^2 + 3A\left(\frac{\partial v}{\partial \Psi}\right) + 3A^2\right] \\
& - \Lambda(\Psi)\left\{ g v\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \Psi}\right)^3 + 3A\left(\frac{\partial v}{\partial \Psi}\right)^2 + 3A^2\frac{\partial v}{\partial \Psi}\right]\right. \\
& \left. \qquad + \frac{1}{2A^2}\left(3A + \frac{\partial v}{\partial \Psi}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \Psi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(A + \frac{\partial v}{\partial \Psi}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2\right\}.
\end{aligned}
$$

Les conditions aux limites du problème $\mathcal{B}$ sont naturellement les mêmes que dans le cas homogène

$$
\begin{aligned}
A^3 g v + \frac{\partial v}{\partial \Psi} - \frac{A^3}{2}k = & \frac{A}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 - \frac{1}{2A}\left(\frac{\partial v}{\partial \Psi}\right)^2 \\
& + (2gv - k)A\frac{\partial v}{\partial \Psi}\left(A + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \Psi}\right) \quad \text{sur} \quad \Psi = 0,
\end{aligned}
$$

$$v = 0 \quad \text{sur} \quad \Psi = q \text{ à cause du choix de } A,$$

enfin

$$v = 0 \quad \text{sur} \quad \Psi = 0 \qquad \text{et} \qquad v = 0 \quad \text{sur} \quad \Psi = q \text{ pour le problème } \mathcal{A}.$$

Nous faisons encore le changement de variables

$$x = \rho\cos\alpha, \qquad y = \rho\sin\alpha$$

avec

$$\rho = e^{-\frac{2\pi A}{\lambda}\Psi}, \qquad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda}X$$

qui permet, en tenant compte de la périodicité supposée, de remplacer la bande horizontale par la couronne limitée par les cercles de rayons

$$\rho_0 = e^{-\frac{2\pi A q}{\lambda}} = e^{-\frac{2\pi H}{\lambda}} \quad \text{et} \quad 1.$$

Du fait que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \Psi^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A^2(x^2+y^2)\,\Delta v,$$

$$
\begin{aligned}
& 2\frac{\partial v}{\partial X}\frac{\partial v}{\partial \Psi}\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial \Psi} - \left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial \Psi^2} - \left(\frac{\partial v}{\partial \Psi}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \\
& = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 A^2(x^2+y^2)\left[\left(x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\right. \\
& \qquad \left. - (x^2+y^2)\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right\}^{(2)} v\right],
\end{aligned}
$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial X}\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial \Psi} - \frac{\partial v}{\partial \Psi}\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} = -A(x^2+y^2)\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3$$
$$\times\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left\{\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right\}\left\{x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right\}v\right]$$

résulte que l'équation transformée de (1″) peut s'écrire

$$\Delta v + B(\rho)\left[pv - x\frac{\partial v}{\partial x} - y\frac{\partial v}{\partial y}\right] - f(\rho) = F$$

en posant

$$B = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{A(\Psi)}{A\rho^2}, \qquad p = \frac{\lambda g A^2}{2\pi}, \qquad f(\rho) = -\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 A\frac{f_2(\Psi)}{\rho^2}.$$

De l'expression de F il suffit de retenir que c'est un polynome du second ordre en v, ses dérivées des deux premiers ordres et f dont les coefficients sont des polynomes en x, y et B, et de plus que F est pair en α en même temps que v.

Les conditions aux limites s'écrivent après ce changement de variables sous la forme finale

$$\left.\begin{array}{lll} v=0 & \text{sur} & \rho=\rho_0 \\ v=0 & \text{sur} & \rho=1 \end{array}\right\} \quad \text{(pour le problème } \mathcal{A}\text{)}$$

et, comme dans le cas homogène,

$$\left.\begin{array}{lll} v=0 & \text{sur} & \rho=\rho_0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} + pv - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\partial v}{\partial n}ds = \Phi & \text{sur} & \rho=1 \end{array}\right\} \quad \text{(pour le problème } \mathcal{B}\text{)},$$

où Φ a la valeur donnée dans l'étude du cas homogène et dont il suffit de se rappeler : que c'est une fraction rationnelle en v et ses dérivées du premier ordre dont le dénominateur peut être minoré par une quantité positive non nulle quand v et ses dérivées sont assez petits et enfin que Φ est pair en même temps que v.

3. Remarques sur la fonction B(ρ). — Cette fonction est toujours positive. Nous avons posé, en effet,

$$B(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{A(\rho)}{A\rho^2} \qquad \text{avec} \quad A(\rho) = \frac{d}{d\Psi}\log h(\Psi),$$

or $h(\Psi)$, densité, est positive et croissante vers le bas, la répartition à l'état d'équilibre étant supposée stable, $h'(\Psi)$ est par suite positive, donc $B(\rho)$ également.

La fonction $h(\Psi)$ ne peut être supposée donnée : ce qui est donné c'est la densité en fonction de la cote avant le mouvement $d = d(Y)$. Pour en déduire $h(\Psi)$ nous ferons l'hypothèse suivante qui semble légitime et qui d'ailleurs redonne les résultats déjà connus en première approximation : la densité des particules sur une ligne de courant est celle qu'avaient les particules sur le niveau moyen de cette ligne. D'où

$$h(\Psi) = d\left(A\Psi + \frac{1}{\lambda}\int_X^{X+\lambda} v(X, \Psi)\, dX\right)$$

$$A(\Psi) = \frac{d'\left(A\Psi + \frac{1}{\lambda}\int_X^{X+\lambda} v(X, \Psi)\, dX\right)}{d\left(A\Psi + \frac{1}{\lambda}\int_X^{X+\lambda} v(X, \Psi)\, dX\right)}\left(A + \frac{1}{\lambda}\int_X^{X+\lambda} \frac{\partial}{\partial\Psi} v(X, \Psi)\, dX\right).$$

Or si l'on ajoute à B une quantité de l'ordre de v, cela revient seulement à changer la valeur de F sans en changer la forme et toute la théorie s'applique de même. Si l'on suppose que la fonction d a une dérivée seconde continue au sens de Hölder on peut prendre pour B sa valeur en première approximation égale à

$$B(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial[\log d(A\Psi)]}{\partial A\Psi}.$$

Nous étudierons comme application le cas où la loi de densité est la loi importante

$$d(Y) = e^{k'^2 Y}.$$

Nous aurons alors

$$B(\rho) = \frac{k^2}{\rho^2}$$

en posant $k^2 = \frac{\lambda}{2\pi} k'^2$. En supposant k donné, nous supposerons, par suite, l'hétérogénéité et la longueur d'onde données.

II. — Étude du problème $\mathfrak{A}$.

1. Le problème $\mathfrak{A}$ se ramène a l'étude d'un système intégro-différentiel résoluble par approximations successives. — Soit Θ la solution de

$$\Delta\Theta + B(\rho)\left[p\Theta - \rho\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right] - f(\rho) = 0$$

dépendant de ρ seul et nulle sur le contour. Cette fonction existe quelle que soit la fonction f si l'équation

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - \rho B(\rho)\right)\frac{du}{d\rho} + pB(\rho)u(\rho) = 0$$

n'a pas de solution nulle en ρ_0 et 1, ce qui a lieu en général. Si p est une valeur caractéristique c'est-à-dire une valeur telle que toute solution de cette équation nulle en ρ_0 soit aussi nulle pour $\rho = 1$, la détermination de Θ est impossible, sauf si f satisfait à une condition et Θ est alors défini à une constante arbitraire près. Nous supposerons que nous sommes dans le premier cas, c'est-à-dire que p a une valeur générale, et quand nous particulariserons p pour avoir des solutions, nous supposerons que ces valeurs ne sont pas caractéristiques pour ce problème aux limites, ce qu'il faudra vérifier dans chaque cas particulier considéré.

Posons alors $v = V + \Theta$. V satisfait à l'équation

$$\Delta V + B(\rho)\left[pV - \rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right] = F$$

avec les conditions

$$V = 0 \quad \text{sur} \quad \rho = \rho_0, \qquad V = 0 \quad \text{sur} \quad \rho = 1.$$

Pour résoudre ce problème de Dirichlet nous utilisons la fonction de Green classique relative au laplacien et à la couronne G. Alors une fonction V satisfaisant à l'équation intégro-différentielle

$$V = \frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{1}\int_0^{2\pi} G\left[B(\rho)\left(pV - \rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) - F\right]\rho\, d\rho\, d\alpha,$$

satisfait bien à l'équation donnée et aux conditions aux limites.

Cette équation est résoluble par approximations successives : en effet G est la somme d'une fonction harmonique régulière et de $-\log r$, on peut donc, grâce aux théorèmes de Dini et au fait que F est un polynome en les inconnues, remplacer cette équation par un système dont les seconds membres satisfont aux deux inégalités fondamentales permettant la résolution par approximations successives ([7]). Cette équation a donc, en général, une solution unique, identiquement nulle si f est nul, si non fonction de ρ seul et par conséquent il n'y a pas, en général de mouvement d'onde. Il ne peut y avoir d'onde qu'au voisinage de valeurs de p telles que l'équation linéarisée ait des solutions non identiquement nulles.

5. On peut trouver une infinité de valeurs positives de p telles que le problème $\mathfrak{A}$ linéarisé ait des solutions. — L'équation intégro-différentielle linéarisée est équivalente à la résolution du problème de Dirichlet : trouver V nul sur la couronne et satisfaisant à

$$\Delta V + B(\rho)\left[pV - \rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right] = 0.$$

Nous cherchons des solutions non identiquement nulles sous la forme

$$a_m(\rho)\cos m\alpha, \quad b_m(\rho)\sin m\alpha;$$

on a pour déterminer a_m et b_m la même équation

$$\rho^2 a''_m(\rho) + \rho[1-\rho^2 B(\rho)]a'_m(\rho) + [p\rho^2 B(\rho) - m^2]a_m(\rho) = 0$$

avec $a_m(\rho_0) = 0$, $a_m(1) = 0$. C'est un problème aux limites classiques de la théorie des équations différentielles que l'on ramène à une forme canonique en posant

$$p = m + \mu, \qquad a_m(\rho) = b_m(\rho) = \rho^m l_m(\rho)$$

([7]) *Voir* par exemple Lichtenstein, *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen*, Chap. I (Berlin, 1931).

et en prenant comme nouvelle variable, au lieu de ρ, t défini par

$$\frac{\dfrac{d^2\rho}{dt^2}}{\left(\dfrac{d\rho}{dt}\right)^2} = \frac{2m+1-\rho^2 B(\rho)}{\rho}$$

avec, pour $t=1$, $\rho=1$, $\dfrac{d\rho}{dt}=1$; soit t_0 la valeur de t correspondant à $\rho=\rho_0$, le problème est équivalent à : trouver les valeurs de μ pour lesquelles l'équation

$$l''_m(t) + \mu[(\rho'(t))^2 B]l_m = 0 \tag{C}$$

a des solutions nulles en t_0 et 1 ; on sait ([8]) qu'il y a une infinité de valeurs positives de μ telles qu'il en soit ainsi. Nous avons ainsi une double infinité de valeurs de p : $p^\nu_m = m + \mu^\nu_m$ telles que le problème linéarisé ait des solutions non identiquement nulles

$$a_m(\rho)\cos m\alpha, \qquad a_m(\rho)\sin m\alpha,$$

ce sont toutes les valeurs caractéristiques comme on le vérifie aisément. Mais *a priori* rien ne prouve que pour une valeur choisie de p, p^ν_m, on n'a que les deux fonctions fondamentales écrites; il faut pour qu'il en soit ainsi que l'équation en nombres entiers m' et ν' : $m+\mu^\nu_m = m'+\mu^{\nu'}_{m'}$ ait la seule solution $m'=m$, $\nu'=\nu$. S'il en est ainsi la valeur considérée sera « générale » et l'on n'aura à discuter que deux équations de ramification, dans le cas contraire on a un nombre plus grand d'équations de ramifications à discuter et nous ne pourrons pas donner de résultats. Pour préciser ceci considérons le cas particulier de la loi d'hétérogénéité $B(\rho)=\dfrac{k^2}{\rho^2}\cdot$ L'équation donnant a_m (ou b_m) se réduit à

$$\rho^2 a''_m(\rho) + \rho(1-k^2)a'_m(\rho) + (pk^2-m^2)a_m(\rho) = 0$$

dont la solution générale est

$$a_m(\rho) = C^1_m\rho^{r_1} + C^2_m\rho^{r_2},$$

([8]) *Voir* par exemple E. Picard, *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles* (Paris, 1930).

r_1 et r_2 étant les racines de

$$r^2 - k^2 r + p k^2 - m^2 = 0.$$

La solution $a_m = c(\rho^{r_1} - \rho^{r_2})$ est nulle pour $\rho = 1$, elle sera nulle pour $\rho = \rho_0$ si $\rho_0^{r_1} = \rho_0^{r_2}$; ceci s'écrit

$$r_1 - r_2 = \frac{2\pi i \nu}{\log \rho_0},$$

où ν est un entier; ou encore, en vertu de la valeur de $\log \rho_0$

$$r_1 - r_2 = -i\nu \frac{\lambda}{H}.$$

Les racines de l'équation en r satisferont à cette condition si l'on a

$$p = p_m^\nu = \frac{k^4 + 4m^2 + \nu^2 \frac{\lambda^2}{H^2}}{4k^2} = m + \frac{(k^2 - 2m)^2 + \nu^2 \frac{\lambda^2}{H^2}}{4k^2} = m + \mu_m^\nu,$$

relation qui donne la double infinité de valeurs caractéristiques de p.

Pour qu'à une même valeur de p puissent correspondre plusieurs mouvements d'ondes infiniments petits, il faut que l'équation

$$4m^2 + \nu^2 \frac{\lambda^2}{H^2} = 4m'^2 + \nu'^2 \frac{\lambda^2}{H^2}$$

ait des solutions autres que $m' = m$, $\nu' = \nu$. Cette équation s'écrit

$$\frac{4(m^2 - m'^2)}{\nu'^2 - \nu^2} = \frac{\lambda^2}{H^2}$$

qui montre que si $\frac{\lambda^2}{H^2}$ est incommensurable toute valeur p_m^ν de p est générale. Soit maintenant $\frac{\lambda^2}{H^2} = \frac{P}{Q}$, où P et Q sont des entiers premiers entre eux, on a

$$4Qm^2 + P\nu^2 = 4Qm'^2 + P\nu'^2,$$

p_m^ν étant choisi on connaît donc $M = 4Qm^2 + P\nu^2$ et il s'agit de voir de combien de façons le nombre M est représentable par la forme

$$M = ax^2 + by^2 \qquad (a = 4Q,\ b = P).$$

C'est un problème classique de théorie des nombres; en général M, a et b étant donnés arbitrairement, le problème n'a pas de solution, il faut pour qu'il soit possible que le discriminant changé de signe de la forme soit reste quadratique de M (ceci est réalisé évidemment ici par construction de M) et il y a le procédé classique faisant intervenir les substitutions modulaires qui donne toutes les solutions. Ici le problème est très simple, le nombre des solutions est nécessairement fini, et il suffit de faire successivement $x = 1, 2, \ldots, u$ $\left(u \text{ plus petit entier} \leqq \sqrt{\frac{M}{a}}\right)$ et de voir pour quelles valeurs de x

$$y^2 = \frac{M - ax^2}{b}$$

est le carré d'un entier. En général il n'y a que la solution $x = m$, $y = \nu$ mais on peut toujours construire des exemples pour lesquels il n'en est pas ainsi. Prenons par exemple

$$\frac{\lambda^2}{H^2} = \frac{3}{10}, \qquad m = 2, \qquad \nu = 3.$$

L'équation est satisfaite également pour $m' = 1$, $\nu' = 7$, et pour la valeur

$$\frac{k^4 + 18,7}{4k^2} = p_2^3 = p_1^7$$

on a les quatre fonctions fondamentales

$$a_2^3(\rho)\cos 2\alpha, \quad a_2^3(\rho)\sin 2\alpha; \quad a_1^7(\rho)\cos\alpha, \quad a_1^7(\rho)\sin\alpha.$$

La valeur p_m^ν générale étant choisie, la solution correspondante a_m^ν s'écrit

$$a_m^\nu(\rho) = C\rho^{r_1}\left(\rho^{-\frac{i\nu\lambda}{H}} - 1\right),$$

elle s'annule entre ρ_0 et 1 pour les $\nu - 1$ valeurs de ρ

$$\log\rho = -\frac{2\pi H}{\lambda}\frac{N}{\nu} \qquad (N = 1, \ldots, \nu - 1).$$

Le mouvement d'onde infiniment petit correspondant à ce problème linéarisé et à cette valeur p_m^ν de p a donc $\nu - 1$ plans nodaux et le résultat est général quel que soit $B(\rho)$ positif, car il est bien connu que toute intégrale relative à μ_m^ν de l'équation (C), a, entre t_0 et 1, $\nu - 1$ zéros.

La solution infiniment petite correspondant à $\nu = 1$ est donc la seule sans plan nodal; si l'on prend de plus $m = 1$, on a la solution particulièrement importante de longueur d'onde effective λ; pour la valeur correspondante p_1^1 on est sûr qu'il n'y a pas d'autres fonctions fondamentales de la forme $a_m \cos m\alpha$, $a_m \sin m\alpha$; p_1^1 sera une valeur générale si $p_1^1 = p_0^\nu$ n'a pas de solution. En particulier pour $B = \frac{k^2}{\rho^2}$ cette équation s'écrit

$$1 + \frac{4Q}{P} = \nu^2;$$

ceci n'est possible que si

$$\frac{\lambda^2}{H^2} = n(n+1) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\lambda^2}{H^2} = \frac{4n^2 - 1}{4},$$

où n est un entier. Dans ce cas la fonction Θ n'existe pas nécessairement ou, si l'on veut, en n'introduisant pas cette quantité, on aurait dans ce cas trois équations de ramification à considérer. Donc en résumé si $\frac{\lambda^2}{H^2}$ est incommensurable tout p_m^ν est général, si $\frac{\lambda^2}{H^2}$ rationnel n'est pas de la forme $n(n+1)$ ou $\frac{4n^2-1}{4}$ la valeur particulièrement importante p_1^1 est certainement générale.

6. Discussion des équations de ramification du problème $\mathfrak{A}$. — Nous nous proposons maintenant de voir si au voisinage de toute valeur p_m^ν générale de p le problème d'ondes a, ou non, des solutions. Reprenons l'équation intégro-différentielle du problème

$$V = \frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{1}\int_{0}^{2\pi} G \left\{ B(\bar\rho)\left[pV - \bar\rho\frac{\partial V}{\partial\bar\rho}\right] - F \right\} \bar\rho\, d\bar\rho\, d\bar\alpha,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial \rho} \left\{ B(\bar\rho)\left[pV - \bar\rho\frac{\partial V}{\partial\bar\rho}\right] - F \right\} \bar\rho\, d\bar\rho\, d\bar\alpha.$$

Considérons le système linéarisé

$$V_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{1}\int_{0}^{2\pi} G \;\; B(\bar\rho)\left(pV_1 - \bar\rho\frac{\partial V_1}{\partial\bar\rho}\right) \bar\rho\, d\bar\rho\, d\bar\alpha,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \rho} = \frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial \rho} B(\bar\rho)\left(pV_1 - \bar\rho\frac{\partial V_1}{\partial\bar\rho}\right) \bar\rho\, d\bar\rho\, d\bar\alpha.$$

Pour $p=0$ ce système donne la résolution du problème de Dirichlet avec condition nulle sur le contour pour l'équation

$$\Delta V - B(\rho)\rho\frac{\partial V}{\partial\rho} = 0.$$

Cette équation a la seule solution o, puisque le coefficient de V est nul. Il en résulte que le noyau

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial G}{\partial\rho}\bar{\rho}^2 B(\rho)$$

n'admet pas de fonctions fondamentales et par conséquent que la seconde équation du système linéarisé donne univoquement $\frac{\partial V_1}{\partial\rho}$ quand V_1 est connu. D'autre part, pour la discussion, nous pouvons remplacer l'équation intégro-différentielle par l'équation équivalente

$$(E)\qquad V = \frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{1}\int_{0}^{2\pi}\left\{p\bar{\rho}B(\bar{\rho})G + \frac{\partial}{\partial\bar{\rho}}[\bar{\rho}^2 B(\bar{\rho})G]\right\}V\,d\bar{\rho}\,d\bar{\alpha} - \frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{1}\int_{0}^{2\pi}GF\bar{\rho}\,d\bar{\rho}\,d\bar{\alpha}.$$

Et il suffit de considérer cette équation pour la discussion, chacune des autres inconnues que l'on introduit pour avoir un système équivalent à cette équation intégro-différentielle étant donnée univoquement par les parties linéarisées des équations obtenues par le procédé indiqué.

Or l'équation (E) linéarisée admet pour p_m^ν général les deux fonctions fondamentales $a_m^\nu(\rho)\cos m\alpha$, $a_m^\nu(\rho)\sin m\alpha$, son équation associée admet donc également deux fonctions fondamentales qui sont évidemment de la forme $\alpha_m^\nu(\rho)\cos m\alpha$, $\alpha_m^\nu(\rho)\sin m\alpha$. Si l'on pose $p=p_m^\nu-\chi$, où χ est petit comme V, et si l'on remplace le noyau

$$p_m^\nu\bar{\rho}B(\bar{\rho})G + \frac{\partial}{\partial\bar{\rho}}[\bar{\rho}^2 B(\bar{\rho})G]$$

suivant le procédé de Schmidt par

$$E(\rho,\alpha;\bar{\rho}\bar{\alpha}) - a_m^\nu(\bar{\rho})\alpha_m^\nu(\rho)\cos m(\bar{\alpha}-\alpha),$$

où le noyau E n'admet plus de fonctions fondamentales, l'équation obtenue a une solution unique égale en première approximation à

$$\bar{r}_1 a_m^\vee(\rho)\cos m\alpha + \bar{r}_2 a_m^\vee(\rho)\sin m\alpha,$$

où $\bar{r}_1$ et $\bar{r}_2$ sont deux paramètres; en posant $\bar{r}_1 = \bar{r}\cos m\Omega$, $\bar{r}_2 = \bar{r}\sin m\Omega$, cette solution en première approximation s'écrit

$$\bar{r} a_m^\vee(\rho)\cos m(\alpha - \Omega).$$

Elle est donc paire en $\alpha - \Omega$; or, il résulte immédiatement de la propriété de parité rappelée pour F que toutes les approximations sont également paires en $\alpha - \Omega$, donc qu'il en est de même de la solution, la convergence étant absolue et uniforme. Par conséquent notre noyau est linéaire en p et admet deux fonctions fondamentales dont on sait *a priori* qu'une combinaison linéaire à coefficients constants

$$\bar{r} a_m^\vee(\rho)\sin m(\alpha - \Omega)$$

est orthogonale à la solution. On sera donc assuré de l'existence d'une solution non triviale fonction d'un paramètre si [9]

$$\int_{\rho_0}^1\int_{\rho_0}^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{\rho}\,B(\bar{\rho})G(\rho,\alpha;\bar{\rho},\bar{\alpha})a_m(\bar{\rho})\cos m(\bar{\alpha}-\Omega)$$
$$\times\,\alpha_m(\rho)\cos m(\alpha - \Omega)\,d\rho\,d\bar{\rho}\,d\alpha\,d\bar{\alpha} \neq 0.$$

La discussion n'est donc pas immédiate comme dans le cas homogène, où grâce à des conditions de symétrie on pouvait affirmer *a priori* que la quantité analogue n'était pas nulle. Cette expression se simplifie beaucoup en remplaçant G par sa valeur. Pour ce calcul pratique nous n'utiliserons pas pour G l'intéressante formule donnée par M. Villat au moyen des fonctions elliptiques, mais la formule développée obtenue par application du théorème de Harnack [10]

$$G = -\log r + \frac{\log\rho\log\bar{\rho}}{\log\rho_0}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\alpha-\bar{\alpha})}{n}\,\frac{\rho_0^{2n}\left[(\bar{\rho})^n\rho^{-n}+(\bar{\rho})^{-n}\rho^n-(\bar{\rho})^{-n}\rho^{-n}\right]-\rho^n(\bar{\rho})^n}{1-\rho_0^{2n}}.$$

(9) *Voir* M.-L. Dubreil-Jacotin, *Sur la discussion des équations de ramification relatives à certains problèmes d'ondes* (*Bull. Soc. Math.*, 1936).

(10) *Voir* par exemple Goursat, *Cours d'Analyse*, t. 3, 3e édition, p. 190.

On en déduit immédiatement puisque

$$\int_0^{2\pi} \log r(\rho, \alpha; \bar\rho, \bar\alpha) \cos n\bar\alpha \, d\bar\alpha = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{n}\left(\dfrac{\rho}{\bar\rho}\right)^n \cos n\alpha & \text{si} \quad \rho \leqq \bar\rho, \\ -\dfrac{\pi}{n}\left(\dfrac{\bar\rho}{\rho}\right)^n \cos n\alpha & \text{si} \quad \rho \geqq \bar\rho, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{G} \cos n(\alpha - \Omega)\, d\alpha$$
$$= \frac{\pi}{n} \cos n(\bar\alpha - \Omega)\left[\varepsilon_1\left(\frac{\bar\rho}{\rho}\right)^n + \varepsilon_2\left(\frac{\rho}{\bar\rho}\right)^n + \frac{\rho_0^{2n}\big((\bar\rho)^n\rho^{-n} + (\bar\rho)^{-n}\rho^n - (\bar\rho)^{-n}\rho^{-n}\big) - \rho^n(\bar\rho)^n}{1 - \rho_0^{2n}}\right],$$

où

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = 0 \quad \text{pour} \quad \bar\rho \leqq \rho,$$
$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 1 \quad \text{pour} \quad \rho \leqq \bar\rho.$$

Et la condition à satisfaire s'écrit

$$(\mathrm{D}) \quad \int_{\rho_0}^1 \int_{\rho_0}^1 \bar\rho \mathrm{B}(\bar\rho)\left[\varepsilon_1\left(\frac{\bar\rho}{\rho}\right)^m + \varepsilon_2\left(\frac{\rho}{\bar\rho}\right)^m + \frac{\rho_0^{2m}\big((\bar\rho)^m\rho^{-m} + (\bar\rho)^{-m}\rho^m - (\bar\rho)^{-m}\rho^{-m}\big) - \rho^m(\bar\rho)^m}{1 - \rho_0^{2m}}\right]$$
$$\times a_m^\nu(\bar\rho)\alpha_m^\nu(\rho)\, d\rho\, d\bar\rho \neq 0,$$

la fonction $a_m^\nu(\rho)$ étant donnée par

$$a_m^\nu(\rho) - \frac{1}{2m}\int_{\rho_0}^1 \Bigg\{ p_m^\nu \bar\rho \mathrm{B}(\bar\rho)\left[\varepsilon_1\left(\frac{\bar\rho}{\rho}\right)^m + \varepsilon_2\left(\frac{\rho}{\bar\rho}\right)^m + \frac{\rho_0^{2m}\big((\bar\rho)^m\rho^{-m} + (\bar\rho)^{-m}\rho^m - (\bar\rho)^{-m}\rho^{-m}\big) - \rho^m(\bar\rho)^m}{1 - \rho_0^{2m}}\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\bar\rho}\left(\bar\rho^2 \mathrm{B}(\bar\rho)\left[\varepsilon_1\left(\frac{\bar\rho}{\rho}\right)^m + \varepsilon_2\left(\frac{\rho}{\bar\rho}\right)^m + \frac{\rho_0^{2m}\big((\bar\rho)^m\rho^{-m} + (\bar\rho)^{-m}\rho^m - (\bar\rho)^{-m}\rho^{-m}\big) - \rho^m(\bar\rho)^m}{1 - \rho_0^{2m}}\right]\right)\Bigg\} a_m^\nu(\bar\rho)\, d\bar\rho:$$

et $\alpha_m^\nu(\rho)$ par l'équation associée.

Le premier membre de la condition (D) est donc une fonctionnelle en B qui, si elle n'est pas identiquement nulle quel que soit B, n'est nulle que pour certaines valeurs particulières de l'hétérogénéité. On peut donc dire alors que « en général » il y a une onde unique non triviale fonction d'un paramètre au voisinage de toute valeur générale p_m^ν de p.

Pour nous assurer que la condition (D) n'est pas identiquement nulle et pour compléter les résultats précis obtenus déjà dans le cas particulier où $B = \frac{k^2}{\rho^2}$, nous allons calculer cette quantité dans ce cas.

On a vu que l'on a : $a_m^\nu(\rho) = \rho^{r_1} - \rho^{r_2}$; d'autre part $\alpha_m^\nu(\rho)$ est alors la solution unique de l'équation

$$\bar{\rho}\alpha_m^\nu(\bar{\rho}) - \frac{k^2}{2m}\Bigg[\int_{\rho_0}^{\bar{\rho}} (p_m^\nu - m)\left(\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)^m \alpha_m^\nu(\rho)\,d\rho + \int_{\bar{\rho}}^{1} (p_m^\nu + m)\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho}\right)^m \alpha_m^\nu(\rho)\,d\rho + \int_{\rho_0}^{1}\left\{(p_m + m)\frac{\rho_0^{2m}\rho^{-m} - \rho^m}{1-\rho_0^{2m}} + (p_m^\nu - m)\frac{\rho_0^{2m}(\rho^m - \rho^{-m})}{1-\rho_0^{2m}}\right\}\alpha_m^\nu(\rho)\,d\rho\Bigg] = 0.$$

En dérivant deux fois cette équation intégrale on constate que $\alpha_m^\nu(\rho)$ est solution de l'équation différentielle

$$\rho^2\alpha_m^{\nu''}(\rho) + (3 + k^2)\rho\alpha_m^{\nu'}(\rho) + (1 + k^2 + p_m^\nu k^2 - m^2)\alpha_m^\nu(\rho) = 0,$$

dont la solution générale est $C_1\rho^{\tau_1} + C_2\rho^{\tau_2}$ avec $\tau_1 = -1 - r_1$, $\tau_2 = -1 - r_2$; α_m^ν est donc de la forme $C_1\rho^{-1-r_1} + C_2\rho^{-1-r_2}$; pour déterminer la relation homogène qui doit lier les constantes C_1 et C_2, nous portons cette quantité dans l'équation intégrale et identifions en ρ; or nous avons à égaler à 0 quatre coefficients : les coefficients de ρ^{-r_1} et ρ^{-r_2} ont respectivement C_1 et C_2 en facteur et sont identiquement nuls en vertu de la relation donnant p_m^ν; en égalant à zéro les coefficients de ρ^m ou de ρ^{-m}, on obtient

$$\frac{C_1}{p - r_1} + \frac{C_2}{p - r_2} = 0;$$

d'ou

$$\alpha_m^\nu(\rho) = C\big((p - r_1)\rho^{-1-r_1} - (p - r_2)\rho^{-1-r_2}\big)$$

et la condition à vérifier s'écrit

$$\int_{\rho_0}^{1}\int_{\rho_0}^{1}\frac{1}{\bar\rho}\left[\varepsilon_1\left(\frac{\bar\rho}{\rho}\right)^m+\varepsilon_2\left(\frac{\rho}{\bar\rho}\right)^m+\frac{\rho_0^{2m}\left((\bar\rho)^m\rho^{-m}+(\bar\rho)^{-m}\rho^m-(\bar\rho)^{-m}\rho^{-m}\right)-\rho^m(\bar\rho)^m}{1-\rho_0^{2m}}\right]$$
$$\times\left[(\bar\rho)^{r_1}-(\bar\rho)^{r_2}\right]\left[(p_m^\nu-r_1)\rho^{-1-r_1}-(p_m^\nu-r_2)\rho^{-1-r_2}\right]d\rho\,d\bar\rho\neq 0.$$

Le calcul de cette quantité est tout à fait élémentaire. On a

$$\int_{\rho_0}^{1}\left[\varepsilon_1\left(\frac{\bar\rho}{\rho}\right)^m+\varepsilon_2\left(\frac{\rho}{\bar\rho}\right)^m\right]\left[(\bar\rho)^{r_1-1}-(\bar\rho)^{r_2-1}\right]d\bar\rho$$
$$=\frac{2m}{k^2}\left[\frac{\rho^{r_1}}{p_m^\nu-r_1}-\frac{\rho^{r_2}}{p_m^\nu-r_2}\right]+\frac{r_2-r_1}{k^2}\left(\frac{\rho^m}{p_m^\nu-m}-\frac{\rho_0^{m+r_1}\rho^{-m}}{p_m^\nu+m}\right),$$

car

$$m^2-r_1^2=k^2(p_m^\nu-r_1);\qquad (r_1-m)(r_2-m)=k^2(p_m^\nu-m);$$
$$(r_1+m)(r_2+m)=k^2(p_m^\nu+m).$$

D'autre part, puisque $\int_{\rho_0}^{1}\rho^{r_1-r_2-1}d\rho=0$, on a

$$\int_{\rho_0}^{1}\frac{2m}{k^2}\left[\frac{\rho^{r_1}}{p_m^\nu-r_1}-\frac{\rho^{r_2}}{p_m^\nu-r_2}\right]\left[(p_m^\nu-r_1)\rho^{-1-r_1}-(p_m^\nu-r_2)\rho^{-1-r_2}\right]d\rho$$
$$=-\frac{4m}{k^2}\log\rho_0$$

et le terme restant s'écrit

$$\frac{r_2-r_1}{k^2}\int_{\rho_0}^{1}\left(\frac{\rho^m}{p_m^\nu-m}-\frac{\rho_0^{m+r_1}\rho^{-m}}{p_m^\nu+m}\right)\left[(p_m^\nu-r_1)\rho^{-1-r_1}-(p_m^\nu-r_2)\rho^{-1-r_2}\right]d\rho$$
$$=\frac{(r_2-r_1)^2}{k^4}\left[\frac{1-\rho_0^{m-\frac{k^2}{2}}}{m-p_m^\nu}-\frac{1-\rho_0^{m+\frac{k^2}{2}}}{p_m^\nu+m}\right].$$

Enfin il faut ajouter

$$\int_{\rho_0}^{1}\int_{\rho_0}^{1}\frac{\rho_0^{2m}\left[(\bar\rho)^m\rho^{-m}+(\bar\rho)^{-m}\rho^m-(\bar\rho)^{-m}\rho^{-m}-\rho^m(\bar\rho)^m\right]}{1-\rho_0^{2m}}$$
$$\times\left[(\bar\rho)^{r_1-1}-(\bar\rho)^{r_2-1}\right]\left[(p_m^\nu-r_1)\rho^{-1-r_1}-(p_m^\nu-r_2)\rho^{-1-r_2}\right]d\rho\,d\bar\rho;$$

ce terme se calcule de même sans difficulté et l'on trouve qu'il est égal à

$$-\frac{(r_2-r_1)^2}{k^4}\left[\frac{1-\rho_0^{m-\frac{k^2}{2}}}{m-p_m^\nu}-\frac{1-\rho_0^{m+\frac{k^2}{2}}}{p_m^\nu+m}\right],$$

de telle sorte que la condition (D) se réduit à

$$-\frac{4m}{k^2}\log\rho_0 \neq 0.$$

Elle est donc toujours vérifiée. La fonctionnelle $\mathcal{F}(B)$ n'est donc pas identiquement nulle et de plus dans le cas où la loi de densité est $B = \frac{k^2}{\rho^2}$ au voisinage de *toute valeur générale* p_m^ν de p on est sûr qu'il y a une onde unique, non triviale, symétrique, fonction d'un paramètre.

III. — Étude du problème $\mathcal{B}$.

7. Le problème $\mathcal{B}$ se ramène a l'étude d'un système intégro-différentiel résoluble par approximations successives. — Soit Θ la fonction définie au paragraphe **4**, fonction que nous supposons encore exister quel que soit f; Θ étant fonction de ρ seul satisfait sur $\rho = 1$ à

$$\frac{\partial\Theta}{\partial n} + p\Theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Theta}{\partial n}\,ds = 0$$

et si l'on pose encore $v = V + \Theta$, V satisfait à

$$\Delta V + B(\rho)\left(pV - \rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = F,$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial n} + pV^* - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^*}{\partial n}\,d\sigma = \Phi,$$

$$V^{**} = 0$$

en affectant encore d'une ou deux astériques les fonctions pour représenter leur valeur prise par continuité lorsque le point tend vers un point du cercle extérieur ou intérieur. La formule de Green permet encore d'écrire

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V^*\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}\,d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^*}{dn}\log\frac{1}{r}\,ds - \frac{\rho_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^{**}}{\partial n}\log\frac{1}{r}\,dt$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{1}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{r}\left[B(\bar\rho)\left(pV - \bar\rho\frac{\partial V}{\partial\bar\rho}\right) - F\right]\bar\rho\,d\bar\rho\,d\bar\alpha;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V^\star \frac{\partial^2}{\partial n\,\partial \rho}\log\frac{1}{r}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^\star}{\partial n}\frac{\partial}{\partial \rho}\log\frac{1}{r}\,ds$$
$$-\frac{\rho_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^{\star\star}}{\partial n}\frac{\partial}{\partial \rho}\log\frac{1}{r}\,dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{1}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial \rho}\log\frac{1}{r}\left[B(\bar\rho)\left(pV - \bar\rho\frac{\partial V}{\partial \bar\rho}\right) - F\right]\bar\rho\,d\bar\rho\,d\bar\alpha.$$

En faisant tendre dans la première le point (x, y) vers le point $1\,\sigma$ et tenant compte du fait que $\int_0^{2\pi} V^\star d\sigma = 0$, grâce au choix de l'axe des x, il vient

$$V^\star(1, \sigma) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^\star}{\partial n}\log\frac{1}{r(1, \sigma;\, 1, s)}\,ds - \frac{\rho_0}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^{\star\star}}{\partial n}\log\frac{1}{r(1, \sigma;\, \rho_0, t)}\,dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{1}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{r(1, \sigma;\, \bar\rho, \bar\alpha)}\left[B(\bar\rho)\left(pV - \bar\rho\frac{\partial V}{\partial \bar\rho}\right) - F\right]\bar\rho\,d\bar\rho\,d\bar\alpha.$$

Dans la seconde faisons tendre le point (ρ, α) vers (ρ_0, τ), on sait que la dérivée première du potentiel de simple couche tend vers

$$\lim_{\text{quand}\,(\rho, \alpha) \to (\rho_0, \tau)}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^{\star\star}(t)}{\partial n}\frac{\partial}{\partial \rho}\log\frac{1}{r(\rho_0, t;\, \rho, \alpha)}\,dt$$
$$= -\frac{\pi}{\rho_0}\frac{\partial V^{\star\star}}{\partial n}(\tau) - \frac{1}{2\rho_0}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^{\star\star}}{\partial n}(t)\,dt;$$

d'où l'équation

$$\frac{\partial V^{\star\star}}{\partial n} = \frac{\partial V^{\star\star}}{\partial \rho_0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^{\star\star}}{\partial n}(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V^\star\frac{\partial^2}{\partial n\,\partial \rho_0}\log\frac{1}{r(\rho_0, \tau;\, 1, s)}\,ds$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^\star}{\partial n}\log\frac{1}{r(\rho_0, \tau;\, 1, s)}\,ds$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\rho_0}^{1}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial \rho_0}\log\frac{1}{r(\rho_0, \tau;\, \bar\rho, \bar\alpha)}\left[B(\bar\rho)\left(pV - \bar\rho\frac{\partial V}{\partial \bar\rho}\right) - F\right]\bar\rho\,d\bar\rho\,d\bar\alpha.$$

Enfin si l'on adjoint la condition aux limites

$$\frac{\partial V^\star}{\partial n} + pV^\star - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^\star}{\partial n}\,ds = \Phi,$$

en y remplaçant $V^\star$ par sa valeur donnée par la troisième équation, on a un système de cinq équations dont les parties linéaires donnent

$$V,\quad \frac{\partial V}{\partial \rho},\quad V^{*},\quad \frac{\partial V^{*}}{\partial n},\quad \frac{\partial V^{**}}{\partial n},$$

mais qui contiennent les termes gênants

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial V^{*}}{\partial n}\, ds \qquad \text{et} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\partial V^{**}}{\partial n}\, dt.$$

Comme dans le cas homogène, la formule de Green appliquée à V d'une part et 1 ou $\log \rho$ d'autre part donne deux relations entre ces deux quantités

$$\int_{\rho_0}^{1}\int_0^{2\pi} \left\{ F - B(\rho)\left(p V - \bar{\rho}\frac{\partial V}{\partial \bar{\rho}}\right)\right\} \bar{\rho}\, d\bar{\rho}\, d\bar{\alpha} + \int_0^{2\pi} \frac{\partial V^{*}}{\partial n}\, ds + \rho_0 \int_0^{2\pi} \frac{\partial V^{**}}{\partial n}\, dt = 0,$$

$$\int_{\rho_0}^{1}\int_0^{2\pi} \log \rho \left\{ F - B(\bar{\rho})\left(p V - \bar{\rho}\frac{\partial V}{\partial \bar{\rho}}\right)\right\} \bar{\rho}\, d\bar{\rho}\, d\bar{\alpha} + \log \rho_0 \rho_0 \int_0^{2\pi} \frac{\partial V^{**}}{\partial n}\, dt = 0,$$

relations qui cette fois font intervenir les termes, *a priori* linéaires,

$$\int_0^{2\pi} V\, d\alpha, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial \rho}\, d\alpha;$$

on obtient d'ailleurs pour ces deux nouvelles quantités deux équations en multipliant par $d\alpha$ et intégrant de 0 à 2π les deux membres des deux premières équations. Mais *a priori* on peut affirmer que ces quatre quantités sont du second ordre et par conséquent ne sont pas gênantes. En effet la partie du premier ordre de ces quantités ne peut provenir que de la solution V_1 en première approximation, or V_1 étant périodique et continu est développable en série de Fourier et il n'y a pas de terme indépendant des cosinus, puisque l'on suppose que la fonction Θ existe quel que soit f.

On voit encore immédiatement grâce aux théorèmes de Korn et Dini que le système est résoluble par approximations successives; il a donc en général une solution unique triviale à laquelle ne correspond pas de mouvement d'onde

8. Il existe une infinité de valeurs de p pour lesquelles le problème linéarisé a des solutions non nulles. — Nous cherchons encore ces solu-

tions sous la forme $a_m(\rho)\cos m\alpha$, $a_m(\rho)\sin m\alpha$; $a_m(\rho)$ est encore racine de l'équation

$$\rho^2 a''_m(\rho) + \rho[1 - \rho^2 B(\rho)]a'_m(\rho) + [p\rho^2 B(\rho) - m^2]a_m(\rho) = 0,$$

mais cette fois au lieu des conditions classiques

$$a_m(\rho_0) = 0, \qquad a_m(1) = 0$$

comme au problème $\mathfrak{A}$, on a les conditions

$$a_m(\rho_0) = 0,$$
$$p a_m(1) - a'_m(1) = 0,$$

conditions aux limites contenant p. Les transformations du paragraphe **5** remplacent cette équation par

$$(l) \qquad l''_m(t) + \mu[\rho'(t)^2 B(\rho)]l_m(t) = 0$$

et les conditions aux limites, puisque

$$a'_m(\rho) = m\rho^{m-1} l_m + \rho^m l'_m,$$

par

$$l_m(t_0) = 0,$$
$$\mu l_m(1) - l'_m(1) = 0.$$

Soit $l_m(t, \mu)$ la solution de cette équation nulle en t_0 et dont la dérivée en t est égale à 1 au point t_0; on doit avoir

$$\mu l_m(1, \mu) - l'_m(1, \mu) = 0.$$

Montrons que cette équation entière en μ a une infinité de racines réelles et positives. En effet soit μ^ν_m et $\mu^{\nu+1}_m$ deux racines consécutives de $l_m(1, \mu) = 0$. Nous savons que la solution $l_m(t, \mu^\nu_m)$ nulle en t_0 et 1 a $\nu - 1$ racines entre t_0 et 1 et que $l_m(t, \mu^{\nu+1}_m)$ a ν racines entre t_0 et 1; or les dérivées

$$\frac{\partial l_m}{\partial t}(t, \mu^\nu_m) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial l_m}{\partial t}(t, \mu^{\nu+1}_m)$$

sont de même signe au point $t = t_0$ puisqu'elles ont la valeur 1 indépendante de μ, elles seront de signes contraires en 1, donc si dans la fonction entière

$$f(\mu) = \mu l_m(1, \mu) - l'_m(1, \mu)$$

on fait successivement $\mu = \mu_m^\nu$, $\mu = \mu_m^{\nu+1}$, f change de signe et

$$\mu l_m(1, \mu) - l'_m(1, \mu) = 0$$

a certainement une racine $\mu_m^{\nu*}$ comprise entre μ_m^ν et $\mu_m^{\nu+1}$

C. Q. F. D.

Comme dans le cas du problème $\mathcal{A}$, toutes les solutions, sauf celle correspondant à la plus petite valeur de μ, ont des plans nodaux; c'est cette dernière solution qu'il est particulièrement intéressant de considérer. On montre d'ailleurs facilement que si l'hétérogénéité tend vers zéro, cette plus petite racine μ_m^1 tend vers la valeur caractéristique $\frac{1}{1-t_0}$ du cas homogène, tandis que toutes les autres valeurs μ_m^ν augmentent indéfiniment.

Pour l'étude du cas particulier $B(\rho) = \frac{k^2}{\rho^2}$, nous renvoyons aux mémoires déjà cités de Burnside et Love; ce dernier se donne la vitesse de propagation c et trouve un nombre fini de valeurs de λ pour lesquelles le problème linéarisé admet des solutions. Avec nos notations, et en opérant comme pour le problème $\mathcal{A}$ on vérifie immédiatement que l'on a

$$p_m^\nu = \frac{k^4 + 4m^2 - \Delta^2}{4k^2},$$

Δ étant soit la racine de

$$\text{th}\,\frac{\pi H}{\lambda}\Delta = \frac{2k^2\Delta}{4m^2 - \Delta^2 - k^4},$$

racine qui n'existe que si k est assez petit, soit iD, où D est une quelconque des racines en nombre infini de

$$\text{tang}\,\frac{\pi H}{\lambda}D = \frac{2k^2 D}{4m^2 + D^2 - k^4}.$$

9. Il y a, en général, une onde au voisinage de toute valeur générale p_m^ν de p. — Nous pouvons remplacer le système à discuter par une équation unique par le procédé classique, ou encore le transformer par tout autre procédé donnant comme précédemment un système équivalent pour lequel il suffit de discuter une seule équation. On montre comme dans le problème $\mathcal{A}$ que la solution est symétrique, et l'on forme la condition suffisante $\mathcal{F}(B) \neq 0$ qui permet d'affirmer l'existence d'une solution unique non triviale au voisinage de toute valeur générale p_m^ν. $\mathcal{F}(B)$ n'étant pas identiquement nul comme nous allons le voir, l'équation $\mathcal{F}(B) = 0$ définit les valeurs exceptionnelles de B pour lesquelles le problème n'admet pas nécessairement une solution unique.

Supposons en effet B petit, du premier ordre comme V; alors le terme

$$B(\rho)\left[p\,V - \rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right]$$

étant du second ordre, on peut le faire passer dans le second membre et l'on est ramené au même problème que dans le cas homogène, mais avec une autre valeur de la fonction F au second membre; or la valeur explicite de F n'intervient pas dans la démonstration de l'existence d'une solution et la nouvelle fonction possède les propriétés qualitatives qui interviennent seules : polynome par rapport aux inconnues, fonction paire en même temps que V. Donc on est sûr que pour la plus petite valeur caractéristique p_m^1, $\mathcal{F}(B)$ qui tend, lorsque B tend vers zéro (comme on le voit en conduisant convenablement les calculs). vers la quantité analogue non nulle du cas homogène est, quel que soit B, petit comme V, différent de zéro.

Par conséquent, comme pour le problème $\mathfrak{A}$, on peut dire au sens précisé qu'*en général au voisinage d'une valeur caractéristique* p_m^ν *générale le problème d'onde admet une solution unique non triviale fonction d'un paramètre quelle que soit la fonction arbitraire f continue au sens de Hölder et petite* (on suppose qu'elle a en facteur le paramètre caractérisant la hauteur de l'onde).