JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MARCHAUD

Sur les surfaces du troisième ordre de la géométrie finie

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 18 (1939), p. 323-362.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18__323_0>

Sur les surfaces du troisième ordre de la géométrie finie;

PAR A. MARCHAUD.

Introduction.

C'est M. Paul Montel qui a fait connaître en France les belles découvertes de C. Juel par deux conférences qu'il fit en 1924 au Séminaire de M. Jacques Hadamard au Collège de France. La lecture de ces deux conférences dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (¹) m'a incité à poursuivre les recherches de C. Juel dans le sens de la suppression totale des hypothèses de commodité. Je suis heureux d'apporter pour le Jubilé scientifique de M. J. Hadamard un travail qui doit certainement son existence au fameux Séminaire.

Le travail en question a pour objet les surfaces du troisième ordre, définies d'une manière aussi immédiate que possible à partir de la notion de continu. Il contient en particulier la démonstration d'un résultat annoncé dans un précédent Mémoire (²). Dans l'espace euclidien projectif à trois dimensions, une surface du troisième degré est au point de vue réel un ensemble fermé dont toute section plane est une courbe du troisième degré. Le résultat dont il s'agit est en quelque sorte la réciproque de la proposition précédente, c'est le suivant: *tout ensemble fermé dont chaque section plane est une courbe du troisième ordre au plus* (l'une au moins étant effectivement du troisième ordre et non décomposée) *est un cône, ou une surface réglée* (non conique)

(¹) PAUL MONTEL, *Sur la Géométrie finie et les travaux de M. C. Juel*, (*Bull. Sc. math.*, mars 1924, p. 109).

(²) ANDRÉ MARCHAUD, *Les surfaces du second ordre en Géométrie finie*, (*Journ. Math. pur. et appl.*, t. XV, fasc. 131, 1936, p. 295).

engendrée par la variation continue d'une droite, ou bien chacun de ses points, sauf quatre au plus, est intérieur à un cylindre droit dans lequel tous les points de l'ensemble constituent un morceau de surface simple de Jordan à pente bornée par rapport aux plans de sections droites du cylindre. Pour les points à l'infini, il faut faire au préalable une transformation homographique les ramenant à distance finie. Les courbes du troisième ordre seront définies directement à partir de la notion de continu, et bien entendu, il ne sera fait aucune hypothèse sur l'existence de tangentes à ces courbes. Nous obtiendrons ainsi une définition très directe des surfaces du troisième ordre sans faire appel à la notion de surface, hypothèse dont on ne s'était pas affranchi jusqu'à présent. Les surfaces du troisième ordre de C. Juel comme celles de M. B. P. Haalmeyer (¹) sont par hypothèse décomposables en morceaux de surfaces de Jordan et de plus leurs sections planes doivent être des courbes à tangente continue. Après C. Juel, M. M. Linsman (²) a étudié récemment les surfaces réglées du troisième ordre (définies par la variation continue d'une droite) dont les sections planes sont des courbes élémentaires de C. Juel, ce qui revient à admettre la variation continue du plan tangent. Or c'est un des résultats les plus inattendus du présent Mémoire que *toute surface réglée, non conique, du troisième ordre, admet nécessairement un plan tangent continu, sauf le long d'une directrice rectiligne et peut-être de deux génératrices limites.* Comme une courbe plane du troisième ordre n'admet pas forcément une tangente partout, la propriété ne peut s'étendre aux cônes. Il reste seulement à savoir dans quelle mesure elle peut s'étendre aux surfaces du troisième ordre non réglées. *A priori* on ne peut espérer trouver un plan tangent unique dans les régions où ces surfaces sont localement

---

(¹) B. P. HAALMEYER, *Bijdragen tot de theorie der elementairopperylakken* (*Thèse*, Amsterdam, nov. 1917). Dans ce travail, dont j'ai eu connaissance pendant la rédaction du présent Mémoire, l'auteur considère également les surfaces du second ordre, et établit un résultat voisin de celui qui fait l'objet de mon article sur les surfaces du second ordre, cité plus haut. Je n'ai pu prendre connaissance du travail de M. Haalmeyer que grâce à l'obligeance de M. Linsman, qui a bien voulu me le traduire oralement.

(²) M. LINSMAN, *Sur les surfaces réglées du troisième ordre en Géométrie finie* (*Bull. Sc. math.*, sept. 1936, p. 268).

convexes. Par contre, il est probable que le plan tangent est unique et continu dans les autres régions, sauf bien entendu aux points singuliers s'il y en a. C'est en tout cas ce qui a lieu pour les surfaces de révolution. Dans le cas général la question reste posée. Si elle était résolue par l'affirmative, on aurait des chances de pouvoir étendre aux surfaces du troisième ordre, telles que nous les définissons, le Théorème célèbre par lequel C. Juel a lui-même étendu à ses surfaces le résultat classique relatif à la distribution des droites sur une surface du troisième degré.

Les courbes planes du troisième ordre.

1. Il s'agira dans ce travail d'ensembles fermés et de continus de l'espace projectif à trois dimensions. Un continu est un ensemble fermé non décomposable en deux ensembles fermés disjoints. Une droite, un plan à distance finie ou non sont des continus. Considérons un ensemble fermé E, à chaque point m duquel on attache *une* droite $D(m)$ [ou un plan $P(m)$] contenant ce point. Si tout l'ensemble E est à distance bornée, la condition nécessaire et suffisante pour que $D(m)$ [ou $P(m)$] varie continûment avec m est que l'ensemble constitué par les droites $D(m)$ [ou les plans $P(m)$] soit fermé. Cette remarque permet de donner un sens aux expressions : $D(m)$, ou $P(m)$ variant d'une manière continue avec m lorsque m ne reste pas à distance bornée.

Ces remarques étant faites, je commencerai par définir les courbes planes du troisième ordre telles que nous les considérons ici, et par étudier celles de leurs propriétés qui nous seront indispensables. Un ensemble du plan projectif est d'ordre K s'il contient K points au plus sur une droite quelconque du plan et K exactement sur une droite au moins. J'ai montré ailleurs [1] les résultats suivants.

1° Tout continu d'ordre $K\,(K > 1)$ est une courbe, et celle-ci est d'autant moins compliquée que K est plus petit. Pour $K = 2$, on a une

---

[1] A. MARCHAUD, *Sur les continus d'ordre borné*, Chap. II (*Acta Math.*, t. 55, p. 84) et *Sur diverses extensions de la notion de continus d'ordre borné*, Introduction (*Ann. Éc. Norm.*, 4e série, XLIX, p. 113) *Voir* aussi le Mémoire *Sur les Surfaces du second ordre en Géométrie finie*, cité plus haut.

courbe simple de Jordan, ouverte ou fermée. Il suffit alors de supposer l'absence d'extrémité pour obtenir la courbe générale du second ordre non décomposée, courbe qui peut être ramenée tout entière à distance finie par une transformation homographique convenable. Comme il s'agit ici de géométrie projective, j'appellerai toujours les courbes du second ordre non décomposées des *ovales*. Les courbes du second ordre décomposées sont un système de deux droites ou un point isolé.

2° Un continu d'ordre trois est une courbe simple, ouverte ou fermée, ou bien la somme de deux arcs simples ayant un seul point commun. Si l'on suppose qu'en tout point du continu aboutissent un nombre pair d'arcs, on obtient nécessairement une courbe de Jordan fermée avec ou sans point double. Les considérations précédentes sont évidemment valables pour le plan de l'infini, il suffit pour le voir de faire une transformation homographique ramenant le plan à distance finie.

Au point de vue réel une courbe algébrique peut comprendre plusieurs courbes de Jordan distinctes et des points isolés. On est donc conduit à appeler *courbe non décomposée du troisième ordre,* tout ensemble du troisième ordre constitué par un nombre fini de continus distincts d'ordre deux ou trois possédant les uns et les autres les propriétés précédentes, et de points isolés. C'est ce que nous ferons en convenant de compter pour deux tout point isolé (cette dernière hypothèse ne s'impose pas d'une manière absolue. Il est facile, en effet, de former un ensemble d'ordre trois comprenant une courbe de Jordan et un nombre arbitrairement grand de points isolés, par exemple une strophoïde dans laquelle on remplace la boucle par un nombre quelconque de points isolés intérieurs à la boucle et choisis de manière que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. Mais si l'on appelait courbe du troisième ordre un tel ensemble, il faudrait considérer comme une courbe du second ordre tout système de points isolés dont trois quelconques ne sont pas alignés). Il nous faudra aussi faire intervenir les *courbes du troisième ordre décomposées :* somme d'une droite et d'une courbe du second ordre décomposée ou non.

Avant d'aborder la classification des courbes du troisième ordre, je ferai quelques remarques au sujet des tangentes à ces courbes. Nous ne faisons aucune hypothèse relative à leur existence. Mais il y a des propriétés bien connues que je vais rappeler. En tout point d'un arc simple d'ordre borné il y a une demi-tangente bien déterminée pour chaque côté, et ces deux demi-tangentes sont opposées sauf sur un ensemble au plus dénombrable. Ce résultat s'étend à des arcs plus généraux [1]. En voici un autre qui est spécial aux arcs (plans) d'ordre trois au plus : si un tel arc possède une tangente partout, celle-ci varie d'une manière continue avec le point de contact [2]. La remarque faite au début de ce numéro permet d'étendre ces propriétés aux points à l'infini, et même dans le plan de l'infini.

2. Pour faire la classification des courbes du troisième ordre, il sera nécessaire d'utiliser certaines propriétés des courbes de Jordan du troisième ordre [3], d'ailleurs indispensables pour la suite.

1° Une courbe plane de Jordan du troisième ordre a un point au moins sur toute droite du plan;
2° si elle a trois points sur une droite, elle la traverse en chacun d'eux (lesquels sont nécessairement simples);
3° si elle traverse une droite en deux points simples, elle la traverse en un troisième.

Ces propriétés se déduisent presque immédiatement de la seconde, qui est un cas particulier du Théorème II de mon Mémoire sur les Continus d'ordre borné. En voici une démonstration directe. Soient a_1, a_2, a_3 les points de la courbe situés sur une droite D. Nous supposerons, ce qui est permis, que les trois points sont à distance finie. Chaque point a_i est intérieur à un arc $a'_i a''_i$, que l'on peut choisir assez petit pour que les arcs $a'_i a_i$ et $a_i a''_i$ n'aient sur D que les points, a_i et que deux quelconques de ces arcs n'aient pas de point commun en dehors de D. Si $a'_i a_i$ et $a_i a''_i$ sont de part et d'autre de D, je dirai que a_i est une *traversée*, et que c'est un *retour* dans le cas contraire. On voit

---

(1) A. Marchaud, *Sur une condition nécessaire et suffisante d'existence des demi-tangentes*... (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. LVI, juin 1932, p. 67).

(2) A. Marchaud, *Sur les continus d'ordre borné*, N° 16, p. 88.

(3) Il s'agit bien entendu désormais de courbes *fermées*.

que deux retours sont impossibles, et aussi deux traversées et un retour. Il y a donc trois traversées. Si l'un des points, a_1 par exemple, était un point double, on pourrait prélever quatre arcs aboutissant à ce point, ce qui conduit encore à une contradiction.

Démontrons maintenant la première et la troisième propriété. Supposons qu'une droite ne coupe pas la courbe. En la prenant pour droite de l'infini on aura une courbe fermée située tout entière à distance bornée, ayant trois points sur une certaine droite et la traversant en chacun d'eux, ce qui est impossible. Pour la troisième, supposons la sécante à distance finie et, ce qui est permis, que la courbe ait trois points distincts à l'infini. Parcourons la courbe à partir d'un certain point non situé sur la sécante. Si la courbe traversait celle-ci deux fois seulement on reviendrait au point de départ après avoir changé cinq fois de côté par rapport à la sécante.

3. La classification des courbes planes du troisième ordre se fera aisément. Commençons par les courbes non décomposées et considérons d'abord les courbes sans point isolé. Une telle courbe sera constituée par un ensemble de courbes de Jordan du second et du troisième ordre. Les seuls cas possibles sont : ou bien *une seule courbe du troisième ordre*, ou bien *une du second et une du troisième*. En effet, deux courbes du second ordre constituent un ensemble du quatrième ordre. D'autre part la somme de deux courbes de Jordan du troisième ordre sans point commun est au moins du quatrième ordre, car une droite coupant la première en trois points coupe la seconde en un point au moins.

Considérons les courbes à point isolé. Une courbe du troisième ordre en possédera un au plus, puisque tout point isolé compte pour deux, et ne pourra comporter en dehors de lui qu'une courbe de Jordan du troisième ordre.

Enfin une courbe du troisième ordre décomposée sera la somme d'une droite et d'une courbe du second ordre décomposée ou non.

Les propriétés établies au n° **2** subsistent intégralement quand on remplace les mots *courbe de Jordan du troisième ordre* par ceux de *courbe du troisième ordre décomposée ou non*. Bien entendu, l'expression *trois points sur une droite* doit être comprise au sens strict : trois et trois seulement. C'est évident pour la première. Pour la seconde il suffira de remarquer que la démonstration donnée au n° **2** est encore valable, en effet, s'il y a trois points sur une droite, aucun d'eux n'est isolé. Reste la troisième propriété. Il y a seulement à considérer le cas où la courbe contient une courbe de Jordan du second ordre sur laquelle se trouve au moins un point de traversée. Mais dans ce cas la courbe du second ordre traverse la sécante en un second point, et il y a nécessairement un troisième point sur le reste de la courbe : courbe de Jordan du troisième ordre ou droite.

4. Points réguliers. Points irréguliers. J'appellerai *point régulier* d'une courbe du troisième ordre tout point de la courbe par lequel on peut mener une sécante la coupant en trois points et trois seulement. Les autres points de la courbe seront appelés *irréguliers*. Un point isolé, un point double sont des points irréguliers. Les points que C. Juel appelle des *épines* sont en général des points irréguliers, mais pas toujours (1). Je limiterai l'étude des points irréguliers à quelques remarques qui suffiront à notre objet.

1° Une courbe formée d'une droite et d'un point isolé n'a pas de point régulier (2).

2° La somme d'une droite et d'un ovale n'a pour points irréguliers que les points communs (s'il y en a) à la droite et à l'ovale.

3° Un système de trois droites concourantes possède un seul point irrégulier : le point de commun aux trois droites.

---

(1) Soient Oa et Ob deux demi-droites (portées par des droites distinctes), OA et OB deux arcs ayant respectivement pour demi-tangentes en O : Oa et Ob, et en dehors de l'angle aOb. La figure obtenue est une *épine*. Lorsque Oa et Ob viennent à se confondre, l'épine devient un rebroussement de première espèce. Si une courbe du troisième ordre est formée d'une seule courbe de Jordan et possède une épine, celle-ci est un point irrégulier. Au contraire une strophoïde dont on a remplacé la boucle par un ovale intérieur donne l'exemple d'une courbe dans laquelle l'épine est un point régulier.

(2) C'est la raison pour laquelle il m'a paru préférable de ne pas employer l'expression de *point singulier* au lieu de celle de *point irrégulier*. En Géométrie algébrique, une cubique plane formée de deux droites imaginaires conjuguées et d'une droite réelle ne possède qu'un seul point singulier réel.

4° Un système de trois droites formant un triangle possède trois points irréguliers : les sommets du triangle.

5° Si une courbe du troisième ordre possède deux points irréguliers, l'un deux est isolé, ou bien la droite qui les joint fait partie de la courbe [1].

6° Si une courbe du troisième ordre possède trois points irréguliers, elle contient au moins une droite (joignant deux de ces points).

Les quatre premières sont évidentes. La sixième est une conséquence immédiate de la cinquième (car une courbe du troisième ordre possède au plus un point isolé). Il suffira de démontrer cette dernière. Soit C une courbe du troisième ordre ayant deux points irréguliers : O et O′, que nous supposerons à distance finie. Admettons que la droite OO′ ne soit pas sur C et que ni O ni O′ ne soit isolé. Chacun de ces points est alors intérieur à un arc simple (appartenant à C). Il n'est pas possible que ces deux arcs traversent la droite. Or si l'arc de O, par exemple, reste d'un même côté, le point O′ est régulier; ce qui n'est pas.

Les surfaces du troisième ordre.

5. Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat principal du Mémoire. Soit S *un ensemble fermé de l'espace euclidien projectif, dont toute section plane est une courbe du troisième ordre au plus, l'une au moins étant effectivement du troisième et non décomposée.* Je vais montrer que S est une *surface*. Le sens de cette affirmation va être précisé dans un instant. Comme pour les courbes du troisième ordre, je dirai qu'un point de S est *régulier* s'il existe une sécante issue de m rencontrant S exactement en trois points, et qu'il est irrégulier dans le cas contraire. Si un point est irrégulier pour S, il l'est forcément pour toute section plane du troisième ordre par ce point. Inversement tout point régulier pour une section plane du troisième ordre contenant ce point est régulier pour S. Il est immédiat que S possède

[1] Une strophoïde dont on a remplacé la boucle par un point intérieur donne l'exemple d'une courbe non décomposée du troisième ordre ayant deux points irréguliers.

au plus un point isolé, forcément irrégulier, et que, si l'on supprime le point isolé s'il existe, l'ensemble restant satisfait aux mêmes hypothèses que S.

L'importance des points réguliers est mise en évidence par les faits suivants. *Le voisinage de tout point régulier de* S *est un morceau de surface simple de Jordan;* S *possède au plus quatre points irréguliers à moins qu'elle ne se réduise à une surface réglée engendrée par la variation continue d'une droite.* Si cette surface est un cône, S peut contenir en plus une droite isolée passant par le sommet du cône.

Avant d'aborder la démonstration des propriétés annoncées, je ferai quelques remarques immédiates qui nous serviront plus loin. Considérons une strophoïde C et un point O extérieur à son plan. Le cône de sommet O et de directrice C satisfait à la définition de S. Il contient un cône du second ordre, celui obtenu en réduisant C à sa boucle. Si nous remplaçons ce dernier cône par une sphère intérieure nous aurons encore un ensemble répondant à la définition de S. (On peut aussi le remplacer par une droite qui lui soit intérieure. Dans ce dernier cas on a l'exemple d'un ensemble S formé d'un cône et d'une droite isolée passant par son sommet.)

Nous venons de voir qu'un ensemble S — j'appellerai ainsi désormais tout ensemble satisfaisant à la définition donnée au début du présent numéro — peut contenir un cône du second ordre ou une surface convexe du second ordre. Je vais montrer qu'il ne peut contenir une surface du second ordre non convexe. Dans mon Mémoire cité sur les surfaces du second ordre en Géométrie finie, j'ai établi que toute surface du second ordre non convexe était une quadrique. Il suffira donc de constater qu'*un ensemble* S *ne peut contenir une quadrique réglée non conique.* Soit, en effet, un ensemble S contenant une quadrique réglée non décomposée H. S possède nécessairement des points non situés sur H, soit m l'un d'eux. Le plan défini par m et une génératrice de H contient une génératrice de l'autre système. La section totale de S par le plan comporte une troisième droite, passant par m. Toute génératrice de H est par suite rencontrée par une droite issue de m et située sur S. Considérons alors deux de ces droites correspondant à deux génératrices d'un même système; elles seront forcément distinctes. Leur plan coupe H suivant une conique non décomposée ou deux droites distinctes. La section totale de S par ce plan est du quatrième ordre, ce qui est impossible.

6. Abordons maintenant l'étude de S au voisinage d'un point régulier a. Il existe une sécante A coupant S en trois points distincts et trois seulement : a, a' et a''. Supposons (ce qui est permis) ces trois points à distance finie et dans l'ordre a, a', a'' sur A. Choisissons sur cette droite quatre points p, p', p'', p''', tels que a, a', a'' soient respectivement intérieurs aux segments pp', $p'p''$, $p''p'''$, et menons par les points p les plans Π, Π', Π'', Π''', perpendiculaires à A. Prenons enfin un cylindre Γ, de révolution autour de A et de rayon assez petit pour ne contenir aucun point de S dans les plans Π. Ceci est possible puisque S est fermé et que les points p sont extérieurs à cet ensemble. Les plans Π découpent dans Γ trois volumes cylindriques contenant respectivement a, a', a''. Désignons par Γ_a l'ensemble des points appartenant à celui des volumes qui contient a, par $\Gamma_{a'}$ et $\Gamma_{a''}$ les deux autres ensembles analogues. Γ_a, $\Gamma_{a'}$, $\Gamma_{a''}$ sont fermés et disjoints deux à deux. Je vais montrer que chacun d'eux se projette orthogonalement suivant la section droite de ce plan par Γ d'une manière biunivoque et bicontinue. Il en résultera que chacun d'eux est un morceau de surface simple de Jordan. Soient μ un point de Γ situé dans Π et M la droite menée par ce point parallèlement à A. Le plan [M, A] coupe S suivant une courbe du troisième ordre C, qui traverse A en a, a' et a'' (n^{os} **2** et **3**). Considérons le rectangle R limité dans le plan [M, A] par A, M et les plans Π et Π', et prélevons sur C les points intérieurs à un petit arc ayant a à son intérieur et situé d'un même côté de M. La partie restante de C contiendra au moins un continu ayant un point intérieur et un point extérieur à R, et par suite sur la frontière de R. D'après ce qui précède ce point ne peut être que sur M. Γ_a a donc un point au moins sur M. Mais il en est de même de $\Gamma_{a'}$ et $\Gamma_{a''}$; chacun d'eux a donc un point et un seulement sur M. Il est immédiat que la correspondance entre Γ_a et sa projection est biunivoque et bicontinue. Prenons maintenant un cylindre Γ' coaxial à Γ et intérieur, il découpe dans Γ_a un morceau J_a qui sera évidemment à pente bornée par rapport à Π, pourvu que le rayon de Γ soit assez petit.

En résumé, nous avons obtenu la proposition suivante. *Tout point* *régulier de* S, *situé à distance finie*, *est intérieur à un cylindre circulaire droit* (c'est-à-dire un cylindre de révolution limité à deux sections droites) *dans lequel les points de* S *forment un morceau de surface simple de Jordan à pente bornée par rapport aux bases du cylindre.*

On voit immédiatement que si J_a possède des points de part et d'autre d'un plan passant par a, celui-ci coupe J_a et par suite S en une infinité de points.

Jusqu'à présent nous avons supposé le point a à distance finie. Pour un point régulier à l'infini on fera d'abord une transformation homographique pour le ramener à distance finie. D'ailleurs toutes les fois que nous supposerons un point à distance finie nous sous-entendrons qu'il a été fait au besoin une transformation homographique convenable. Enfin quand nous aurons à étudier le voisinage d'un point régulier m, à distance finie, je désignerai toujours par J_m un morceau de surface simple de Jordan se projetant orthogonalement sur un plan suivant un cercle centré sur la projection de m.

7. Avant d'aller plus loin, je vais déduire du résultat précédent une proposition qui complétera les remarques faites au numéro **5**, et qui nous sera utile. *Si* S *possède un élément de cône aussi petit soit-il, l'ensemble* S *tout entier est un cône du troisième ordre ou bien la somme d'un tel cône et d'une surface convexe non réglée du second ordre.*

Je démontrerai d'abord la propriété suivante. Soient D et D′ deux droites de S se croisant en un point O. Si l'une d'elles est intérieure à un élément de cône de sommet O situé sur S, leur plan contient une troisième droite de S passant par O, à moins que l'intersection de S par ce plan ne soit du second ordre. Supposons D intérieure à un élément de cône Σ, de sommet O, et soit m un point du plan [D, D′], situé sur S en dehors de D et D′. Supposons que la droite Om ne soit pas sur S, alors le reste de l'intersection de S par le plan [D, D′] est une droite mdd' rencontrant D et D′ aux points d et d'. Un plan quelconque passant par cette droite sans contenir O coupe S suivant la droite et un ovale, autrement Σ serait un élément de plan et S contiendrait le plan tout entier. Σ fait donc partie d'un cône du second ordre non décomposé. Il en résulte d'abord que d est un point irrégulier pour S, puisque le voisinage de d sur S comporte un morceau de surface simple de Jordan (morceau de Σ) traversé par une droite. Menons par m un plan P_0 ne contenant ni d ni O. Il coupe S suivant une courbe C_0 passant par m et les points d_0 et d'_0, intersection de D et D′ avec P_0. Ces trois points sont des points de C_0, qui est du troisième ordre et comprend un arc convexe γ_0, intersection de Σ par P_0. Le point d_0 est intérieur à γ_0. Prenons sur cet arc un point voisin de d_0, soit δ_0. La droite $d_0\delta_0$ traverse γ_0 en d_0 et δ_0. Si δ_0 est assez voisin de d_0, ces deux points seront pour C_0 des points simples et la droite $d_0\delta_0$ coupera C_0 en un troisième point : a_0. Considérons alors la droite a_0d, elle rencontre $O\delta_0$ en un point δ situé sur Σ et par suite sur S. D'autre part le plan a_0dm coupe S suivant dm et un ovale, qui doit contenir les points alignés d, δ et a_0, ce qui est impossible. Il faut donc supposer que la droite Om est sur S.

Ceci posé supposons que S contienne un élément de cône de sommet O. Coupons par un plan P donnant dans S une section non décomposée. On peut supposer que le plan ne contient pas O (Si les plans voisins de P contenaient tous une droite de S, il en serait de même de P). L'élément de cône découpe dans P un arc $\widehat{ab}$, faisant partie de la section de S par P. $\widehat{ab}$ est donc sur une courbe de Jordan C du second ou du troisième ordre. Si l'arc $\widehat{ab}$ comporte un point double, S comprend un cône du second ordre S_2. Soit alors m un point de S n'appartenant pas à S_2. Prenons une droite OG intérieure à S_2 et ne contenant pas m. Le plan mOG rencontre S suivant deux génératrices, et d'après la propriété qui vient d'être établie, Om est sur S. Si donc l'arc $\widehat{ab}$ comporte un point double, S se réduit à un cône de sommet O. Supposons $\widehat{ab}$ sans point double. Considérons un point p de C et faisons-lui décrire l'arc $\widehat{ab}$ à partir de a et ensuite C, toujours dans le même sens. Soit b_1 la borne des points p tels que le cône $[O, \widehat{ap}]$ soit sur S. Si ab_1 comporte un point double, S est un cône. Si b_1 est en a, ou bien on a parcouru tout C et alors le cône [O, C] est sur S, ou bien l'arc $\widehat{ab_1}$ est du second ordre et fermé, et alors S est encore un cône. Supposons que b_1 ne soit pas en a. Parcourons C en sens inverse et soit a_1 la borne analogue à b_1. Si a_1 et b_1 sont confondus, on retombe sur un des cas précédents. Supposons donc a_1 et b_1 distincts. Considérons un point p de C, voisin de b_1 et n'appartenant pas à $\widehat{a_1 b_1}$. Si C ne traverse pas la droite $a_1 b_1$ en b_1, la droite Op est sur S, toujours en vertu de la propriété établie tout à l'heure. Mais ceci conduit à une contradiction. Il faut donc que C traverse $a_1 b_1$ en b_1 et, pour la même raison en a_1. La section totale de S par P traverse donc la droite en un troisième point c_1. On peut supposer les points a_1, b_1, c_1 à distance finie et dans cet ordre sur la droite qui les porte. Prélevons sur C deux petits arcs $\widehat{a_1 a'}$ et $\widehat{a_1 a''}$, le premier appartenant à $\widehat{a_1 b_1}$ et pas le second. Opérons de même en b_1, nous aurons deux arcs $\widehat{b_1 b'}$ et $\widehat{b_1 b''}$, le premier seulement étant sur $\widehat{a_1 b_1}$. De deux choses l'une : $\widehat{a_1 a'}$ et $\widehat{b_1 b'}$ sont d'un même côté de la droite $a_1 b_1$ ou de part et d'autre. En utilisant encore le résultat du début du présent numéro, on voit que dans l'un et l'autre cas, l'arc qui traverse en c_1 est intérieur à un élément de cône de sommet O, et que par suite b_1 n'est pas la borne annoncée; d'où contradiction.

En résumé S contient nécessairement un cône du troisième ordre de sommet O, soit S_3. De plus, si S_3 a une génératrice de croisement, S se réduit à S_3. Dans le cas contraire S peut avoir d'autres points que ceux de S. Examinons cette dernière circonstance et désignons par R l'ensemble des points de S n'appartenant pas à S_3, et par R_2 leur fermeture. Coupons R_2 par un plan ne contenant pas O. La section totale de S donne une courbe du troisième ordre non décomposée (la section de S_3) et sur R le reste de l'intersection : un ovale ou un point isolé. Coupons par un plan contenant O. Nous obtenons dans S_3 au moins une droite; dans le cas où il y en a une seule le reste de l'intersection est une courbe du second ordre au plus dont tous les points sauf deux au plus sont sur S_3; dans le cas où il y a deux droites le reste de l'intersection comprend une droite dont deux points au plus sont sur S_3. Dans les deux cas R_2 est coupée suivant une courbe du second ordre au plus, c'est donc une surface du second ordre : quadrique réglée, cône ou ovoïde pouvant se réduire à un point isolé (surface convexe du second ordre) [1]. Le premier cas est impossible (n° **5**). Si R_2 est

---

[1] ANDRÉ MARCHAUD, *Sur les Surfaces du second ordre en Géométrie finie.*

un cône, son sommet ne peut être que O, autrement on pourrait trouver un plan contenant le sommet en question mais pas O, coupant R_2 suivant deux droites, ce qui est impossible car ce plan couperait S_3 suivant une courbe du troisième ordre non décomposée. La démonstration est achevée. S est donc bien un cône du troisième ordre ou bien la somme d'un tel cône et d'un ovoïde pouvant se réduire à un point. Nous avons vu que la dernière circonstance peut être réalisée [n° 5].

8. La proposition établie au numéro **6** conduit naturellement à étudier la distribution des points irréguliers. Comme on l'a remarqué plus haut, tout point irrégulier de S est irrégulier pour chaque section plane du troisième ordre contenant ce point. Les propriétés des points irréguliers des courbes planes du troisième ordre nous seront très utiles, mais ne seront pas suffisantes, car nous ne savons pas si S n'a pas de sections planes d'ordre inférieur à trois. Nous avons en effet supposé seulement que les sections planes étaient des courbes d'ordre *trois au plus*. Les supposer d'ordre trois est faire une hypothèse de commodité. Le théorème établi au numéro **6** va nous permettre de compléter nos connaissances sur ce point. Je vais montrer en effet que S *ne peut être coupée par un plan suivant un ovale ou un point isolé.* Soit P un plan coupant S suivant une telle courbe. Il existe dans P une droite D sans point commun avec S. La section de S par P peut se réduire à un point isolé. Je vais montrer qu'il y a dans ce cas un plan passant par D coupant S suivant un ovale. Par hypothèse un certain plan Q coupe S suivant une courbe du troisième ordre non décomposée : C. La droite D n'est pas dans Q, car toute droite coupe C [n° 3], elle a donc dans Q un point unique : d. D'autre part C a au plus deux points irréguliers [n° 4]. Soit alors a un point régulier de C et par suite de S. En déplaçant au besoin légèrement le point a sur C on peut faire en sorte que C traverse la droite da en a. Le morceau de surface simple de Jordan J_a a donc des points de part et d'autre du plan $[a, D]$, celui-ci coupe alors S suivant un ovale Γ et non pas un point isolé. Ceci posé, soit A une droite issue de a coupant S en trois points exactement. Limitons J_a à un cylindre de révolution d'axe A (de rayon assez petit pour que toutes les génératrices du cylindre coupent J_a).

La projection de J sur le plan [a, D] sera une ellipse γ, de centre a. Soit b un point de Γ distinct de a et intérieur à γ. Considérons la section de J_a par le plan [A, b]. C'est un arc $\widehat{\alpha\beta}$ dont les extrémités sont d'un même côté par rapport au plan [a, D]. En effet, on peut les joindre par l'arc de J_a se projetant parallèlement à A sur celui des arcs de l'ellipse γ limité par le diamètre ab et ne rencontrant pas Γ. Mais l'arc $\widehat{\alpha\beta}$ fait partie d'une courbe du troisième ordre situé sur S. Il ne peut donc traverser la droite ab, sans quoi α aurait un troisième point sur ab. Les conditions imposées à l'arc $\widehat{\alpha\beta}$ exigent qu'il reste d'un même côté par rapport à ab, ce qui est impossible, car une droite voisine couperait l'arc en quatre points au moins.

Du résultat qui vient d'être établi, on déduit immédiatement que S *a un point au moins sur toute droite de l'espace* (1).

9. Droites irrégulières. — Pour faire l'étude des points irréguliers, je distinguerai deux cas suivant que S ne possède pas ou bien possède des *droites irrégulières*. J'appelle ainsi les droites de S dont tous les points sont irréguliers. Il est immédiat que si trois points irréguliers de S sont alignés, la droite Δ qui les joint est irrégulière. En effet, tout d'abord Δ est sur S, sans quoi les trois points seraient réguliers. Supposons qu'un point a de Δ soit régulier. Il existe une droite A, issue de a, coupant S en deux points en dehors de a. Le plan [A, Δ] coupe S, en plus de Δ, suivant une courbe du second ordre C, non réduite à un point isolé. Un des trois points irréguliers de Δ (au moins) n'est pas sur C. On peut donc mener par lui une sécante distincte de Δ coupant C en deux points et deux seulement; ce qui conduit à une contradiction. La démonstration montre également que *tout plan passant par Δ ne peut couper* S, *en dehors de Δ, que suivant une droite ou un point isolé.*

---

(1) De là on déduit immédiatement que si S possède un point isolé O, l'ensemble restant est l'image biunivoque et bicontinue d'un plan. Soit Π un plan quelconque ne passant pas par O. Il suffit de faire correspondre à tout m de S (distinct de O) le point μ où la droite Om rencontre Π. Soit $f_3(x, y, z)$ un polynome homogène du troisième degré. La somme de la surface $f_3(x, y, z)\,t + t^3 = 0$ et du point (0, 0, 0, 1) en coodonnées tétraédrales fournit un exemple du cas précédent.

10. Nous commencerons l'étude de la distribution des points irréguliers par le cas où S ne possède aucune droite irrégulière. Établissons d'abord un résultat préliminaire qui nous sera utile. C'est le suivant : Si une section plane de S se compose de deux droites se croisant en un point régulier, l'une des droites au moins se compose de points réguliers. Il s'agit bien entendu de points réguliers pour S. Soient D et D' les deux droites, a leur point de rencontre, que nous supposerons à distance finie, et P leur plan. Il existe une droite A, issue de a, rencontrant S en trois points distincts, et par suite un morceau de surface simple de Jordan J_a se projetant sur P parallèlement à A d'une manière biunivoque. Coupons S par un plan parallèle à A et rencontrant respectivement D et D' en des points m et m' intérieurs à J_a. La section obtenue possède deux points simples en m et m'. Comme la droite mm' n'a sur S d'autres points que m et m', il est nécessaire que mm' touche la courbe en l'un des points, m par exemple [n° **3**]. En effet, la section de S par le plan considéré est du troisième ordre. Dans le cas contraire on ne pourrait avoir qu'un système de deux droites, l'une passant par m l'autre par m', ce qui est incompatible avec le fait que toute parallèle à A rencontre J_a en un seul point. Du fait que la section touche mm' en m on déduit que J_a est, au voisinage de m, d'un même côté de P. Soit alors d' un point quelconque de D' distinct de a; dans le plan (A, $d'm$) on peut trouver une droite voisine de $d'm$ coupant J_a en deux points. Par suite d' est régulier, et par conséquent tous les points de D'.

Ceci posé, supposons qu'il existe sur S trois points irréguliers : O_1, O_2, O_3. S ne possédant pas de droite irrégulière, ces trois points déterminent un plan, qui coupe S suivant une courbe du troisième ordre ou un système de deux droites, puisqu'un ovale est impossible [n° **8**]. Dans le premier cas comme l'un au plus des points O_1, O_2, O_3 est isolé pour la section, l'un au moins des côtés du triangle $O_1O_2O_3$ est sur S [n° **4**, 6°]. Il en est de même dans le second cas, car les points irréguliers ne peuvent être que sur les droites. Supposons maintenant que le plan $O_1O_2O_3$ contienne un quatrième point irrégulier : O_4. La seule courbe plane du troisième ordre possédant plus de trois points irréguliers est l'ensemble d'une droite et d'un point isolé. Comme S est supposé n'avoir pas de droite irrégulière, la section de S par le plan $O_1O_2O_3$ se compose nécessairement de deux droites, sur lesquelles doivent se trouver les quatre points O_1, O_2, O_3, O_4. Le résultat établi au début du présent numéro montre que l'on aboutit à une contradiction, car le point commun aux deux droites est forcément régulier (autrement l'une d'elles contiendrait trois points irréguliers).

En résumé nous pouvons affirmer que si S n'a pas de droite irrégulière, trois points irréguliers de S déterminent un plan ne contenant aucun autre point irrégulier, mais contenant une droite de S joignant deux de ces points. De là on déduit aisément que S possède au plus quatre points irréguliers. S'il y a sur S cinq points irréguliers : O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, on peut choisir les notations de manière que la droite O_4O_5 soit sur S. Considérons alors la section C de S par le plan $O_1O_2O_3$. C contient au moins une droite, soit O_1O_2 et l'intersection O' de O_4O_5 avec le plan. Joignons O' à O_3, la droite obtenue coupe O_1O_2 en un point a, distinct de O_1 et de O_2. Cette droite est sur S, sans quoi O_3 serait régulier. C ne contient pas d'autre droite. S'il existait une troisième droite, comme elle ne pourrait passer à la fois par O_1 et O_2, l'un de ces points serait régulier. Mais si C se compose des seules droites O_1O_2 et $O'O_3$, on aboutit encore à une contradiction, car a est régulier. On a vu, en effet, que dans ce cas tous les points d'une des droites sont réguliers. La démonstration est achevée. Nous avons donc bien établi que *s'il n'y a pas sur* S *de droite irrégulière, il y a au plus quatre points irréguliers* (1). Comme tous les autres points sont chacun intérieur à un domaine à trois dimensions dans lequel les points de S forment un morceau de surface simple de Jordan, il est naturel de dire que S est une *surface*, c'est une *surface du troisième ordre*. Une telle surface peut contenir un point isolé, dans ce cas le reste de l'ensemble est une surface simple de Jordan (résultat établi en note au numéro **8**).

12. Il reste à étudier le cas où S possède une droite irrégulière Δ. Je commencerai par la remarque suivante. Par tout point de S non situé

(1) Cette proposition peut être complétée de la manière suivante : *la droite joignant deux points irréguliers non isolés est sur* S. Je me bornerai à énoncer ce résultat, l'objet du présent Mémoire n'étant pas l'étude d'ensemble des surfaces du troisième ordre.

sur Δ, régulier ou limite de points réguliers, il passe une droite et une seule, située sur S et rencontrant Δ, que j'appellerai la *génératrice* du point. En effet, soit m un point régulier. Ce point est intérieur à un morceau de surface simple de Jordan J_m, situé sur S. Coupons J_m par le plan [Δ, m]. Si la section comporte plus d'un point, le plan coupe S, en dehors de Δ, suivant une droite et une seule, passant nécessairement par m [n° **8**]. Dans le cas contraire, J_m est d'un même côté par rapport au plan. Un plan contenant Δ, choisi du côté convenable, et aussi voisin qu'on voudra de [Δ, m], coupera J_m en plus d'un point, et par suite contiendra une droite de S passant au voisinage de m. Comme S est fermé, on en déduit l'existence d'une droite au moins passant m et rencontrant Δ. Cette droite est nécessairement unique [n° **8**]. Le même raisonnement montre que si m est point d'accumulation de points réguliers, il passe par ce point une génératrice et une seule.

Supposons maintenant que S possède des points irréguliers en dehors de Δ. Je dis que la droite qui joint deux quelconques d'entre eux est sur S. Soient O et O′ deux points irréguliers non situés sur Δ. Si la droite OO′ rencontre Δ, le plan [Δ, O] coupe S suivant la droite OO′ [n° **8**]. Supposons que OO′ ne rencontre pas Δ, et ne soit pas sur S. Coupons cet ensemble par un plan Q contenant OO′. La section, du troisième ordre au plus, possède trois points irréguliers non alignés. Si elle est du troisième ordre, elle contient une droite joignant deux des points irréguliers [n° **4**]. Si elle est du second ordre, c'est un système de deux droites [n° **8**]. Dans les deux cas, comme, par hypothèse, OO′ n'est pas sur S, il y a sur cet ensemble au moins une droite joignant l'un des points O ou O′ à l'intersection de Q avec Δ. Considérons alors sept plans Q distincts, nous aurons sept droites (au moins) rencontrant Δ dont quatre au moins passent, par l'un des points O ou O′, O par exemple. Ceci est incompatible avec l'existence d'une section plane non décomposée. Si donc S possède deux points irréguliers en dehors de Δ, la droite qui les joint est sur S. Supposons alors que S possède trois points irréguliers O, O′, O″, autres que ceux de Δ. S'ils ne sont pas alignés, les trois côtés du triangle OO′O″ sont sur S. Le plan de ce triangle coupe Δ en un point qui ne peut être sommet du triangle. Nous aboutissons à une impossibilité, puisque les seuls points irréguliers du plan sont O, O′ et O″. Il faut donc que les trois points soient sur une droite Δ', qui est alors irrégulière. Il est immédiat que S ne peut avoir de points irréguliers en dehors de Δ et Δ'. En résumé si S possède une droite irrégulière Δ, elle a en dehors de Δ' ou bien deux points irréguliers au plus, ou bien une seconde droite irrégulière, et c'est tout.

13. Nous allons nous débarrasser du cas où S a deux droites irrégulières. Soient Δ et Δ', je dis qu'elles sont concourantes. Supposons le contraire, il faut montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction. Remarquons d'abord que S ne peut posséder une droite L ne rencontrant ni Δ ni Δ'. En effet, toute droite rencontrant à la fois Δ, Δ' et L serait sur S, ce qui est impossible, car la droite engendre une quadrique réglée non décomposée [n° **5**]. D'autre part, il est immédiat que toute droite de S rencontrant l'une des droites irrégulières rencontre l'autre (sans quoi un plan couperait S suivant deux droites et un point). En résumé, il n'y a sur S que des droites rencontrant à la fois Δ et Δ'. Considérons alors une droite M rencontrant S en trois points : m, m' et m'', et en ces trois points seulement. Il existe une droite D passant par m et coupant Δ et Δ'. La section de S par le plan [D, M] contient en dehors de D les points m' et m''. Si elle contenait une seconde droite, celle-ci devrait rencontrer Δ et Δ', ce qui est impossible, la seule droite du plan rencontrant Δ et Δ' étant D. Le reste de l'intersection est donc un ovale Γ qui doit passer par les points δ et δ' où D coupe Δ et Δ', sans quoi δ et δ' ne seraient pas irréguliers. Soit maintenant γ un point de Γ. Le plan [Δ, γ] rencontre Δ' et donne une génératrice passant par γ. Faisons tendre γ vers δ en restant d'un même côté par rapport à δ sur l'ovale. La génératrice a une position limite obtenue en joignant δ au point d'intersection de Δ' avec le plan mené par Δ et la demi-tangente en δ à Γ du côté considéré. Mais le plan [Δ', D] ne peut contenir qu'une seule génératrice. Par suite, la demi-tangente est portée par $\delta\delta'$. En faisant tendre γ vers δ de l'autre côté, on obtient la même conclusion. L'ovale Γ touche $\delta\delta'$ en δ, ce qui est impossible car cette droite doit traverser l'ovale aux deux points distincts δ et δ' (nous avons supposé, ce qui est permis, le point δ à distance finie). En définitive, nous avons abouti à la contradiction annoncée. Les droites Δ et Δ' sont donc concourantes en un certain point O. On va en déduire aisément que S se réduit à un cône du troisième ordre du sommet O auquel est adjointe une droite isolée passant par le sommet. Prenons sur S un point m non situé sur Δ ou Δ', et par suite régulier. Il existe sur S une droite $m\mu$, joignant m à un point μ de Δ, et de même une droite $m\mu'$, où μ' est sur Δ'. Il s'agit de montrer que μ et μ' sont confondus en O. Supposons μ distinct de O. Si μ' était en O le plan $[\Delta, m]$ couperait S suivant deux droites en plus de Δ, ce qui est impossible [nº **9**]. μ' est donc distinct de O. Considérons alors le plan $\mu m \mu'$, il contient deux droites de S se croisant en un point régulier, chacune d'elles contenant un point irrégulier de S. Il faut donc que le plan contienne une troisième droite de S [nº **10**]. Mais pour que μ et μ' soient irréguliers, il faudrait que cette troisième droite soit $\mu\mu'$, ce qui est impossible. Ainsi par tout point m de S pris en dehors de Δ et Δ' passe une génératrice mO et une seule. Considérons alors une section plane de S, du troisième ordre et non décomposée, soit C. Cette courbe possède deux points irréguliers et deux seulement : δ et δ' respectivement sur Δ et Δ'. L'un d'eux, δ, par exemple est isolé [nº **1**, 5º]. Le cône [C, O] de sommet O et de directrice C, qui comprend une surface conique et une droite isolée Δ est sur S. D'autre part, il est immédiat que S ne possède pas d'autres points. En définitive nous avons obtenu la proposition suivante.

Si S *possède deux droites irrégulières, celles-ci sont concourantes, et* S *est la somme d'une surface conique du troisième ordre et d'une droite passant par le sommet.* Il est facile de montrer que toute section plane de S ne contenant pas le sommet est une courbe du troisième ordre ayant un point isolé sur la droite isolée et une épine sur l'autre droite irrégulière. Nous avons donné au numéro **5** un exemple de tel ensemble S.

Surfaces réglées non coniques du troisième ordre.

14. Il nous reste à étudier le cas où S possède une seule droite irrégulière Δ et peut-être deux autres points irréguliers au plus [nº **12**], en écartant le cas sans intérêt où S est un cône. Cette étude va être au fond celle des surfaces réglées non coniques du troisième ordre, car nous verrons au numéro **19** que si S est réglée sans être un cône elle possède une droite irrégulière et une seule. Je me bornerai d'ailleurs à l'examen des propriétés nécessaires pour démontrer que S *est une surface réglée engendrée par la variation continue d'une droite* (rencontrant Δ) *admettant partout un plan tangent continu, sauf le long de* Δ *et peut-être le long de deux génératrices limites*. Le plan tangent sera défini comme l'ensemble des tangentes au point considéré, ou bien si l'on préfère comme le paratingent. Le résultat annoncé est d'autant plus remarquable que nous n'avons fait aucune hypothèse sur l'existence de tangentes aux sections planes de S.

Supposons donc que S n'est pas un cône et possède une seule droite irrégulière Δ. Si S avait un point isolé nous le supprimerions. L'ensemble restant satisferait aux hypothèses faites sur S. Nous verrons d'ailleurs à la fin du présent numéro que dans le cas considéré ici l'existence d'un point isolé est impossible. Il résulte du numéro **12** que pour tout point m de S (débarrassé au besoin de son point isolé), point situé en dehors de Δ, il passe une génératrice et une seule, qui par suite varie continûment avec M, puisque S est fermé.

Pour commencer nous étudierons les sections de S par les plans contenant une génératrice donnée. J'établirai d'abord que S possède en dehors de Δ au plus une directrice rectiligne L. Supposons qu'il y en ait deux : L et L′. Ces droites n'étant pas des génératrices, ne rencontrent pas Δ. Si elles sont concourantes, leur plan contient en dehors de L et L′ un point de S situé sur Δ. Ce point est régulier pour S, ce qui est contradictoire avec le fait que Δ est irrégulière. Il est donc nécessaire de supposer L et L′ non concourantes. Elles définissent alors avec Δ une vraie quadrique dont les génératrices rencontrant Δ sont toutes sur S. Or ceci est impossible [n° **5**]. Il y a donc bien sur S au plus une directrice rectiligne en dehors de Δ.

Ceci posé considérons une génératrice D de S, coupant Δ en δ. Si toutes les génératrices passaient par ce point, S se réduirait à un cône du troisième ordre de sommet δ.

On pourra donc trouver deux autres génératrices distinctes D′ et D″ rencontrant Δ en δ' et δ'', distincts de δ, mais peut-être confondus entre eux. Il en résulte que D et D′ ne se rencontrent pas, ni D et D″.

D'autre part D' et D'' ne se rencontrent pas si δ' et δ'' sont distincts; s'ils sont confondus, un plan quelconque ne contenant pas δ' coupe D' et D'' suivant deux points distincts. Menons alors par D un plan P ne contenant pas Δ, il coupe D' et D'' en deux points différents hors de D : m' et m''. La section totale de S par P ne peut donc se réduire à D et un point isolé. Elle comporte donc en dehors de D un ovale ou bien une ou deux droites. Si l'on a une seule droite c'est mm', laquelle ne peut passer par δ, sans quoi le plan $[\Delta, m']$ contiendrait D' et $m'\delta$. Si l'on a deux droites, l'une au moins doit passer par δ(point irrégulier) et ne peut contenir ni m' ni m'', sans quoi $[\Delta, m']$ ou $[\Delta, m'']$ contiendrait deux génératrices. Ainsi tout plan P coupe S, en plus de D, suivant un ovale ou contient une droite L ne rencontrant pas Δ. Or on a vu qu'une telle droite est unique. Ce résultat montre que S ne peut avoir de point isolé. Supposons, en effet, que S ait été débarrassé d'un tel point, soit O. S'il n'y a pas de droite L, le plan [O, D] coupe l'ensemble S complet suivant un ovale et le point O. Si [O, D] contient une droite L, la section contient D, L et le point isolé O. Dans les deux cas la conclusion est contradictoire avec l'hypothèse faite sur les sections planes de S.

En résumé : *Si* S *n'est pas un cône et possède une seule droite irrégulière* Δ, 1° *par tout point m de* S *pris en dehors de* Δ, *passe une génératrice de* S *et une seule, variant continûment avec m;* 2° *tous les plans menés par une génératrice donnée et ne contenant pas* Δ, *sauf un au plus, coupent* S *suivant la génératrice et un ovale*. L'exception n'a lieu que si S possède une seconde directrice rectiligne L; comme toute génératrice rencontre L, le plan exceptionnel pour une génératrice est celui qui contient L.

15. Nous allons approfondir la relation entre une génératrice donnée D et les ovales situés dans les plans la contenant. Soit Γ l'un d'eux, situé dans le plan P. Désignons par δ le point commun à D et Δ. Γ et D se coupent en δ, car ce point doit être irrégulier pour la section de S par P. De deux choses l'une : ou bien Γ et D ont un second point commun, ou bien Γ touche D en δ. Examinons successivement ces deux alternatives. Nous serons conduit à des conclusions essentielles pour notre objet.

Supposons d'abord que Γ coupe D en un second point : μ. Pour fixer les idées, je supposerai (ce qui est permis) que Γ est entièrement à distance finie. Prenons sur D entre δ et μ un point a, et menons par ce point un plan R parallèle à Δ, mais distinct de [D, Δ], dont l'intersection avec P est la droite A. Cette droite A coupe D et Γ en trois points distincts. La section de S par R traverse donc A en a [nº **4**]. Mais elle traverse également la parallèle à Δ menée par a, sans quoi le point à l'infini de Δ serait régulier pour S. On peut par suite prélever sur la section de S par R un petit arc $\widehat{a' a''}$, ayant a à son intérieur et tel que $\widehat{a' a}$ et $\widehat{a a''}$ soient de part et d'autre de P, a étant d'ailleurs le seul point de l'arc dans P. On en déduit immédiatement que si Q′ et Q″ sont deux plans menés par Δ, voisins de [Δ, D] et situés de part et d'autre de ce plan, les génératrices D′ et D″ qu'ils contiennent rencontrent Δ en des points δ' et δ'', situés de part et d'autre de δ.

Considérons maintenant le cas où Γ touche D en δ. Comme plus haut supposons Γ tout entier à distance finie. Prenons dans P une droite A coupant Γ et D en trois points distincts, cette dernière en a. Sur la section de S par le plan mené par A parallèlement on peut encore prélever un petit arc $\widehat{a' a''}$ possédant les mêmes propriétés que tout à l'heure. On en déduit d'abord que les demi-tangentes à Γ en δ sont portées par D, autrement S contiendrait un élément de cône de sommet δ, et par suite [nº **7**] contiendrait un cône du troisième ordre, ce qui est contraire à l'hypothèse. On voit également que si Q′ et Q″ sont des plans menés par Δ, voisins de [Δ, D] et situés de part et d'autre de ce plan, les génératrices qu'ils contiennent rencontrent Δ en des points δ' et δ'' situés d'un même côté de δ.

Les remarques précédentes montrent qu'il y a sur S deux sortes de génératrices, pouvant se distinguer de la manière suivante. Soit D une génératrice rencontrant Δ en δ. Considérons les génératrices D′ et D″ situées dans deux plans voisins de [Δ, D] et placées de part et d'autre de ce plan. Désignons par δ' et δ'' les intersections de D′ et D″ avec Δ. Si δ' et δ'' sont de part et d'autre de δ, je dirai que D est une génératrice ordinaire, si δ' et δ'' sont d'un même côté de δ, je dirai que D est une *génératrice limite*. Nous savons déjà [nº **14**] que les plans passant par D, sauf un ou deux, coupent S, en dehors de D, suivant un ovale. Nous pouvons affirmer maintenant que ces ovales rencontrent tous D en deux points distincts, ou bien la touchent en δ, suivant que D est une génératrice ordinaire ou une génératrice limite.

Je vais compléter ce dernier résultat en montrant que S *a zéro ou deux génératrices limites*. Il suffira d'établir que si S possède une génératrice limite D_1, elle en possède une seconde et une seconde seulement. Soit δ_1 l'intersection de D_1 avec Δ. Coupons S par un plan P_1, contenant D_1, de manière à avoir un ovale Γ_1. Cet ovale, que nous supposerons tout entier à distance finie, admet en δ_1 deux demi-tangentes opposées portées par D_1. A tout point μ de Γ_1 correspond une génératrice et une seule, soit δ son point de rencontre avec Δ. Lorsque μ parcourt Γ_1 la génératrice $\mu\delta$ varie d'une manière continue, elle tend vers D_1 quand μ tend vers δ_1. L'ensemble des positions de δ est donc un continu (projectif) γ situé sur Δ. Mais on peut trouver sur Γ_1 deux points μ' et μ'', voisins de δ_1 et situés de part et d'autre de ce point, tels que l'ensemble des positions de δ correspondant aux points μ de l'arc $\widehat{\mu' \mu''}$ soit un segment $\delta_1\delta'$ de Δ. Prenons sur cette droite un point δ_0 voisin de δ_1 et situé du côté opposé à δ'. Si δ_0 est assez près de δ_1, aucune position de δ correspondant aux points de Γ_1 n'appartenant pas à $\widehat{\mu' \mu''}$ ne se trouvera sur $\delta_0\delta_1$, sans quoi il existerait dans P_1 une seconde génératrice de S, ce qui est impossible. Il en résulte que γ est un segment de Δ (à une homographie près), dont la seconde extrémité : δ_2, correspond à une seconde génératrice limite D_2.

16. Avant d'aller plus loin je vais montrer que S (toujours dans l'hypothèse énoncée au numéro **14**) est une surface réglée engendrée par la variation continue des génératrices. En même temps nous verrons que S peut appartenir à deux types différents, analogues à ceux que l'on rencontre dans l'étude des surfaces réglées du troisième degré.

Examinons d'abord le cas où S possède en plus de Δ une seconde directrice rectiligne L. A tout point l de L correspond une génératrice et une seule, rencontrant Δ en un point δ. Lorsque l décrit L, la génératrice $l\delta$ varie d'une manière continue et engendre une surface réglée. Pour étudier plus commodément la correspondance entre δ et l, considérons une génératrice ordinaire D_0 et un plan P_0, contenant cette droite et un ovale Γ_0, situé sur S. Cet ovale rencontre D_0 en δ_0 sur Δ et en un second point μ_0. Désignons par l_0 l'intersection de L avec P_0. Ce point ne peut être sur Γ_0. Il faudrait qu'il soit confondu avec μ_0, ce qui, on va le voir, est impossible. En effet, prenons sur l'ovale un point μ voisin de l_0 et restant d'un même côté. Le plan $[\Delta, \mu]$ contient une génératrice, laquelle (lorsque μ tend vers μ_0 confondu avec l_0) tend vers l'intersection de $[\Delta, \mu_0]$ et du plan défini par L et la demi-tangente en l_0 à Γ_0 pour le côté considéré. Cette intersection étant distincte de D_0, puisque L n'est pas dans P_0, on aboutit à une contradiction. Le point l_0 est donc bien distinct de μ_0. D'autre part, comme le plan $[L, \delta_0]$ contient au plus deux génératrices, il faut que les deux demi-tangentes à Γ_0 en δ_0 soient confondues. Il en résulte qu'à tout point μ de Γ_0 correspond une génératrice définie par μ et l'intersection du plan $[\Delta, \mu]$ avec L. Lorsque μ est en δ_0, on remplace $\delta_0\mu$ par la tangente en δ_0 à Γ_0. Ceci posé, on obtiendra les génératrices passant par un point δ donné sur Δ, en prenant les intersections de Γ_0 avec le plan $[\delta, L]$. Pour préciser davantage il faut distinguer suivant que l_0 est extérieur ou intérieur à Γ_0. Considérons d'abord la première hypothèse. Il existe alors deux droites issues de l_0 qui touchent Γ_0 respectivement en μ_1 et μ_2. Lorsque μ parcourt Γ_0 le plan $[L, \mu]$ rencontre Δ en un point δ qui décrit un continu γ dont les extrémités sont les points δ_1 et δ_2 correspondant à μ_1 et μ_2. $\mu_1\delta_1$ et $\mu_2\delta_2$ sont deux génératrices limites. Par tout point de Δ passent deux, une ou zéro génératrices, suivant que le point est intérieur à γ, ou extrémité de ce continu ou bien lui est extérieur. Dans le cas où l_0 est intérieur à Γ_0, tout point de Δ appartient à deux génératrices distinctes. Il n'y a pas de génératrice limite. Dans les deux cas la correspondance entre l et δ est une correspondance (2, 1); mais cette correspondance n'est pas quelconque; d'abord elle est continue, d'autre part on voit aisément que le rapport anharmonique de quatre points δ est toujours différent de celui des quatre points l correspondants. Cette dernière condition exige que Γ_0 soit rencontrée en quatre points au plus par toute conique passant par δ_0 et l_0. Il est facile de montrer également que si l'on se donne Δ, L et Γ_0 satisfaisant aux conditions précédentes, les droites qui rencontrent à la fois ces trois directrices engendrent une surface du troisième ordre. Avant d'examiner le cas où S ne possède qu'une seule directrice rectiligne, nous remarquerons que si D_1 est une génératrice limite, en tout point de celle-ci non situé sur Δ, S est au voisinage de ce point d'un même côté par rapport au plan $|L, D_1|$.

16 *bis*. Supposons maintenant que S n'ait pas d'autre directrice rectiligne que Δ. Remarquons d'abord que deux génératrices distinctes ne peuvent se couper sur Δ, car tout plan contenant une génératrice, mais pas Δ, coupe S suivant cette génératrice et un ovale [n° **14**]. Considérons alors quatre génératrices : D_1, D_2, D_3, D_4. Deux quelconques d'entre elles ne se coupent pas, et d'autre part il n'y pas d'autre droite que Δ les rencontrant toutes quatre, car une telle droite ayant quatre points sur S serait une directrice rectiligne. Les quadriques définies par trois quelconques des droites D_i se raccordent donc le long de Δ. Soit q le point de contact d'un plan Q, mené par Δ, avec ces quadriques. Il y a entre q et Q une correspondance homographique. En laissant fixes trois des génératrices D_i et en faisant varier la quatrième on voit que si le plan Q contient une génératrice, celle-ci passe par q. De là résulte en particulier que S ne possède dans ce cas aucune génératrice limite. Soit alors D_0 une génératrice dont le point d'intersection avec Δ est δ_0, et un plan P_0 coupant S, en dehors de D_0, suivant un ovale Γ_0. Cet ovale rencontre D_0 en δ_0 et un second point μ_0. A chaque point μ de Γ_0 correspond une génératrice et une seule. On voit immédiatement que si l'on considère Δ comme la génératrice de δ_0, la génératrice de μ varie d'une manière continue quand μ décrit Γ_0. S est donc encore une surface réglée au sens ordinaire. Le lecteur vérifiera sans peine que Γ_0 est rencontrée en quatre points au plus par toute conique tangente à D_0 en δ_0, et que cette condition, ajoutée à la relation homographique entre Q et q, détermine avec Γ_0 une surface réglée du troisième ordre.

17. Je vais maintenant établir que S possède un plan tangent en tout point de chaque génératrice ordinaire, non situé sur Δ. Pour cela j'utiliserai mon Théorème sur les tangentes et les demi-tangentes en un point d'une surface simple de Jordan [1]. Une partie des conclu-

[1] A. MARCHAUD, *Sur le contingent et le paratingent en un point d'une*

sions de ce Théorème peut s'énoncer ainsi : Soit J_m un morceau de surface simple de Jordan à pente bornée par rapport aux plans perpendiculaires à une droite M, issue d'un point m intérieur à J_m. Il existe un demi-cône convexe (plein) $\mathcal{C}_m$, de sommet m pouvant se réduire à un dièdre ou à un demi-espace (défini à une symétrie près par rapport à m), et tel que l'ensemble des tangentes en m à J_m soit celui des droites (passant par ce point) n'ayant aucun point à l'intérieur de $\mathcal{C}_m$.

Une tangente à J_m en m est une droite d'accumulation d'une suite de sécantes de $m'm''$ lorsque les points m' et m'' de J_m tendent vers m. Le résultat qui vient d'être rappelé peut encore se formuler de la manière suivante : les tangentes en m sont les droites (issues de m) des plans d'appui de $\mathcal{C}_m$. Lorsque ce demi-plan est un demi-espace, le faisceau des tangentes en m est le plan d'appui unique, c'est *le plan des tangentes* en m. Enfin il résulte immédiatement de la définition des tangentes que si le faisceau des tangentes est partout un plan, celui-ci varie d'une manière continue.

D'autre part il est immédiat que toute droite issue de m et rencontrant S en trois points et trois seulement a des points intérieurs à $\mathcal{C}_m$, car elle peut jouer le rôle de M, [6]. Cette remarque jouera un rôle essentiel dans toutes les démonstrations relatives à l'existence du plan tangent.

Ceci posé, soient D une génératrice ordinaire de S, et P un plan passant par D, mais ne contenant aucune directrice rectiligne. P coupe S, en dehors de D, suivant un ovale Γ, qui rencontre D en deux points distincts δ et μ, le premier sur Δ. Je vais montrer qu'à deux plans distincts correspondent deux points μ distincts. Supposons que les ovales Γ et Γ', situés dans les plans P et P' passent par μ. Nous ferons en sorte (ce qui est possible) que ce point soit à distance finie. Considérons un plan passant par Δ, et tendant vers $[\Delta, \mu]$ en restant d'un même côté. Ce plan coupe Γ et Γ', en dehors δ, respectivement en p et p'. La droite joignant ces deux points est la génératrice du plan. Mais cette droite a pour limite l'intersection du plan, défini par les

surface simple de Jordan (*Comptes rendus Acad. Sc.*, **208**, 11 janvier 1937, p. 86).

demi-tangentes à Γ et Γ' pour le côté considéré, avec $[\Delta, \mu]$, et cette intersection ne peut être confondue avec D. Nous sommes conduit à une contradiction, car le plan $[\Delta, \mu]$ contient deux génératrices. En définitive, par tout point d'une génératrice ordinaire, non situé sur Δ, passe au plus un ovale (situé sur S et dont le plan contient la génératrice). On en déduit immédiatement que tous les point de S n'appartenant pas à Δ sont réguliers, car il existe toujours dans un plan contenant la génératrice de ce point un ovale ne passant pas par ce point.

Soit m un point d'une génératrice ordinaire D, non situé sur Δ. Ce point étant régulier le résultat rappelé au début du présent numéro s'applique, et de plus toute droite issue de m rencontrant S exactement en trois points a l'une de ses demi-droites intérieures à $\mathcal{C}_m$ (ceci suppose bien entendu le point m à distance finie). Considérons les sections de S par les plans contenant D. Toutes sauf deux au plus [nº **14**] contiennent un ovale rencontrant D en deux points distincts. Comme l'un au plus passe par m, on peut affirmer que tous les plans contenant D, sauf trois au plus, coupent S en dehors de D suivant un ovale ne passant pas par m, et rencontrant D en deux points distincts. Soit P un de ces plans, il coupe $\mathcal{C}_m$ suivant un angle dans lequel la droite D, qui est une tangente en m, peut pénétrer. Si m est intérieur à l'ovale, toutes les droites de P passant par m, sauf D, coupent S en trois points exactement. Elles pénètrent donc dans l'angle en question. Celui-ci est par suite un demi-plan d'arête D. Supposons m extérieur à l'ovale. Puisque celui-ci rencontre D en deux points distincts, on peut trouver un nombre positif ε tel que toute droite de P, issue de m, distincte de D et faisant avec elle un angle moindre que ε ne soit pas tangente. Ceci exige encore que la section de C_m par P soit encore un demi-plan d'arête D. En résumé, tous les plans contenant D, sauf trois au plus, coupent le demi-cône convexe $\mathcal{C}_m$ suivant un demi-plan d'arête D. $\mathcal{C}_m$ est donc nécessairement un demi-espace. La démonstration est achevée. On peut ajouter que le plan tangent en m coupe S suivant la génératrice de m et un ovale passant par m, sauf dans le cas où ce point se trouve sur une directrice rectiligne L. En tout point de L, le plan tangent est défini par cette droite et la génératrice du point.

En définitive, nous avons obtenu le théorème suivant. *Si* S *n'est pas un cône et possède une seule droite irrégulière, c'est une surface réglée*

(engendrée par la variation continue d'une droite) admettant un plan tangent partout, sauf le long de la droite irrégulière et peut-être le long de deux génératrices limites. De plus le plan tangent varie d'une manière continue avec le point de contact.

On peut se demander si la restriction relative aux génératrices limites ne serait pas due à l'imperfection du procédé de démonstration. Je vais montrer par exemple qu'il n'en est rien. Considérons la surface (Σ) ayant pour équation

$$(\Sigma) \qquad |xy|\,t + y^2 t - x^2 z = 0,$$

dans un système de coordonnées tétraédrales (x, y, z, t). Cette surface est engendrée par la droite variable D, d'équations

$$y = mx, \qquad z = [m^2 + |m|]\,t.$$

Cette droite rencontre les deux directrices rectilignes

$$\Delta[x = 0, y = 0] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{L}[z = 0, t = 0]$$

en des points qui sont en correspondance (2, 1) continue. Pour vérifier que (Σ) est du troisième ordre, il suffit de constater que le rapport anharmonique de quatre valeurs distinctes de m n'est jamais égal à celui des valeurs correspondantes de $m^2 + |m|$, ou encore que, en axes rectangulaires m, m', la courbe $\Pi[m' = m^2 + |m|]$ est rencontrée à distance finie en trois points au plus par toute hyperbole équilatère $\mathcal{H}\left[m' = \dfrac{\mathrm{A}m + \mathrm{B}}{\mathrm{C}m + \mathrm{D}}\right]$. Il est un ovale composé de deux arcs de paraboles P et P′. Ces arcs, symétriques par rapport à l'axe des m', ont en commun l'origine des coordonnées O. Chacun d'eux a trois points au plus à distance finie sur toute $\mathcal{H}$, puisque ceci a lieu pour la parabole entière, qui contient l'arc. De plus il est évident que si l'un des arcs, P par exemple, rencontre une $\mathcal{H}$ en trois points à distance finie, ils sont sur la même branche de $\mathcal{H}$, et que l'autre branche ne rencontre pas P′ à distance finie. La conclusion subsiste si deux des points étaient confondus. Si donc Π et une $\mathcal{H}$ ont trois points communs sur un même arc : P ou P′, les deux courbes n'ont pas d'autre point commun à distance finie. Il suffira donc d'examiner le cas où $\mathcal{H}$ rencontre P en deux points et P′ en deux autres points, aucun d'eux n'étant confondu avec O. D'après ce qui précède Π et $\mathcal{H}$ ne peuvent être tangentes en l'un quelconque de ces quatre points. D'autre part elles ne sont pas tangentes à l'infini. Comme elles ont un nombre impair de points communs on aboutit à une contradiction. La surface (Σ) est donc bien du troisième ordre. La génératrice [$y=0$, $z=0$], correspondant à $m=0$, est une génératrice limite. Soit $m_0(x_0, 0, z_0, 0)$ un point de cette droite. Les coefficients du plan tangent en ce point suivant que l'on prend xy positif ou négatif au voisinage de m_0 sont; $0, x_0t_0, x_0^2, 0$; et $0, -x_0t_0, x_0^2, 0$. Il n'y a donc pas de plan tangent unique le long de la génératrice.

18. Le théorème établi au numéro précédent va nous permettre de montrer (toujours dans le cas où cet ensemble n'est pas un cône et contient une seule droite irrégulière Δ) que les sections planes de S ont nécessairement une tangente partout continue, à quelques exceptions près, qui vont être précisées. Soit P un plan coupant S suivant une courbe C. Tout point m de cette courbe, non situé sur Δ, est régulier, et si m n'est pas sur une génératrice limite, S possède un plan tangent en m, lequel contient la génératrice de ce point. Si donc le plan P ne contient aucune génératrice de S, C possède en tout point (non situé sur Δ ou sur les génératrices limites, s'il y en a), un point simple où les demi-tangentes sont opposées (sans quoi le plan P contiendrait une infinité de tangentes en un point et serait alors le plan tangent en ce point). Pour un point situé sur une génératrice limite, la remarque faite à la fin du n° **16** permet d'affirmer que ce point est simple. Supposons maintenant que le plan P contienne une génératrice D et un ovale Γ. Si Γ coupe D en deux points distincts, P est le plan tangent en celui de ces deux points non situé sur Δ. Pour conclure d'une manière précise, il faut distinguer deux cas suivant que S possède ou non une seconde directrice rectiligne. Dans le premier cas Γ possède une tangente partout sauf peut-être au point de contact de P et des intersections de ce plan avec les génératrices limites, s'il y en a. Dans le second cas Γ possède une tangente partout sauf peut-être sur D. Si enfin Γ touche D, cette dernière est une génératrice limite, et l'ovale a au plus un point anguleux : le point situé sur la seconde génératrice limite.

Je terminerai ces considérations par un exemple qui montrera que S peut avoir un plan tangent partout (sauf sur Δ) et contenir des ovales à point anguleux. Considérons la surface (U) d'équation

$$(\mathrm{U}) \qquad [x^2+2|xy|+y^2]z-xyt=0.$$

Cette surface est engendrée par la variation de la droite D, d'équations

$$\mathrm{D} \qquad y=mx, \qquad t=m'z \qquad \text{avec} \qquad m'=\frac{m^2+2|m|+1}{m}.$$

Cette relation représente deux branches H et H′ symétriques par rapport à l'origine, appartenant à deux hyperboles $\mathrm{H}+\mathrm{H}_1$ et $\mathrm{H}'+\mathrm{H}'_1$, elles-mêmes symétriques par rapport au même point. Pour montrer que (U) est du troisième ordre, il suffira de vérifier que $\mathrm{H}+\mathrm{H}'$ possède au plus trois points à distance finie sur toute hyperbole $\mathcal{H}\left[m'=\dfrac{\mathrm{A}m+\mathrm{B}}{\mathrm{C}m+\mathrm{D}}\right]$. Considérons d'abord le cas où $\mathcal{H}$ admet $m=0$ comme asymptote. Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{H}$ avec H et H′ sont donnés respectivement par les conditions

$$m^2-(\mathrm{B}-2)m+1-\mathrm{A}=0, \qquad m>0,$$
$$m^2-(\mathrm{B}+2)m+1-\mathrm{A}=0, \qquad m<0.$$

Si la première équation a deux racines positives, la seconde ne peut avoir deux racines négatives. Il y a donc au plus trois racines acceptables. Supposons maintenant que $\mathcal{H}$ n'admette pas $m=0$ comme asymptote. $\mathcal{H}$ possède à distance finie trois points au plus sur $\mathrm{H}+\mathrm{H}_1$ et $\mathrm{H}'+\mathrm{H}'_1$, et par conséquent sur H et sur H′. D'autre part, si nous considérons la fermeture de l'ensemble des points intérieurs à la branche H′ nous obtenons un domaine fermé contenant H. Si $\mathcal{H}$ possède à distance finie un point sur H, l'arc de $\mathcal{H}$, joignant ce point au point à l'infini de l'axe des m, sans passer par le point à l'infini de l'axe des m', rencontre la frontière du domaine en un point au moins, qui est nécessairement sur H'_1 et à distance finie. En résumé, si $\mathcal{H}$ possède un point au moins, à distance finie, sur H, il en possède un au moins sur H'_1. On a un résultat analogue pour H_1 et H′. Ceci posé, considérons les points à distance finie communs à $\mathcal{H}$ et $\mathrm{H}+\mathrm{H}'$. S'il y en a trois sur H, il n'y en a pas sur H′, autrement il y aurait un point au moins sur H, ce qui est impossible. La conclusion subsiste si l'on a deux points dont l'un avec contact. Supposons maintenant qu'il y ait deux points sur H et deux sur H'. D'après ce qui précède, $\mathcal{H}$ traverse $H + H'$ en chacun de ces quatre points, comme elle traverse aussi cet ovale à l'infini, on a une contradiction. La surface (U) est donc bien du troisième ordre. Or il est immédiat que le plan $x = z$ la coupe suivant la génératrice $x = z = 0$, et un ovale, défini par

$$x^2 + 2|xy| + y^2 - yt = 0,$$

ovale ayant un point anguleux de coordonnées (0, 1, 0, 1).

19. Pour compléter les résultats obtenus depuis le n° **14**, je vais montrer que si S est réglée et non conique, elle possède une droite irrégulière et une seule. Il suffira de montrer qu'elle en possède au moins une [n° **13**]. Dire que S est réglée, c'est dire que par chacun de ses points il passe au moins une droite située sur S. Je remarquerai pour commencer que par tout point régulier passent au plus deux de ces droites. Soient a un point régulier (que nous supposerons à distance finie), et D, D' et D'' trois droites de S se croisant en ce point. a est intérieur à un morceau de surface simple de Jordan J_a, se projetant orthogonalement d'une manière biunivoque sur un plan P suivant un cercle j, centré sur la projection de a. On peut choisir J_a assez petit pour qu'il ne contienne aucun point des droites qui pourraient éventuellement rencontrer en dehors de a deux des droites D, D' et D''. D'autre part, si j' est un cercle concentrique assez petit, toute droite de P ne passant par le centre de j' et contenant un point de ce cercle rencontre forcément les projections de deux des droites D, D' et D'' à l'intérieur de j. Considérons alors les points de J_a qui se projettent suivant j', chacun d'eux n'est pas sur une droite de S issue de a, sans quoi S serait un cône [n° **7**]. Il y a donc un point au moins par lequel passe une droite de S ne contenant pas a. D'après ce qui vient d'être dit cette droite rencontre deux des droites D, D' et D'', ce qui est en contradiction avec la manière dont a été choisi J_a.

Ceci posé, supposons que S ne possède aucune droite irrégulière; il s'agit de montrer que cette hypothèse est contradictoire avec le fait que S est réglée. Soit D une droite de S, je dis que tous les plans contenant D, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, coupent S suivant D et un ovale. Il suffira d'établir qu'un plan au moins possède la propriété. En effet, soit P_0 un plan coupant S suivant la droite D et un ovale Γ_0. A chaque point m_i^0 de Γ_0, non situé sur D, correspond au moins une droite D_i de S ne rencontrant pas D. Considérons alors cinq points m_i^0 et coupons S par un plan passant par D. Nous obtenons sur chaque droite D_i un point m_i. Il est immédiat que le nombre des positions de P pour lesquels les points m_i ne sont pas tous distincts est fini. Je dis que le nombre des positions pour lesquelles trois au moins des points m_i distincts sont alignés est également fini. Considérons par exemple, trois droites distinctes : D_1, D_2, D_3. Il ne pourrait y avoir une infinité de droites rencontrant à la fois D_1, D_2, D_3 et D que si ces quatre droites étaient sur une même quadrique réglée, mais alors m_1^0, m_2^0, m_3^0 seraient alignés. Ainsi tous les plans P, sauf peut-être un nombre fini, coupent les cinq droites D_i en cinq points m_i tous distincts dont trois quelconques ne sont pas alignés. Le reste de la section de S par P ne peut donc se composer de droites, c'est par suite un ovale.

Il reste à prouver qu'un plan au moins contient D et un ovale situé sur S. S'il en est autrement, tout plan passant par D coupe S suivant des droites ou bien suivant une droite et un point isolé. Soit alors m un point de S pris en dehors de D. Il y a au voisinage de m des points réguliers. En raisonnant comme au numéro **12**, on verra qu'il existe des plans passant par D et aussi voisins que l'on veut de $[D, m]$, coupant S suivant une ou deux droites en dehors de D. Par suite tout plan $[D, m]$ coupe S suivant D et une ou deux droites. La première circonstance ne peut avoir lieu pour tout point m sans que D soit irrégulière. Il suffit donc d'examiner le cas où un certain plan $[D, m_0]$ coupe S, en plus de D, suivant deux droites distinctes : D'_0 et D''_0. Considérons un plan Q rencontrant D, D'_0, D''_0 en trois points distincts : d, d'_0, d''_0. La section de S par Q est du troisième ordre et traverse la droite $dd'_0d''_0$ en chacun des trois points [n° **2**]. On peut prélever sur cette section deux petits arcs $\widehat{d'_0d'_1}$ et $\widehat{d''_0d''_1}$, limités par les plans $[D, d'_0]$ et $[D, d'_1]$. Si d' est un point quelconque de $\widehat{d'_0d'_1}$ le plan $[D, d']$ coupera S, en plus de D, suivant deux droites D′ et D″ rencontrant respectivement les arcs $\widehat{d'_0 d'_1}$ et $\widehat{d''_0 d''_1}$ en d' et d'', pourvu que les plan [D, d'_0] et [D, d'_1] soient suffisamment voisins, car la droite $d'd''$ ne peut être sur S quel que soit d' voisin de d'_0, S étant fermé. Dans ces conditions D′ et D″ décrivent par suite des surfaces simples de Jordan (en raison du fait que S est fermé). Si D'_0 et D''_0 se croisent en dehors de D, ces surfaces simples se croisent le long du lieu de l'intersection de D′ et D″, ce qui implique une infinité de points irréguliers, et par suite une droite irrégulière [n° **11**]. Supposons que D'_0 et D''_0 se croisent sur D en un point O. Ce point est irrégulier pour S [n° **19**, début], et c'est le seul sur D. Si pour une certaine position de d' les droites D′ et D″ se croisent en dehors de D, on retombe sur le cas précédent. Si D′ et D″ se croisent toujours sur D, ce ne peut être qu'en O, et alors S contenant un élément de cône serait un cône [n° **7**], ce qui est contraire à notre hypothèse (nous avons supposé les points d, d'_0 et d''_0 à distance finie, ce qui est permis).

En définitive nous savons que si S est réglée, mais non conique, et ne possède pas de droite irrégulière, tous les plans passant par une droite donnée de S, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, coupent S suivant cette droite et un ovale. La démonstration s'achèvera aisément. De ce qui précède, il résulte que l'on peut trouver sur S quatre droites ne se rencontrant pas deux à deux. En effet, soit D une droite de S. Coupons par un plan P contenant D et un ovale Γ. Prenons sur Γ un point m_1, par ce point il passe au moins une droite de S, soit D_1, droite qui ne peut rencontrer D. Le nombre des plans contenant D_1 et ne coupant pas S suivant un ovale est fini, on peut donc trouver sur Γ un point m_2 situé sur une droite D_2 de S, ne rencontrant ni D ni D_1, et de la même manière un point m_3 contenant une droite D_3 de S ne rencontrant aucune des droites D, D_1, D_2. Il existe au moins une droite D′ rencontrant les quatre droites D, D_1, D_2, D_3, et qui par suite se trouve sur S. Les quatre points de rencontre de D′ avec les quatre droites précédentes ne peuvent être tous irréguliers, sans quoi D′ serait irrégulière [n° **9**]. Supposons, par exemple, que le point a commun à D et D′ soit régulier, et — ce qui est permis — à distance finie. Le voisinage de a est un morceau de surface simple de Jordan J_a, se projetant suivant un cercle j sur un certain plan Π. j est centré sur la projection de a. On peut trouver un cercle concentrique j' assez petit pour que toute droite du plan Π ayant un point dans j' rencontre dans j les projections de D et D'. Autrement dit, si J'_a est le morceau de J_a se projetant sur j', toute droite de S ayant un point sur J'_a rencontre D ou D'. Il en résulte nécessairement l'existence d'une infinité de plans passant par D ou D', ne contenant aucun ovale de S, ce qui, on l'a vu, est impossible.

En résumé, il est bien établi que *si tout point de* S *contient une droite située sur l'ensemble,* S *est un cône ou bien une surface réglée non conique à laquelle s'appliquent* les résultats des numéros **14** à **18** inclus. Il est probable que si S possède une infinité de droites, cet ensemble est un cône ou la somme d'un cône et d'un ovoïde, ou bien une surface réglée non conique. La question reste posée.

20. Je terminerai ce Travail par quelques remarques sur les plans tangents aux surfaces non réglées (du troisième ordre). Dans sa thèse (citée plus haut), troisième partie, M. Haalmeyer a montré que si les sections planes d'une surface du troisième ordre S ont partout une tangente, les *demi-tangentes* en tout point a de S non situé sur une droite de cette surface sont dans un même plan, sauf peut-être pour une position exceptionnelle de a. La méthode de M. Haalmeyer est assez compliquée. Nous allons obtenir beaucoup plus simplement des résultats plus complets.

Soit S un ensemble satisfaisant à la définition du n° **5**. Considérons un point régulier m de S et une section plane C passant par m. Supposons que C possède en m deux demi-tangentes opposées et soit convexe en ce point; ce qui veut dire que m est un point simple et que C reste d'un même côté de la tangente T en m au voisinage de ce point. Désignons par P le plan de C. Toute droite de P, passant par m, et suffisamment voisine de T traverse C en m et en un point voisin; elle la traverse donc en un troisième, et par suite pénètre à l'intérieur de $\mathcal{C}_m$ (les notations étant les mêmes qu'au numéro **17**). On en déduit que la section de $\mathcal{C}_m$ par P est un demi-plan d'arête T. Autrement dit : $\mathcal{C}_m$ est un dièdre d'arête T ou un demi-espace limité par un plan contenant T. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante : *Si en un point régulier m d'une surface du troisième ordre se croisent deux sec-*

tions planes, chacune d'elles à demi-tangentes opposées en m et convexe en ce point, la surface possède en m un plan unique de tangentes : celui des deux tangentes, sous la seule condition que celles-ci soient distinctes.

Supposons maintenant que toute section plane de S possède en chacun de ses points réguliers deux demi-tangentes opposées. Le résultat précédent ne permet pas d'affirmer l'existence d'un plan unique de tangentes en tout point régulier de S. Il peut arriver, en effet, qu'aucune des sections planes passant par un point régulier donné ne soit convexe en ce point; la surface $z = x^2y + x^3$ en fournit un exemple pour l'origine des coordonnées. Soit donc m un point régulier et supposons que ce point ne soit pas le sommet d'un cône appartenant à S (¹). (S pourrait se réduire à un cône et un ovoïde). Il existe une droite M passant par m rencontrant S en trois points distincts. Le voisinage de m sur S est un morceau de surface simple de Jordan J_m à pente bornée par rapport aux plans perpendiculaires à M. Les sections de S par les plans contenant M ont en m un point régulier pour chaque section. Si deux d'entre elles sont convexes en m, il y a en ce point un plan unique de tangentes. Il suffira donc de considérer le cas où toutes ces sections, sauf peut-être une, ont en m une inflexion ou bien contiennent une droite passant par ce point. Supposons que le plan des tangentes ne soit pas unique et soit $\mathcal{C}_m$ le demi-cône considéré plus haut, $\mathcal{C}'_m$ son opposé par le sommet. Le faisceau des tangentes en m est celui des droites issues de m ne pénétrant pas à l'intérieur de $\mathcal{C}_m$. D'autre part, M pénètre à l'intérieur de ce demi-cône. Soit alors R un demi-plan d'arête M; il coupe les frontières respectives de $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}'_m$ suivant deux demi-droites $m\theta$ et $m\theta'$. Dans le plan portant R toutes les tangentes en m à J_m, c'est-à-dire à S, sont les droites issues de m ayant des points dans l'angle $\theta m \theta'$ (frontière comprise). De plus $m\theta$ et $m\theta'$ ne peuvent être confondues que si $\mathcal{C}_m$ est un dièdre et seulement sur l'arête de celui-ci. Ceci posé, désignons par c la section de J_m, par R et par mt le demi-tangente en m à c. Cette demi-tangente étant unique [n° 1] on sait que mt engendre une surface conique quand R tourne autour

(¹) Ici comme un peu plus haut nous supposons m à distance finie, ce qui est permis.

de M(1). L'ensemble $\{mt\}$ est donc fermé. Donnons-nous une position R_0 de R. Supposons d'abord que c_0 ne soit pas un segment de droite; alors toute droite joignant m à un point voisin de c_0 traversera la section totale de S par le plan qui porte R_0 en trois points distincts, elle est donc extérieure à l'angle $\theta_0 m \theta'_0$. Comme elle est aussi voisine qu'on veut du support de mt_0, qui est une tangente, il faut que mt_0 soit confondue avec $m\theta_0$ ou $m\theta'_0$. Supposons maintenant que c_0 soit un segment de droite. On peut trouver un demi-plan R, aussi voisin qu'on veut de R_0 et tel que c ne soit pas un segment de droite, sans quoi S contiendrait un élément de cône du troisième ordre [nº 7], ce qui est contraire à l'hypothèse. Comme l'ensemble $\{mt\}$ est fermé on déduit de ce qui précède que mt_0 est encore sur $m\theta_0$ ou $m\theta'_0$. En résumé, la surface conique engendrée par mt est tout entière sur les frontières de $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}'_m$. Si $\mathcal{C}_m$ n'est pas un dièdre les frontières n'ont pas de demi-droite commune, et l'on aboutit à la contradiction, puisque les demi-droites mt sont deux à deux opposées. Reste à examiner le cas où $\mathcal{C}_m$ est un dièdre. Soient alors Q_1 et Q_2 les deux plans frontières de $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}'_m$. Il est immédiat que le lieu de mt est l'un de ces plans, Q_1 par exemple. Soit c un des arcs précédemment définis, dont le plan ne contient pas la droite D, commune à Q_1 et Q_2. Si cet arc n'est pas un segment de droite il est, par rapport à Q_1, du côté opposé à celui de celles des demi-droites $m\theta$ et $m\theta'$ qui n'est pas sur Q_1. D'autre part l'arc c' dont le demi-plan est opposé à celui de c est du côté opposé à celui de c. On en déduit que D partage Q_1 en deux régions : une région positive et une région négative, telles que tout point de J_m qui se projette sur Q_1, parallèlement à M dans la région positive (dans la région négative) est au-dessus ou dans Q_1 (au-dessous ou dans Q_1). De là il résulte que D est sur S. On voit sans peine que le plan Q_1 contient au plus une autre droite de S, et que celle-ci, si elle existe, passe par m.

En définitive nous avons obtenu le résultat suivant. *Si toute section plane de* S *admet en chacun de ses points réguliers deux demi-tangentes opposées;*

1° *en tout point régulier de* S *non situé sur une droite appartenant à*

(1) *Voir* par exemple ma Note des *C. R. Acad. Sc.,* citée au nº **17**.

la surface, celle-ci possède un plan unique de tangentes variant continûment;

2° *en tout point régulier de* S *par lequel passe une droite de la surface, mais qui n'est pas sommet d'un cône appartenant à celle-ci, les demi-tangentes sont dans un plan.* La question reste posée de savoir s'il y a un seul plan de tangentes.

21. Une autre question importante est posée : lorsque S n'est pas réglée et ne se réduit pas à un cône et un ovoïde, existe-t-il nécessairement des régions sur S où le plan des tangentes est unique, quand on ne fait aucune hypothèse sur l'existence de tangentes aux sections planes? La réponse est très probablement affirmative, et les régions où le plan des tangentes est unique sont sans doute celles où S n'est pas convexe. C'est ce qui a lieu pour les surfaces réglées non coniques [n° **17**], et, comme nous allons le voir, pour les surfaces de révolution.

Supposons S de révolution autour d'un axe Z. Soit m un point de S à distance finie, pris en dehors de Z. Désignons respectivement par C et par L le parallèle et la méridienne de m. La section de S par le plan de C comprend ce cercle et la droite de l'infini de son plan. Le point m est donc régulier. D'autre part, m' étant un point quelconque de C, différent de m, la droite mm' pénètre à l'intérieur de $\mathcal{C}_m$ (cette notation désignant toujours un des demi-cônes convexes de sommet m et tels que l'ensemble des tangentes en m à S soit celui des droites issues de m ne pénétrant pas à l'intérieur de ces demi-cônes). Soient mt et mt' les demi-tangentes à L en m; aucune d'elles n'est perpendiculaire à Z (pour le voir il suffit de prendre m' diamétralement opposé à m). Je dis que le lieu des demi-tangentes en m est l'ensemble des deux demi-plans [D, t], [D, t'], où D désigne la tangente à C en m. En effet, soit mt'' une demi-tangente non portée par D; elle est par rapport au plan de C du côté de mt ou de mt', de mt par exemple. Si le plan tmt'' ne passe pas par D, il coupe C en un point m'. Mais la section de S par un plan quelconque contenant mm' possède en m un point simple; ce qui est contradictoire avec l'existence des demi-tangentes mt et mt'' dans un même demi-plan d'arête mm'.

Ceci posé, supposons que les tangentes en m à S ne soient pas toutes dans un même plan. D'après les résultats du numéro précédent, on peut affirmer que : ou bien mt et mt' sont portées par des droites distinctes, ou bien, ces demi-tangentes étant opposées, m est point d'inflexion pour L. Examinons successivement ces deux alternatives, d'abord la première. Soit m_1 le point diamétralement opposé à m sur C. Si m_1 est à l'intérieur de l'angle $\widehat{tmt'}$ tout plan mené par D et laissant mt et mt' d'un même côté, coupera S suivant une courbe présentant en m un point isolé. Dans le cas contraire on aboutit à une contradiction. Considérons, en effet, un plan P passant par D et laissant mt et mt' du côté opposé à m_1. Les parallèles voisins de C et situés du côté de mt découpent sur P deux arcs (faisant partie de la courbe du troisième ordre au plus : section de S par P) dont les demi-tangentes en m sont opposées et portées par D puisqu'il n'y a pas dans le plan P d'autres demi-tangentes que celles portées par D. Mais en considérant les parallèles situés du côté de mt' on obtient deux autres arcs ayant les mêmes demi-tangentes que les précédents; ce qui est évidemment impossible sur une courbe du troisième ordre.

Examinons maintenant le cas où m est point d'inflexion pour L. D'un certain côté de m, du côté de mt par exemple, L est au voisinage de m du même côté que C par rapport à la tangente en m. Comme tout arc du troisième ordre est formé de quatre arcs convexes au plus ([1]), on peut trouver sur L, du côté de t, un point voisin μ tel que l'arc $\widehat{m\mu}$ de L soit convexe. Soit δ la borne supérieure de la distance d'un point de l'arc $\widehat{m\mu}$ à sa corde. Menons la droite Δ' parallèle à $m\mu$, à la distance δ de cette droite et du côté de $\widehat{m\mu}$. Δ' touche $\widehat{m\mu}$ en un seul point μ', et, sauf ce point, tous les points de $\widehat{m\mu}$ sont par rapport à Δ' du même côté que le parallèle de μ'. Il en résulte que le plan mené par Δ' et la tangente au parallèle de μ coupe S suivant une courbe ayant en μ' un point isolé.

([1]) A. MARCHAUD, *Sur les continus d'ordre borné* (*Acta Math.*, t. 55, p. 88). On ne peut invoquer le résultat de Juel, car les courbes considérées par cet auteur sont formées par hypothèse d'un nombre fini d'arcs convexes ayant partout *une* tangente.

En définitive, si l'on convient de dire que S est convexe en un point s'il existe une section plane pour laquelle ce point est isolé, on peut affirmer l'existence d'un plan unique de tangentes en tout point m où les conditions suivantes sont réalisées : S n'est convexe ni en m ni au voisinage de ce point. Le lecteur déterminera sans peine les différents types de surfaces de révolution du troisième ordre, et, dans chaque cas, la région où il y a nécessairement un plan unique de tangentes.