

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL DUBREIL

MARIE-LOUISE DUBREIL-JACOTIN

Théorie algébrique des relations d'équivalence

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 18 (1939), p. 63-95.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18_63_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Théorie algébrique des relations d'équivalence;

PAR PAUL DUBREIL
ET MARIE-LOUISE DUBREIL-JACOTIN.

INTRODUCTION.

Nous nous proposons d'exposer dans ce travail une théorie systématique des relations d'équivalence. G. Birkhoff ⁽¹⁾ a déjà défini, pour les relations d'équivalence opérant dans un ensemble E donné, deux opérations : l'intersection et le produit, d'où résulte que l'ensemble des relations d'équivalence de E est une *structure* ⁽²⁾ au sens de O. Ore. G. Birkhoff a montré en outre que cette structure est isomorphe à la structure des sous-groupes g du groupe G des permutations dans E .

On peut évidemment appliquer à une structure de relations d'équivalence, en vue d'obtenir les théorèmes de Schreier-Zassenhaus ou de Jordan-Hölder, la théorie générale des structures abstraites due à O. Ore. Mais, indépendamment du fait qu'il y a intérêt à ne pas perdre de vue les éléments de l'ensemble E dans lequel on opère, les axiomes que l'on pose et les résultats que l'on obtient dans cette application de la théorie générale des structures ne semblent pas toujours se présenter sous la forme la plus simple ou la plus maniable.

L'étude directe que nous avons entreprise est caractérisée essentiel-

⁽¹⁾ G. BIRKHOFF, *On the structure of abstract algebra* (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 31, 1935, p. 433-454).

⁽²⁾ O. ORE, *On the foundation of abstract algebra* (Part I, *Annals of math.*, 36, 1935, p. 406-437; Part II, 37, 1936, p. 265-292) et aussi *Duke mathematical Journal*, 2, 1936, p. 581-596.

lement par deux définitions : en premier lieu, celle de l'*isomorphisme*, qui se définit uniquement à partir de correspondances biunivoques entre éléments d'ensembles, et est par suite bien distincte de l'isomorphisme de structures; en second lieu, celle de couples de relations *associables*, notion qui joue un rôle fondamental dans la théorie : le produit de deux relations associables présente en effet des propriétés remarquables qui conduisent directement au second théorème d'isomorphie. Si d'ailleurs on considère, dans un groupe G , la relation d'équivalence définie par la décomposition usuelle en classes (à droite par exemple) par rapport à un sous-groupe g , la condition nécessaire et suffisante pour que deux relations d'équivalence de ce type soient associables est que les sous-groupes correspondants soient permutable; et par suite la théorie des relations d'équivalence contient les intéressants résultats sur les groupes permutable publiés récemment par O. Ore (¹).

En ce qui concerne enfin la correspondance, mise en évidence par G. Birkhoff, entre une structure de relations d'équivalence et une structure de groupes, on constate que cette correspondance, bien qu'elle soit un isomorphisme de structures, ne permet pas de déduire de résultats déjà connus les propriétés algébriques des relations d'équivalence, car un exemple bien simple (²) suffit à montrer qu'à des relations d'équivalence associables ne correspondent pas nécessairement des groupes permutable.

Certains des résultats contenus dans le présent Mémoire ont été publiés dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*

(¹) O. ORE, *Structures and Group theory*, 1 (*Duke mathem. Journal*, 3, 1937, p. 149-174).

(²) Soient dans l'ensemble E de quatre points,



deux relations d'équivalence associables. Le groupe G des permutations de quatre éléments est d'ordre $4! = 24$; les sous-groupes g_1 et g_2 correspondant à R_1 et R_2 sont l'un et l'autre d'ordre 4 et n'ont pas d'élément commun autre que l'unité. Ces deux sous-groupes ne sont certainement pas permutable : s'ils l'étaient, leur produit serait d'ordre 16, or 16 ne divise pas 24.

(205, 1937, p. 704 et 1349), mais, par rapport à la seconde de ces Notes, nous avons apporté aux énoncés concernant la généralisation des théorèmes de Schreier-Zassenhaus et de Jordan-Hölder à la fois des généralisations et des simplifications sensibles.

Qu'il nous soit permis d'exprimer ici à notre illustre Maître, M. Jacques Hadamard, à l'occasion de son Jubilé, notre reconnaissance pour l'intérêt qu'il a bien voulu témoigner à nos recherches, en même temps que nos sentiments de grande admiration.

I. — Relations d'équivalence dans un ensemble E.

1. Considérons un ensemble E, et une décomposition de cet ensemble en classes, c'est-à-dire en sous-ensembles deux à deux sans élément commun. A partir de cette décomposition, nous définissons entre les éléments de E une relation R, en convenant que deux éléments a et b de E satisfont à la relation R si et seulement si ils appartiennent à la même classe. Nous dirons alors qu'ils sont *équivalents modulo R* et nous écrirons

$$a \equiv b \quad (R).$$

On a évidemment les propriétés suivantes :

1° $a \equiv a \quad (R)$, pour tout élément a de E,

ce qu'on exprime en disant que la relation R est *réflexive* :

2° $a \equiv b \quad (R)$ entraîne $b \equiv a \quad (R)$,

ce qu'on exprime en disant que la relation R est *symétrique* :

3° $a \equiv b \quad (R)$, $b \equiv c \quad (R)$ entraînent $a \equiv c \quad (R)$,

ce qu'on exprime en disant que la relation R est *transitive*.

Inversement, considérons un ensemble E, et dans E une relation R telle que, étant donnés deux éléments quelconques a et b de E, on ait $a \equiv b \quad (R)$ ou $a \not\equiv b \quad (R)$, et supposons de plus cette relation réflexive, symétrique et transitive. Alors en considérant le sous-ensemble A de tous les éléments $x \in E$ équivalents modulo R à un élément a quelconque de E, puis le sous-ensemble B des éléments équivalents

modulo R à un élément quelconque b du sous-ensemble $E - A$, etc., on obtient une décomposition de E en classes deux à deux sans élément commun.

Les relations R ainsi caractérisées sont appelées *relations d'équivalence*.

II. — Exemples de relations d'équivalence et cas particuliers.

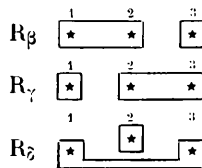
1. L'égalité R_ε est une relation d'équivalence particulière : chaque classe se compose d'un seul élément.

2. En rangeant tous les éléments de E dans une classe unique, qui est l'ensemble E lui-même, nous définissons une relation d'équivalence R_α , que nous appellerons l'*équivalence absolue* R_α .

On a

$$a \equiv b \quad (R_\alpha) \quad \text{quels que soient } a \in E, b \in E.$$

3. Dans un ensemble E fini et comprenant n éléments, il y a un nombre fini N_n de relations d'équivalence distinctes. Pour $n = 3$ par exemple, en dehors de l'égalité R_ε et de l'équivalence absolue R_α , nous avons dans l'ensemble E , que nous représentons par l'ensemble de trois points, trois relations



pour chacune desquelles le nombre des classes est deux. Nous avons donc

$$N_3 = 5 \quad (\text{évidemment } N_1 = 1, N_2 = 2).$$

Pour n quelconque on peut donner une relation de récurrence permettant de calculer N_n . Pour cela distinguons dans E un élément a . Si h est un entier tel que $1 \leq h \leq n$, le nombre de classes possibles de h éléments contenant a est C_{n+1}^{h-1} et le nombre de relations d'équivalence possibles pour les $n - h$ éléments restants est N_{n-h} .

On a donc

$$N_n = \sum_{h=1}^n C_{n-1}^{h-1} N_{n-h} \quad (1).$$

4. Soit maintenant, comme ensemble E, un groupe G. A partir de tout sous-groupe g de G, nous pouvons définir une relation d'équivalence R_g en posant

$$a \equiv b \quad (R_g) \quad \text{si } ab^{-1} \in g,$$

ou encore si

$$a - b \in g$$

si G est abélien et écrit sous forme additive. La relation R_g réalise la décomposition habituelle de G en classes à droite par rapport à g. Toutes les classes, considérées comme ensembles d'éléments de G, ont ici même puissance.

En particulier, dans l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls, à tout entier m correspond la relation d'équivalence R_m définie par

$$a \equiv b \quad (R_m) \quad \text{si } a = b + km,$$

où k est un entier positif, négatif ou nul; c'est-à-dire la congruence modulo m.

III. — Opérations sur les relations d'équivalence.

1. Deux relations d'équivalence R_i et R_j sont *identiques* si elles correspondent à la même décomposition de E en classes ou, ce qui revient au même, si $a \equiv b \quad (R_i)$ entraîne $a \equiv b \quad (R_j)$ et inversement.

Une relation d'équivalence R_j est dite *consécutives* à une relation d'équivalence R_i et l'on écrit

$$R_i \supset R_j$$

si

$$a \equiv b \quad (R_j)$$

entraîne

$$a \equiv b \quad (R_i).$$

Toute classe modulo R_j est alors entièrement contenue dans une

(1) Cette relation est étudiée par A. C. Aitken (*Edim. math. Notes*, 28, 1933, XVIII, XXIII).

classe modulo R_i ; toute classe modulo R_i est la réunion de certaines classes modulo R_j . R_j peut donc être regardée comme une relation d'équivalence *plus fine* que R_i .

L'égalité $R_i = R_j$ est consécutive à toute relation d'équivalence R .

Toute relation d'équivalence R est consécutive à l'équivalence absolue R_x .

Évidemment

$$R_i \supset R_j \quad \text{et} \quad R_j \supset R_k$$

entraînent

$$R_i \supset R_k.$$

Et, comme on l'a dit,

$$R_i \supset R_j \quad \text{et} \quad R_j \supset R_i$$

entraînent

$$R_i = R_j.$$

Exemples de relations consécutives. — 1° Dans l'ensemble de 4 points :

$$\begin{array}{l} R_i \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline * & * & * \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline * \\ \hline \end{array} \\ R_j \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline * & * \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline * \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline * \\ \hline \end{array} \end{array} \quad R_i \supset R_j.$$

2° La relation $R_{g'}$, définie dans le groupe G par le sous-groupe g' est consécutive à R_g si g' est sous-groupe de g , et seulement dans ce cas.

En particulier la congruence modulo m , R_m , est consécutive à la congruence modulo m' si m est multiple de m' .

2. Soient R_i et R_j deux relations d'équivalence dans E . On définit une nouvelle relation R dans E en écrivant

$$a \equiv b \quad (R) \quad \text{si} \quad a \equiv b \quad (R_i) \quad \text{et} \quad a \equiv b \quad (R_j)$$

simultanément: Cette relation R est évidemment réflexive symétrique et transitive, c'est donc une relation d'équivalence que nous appellerons *intersection* de R_i et R_j et que nous désignerons par $R = R_i \cap R_j$. Les classes modulo $R_i \cap R_j$ sont les intersections des classes modulo R_i et modulo R_j .

$R_i \cap R_j$ est consécutive à R_i et à R_j .

Toute relation consécutive à la fois à R_i et à R_j est consécutive à

leur intersection qui est la relation d'équivalence la moins fine ayant cette propriété.

Si

$$R_i \supset R_j,$$

on a

$$R_i \cap R_j = R_j.$$

En particulier

$$R_i \cap R_x = R_i, \quad R_i \cap R_z = R_z.$$

Exemples. — L'intersection des relations d'équivalence R_g et $R_{g'}$ définies dans le groupe G par les sous-groupes g et g' est la relation d'équivalence définie par le sous-groupe de G intersection de g et g' .

En particulier la congruence modulo m et la congruence modulo m' ont pour intersection la congruence modulo $p. p. c. m.$ de m et m' .

Plus généralement, soit $\mathcal{R} = \{R_i, R_j, R_k, \dots\}$ un ensemble de relations d'équivalence dans E . La relation R définie par

$$a \equiv b \ (R), \quad \text{si } a \equiv b \ (R_i) \text{ pour tout } R_i \text{ de } \mathcal{R},$$

est une relation d'équivalence appelée *intersection* des relations d'équivalence de l'ensemble \mathcal{R} et désignée par

$$R_i \cap R_j \cap R_k \cap \dots$$

Nous avons dit que toute classe de $R_i \cap R_j$ était l'intersection d'une classe modulo R_i et d'une classe modulo R_j . Si toute classe de $R_i \cap R_j$ est égale soit à une classe modulo R_i soit à une classe modulo R_j les deux relations R_i et R_j sont dites *semi-consécutives*.

Exemple avec 4 points

$$\begin{array}{c}
 R_i \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \star & \star \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \star \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \star \\ \hline \end{array} \\
 R_j \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \star \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \star \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline \star & \star \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \quad R_i \cap R_j = R_z.$$

Dans un groupe G il n'y a pas de relations d'équivalence R_g et $R_{g'}$ définies par des sous-groupes g et g' qui soient semi-consécutives sans être consécutives, car si l'on a pour les classes définies par un élément a , $ga \subset g'a$, il en résulte $g \subset g'$, $R_g \subset R_{g'}$.

3. On appelle relation d'équivalence *produit* de deux relations

d'équivalence R_i, R_j (ou plus généralement d'un ensemble

$$\mathcal{R} = \{ R_i, R_j, R_k, \dots \}$$

de relations d'équivalence dans E), la relation d'équivalence intersection de toutes les relations d'équivalence auxquelles R_i, R_j, \dots sont consécutives. C'est donc la relation d'équivalence la plus fine possible à laquelle R_i, R_j, \dots sont consécutives. On la désigne par $R_i \times R_j \times R_k \times \dots$.

Dans le cas de deux relations R_i, R_j , on peut donner de leur produit $R_i \times R_j$ une définition explicite commode.

Considérons la relation R définie par

$$a \equiv b \quad (R),$$

si l'on peut trouver des éléments u_1, \dots, u_{2n-1} où n est un entier quelconque tels que l'on ait

$$a \equiv u_1 \quad (R_i), \quad u_1 \equiv u_2 \quad (R_j), \quad u_2 \equiv u_3 \quad (R_i), \quad \dots, \quad u_{2n-1} \equiv b \quad (R_j).$$

Cette propriété est évidemment symétrique, réflexive et transitive, c'est donc bien une relation d'équivalence.

Ces relations entraînent

$$a \equiv u_1 \quad (R_i \times R_j), \quad u_1 \equiv u_2 \quad (R_i \times R_j), \quad \dots;$$

donc

$$a \equiv b \quad (R_i \times R_j).$$

On a donc

$$R \subset R_i \times R_j.$$

D'autre part, on a évidemment

$$\begin{array}{cc} R_i \subset R, & R_j \subset R; \\ (a=1, u_1=b) & (a=1, u_1=a) \end{array}$$

donc, d'après la définition du produit, $R_i \times R_j \subset R$.

On a donc

$$R = R_i \times R_j.$$

De cette définition résulte qu'une classe du produit $R_i \times R_j$ contient, en même temps qu'une classe modulo R_i , toute classe modulo R_j qui a au moins un élément commun avec la précédente,

puis toutes les classes modulo R_i ayant au moins un élément commun avec l'une de ces classes modulo R_j , etc.

Si $R_i \supset R_j$, on a

$$R_i \times R_j = R_i.$$

En particulier

$$R_i \times R_i = R_i$$

$$R_i \times R_x = R_x$$

$$R_i \times (R_i \cap R_j) = R_i$$

[et l'on a aussi la formule analogue $R_i \cap (R_i \times R_j) = R_i$].

Enfin si $R_i \supset R_j$, on a évidemment

$$R_i \times R \supset R_j \times R \quad \text{et} \quad R_i \cap R \supset R_j \cap R,$$

quel que soit R .

Si R_i et R_j sont semi-consécutives, toute classe du produit est formée d'une seule classe soit modulo R_i , soit modulo R_j .

Exemples. — 1° Dans l'ensemble de 4 points, le produit des relations

$$R_i \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \star & \star & \star & \star \\ \hline \end{array} \quad R_j \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \star & \star & \star & \star \\ \hline \end{array}$$

est l'équivalence absolue.

Le produit des relations semi-consécutives

$$R_i \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \star & \star & \star & \star \\ \hline \end{array} \quad R_j \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \star & \star & \star & \star \\ \hline \end{array}$$

est la relation

$$R_i \times R_j \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \star & \star & \star & \star \\ \hline \end{array}$$

2° Le produit des relations d'équivalence R_g et $R_{g'}$ définies dans le groupe G par les sous-groupes g et g' est la relation d'équivalence définie dans G par le sous-groupe $\{g \cdot g'\}$ engendré par g et g' comme on le vérifie sans peine au moyen de la définition explicite du produit.

En particulier le produit de la congruence modulo m par la congruence modulo m' est la congruence modulo le *p. g. c. d.* des

entiers m et m' . Si m et m' sont premiers entre eux, le produit est l'équivalence absolue.

Il résulte des propriétés qui précèdent que l'ensemble des relations d'équivalence dans un ensemble E , ou l'ensemble des relations d'équivalence dans un groupe G définies par ses sous-groupes g , constituent une *structure* au sens de Ore.

IV. — Relations d'équivalence associables.

1. Nous allons maintenant introduire une notion importante qui est celle de relations d'équivalence *associables*.

Deux relations d'équivalence R_i et R_j seront dites associables si l'on a la propriété suivante :

Si pour trois éléments a, b, c de E on a

$$a \equiv c \ (R_i), \quad c \equiv b \ (R_j);$$

alors il existe un élément d de E tel que

$$a \equiv d \ (R_j), \quad d \equiv b \ (R_i).$$

Par conséquent si une classe I_1 modulo R_i coupe deux classes J_1 et J_2 modulo R_j ⁽¹⁾, toute classe I_2 modulo R_i qui coupe J_1 coupe également J_2 .

Nous écrirons alors

$$R_i \square R_j.$$

Dans le cas contraire, nous écrirons

$$R_i \not\square R_j.$$

Deux relations R_i et R_j telles que l'une est consécutive à l'autre sont évidemment associables. Il en résulte que :

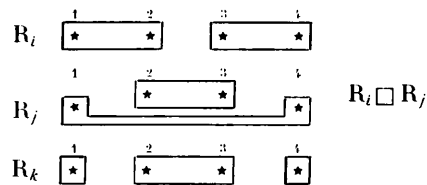
L'équivalence absolue R_x est associable à toute autre relation d'équivalence.

(1) Nous disons que deux sous-ensembles de E se coupent quand leur intersection n'est pas vide.

L'égalité R_i est aussi associable à toute autre relation d'équivalence R .

De même, il est évident que deux relations semi-consécutives sont associables.

Exemples de relations associables. — 1° Dans l'ensemble de 4 points, considérons les relations :



La relation R_k est associable à R_j à laquelle elle est consécutive, mais n'est pas associable à R_i . Ceci montre que la propriété d'être associable pour les relations d'équivalence, propriété qui est évidemment symétrique et réflexive, n'est pas une propriété transitive : $R_i \circ R_j, R_j \circ R_k$ n'entraînent pas $R_i \circ R_k$.

2° THÉORÈME. — Dans un groupe G , les relations d'équivalence R_g et $R_{g'}$ définies par les sous-groupes g et g' sont associables si et seulement si g et g' sont permutable.

En effet, supposons d'abord $R_g \circ R_{g'}$. Soit $a \in g, a' \in g'$.

Montrons que l'on peut trouver $b \in g$ et $b' \in g'$ tels que

$$aa' = b'b.$$

Considérons les éléments a et a'^{-1} , on a, e étant l'unité du groupe

$$a \equiv e \quad (R_g), \quad e \equiv a'^{-1} \quad (R_{g'}).$$

Mais, puisque $R_g \circ R_{g'}$ il existe u tel que

$$a \equiv u \quad (R_{g'}), \quad u \equiv a'^{-1} \quad (R_g).$$

Or, ceci veut dire par définition que

$$\begin{aligned} au^{-1} &= b', & b' &\in g', \\ ua' &= b, & b &\in g, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'on a : $aa' = b'b$.

Inversement supposons g et g' permutables.
Soient dans G trois éléments a, u, b tels que

$$a \equiv u \pmod{R_g}, \quad u \equiv b \pmod{R_{g'}}$$

ce qui veut dire

$$\begin{aligned} au^{-1} &= g_1, & g_1 &\in g, \\ ub^{-1} &= g'_1, & g'_1 &\in g', \end{aligned}$$

c'est-à-dire $ab^{-1} = g_1 g'_1 = g'_2 g_2$, puisque les deux groupes sont permutables, avec

$$g_2 \in g, \quad g'_2 \in g'.$$

Mais ceci s'écrit encore

$$g'_2{}^{-1} a = g_2 b = v, \quad v \in G,$$

ou

$$av^{-1} = g'_2, \quad vb^{-1} = g_2,$$

c'est-à-dire

$$a \equiv v \pmod{R_{g'}}, \quad v \equiv b \pmod{R_g}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

En particulier, dans un groupe abélien G deux relations d'équivalence R_g et $R_{g'}$ sont toujours associables. Par exemple deux congruences modulo p et q sont associables.

2. PRODUIT DE DEUX RELATIONS ASSOCIABLES R_i et R_j . — Nous avons dit que la classe du produit contenant une classe I_i de E modulo R_i

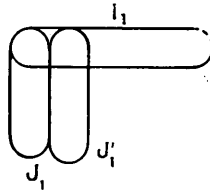


Fig. 1.

s'obtenait en prenant les classes J_1, J'_1, \dots , modulo R_j définies par les éléments de E contenus dans I_i , puis les classes I_2, I'_2, \dots , définies par les éléments de E situés dans J_1, J'_1, \dots et non dans I_i , etc.

Mais le fait que R_i et R_j sont associables entraîne précisément que les classes modulo R_i définies par les éléments de J_1 sont les mêmes que celles définies par les éléments de J'_1, \dots , de telle sorte que la classe considérée du produit peut être représentée schématiquement par un quadrillage.

Il en résulte que si l'on a

$$a \equiv b \quad (R_i \times R_j),$$

on peut trouver u et v tels que

$$\begin{array}{l} a \equiv u \quad (R_i) \\ u \equiv b \quad (R_j) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} a \equiv v \quad (R_j), \\ v \equiv b \quad (R_i). \end{array}$$

La définition explicite du produit se réduit donc, dans le cas de deux relations associables à la suivante :

$$a \equiv b \quad (R_i \times R_j)$$

si l'on peut trouver un élément u tel que

$$a \equiv u \quad (R_i), \quad u \equiv b \quad (R_j),$$

propriété que l'on peut aussi vérifier aisément sur les expressions données, car de

$$a \equiv u_1 \quad (R_i), \quad u_1 \equiv u_2 \quad (R_j), \quad u_2 \equiv u_3 \quad (R_i), \quad \dots$$

résulte

$$u_1 \equiv u'_2 \quad (R_i), \quad u'_2 \equiv u_3 \quad (R_j);$$

donc,

$$u \equiv u'_2 \quad (R_i), \quad u'_2 \equiv u_4 \quad (R_j), \quad \dots$$

3. PROPRIÉTÉS RELATIVES A L'ASSOCIABILITÉ. — THÉORÈME I. — *Si R est associable à R_i et à R_j , R est associable au produit $R_i \times R_j$.*

Soient, en effet, a, u, b trois éléments de E tels que

$$a \equiv u \quad (R_i \times R_j), \quad u \equiv b \quad (R).$$

On a, par hypothèse,

$$a \equiv u_1 \quad (R_i), \quad u_1 \equiv u_2 \quad (R_j), \quad \dots, \quad u_{2n-1} \equiv u \quad (R_j).$$

D'autre part, les relations

$$u \equiv b \quad (R), \quad u_{2n-1} \equiv u \quad (R_j)$$

entraînent, puisque R est associable à R_j ,

$$u_{2n-1} \equiv s_1 \quad (R), \quad s_1 \equiv b \quad (R_j).$$

Puis, les relations

$$u_{2n-2} \equiv u_{2n-1} \quad (R_i), \quad u_{2n-1} \equiv s_1 \quad (R)$$

entraînent, puisque R est associable à R_i ,

$$u_{2n-2} \equiv s_2 \quad (R), \quad s_2 \equiv s_1 \quad (R_i),$$

et ainsi de suite, R montant chaque fois d'un rang. Finalement on a

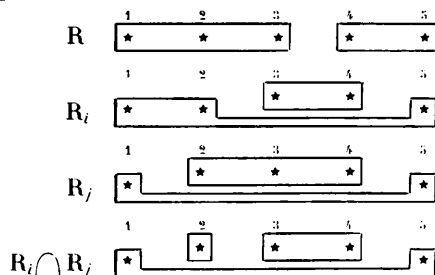
$$a \equiv s_{2n} \quad (R), \quad s_{2n} \equiv s_{2n-1} \quad (R_i), \quad \dots, \quad s_2 \equiv s_1 \quad (R_i), \quad s_1 \equiv b \quad (R_j),$$

et il existe bien un élément $v = s_{2n}$ tel que l'on ait

$$a \equiv v \quad (R), \quad v \equiv b \quad (R_i \times R_j). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Il faut remarquer qu'une relation R associable à R_i et à R_j , ne l'est pas nécessairement à l'intersection $R_i \cap R_j$:

Exemples. — 1°



2° On sait que si g est permutable avec g' et g'' , g n'est pas nécessairement permutable avec l'intersection de g' et g'' .

On a cependant la propriété suivante :

THÉOREME II. — Si R est consécutif à R_i et associable à R_j , R est associable à l'intersection $R_i \cap R_j$.

En effet, soient a, u, b tels que

$$a \equiv u \quad (R), \quad u \equiv b \quad (R_i \cap R_j),$$

c'est-à-dire par définition

$$u \equiv b \quad (R_i), \quad u \equiv b \quad (R_j).$$

De $R_i \supset R$ résulte

$$a \equiv u \quad (R_i), \quad \text{donc} \quad a \equiv b \quad (R_i).$$

De $R \sqsupset R_j$ résulte

$$a \equiv s \quad (R_j), \quad s \equiv b \quad (R).$$

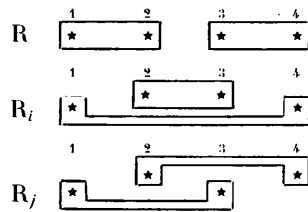
Mais on a

$$s \equiv b \quad (R_i), \quad \text{donc} \quad a \equiv s \quad (R_i),$$

et par conséquent

$$a \equiv s \quad (R_i \cap R_j), \quad s \equiv b \quad (R). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

La condition du théorème précédent est suffisante, mais non nécessaire comme le montre l'exemple suivant



R n'est consécutif ni à R_i ni à R_j et est associable à $R_i \cap R_j = R_\varepsilon$.

On a maintenant les théorèmes suivants :

THÉORÈME III. — Si R_i et R_j sont deux relations d'équivalence associables, R_i est associable à toute relation R comprise entre R_j et le produit $R_i \times R_j$;

si $R_i \sqsupset R_j$, $R_i \sqsupset R$ dès que $R_i \times R_j \supset R \supset R_j$.

En effet, soient a, u, b des éléments tels que

$$a \equiv u \quad (R), \quad u \equiv b \quad (R_i).$$

On a a fortiori,

$$a \equiv u \quad (R_i \times R_j),$$

c'est-à-dire puisque $R_i \sqsupset R_j$

$$a \equiv s \quad (R_i), \quad s \equiv u \quad (R_j);$$

mais alors il existe w tel que

$$s \equiv w \quad (R_i), \quad w \equiv b \quad (R_j),$$

on a donc

$$a \equiv v \pmod{R_i}, \quad w \equiv b \pmod{R_j},$$

ce qui entraîne

$$w \equiv b \pmod{R}.$$

C. Q. F. D.

On a évidemment

$$R_i \times R = R_i \times R_j, \quad R_i \supset R_i \cap R \supset R_i \cap R_j.$$

D'autre part R_j est consécutif à R et associable à R_i , donc d'après le théorème II, R_j est associable à $R_i \cap R$, d'où le

THÉORÈME IV. — *Si R_i et R_j sont deux relations d'équivalence associables, R_j est associable à toute relation d'équivalence R' comprise entre R_i et $R_i \cap R_j$ de la forme $R' = R \cap R_i$ où $R_i \times R_j \supset R \supset R_j$.*

Mais en général une relation quelconque R' comprise entre R_i et $R_i \cap R_j$ n'est pas associable à R_j .

THÉORÈME V. — *La condition nécessaire et suffisante pour que toute relation d'équivalence R' comprise entre R_i et $R_i \cap R_j$ soit associable à R_j est que R_i et R_j soient semi-consécutives. R' est alors semi-consécutive à R_j .*

En effet

1° Si R_i et R_j sont semi-consécutives et si $R_i \supset R' \supset R_i \cap R_j$, R' et R_j sont semi-consécutives, donc associables.

Soit A une classe modulo R' et J une classe modulo R_j qui ont un élément commun a . Soit I la classe modulo R_i définie par a . On a

$$A \subset I, \quad \text{et} \quad I \cap J = I \text{ ou } J,$$

puisque R_i et R_j sont semi-consécutives.

Premier cas : $I \cap J = I$, c'est-à-dire $I \subset J$, donc

$$A \subset J, \quad \underline{A \cap J = A}.$$

Deuxième cas : $I \cap J = J$, alors J , classe modulo $R_i \cap R_j$ qui est consécutive à R' , est entièrement contenue dans la classe A modulo R' définie par un de ses éléments a

$$J \subset A, \quad \underline{A \cap J = J}.$$

2° Si R_i et R_j ne sont pas semi-consécutives, il existe un élément u tel que la classe U modulo $R_i \cap R_j$ définie par u ne coïncide ni avec la classe I modulo R_i , ni avec la classe J modulo R_j qui la contiennent.

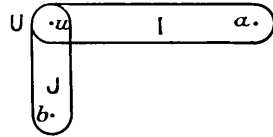


Fig. 2.

Il existe donc un élément a de I non contenu dans U , un élément b de J non contenu dans U , et tels qu'on ait

$$a \equiv u \pmod{R_i}, \quad u \equiv b \pmod{R_j}, \quad a \not\equiv b \pmod{R_j}.$$

$b \notin I$

Considérons la relation R' telle que

$$R_i \supset R' \supset R_i \cap R_j$$

définie par la décomposition en classes de la manière suivante : I est une classe modulo R' ; toutes les autres classes modulo R' sont les classes modulo $R_i \cap R_j$ non contenues dans I .

On a

$$a \equiv u \pmod{R'}, \quad u \equiv b \pmod{R_j},$$

et R' et R_j ne sont pas associables car les relations

$$a \equiv v \pmod{R_j}, \quad v \equiv b \pmod{R'}$$

entraîneraient $v \equiv b \pmod{R_j}$, d'où

$$a \equiv b \pmod{R_j},$$

qui est impossible.

Dans le cas général où R_i et R_j sont associables sans être semi-consécutives, on a la propriété suivante.

THÉOREME VI. — *Si R'_1 et R'_2 sont deux relations d'équivalence comprises entre R_i et $R_i \cap R_j$ et associables à R_j , $R'_1 \times R'_2$ et $R'_1 \cap R'_2$, qui sont évidemment comprises également entre R_i et $R_i \cap R_j$, sont associables à R_j : les relations d'équivalence comprises entre R_i et $R_i \cap R_j$ et associables à R_j forment donc une structure.*

Le fait que $R'_1 \times R'_2$ est associable à R_j , résulte du théorème III.

Démontrons la propriété pour $R'_1 \cap R'_2$.

Soient a, u, b trois éléments tels que

$$a \equiv u \quad (R_j), \quad u \equiv b \quad (R'_1 \cap R'_2),$$

c'est-à-dire

$$u \equiv b \quad (R'_1) \quad \text{et} \quad u \equiv b \quad (R'_2),$$

R_j étant associable à R'_1 , il existe s tel que

$$a \equiv s \quad (R'_1), \quad s \equiv b \quad (R_j)$$

et de même, puisque $R_j \square R'_2$, il existe t tel que

$$a \equiv t \quad (R'_2), \quad t \equiv b \quad (R_j),$$

La comparaison des deux dernières équivalences des systèmes précédents donne

$$t \equiv s \quad (R_j),$$

mais

$$\begin{array}{l} a \equiv s \quad (R'_1) \quad \text{entraîne} \quad a \equiv s \quad (R_j), \\ a \equiv t \quad (R'_2) \quad \text{entraîne} \quad a \equiv t \quad (R_j), \end{array}$$

d'où $t \equiv s(R_j)$ et par suite $t \equiv s(R_i \cap R_j)$, ce qui entraîne $t \equiv s(R'_2)$.

On a donc

$$a \equiv s \quad (R'_2), \quad s \equiv b \quad (R_j),$$

et par suite

$$a \equiv s \quad (R'_1 \cap R'_2), \quad s \equiv b \quad (R_j). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Considérons maintenant trois relations d'équivalence quelconques R_i, R_j, R_k assujetties seulement à ce que $R_j \supset R_k$. On a

$$R_j \cap (R_i \times R_k) \supset R_k \times (R_i \cap R_j).$$

En effet, soit

$$a \equiv b \quad [R_k \times (R_i \cap R_j)].$$

Cela veut dire qu'il existe $u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}$ tels que

$$\begin{array}{l} a \equiv u_1 \quad (R_k) \\ u_1 \equiv u_2 \quad (R_i \cap R_j) \\ u_2 \equiv u_3 \quad (R_k) \\ \dots\dots\dots \\ u_{2n-1} \equiv b \quad (R_i \cap R_j). \end{array}$$

Il en résulte évidemment

$$a \equiv b \quad (R_i \times R_k)$$

et puisque

$$R_k \subset R_j, \quad a \equiv b \quad (R_j)$$

d'où

$$a \equiv b \quad [R_j \cap (R_i \times R_k)]$$

C. Q. F. D.

et nous avons le théorème suivant

THÉORÈME VII. — *Si de plus les relations R_i et R_k sont associables, on a la relation de Dedekind*

$$(1) \quad R_j \cap (R_i \times R_k) = R_k \times (R_i \cap R_j) \quad (\text{avec toujours } R_j \supset R_k).$$

En effet, soit

$$a \equiv b \quad [R_j \cap (R_i \times R_k)].$$

Cela veut dire

$$a \equiv b \quad (R_j)$$

et, puisque $R_i \square R_k$,

$$a \equiv u \quad (R_i), \quad u \equiv b \quad (R_k),$$

mais $u \equiv b \quad (R_k)$ entraîne $u \equiv b \quad (R_j)$, d'où il résulte

$$a \equiv u \quad (R_j) \quad \text{et, par suite,} \quad a \equiv u \quad (R_i \cap R_j),$$

c'est-à-dire

$$a \equiv b \quad [R_k \times (R_i \cap R_j)].$$

Par conséquent : *une structure de relations d'équivalence deux à deux associables est une structure de Dedekind.*

Il faut cependant remarquer que le théorème VII donne seulement une condition *suffisante* pour qu'on ait la relation de Dedekind.

V. — Structures isomorphes.

1. Revenons à la considération d'une relation d'équivalence R comprise entre $R_i \times R_j$ et R_j :

$$R_i \times R_j \supset R \supset R_j,$$

R_i et R_j étant supposées associables. Nous avons vu que $R' = R \cap R_i$ est comprise entre R_i et $R_i \cap R_j$:

$$R_i \supset R' \supset R_i \cap R_j,$$

et associable à R_j , et que R est associable à R_i . Formons maintenant $R' \times R_j$. Il vient, en vertu du théorème VII,

$$R' \times R_j = (R \cap R_i) \times R_j = R \cap (R_i \times R_j) = R.$$

Inversement, soit maintenant R' une relation quelconque comprise entre R_i et $R_i \cap R_j$. Formons $R = R' \times R_j$. C'est évidemment une relation comprise entre $R_i \times R_j$ et R_j , donc associable à R_i . Formons maintenant $R'' = R \cap R_i$, c'est une relation comprise entre R_i et $R_i \cap R_j$, et associable à R_j . Elle est donc en général distincte de R' , et l'on a

$$R'' = (R' \times R_j) \cap R_i \supset R' \times (R_i \cap R_j) = R'.$$

l'égalité $R'' = R'$ ayant lieu si R' est associable à R_j . S'il en est ainsi, par multiplication de R' par R_j et intersection de R avec R_i , on établit une correspondance $(1,1)$ entre les relations d'équivalence R' comprises entre R_i et $R_i \cap R_j$ associables à R_j d'une part, et les relations d'équivalence R comprises entre $R_i \times R_j$ et R_j d'autre part.

Cette correspondance conserve l'intersection. — Car

$$\begin{array}{lll} \text{à } R_1 & \text{correspond} & R'_1 = R_1 \cap R_i, \\ \text{à } R_2 & \text{»} & R'_2 = R_2 \cap R_i, \\ \text{à } R_1 \cap R_2 & \text{»} & (R_1 \cap R_2) \cap R_i = R_1 \cap R_2 \cap R_i = R'_1 \cap R'_2. \end{array}$$

Inversement, comme, d'après le théorème VI, $R'_1 \cap R'_2$ est associable à R_j en même temps que R'_1 et R'_2 , si, à R'_1 correspond R_1 , à R'_2 , R_2 , à $R'_1 \cap R'_2$ correspond $R_1 \cap R_2$.

La correspondance conserve également le produit. En effet,

$$\begin{array}{lll} \text{à } R'_1 & \text{correspond} & R'_1 \times R_j = R_1, \\ \text{à } R'_2 & \text{»} & R'_2 \times R_j = R_2, \\ \text{à } R'_1 \times R'_2 & \text{»} & (R'_1 \times R'_2) \times R_j = R_1 \times R_2, \end{array}$$

puisque le produit est associatif.

On peut donc dire, conformément à la définition des structures isomorphes, que *la structure des relations d'équivalence comprises entre $R_i \times R_j$ et R_j d'une part et la structure des relations d'équivalence comprises entre R_i et $R_i \cap R_j$ et associables à R_j d'autre part sont isomorphes lorsque R_i et R_j sont associables.*

En appelant, conformément à la terminologie de Ore, structure-quotient $\frac{P}{Q}$ pour $P \supset Q$ l'ensemble des relations d'équivalence comprises entre P et Q , on voit, d'après le Théorème V, que :

Si R_i et R_j sont semi-consécutives, les structures-quotients $\frac{R_i \times R_j}{R_j}$ et $\frac{R_i}{R_i \cap R_j}$ sont isomorphes.

Il faut bien remarquer que cette dernière condition, suffisante pour que les structures-quotients $\frac{R_i \times R_j}{R_j}$ et $\frac{R_i}{R_i \cap R_j}$ soient isomorphes, est relative à l'ensemble de toutes les relations d'équivalence définies dans E . Si l'on considère seulement une sous-structure Σ de relations d'équivalence définies dans E , on a encore, bien évidemment, la propriété suivante relative à deux relations R_i et R_j associables de Σ : *La structure-quotient $\frac{R_i \times R_j}{R_j}$ (c'est-à-dire la structure des relations d'équivalence de Σ comprises entre $R_i \times R_j$ et R_j) est isomorphe à la structure des relations d'équivalence de Σ comprises entre R_i et $R_i \cap R_j$ et associables à R_j .* Il peut arriver alors que cette dernière structure soit la structure-quotient $\frac{R_i}{R_i \cap R_j}$ sans que R_i et R_j soient semi-consécutives. Par exemple, c'est le cas si nous supposons que R_j est associable non seulement à R_i mais à toute relation consécutives à R_i , circonstance que l'on réalise par exemple en prenant pour E un groupe G , pour sous-structure Σ l'ensemble des décompositions en classes relativement à tous les sous-groupes de G et pour relations R_g et $R_{g'}$, celles engendrées par des sous-groupes g et g' tels que g soit permutable avec tous les sous-groupes de g' , ce que l'on réalise d'une façon encore plus restrictive en prenant pour g un sous-groupe invariant dans G , pour g' un sous-groupe quelconque.

VI. -- Théorèmes d'isomorphie.

1. Nous allons, en ce qui concerne les relations d'équivalence, donner une généralisation du deuxième théorème d'isomorphie valable quand R_i et R_j sont associables. Mais auparavant nous allons nous

proposer de généraliser le premier théorème d'isomorphie et le théorème d'homomorphie qui en est un cas particulier.

Nous allons d'abord introduire quelques définitions.

Nous dirons que deux ensembles E et E' sont *isomorphes* et nous écrirons $E \cong E'$ si l'on peut établir une correspondance biunivoque entre leurs éléments.

Nous dirons que E' est *homomorphe* à E (ou image homomorphe de E) et nous écrirons $E \sim E'$ si à tout élément de E correspond, par une certaine loi, un élément bien déterminé de E' , tout élément de E' étant obtenu ainsi au moins une fois.

Une relation d'équivalence R dans E décompose E en classes. L'ensemble de ces classes, si l'on regarde chacune d'elles comme un élément, est appelé l'*ensemble-quotient* défini par R : on le désigne par $\frac{E}{R}$. Il est homomorphe à E .

Soient E et E' deux ensembles isomorphes et R' une relation d'équivalence dans E' . Définissons comme équivalents dans E deux éléments a, b , dont les images a', b' dans E' sont contenues dans une même classe par rapport à R' : nous obtenons ainsi une relation d'équivalence R , appelée *relation induite* par R' dans E . Dans les ensembles-quotients $\frac{E}{R}, \frac{E'}{R'}$, les classes contenant des éléments correspondants se correspondent biunivoquement. Nous avons donc l'isomorphisme

$$\frac{E}{R} \cong \frac{E'}{R'}$$

En tant qu'ensembles, deux classes correspondantes sont d'ailleurs isomorphes. L'égalité et l'équivalence absolue dans E' induisent dans E l'égalité et l'équivalence absolue. Si R_i et R_j sont les relations induites respectivement par R'_i et R'_j

$$\begin{array}{lll} R_i \supset R'_i & \text{entraîne} & R_i \supset R_j \\ R_i \sqsubset R'_i & \text{entraîne} & R_i \sqsubset R_j \end{array}$$

Enfin l'intersection et le produit sont conservés par l'induction de sorte que si l'on considère dans E' une structure Σ' de relations R'_i , les relations induites R forment dans E une structure Σ .

Supposons maintenant que E' soit une image *homomorphe* de E

$$E \sim E'.$$

Étant donné une relation d'équivalence R' dans E' , définissons comme équivalents dans E deux éléments a, b , dont les images a', b' appartiennent à une même classe par rapport à R' : nous obtenons ainsi une relation d'équivalence R appelée *relation induite* par R' dans E .

Les ensembles-quotients sont isomorphes

$$\frac{E}{R} \simeq \frac{E'}{R'},$$

ce qui généralise le premier théorème d'isomorphie. En tant qu'ensembles, deux classes correspondantes sont seulement homomorphes.

En particulier, l'égalité R'_e dans E' induit dans E une certaine relation R^* et l'on a

$$\frac{E}{R^*} \simeq E',$$

ce qui généralise le théorème d'homomorphie.

R^* est consécutive à toute relation R induite par une relation R' de E' . Inversement, si R est une relation d'équivalence définie dans E et à laquelle R^* est consécutive, il existe dans E' une relation R' induisant R . Posons, en effet, dans E'

$$a' \equiv b' \quad (R'),$$

s'il existe dans E un élément a ayant pour image a' et un élément b ayant pour image b' tels que l'on ait

$$a \equiv b \quad (R).$$

Cette définition est légitime, car elle est indépendante du choix des éléments a et b ayant pour images respectives a' et b' , puisque R^* est consécutive à R . R' est une relation visiblement réflexive, symétrique et transitive, c'est donc bien une relation d'équivalence, qui induit dans E la relation R .

L'équivalence absolue dans E' induit dans E l'équivalence absolue. Les propriétés $R'_i \supset R'_j$, $R'_i \square R'_j$ entraînent les mêmes propriétés pour

les relations induites $R_i, R_j : R_i \supset R_j, R_i \sqcap R_j$. L'intersection et le produit sont encore conservés. Par suite, étant donnée une structure de relations d'équivalence R' dans E' , l'homomorphisme $E \sim E'$ induit dans E une structure de relations d'équivalence auxquelles R^* est consécutive, et cette structure est isomorphe à la première.

Plus généralement nous dirons que deux relations d'équivalence R et R' opérant dans des ensembles quelconques E et E' , sont isomorphes, et nous écrirons $R \simeq R'$, si les ensembles-quotients E/R et E'/R' sont isomorphes.

2. Considérons maintenant un sous-ensemble M de E et une relation d'équivalence R définie dans E . Nous appellerons *extension* de M par R et nous désignerons par $R(M)$ l'ensemble des éléments x de E équivalents modulo R à au moins un élément de M : c'est donc la réunion des classes modulo R qui contiennent au moins un élément de M .

Soient alors R_i et R_j deux relations d'équivalence dans E , J une classe modulo R_j . Si nous considérons l'extension $R_i(J)$ de cette classe par R_i , elle se compose des classes modulo R_i qui coupent J et à chacune d'elles on peut faire correspondre biunivoquement son intersection avec J ; on a donc l'isomorphisme

$$\frac{R_i(J)}{R_i} \simeq \frac{J}{R_i \cap R_j}.$$

Mais, d'autre part, $R_i(J)$ est contenue dans la classe P_j modulo $R_i \times R_j$ qui contient J . Si R_i et R_j sont associables, on a évidemment $R_i(J) = P_j$. Inversement, si l'on a $R_i(J) = P_j$, quelle que soit J , les relations R_i et R_j sont associables. En effet, soient a, u, b trois éléments tels que

$$a \equiv u \pmod{R_i}, \quad u \equiv b \pmod{R_j},$$

appelons J la classe modulo R_j définie par a et considérons l'extension $R_i(J)$; b , étant un élément de P_j , appartient à $R_i(J)$: il est donc dans une classe modulo R_i définie par un élément v de J , et l'on a bien

$$a \equiv v \pmod{R_j}, \quad v \equiv b \pmod{R_i}.$$

Si R_i et R_j sont associables, et seulement dans ce cas, on a donc

l'isomorphie

$$\frac{P_j}{R_i} \simeq \frac{J}{R_i \cap R_j},$$

c'est la généralisation du *deuxième théorème d'isomorphie*. On peut l'énoncer d'une façon plus commode.

Soit, dans l'ensemble E, R_i une relation d'équivalence consécutive à une autre relation R_j . Cette relation R_i peut être considérée comme opérant dans les différentes classes S de E modulo R_j : nous la désignerons alors par le symbole $\frac{R_i}{R_j}$ et lui donnerons le nom de *relation-quotient* de R_j par R_i ⁽¹⁾.

Soient les quatre relations R_s, R_t, R_u, R_v avec $R_s \supset R_t, R_u \supset R_v$ et soit a un élément quelconque de E; désignons par S et U les classes modulo R_t et modulo R_u qu'il définit. Nous dirons que les relations-quotients R_s/R_t et R_u/R_v sont *isomorphes* et nous écrirons

$$\frac{R_s}{R_t} \simeq \frac{R_u}{R_v},$$

si les ensembles-quotients

$$\frac{S}{R_t} = \frac{S}{R_t} \quad \text{et} \quad \frac{U}{R_v} = \frac{U}{R_v}$$

sont isomorphes quel que soit l'élément a considéré, c'est-à-dire encore quelles que soient les classes S modulo R_t et U modulo R_u ayant au moins un élément commun. De cette définition, résulte que l'isomorphisme des relations-quotients est une propriété transitive.

Avec ces conventions le *deuxième théorème d'isomorphie* s'écrit pour deux relations d'équivalence associables R_i et R_j sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\frac{R_i \times R_j}{R_i} \simeq \frac{R_j}{R_i \cap R_j}$$

ou

$$\frac{R_i \times R_j}{R_j} \simeq \frac{R_i}{R_i \cap R_j}.$$

(1) On ne doit pas confondre cette *relation-quotient* avec la *structure-quotient*, ensemble des relations d'équivalence comprises entre R_s et R_t .

VII. — Suites de relations d'équivalence.

Théorèmes de Zassenhaus, de Schreier et de Jordan-Hölder.

1. Nous allons appliquer ce théorème d'isomorphie à l'étude des suites de relations d'équivalence consécutives. Nous allons d'abord établir la propriété suivante :

Lemme de Zassenhaus généralisé.

Soient quatre relations d'équivalence :

$$R \supset r, \quad P \supset \rho$$

dans un ensemble E.

On a évidemment :

$$\begin{aligned} r \times (R \cap P) &\supset r \times (R \cap \rho), \\ \rho \times (R \cap P) &\supset \rho \times (r \cap P), \\ [r \times (R \cap \rho)] \times (R \cap P) &= r \times (R \cap P) \end{aligned}$$

puisque le produit est associatif et que $R \cap \rho$ est consécutif à $R \cap P$.

Considérons maintenant l'expression

$$[r \times (R \cap \rho)] \cap (R \cap P).$$

On a

$$(R \cap \rho) \subset (R \cap P),$$

on sait donc (théorème VII) que si $R \cap \rho$ et r sont associables on a

$$[r \times (R \cap \rho)] \cap (R \cap P) = (R \cap \rho) \times (r \cap P).$$

On a de même :

$$[\rho \times (P \cap r)] \times (R \cap P) = \rho \times (R \cap P)$$

et si $P \cap r$ et ρ sont associables :

$$[\rho \times (P \cap r)] \cap (R \cap P) = (R \cap \rho) \times (r \cap P).$$

Si de plus $R \cap P$ et $r \times (R \cap \rho)$ sont associables, on a :

$$\frac{r \times (R \cap P)}{r \times (R \cap \rho)} \simeq \frac{(R \cap P)}{(r \cap P) \times (R \cap \rho)}.$$

Et de même si $R \cap P$ et $\rho \times (P \cap r)$ sont associables, on a

$$\frac{\rho \times (R \cap P)}{\rho \times (r \cap P)} \simeq \frac{(R \cap P)}{(r \cap P)(R \cap \rho)}.$$

D'où, si ces quatre hypothèses sont remplies, le théorème de Zassenhaus :

$$\frac{\rho \times (R \cap P)}{\rho \times (r \cap P)} \simeq \frac{r \times (R \cap P)}{r \times (R \cap \rho)},$$

où l'isomorphisme a la signification indiquée précédemment.

On peut donner des conditions plus simples que les 4 conditions indiquées, moyennant lesquelles le théorème de Zassenhaus est encore valable. Ces conditions, qui entraînent les précédentes, sont naturellement plus restrictives.

1° Soient 4 relations d'équivalence $r \subset R$, $\rho \subset P$; si :

$$\begin{aligned} r \sqcap R \cap \rho, & \quad r \sqcap R \cap P. \\ \rho \sqcap r \cap P, & \quad \rho \sqcap R \cap P. \end{aligned}$$

le théorème de Zassenhaus est valable.

2° Soient 4 relations d'équivalence $r \subset R$, $\rho \subset P$, si

$$\begin{aligned} r \sqcap \rho, & \quad r \sqcap P. \\ (\rho \sqcap r), & \quad \rho \sqcap R. \end{aligned}$$

le théorème de Zassenhaus est valable.

3° Soient encore les 4 relations $r \subset R$, $\rho \subset P$.

Si r est associable à toute relation consécutive à R et si ρ est associable à toute relation consécutive à P , c'est-à-dire si r est complètement associable à R :

$$r \sqcap R,$$

et si ρ est complètement associable à P :

$$\rho \sqcap P,$$

le théorème de Zassenhaus est valable.

2. Considérons maintenant les deux suites

$$(S) \quad R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_{i-1} \supset R_i \supset \dots \supset R_r, \quad \text{de longueur } r - i = l,$$

$$(\Sigma) \quad P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_{k-1} \supset P_k \supset \dots \supset P_s, \quad \text{de longueur } s - i = l',$$

avec

$$R_1 = P_1, \quad R_r = P_s$$

de relations d'équivalence définies dans le même ensemble E et appartenant à une structure quelconque de relations d'équivalence dans E .

Par définition deux telles suites sont dites *isomorphes* si elles ont même longueur et si les relations-quotients R_{i-1}/R_i et P_{k-1}/P_k sont, convenablement associées, deux à deux isomorphes.

La relation $R_{i-1} \cap P_k$ est consécutive à R_{i-1} . On a évidemment

$$R_i \subset R_i \times (R_{i-1} \cap P_k) \subset R_{i-1} \times (R_{i-1} \cap P_k) = R_{i-1},$$

de telle sorte que l'on peut intercaler entre R_i et R_{i-1} les relations d'équivalence de la forme

$$R_i \times (R_{i-1} \cap P_k) \quad (k = 1, \dots, s),$$

avec, pour $k = 1$,

$$R_i \times (R_{i-1} \cap P_1) = R_i \times (R_{i-1} \cap R_1) = R_i \times R_{i-1} = R_{i-1},$$

pour $k = s$,

$$R_i \times (R_{i-1} \cap P_s) = R_i \times (R_{i-1} \cap R_r) = R_i \times R_r = R_i$$

et évidemment

$$R_i \times (R_{i-1} \cap P_k) \supset R_i \times (R_{i-1} \cap P_{k+k'}).$$

Remplaçons donc chaque portion $R_{i-1} \supset R_i$ de la première suite par la subdivision

$$R_{i-1} = R_i \times (R_{i-1} \cap P_1) \supset R_i \times (R_{i-1} \cap P_2) \supset \dots \\ \supset R_i \times (R_{i-1} \cap P_k) \supset \dots \supset R_i \times (R_{i-1} \cap P_s) = R_i.$$

De même remplaçons chaque portion de la deuxième suite $P_{k-1} \supset P_k$ par la subdivision

$$P_{k-1} = P_k \times (P_{k-1} \cap R_1) \supset \dots \supset P_k \times (P_{k-1} \cap R_i) \supset \dots \supset P_k \times (P_{k-1} \cap R_r) = P_k.$$

Nous obtenons ainsi deux suites (S') et (Σ') ayant chacune

$$r + (s - 2)(r - 1) = sr - r - s + 2 \text{ termes.}$$

donc de même longueur $(s - 1)(r - 1) = ll'$.

Si R_i est associable à $R_{i-1} \cap P_k$ et P_k associable à $P_{k-1} \cap R_i$, quels que soient i et k , le théorème de Zassenhaus s'applique et donne

$$\frac{R_i \times (R_{i-1} \cap P_{k-1})}{R_i \times (R_{i-1} \cap P_k)} \simeq \frac{P_k \times (P_{k-1} \cap R_{i-1})}{P_k \times (P_{k-1} \cap R_i)}.$$

Les deux suites (S) et (Σ) considérées ont donc des subdivisions isomorphes. C'est la généralisation du théorème de Schreier-Zassenhaus.

3. D'autre part on montre que les subdivisions obtenues ont la même propriété que les suites initiales. Pour cela il suffit d'utiliser la méthode employée par Ore (1) dans l'étude des suites de sous-groupes d'un groupe G telles que chaque sous-groupe d'une suite soit permutable avec l'intersection du précédent et d'un sous-groupe quelconque de l'autre suite.

Montrons d'abord que chaque terme de (S') est associable à l'intersection du précédent et d'un terme quelconque de (Σ), c'est-à-dire

$$R_i \times (R_{i-1} \cap P_k) \square [R_i \times (R_{i-1} \cap P_{k-1})] \cap P_l = R^*.$$

Pour cela, calculons R^* . Comme

$$R_i \times (R_{i-1} \cap P_{k-1}) \subset R_{i-1},$$

nous pouvons écrire

$$R^* = [R_i \times (R_{i-1} \cap P_{k-1})] \cap R_{i-1} \cap P_l.$$

1° Si $k - 1 \leq l$, on a $P_l \subset P_{k-1}$, et par suite

$$R^* = R_{i-1} \cap P_l.$$

2° Si $k - 1 \geq l$, on a $P_l \supset P_{k-1}$, et, d'après la formule de Dedekind,

$$R^* = (R_{i-1} \cap P_{k-1}) \times (R_i \cap P_l).$$

De ces formules et des hypothèses résulte que R^* est toujours

(1) *Loc. cit.*, note (1), p. 64.

associable à R_i . De plus, si $k \leq l$, on a

$$R^* = R_{i-1} \cap P_l \subset R_{i-1} \cap P_k; \quad \text{donc} \quad R^* \square R_{i-1} \cap P_k$$

et par suite

$$R^* \square R_i \times (R_{i-1} \cap P_k).$$

Si $k \geq l+1$, on a

$$R_{i-1} \cap P_k \subset R_{i-1} \cap P_{k-1} \subset R^*,$$

donc

$$R^* \square R_{i-1} \cap P_k \quad \text{et} \quad R^* \square R_i \times (R_{i-1} \cap P_k),$$

Montrons maintenant que si l'on applique aux suites (S') et (Σ) le procédé de Zassenhaus, les subdivisions qui s'en déduisent ne sont autres que (S') et (Σ') .

On intercale entre deux termes consécutifs $R_i \times (R_{i-1} \cap P_{k-1})$ et $R_i \times (R_{i-1} \cap P_k)$ de (S') les termes

$$\begin{aligned} [R_i \times (R_{i-1} \cap P_k)] \times R^* &= R_i \times (R_{i-1} \cap P_k) & \text{si } k \leq l (P_l \subset P_k) \\ &= R_i \times R^* = R_i \times (R_{i-1} \cap P_{k-1}) & \text{si } k \geq l+1 \end{aligned}$$

(S') reste donc bien inchangée (à des répétitions près).

Dans (Σ) , on intercale entre P_l et P_{l+1}

$$\begin{aligned} P_{l+1} \times \{ P_l \cap [R_i \times (R_{i-1} \cap P_{k-1})] \} &= P_{l+1} \times R^* \\ &= P_{l+1} \times (P_l \cap R_{i-1}), & \text{si } k-1 \leq l, \\ &= P_{l+1} \times (P_l \cap R_i), & \text{si } k-1 \geq l+1. \end{aligned}$$

On obtient donc bien la subdivision (Σ') , et il en résulte, en appliquant de nouveau la première partie de la démonstration, que (S') et (Σ') ont la même propriété que (S) et (Σ) : chaque relation d'une suite est associable à l'intersection de la précédente et d'une relation quelconque de l'autre suite.

On obtient ainsi la *généralisation du théorème de Jordan-Hölder* : si les suites (S) et (Σ) sont maximales, c'est-à-dire s'il n'y a, quel que soit i , aucune relation entre R_{i-1} et R_i qui soit associable à toutes les intersections $R_{i-1} \cap P_k$ et, quel que soit k , aucune relation entre P_{k-1} et P_k qui soit associable à toutes les intersections $P_{k-1} \cap R_i$, les deux suites sont isomorphes (en particulier, elles ont même longueur $r = s$).

4. Ces théorèmes semblent être, pour les relations d'équivalence,

les formes les plus générales que l'on puisse donner au théorème de Schreier-Zassenhaus et au théorème de Jordan-Hölder. Mais on peut indiquer des formes plus particulières qui, également, sont intéressantes.

Si toute relation R_i de (S) est associable à toute relation P_k de (Σ) , (S) et (Σ) admettent, dans la structure considérée, des subdivisions isomorphes (S') et (Σ') . De plus, toute relation $R_i \times (R_{i-1} \cap P_k)$ de (S') est encore associable à toute relation $P_j \times (P_{j-1} \cap R_l)$ de (Σ') .

Pour établir ce dernier point, nous distinguerons les cas suivants :

1° $i \leq l, j \leq k$, d'où résulte

$$R_l \subset R_i, \quad P_k \subset P_j.$$

On a, *a fortiori*, $R_l \subset R_{i-1}$, et comme R_l est associable à P_k , il en résulte

$$R_l \square R_{i-1} \cap P_k.$$

Comme nous avons d'autre part,

$$R_{i-1} \cap P_k \subset P_k \subset P_{j-1},$$

il vient

$$(1) \quad P_{j-1} \cap R_l \square R_{i-1} \cap P_k.$$

D'autre part

$$P_{j-1} \cap R_l \subset R_l \subset R_i$$

entraîne

$$P_{j-1} \cap R_l \square R_i.$$

et, en tenant compte de (1), nous avons

$$(2) \quad P_{j-1} \supset R_l \square R_i \times (R_{i-1} \cap P_k).$$

Enfin, les relations $P_j \square R_i$ et $P_j \supset P_k \cap R_{i-1}$ donnent

$$(2') \quad P_j \square R_i \times (R_{i-1} \cap P_k)$$

et (2) et (2') entraînent

$$P_j \times (P_{j-1} \cap R_l) \square R_i \times (R_{i-1} \cap P_k).$$

2° $i \leq l, j - 1 \geq k$, donc

$$R_l \subset R_i, \quad P_j \subset P_{j-1} \subset P_k.$$

Il résulte des hypothèses précédentes qu'on a

$$P_{j-1} \cap R_l \subset R_i \cap P_k \quad \left\{ \begin{array}{l} \subset R_{i-1} \cap P_k, \\ \subset R_i, \end{array} \right.$$

d'où

$$P_{j-1} \cap R_l \subset R_i \times (R_{i-1} \cap P_k); \quad \text{donc} \quad P_{j-1} \cap R_l \sqsubset R_i \times (R_{i-1} \cap P_k).$$

On a, d'autre part,

$$P_j \sqsubset R_{i-1}, \quad P_j \subset P_k,$$

d'où

$$P_j \sqsubset (R_{i-1} \cap P_k),$$

puis, comme $P_j \sqsubset R_i$

$$P_j \sqsubset R_i \times (R_{i-1} \cap P_k)$$

et finalement

$$P_j \times (P_{j-1} \cap R_l) \sqsubset R_i \times (R_{i-1} \cap P_k).$$

Le même raisonnement, en intervertissant les R et les P , conduirait à la même conclusion dans le cas $i-1 \geq l, j \leq k$.

3° Soit enfin $i-1 \geq l, j-1 \geq k$, donc

$$(R_i \subset R_{i-1}) \subset R_l, \quad (P_j \subset P_{j-1}) \subset P_k.$$

De

$$R_{i-1} \sqsubset P_{j-1}, \quad R_{i-1} \subset R_l$$

résulte en premier lieu

$$R_{i-1} \sqsubset P_{j-1} \cap R_l.$$

Comme on a en outre

$$P_{j-1} \cap R_l \subset P_{j-1} \subset P_k,$$

il vient

$$P_{j-1} \cap R_l \sqsubset R_{i-1} \cap P_k.$$

Les relations

$$R_i \sqsubset P_{j-1}, \quad R_i \subset R_l$$

entraînent

$$R_i \sqsubset P_{j-1} \cap R_l$$

et nous avons

$$P_{j-1} \cap R_l \sqsubset R_i \times (R_{i-1} \cap P_k).$$

Enfin, de

$$P_j \subset P_k, \quad P_j \sqsubset R_{i-1}$$

résulte

$$P_j \sqsubset R_{i-1} \cap P_k,$$

d'où, puisque P_j et R_i sont associables,

$$P_j \sqsubset R_i \times (R_{i-1} \cap P_k),$$

donc

$$P_j \times (P_{j-1} \cap R_l) \sqsubset R_i \times (R_{i-1} \cap P_k).$$

On voit donc que si (S) et (Σ) sont *maximales*, c'est-à-dire si l'on ne peut intercaler dans (Σ) aucune relation associable à toutes les relations de (S) et dans (S) aucune relation associable à toutes les relations de (Σ) , (S) et (Σ) sont *isomorphes*.

Enfin, en utilisant le troisième groupe d'hypothèses moyennant lesquelles le lemme de Zassenhaus est valable, on peut supposer que, dans chaque suite, *chaque terme est complètement associable au précédent*.

S'il en est ainsi, (S) et (Σ) admettent des subdivisions isomorphes, et il y a non seulement isomorphisme des relations-quotients, mais isomorphisme des structures-quotients correspondantes.

Il ne semble pas absolument certain, au moins d'une manière générale, que les subdivisions (S') et (Σ') soient encore formées de relations complètement associables chacune à la précédente. Toutefois, il faut signaler que dans la structure des relations R_g formées à partir des sous-groupes g d'un groupe G , O. Ore a démontré cette propriété, mais sa démonstration utilise des calculs sur les éléments de G et n'est donc pas susceptible de généralisation. D'autre part, dans la structure de *toutes* les relations d'équivalence d'un ensemble, une relation R_j consécutive à R_i ne lui est complètement associable que si et seulement si les différentes classes de R_j sont, ou bien des classes de R_i , ou bien des classes de R_e , c'est-à-dire des éléments; comme on le vérifie sans peine, les subdivisions de deux suites dont chaque terme est complètement associable au précédent ont alors la même propriété.