JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

GR. C. MOISIL

Sur le syllogisme hypothétique dans la logique intuitioniste

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 197-202.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_197_0>

Sur le syllogisme hypothétique dans la logique intuitioniste;

PAR GR. C. MOISIL.

1. Dans la logique classique (1) on a deux formes de syllogisme hypothétique : la forme simple

$$\text{(I)} \qquad \frac{\begin{array}{c} p \\ p \to q \end{array}}{q}$$

et la forme complète

$$\text{(II)} \qquad \frac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \end{array}}{p \to r}.$$

Ces deux formes sont *assertoriques*. Si l'on voulait introduire le *mode problématique*, on devrait construire l'idée de possibilité. On peut le faire de plusieurs manières différentes, par exemple en employant les logiques à plusieurs valeurs de M. Lukasiewicz. On peut aussi interpréter l'idée « *il est possible que...* » par « *il est absurde qu'il soit absurde que...* ». Pour que la double négation ne soit pas équivalente à l'affirmation, il faut employer une logique dans laquelle le principe de la double négation ne soit pas valable. Telles sont les logiques de MM. Heyting et Kolmogoroff (2).

---

(1) Nous désignons par *logique classique* la logique telle qu'elle a été formalisée par le calcul de Peano-Frege-Russel. Nous employons les signes $\vee$ (ou), & (et), $\to$ (si... alors), — (non); les parenthèses seront employées suivant les règles du calcul algébrique ordinaire.

(2) A. HEYTING, *Die formale Regeln der intuitionistischen Logik* (*Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*. Berlin, 1930, p. 42). Ce Mémoire sera cité H.

Nous nous proposons de montrer que dans la logique de M. Heyting il existe, en dehors des types précédents, deux formes nouvelles de syllogisme hypothétique : la *forme problématique simple*

$$\text{(III)} \qquad \begin{array}{c} \overline{\overline{p}} \\ \hline p \to q \\ \hline \overline{\overline{q}} \end{array},$$

et la *forme problématique complète*

$$\text{(IV)} \qquad \begin{array}{c} \overline{\overline{p \to q}} \\ \hline \overline{\overline{q \to r}} \\ \hline \overline{\overline{p \to r}} \end{array}.$$

2. La logique de M. Heyting a les axiomes suivants :

$$(1) \qquad a \to (a \mathbin{\&} a),$$
$$(2) \qquad (a \mathbin{\&} b) \to (b \mathbin{\&} a),$$
$$(3) \qquad (a \to b) \to \big((a \mathbin{\&} c) \to (b \mathbin{\&} c)\big),$$
$$(4) \qquad \big((a \to b) \mathbin{\&} (b \to c)\big) \to (a \to c),$$
$$(5) \qquad b \to (a \to b),$$
$$(6) \qquad \big(a \mathbin{\&} (a \to b)\big) \to b,$$
$$(7) \qquad a \to (a \vee b),$$
$$(8) \qquad (a \vee b) \to (b \vee a),$$
$$(9) \qquad \big((a \to c) \mathbin{\&} (b \to c)\big) \to \big((a \vee b) \to c\big),$$
$$(10) \qquad \overline{a} \to (a \to b),$$
$$(11) \qquad \big((a \to b) \mathbin{\&} (a \to \overline{b})\big) \to \overline{a},$$
$$(12) \qquad a \to \big(b \to (a \mathbin{\&} b)\big).$$

Elle a deux règles de déduction :

A. La règle de substitution [1];

B. La règle de détachement, qui n'est que de la forme (1) de syllogisme hypothétique [2].

---

[1] La substitution de q à la place de p sera notée p/q.

[2] M. Heyting introduit les axiomes (1)-(11) et une troisième règle, pour la

3. Rappelons quelques formules utiles, conséquences des axiomes (1)-(12) et des règles A, B. La loi de transposition est valable sous les deux formes :

(13) $$(a \rightarrow b) \rightarrow (\bar{b} \rightarrow \bar{a}),$$ (H.4. 2)

(14) $$(a \rightarrow \bar{b}) \rightarrow (b \rightarrow \bar{a}),$$ (H.4.21)

et l'on a aussi

(15) $$(a \rightarrow b) \rightarrow (\bar{\bar{a}} \rightarrow \bar{\bar{b}}).$$ (H.4.22)

Le principe d'identité est valable

(16) $$a \rightarrow a,$$ (H.2.21)

mais le principe de la double négation n'est valable que partiellement

(17) $$a \rightarrow \bar{\bar{a}};$$ (H.4. 3)

il existe un principe de la triple négation

(18) $$\bar{a} \rightleftarrows \bar{\bar{\bar{a}}},$$ (H.4.31)

et un principe de la quadruple négation

(19) $$\bar{\bar{a}} \rightleftarrows \bar{\bar{\bar{\bar{a}}}}.$$

---

conjonction, règle qui conduit au schéma suivant :

(C) $$\frac{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}}{p \,\&\, q}.$$

Ce schéma est une conséquence immédiate de l'axiome (12) et du schéma (B). Réciproquement les axiomes (1)-(11) et le schéma A-C donnent :

$$\big((a \,\&\, b) \rightarrow c\big) \rightarrow \big(a \rightarrow (b \rightarrow c)\big);$$ (H.2.27)

en substituant $c/a \,\&\, b$ et en détachant $(a \,\&\, b) \rightarrow (a \,\&\, b)$, vraie car

$$p \rightarrow p,$$

on obtient

$$a \rightarrow \big(b \rightarrow (a \,\&\, b)\big).$$

Entre les quatre implications

$$p \to q, \qquad p \to \overline{\overline{q}}, \qquad \overline{\overline{p}} \to q, \qquad \overline{\overline{p}} \to q,$$

on a les trois implications suivantes :

$$(\overline{\overline{p}} \to q) \to (p \to q), \tag{20}$$

$$(p \to q) \to (p \to \overline{\overline{q}}), \tag{21}$$

$$(p \to \overline{\overline{q}}) \to (\overline{\overline{p}} \to \overline{\overline{q}}). \tag{22}$$

Les deux formes problématiques (III) et (IV) peuvent être déduites des formules

$$(\overline{\overline{p}} \,\&\, \overline{\overline{p \to q}}) \to \overline{\overline{q}}, \tag{23}$$

$$(\overline{\overline{p \to q}} \,\&\, \overline{\overline{q \to r}}) \to \overline{\overline{p \to r}}. \tag{24}$$

4. Démonstration de la formule (19). — Dans la règle de transposition (13) faisons la substitution $a/\overline{p}$, $h/\overline{\overline{\overline{p}}}$, on trouve

$$(\overline{p} \to \overline{\overline{\overline{p}}}) \to (\overline{\overline{\overline{p}}} \to \overline{\overline{p}}),$$

détachant $\overline{p} \to \overline{\overline{\overline{p}}}$ [formule (18)], on obtient

$$\overline{\overline{\overline{p}}} \to \overline{\overline{p}}, \tag{19'}$$

en substituant $p/\overline{\overline{p}}$ dans la formule (17) on obtient

$$\overline{\overline{p}} \to \overline{\overline{\overline{p}}}. \tag{19''}$$

(19′) et (19″) équivalent à (19).

Démonstration de la formule (20). — Dans la formule

(!) $$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) \qquad \text{(II.2.29)}$$

substituons p/p, $q/\overline{\overline{p}}$, r/q et détachons $p \to \overline{\overline{p}}$ [formule (17)], on obtient la formule (20).

Démonstration de la formule (21). — Dans la formule

(!!) $$(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \qquad \text{(II.2.291)}$$

substituons p/p, q/q, $r/\overline{\overline{q}}$, et détachons $q \to \overline{\overline{q}}$, on obtient (21).

Démonstration de la formule (22). — Dans la formule (15) substituons a/p, $b/\overline{\overline{q}}$, on obtient

$$(+) \qquad (p \to \overline{\overline{q}}) \to \left(\overline{\overline{p}} \to \overline{\overline{\overline{q}}}\right);$$

la formule

$$(++) \qquad \big(p \to (q \to r)\big) \to \big((p \,\&\, q) \to r\big), \qquad (\text{H}.2.27)$$

en substituant

$$p/p \to \overline{\overline{q}}, \quad q/\overline{\overline{p}}, \quad r/\overline{\overline{\overline{q}}}$$

et en détachant

$$(p \to \overline{\overline{q}}) \to \left(\overline{\overline{p}} \to \overline{\overline{\overline{q}}}\right),$$

qui est la formule (15), après la substitution a/p, $b/\overline{\overline{q}}$, donne

$$(+++) \qquad \left((p \to \overline{\overline{q}}) \,\&\, \overline{\overline{p}}\right) \to \overline{\overline{\overline{q}}}.$$

La formule (!), par la substitution

$$p/(p \to \overline{\overline{q}}) \,\&\, \overline{\overline{p}}, \quad q/\overline{\overline{\overline{q}}}, \quad r/\overline{\overline{q}},$$

et en détachant la formule $(+++)$, donne

$$\left(\overline{\overline{\overline{q}}} \to \overline{\overline{q}}\right) \to \left(\left((p \to \overline{\overline{q}}) \,\&\, \overline{\overline{p}}\right) \to \overline{\overline{q}}\right);$$

en en détachant $\overline{\overline{\overline{q}}} \to \overline{\overline{q}}$ on obtient

$$(++++) \qquad \left((p \to \overline{\overline{q}}) \,\&\, \overline{\overline{p}}\right) \to \overline{\overline{q}}.$$

Dans la formule

$$\big((a \,\&\, b) \to c\big) \to \Big(\big(a \to (b \to c)\big)\Big), \qquad (\text{H}.2.27)$$

substituons

$$a/p \to \overline{\overline{q}}, \quad b/\overline{\overline{p}}, \quad c/\overline{\overline{q}}$$

et détachons $(++++)$, on obtient (22).

Démonstration de la formule (23). — Dans la formule

$$(\text{o}) \qquad (\overline{\overline{p}} \,\&\, \overline{\overline{q}}) \to \left(\overline{\overline{p \,\&\, q}}\right) \qquad (\text{H}.4.6)$$

faisons la substitution p/p, $q/p \to q$, on obtient

$$(\text{oo}) \qquad \left(\overline{\overline{p}} \,\&\, \overline{\overline{p \to q}}\right), \quad \overline{\overline{p \,\&\, (p \to q)}}.$$

Dans la formule (15) substituons

$$a/p \,\&\, (p \to q), \quad b/q,$$

et détachons

$$\bigl(p \,\&\, (p \to q)\bigr) \to q \quad \text{[formule (6)]},$$

nous obtenons

(ooo) $$\overline{\overline{p \,\&\, (p \to q)}} \to \overline{\overline{q}}.$$

Dans la formule (!) substituons

$$p/\overline{\overline{p}} \,\&\, \overline{\overline{p \to q}}, \quad q/p \,\&\, \overline{\overline{(p \to q)}},$$

et détachons la formule (oo) ; on obtient

$$(\overline{\overline{p \,\&\, (p \to q)}} \to \overline{\overline{q}}) \to \bigl((\overline{\overline{p}} \,\&\, \overline{\overline{p \to q}}\bigr) \to \overline{\overline{q}}\bigr);$$

en détachant l'expression (ooo), nous obtenons la formule (23).

Démonstration de la formule (24). — Dans la formule (o) faisons la substitution $p/p \to q$, $q/q \to r$; nous obtenons

(⋆) $$(\overline{\overline{p \to q}} \,\&\, \overline{\overline{q \to r}}) \to \overline{\overline{(p \to q) \,\&\, (q \to r)}}.$$

Dans la formule (15) substituons

$$a/\bigl((p \to q) \,\&\, (q \to r)\bigr), \quad h/p \to r,$$

et détachons la formule

(⋆⋆) $$\bigl((p \to q) \,\&\, (q \to r)\bigr) \to (p \to r), \qquad \text{(H.2.3)}$$

nous obtenons

(⋆⋆⋆) $$\overline{\overline{(p \to q) \,\&\, (q \to r)}} \to \overline{\overline{p \to r}}.$$

Dans la formule (! !) substituons

$$p/(\overline{\overline{p \to q}} \,\&\, \overline{\overline{q \to r}}), \quad q/\overline{\overline{(p \to q) \,\&\, (q \to r)}}, \quad r/\overline{\overline{p \to r}}$$

et détachons (⋆ ⋆ ⋆); de la formule obtenue détachons (⋆) et nous obtenons la formule (24).