JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGE D. BIRKHOFF

Note sur la stabilité en Dynamique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 339-344.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__339_0>

Note sur la stabilité en Dynamique;

PAR GEORGE D. BIRKHOFF.

Dans sa forme la plus simple le problème de la stabilité en Dynamique se présente de la manière suivante. Soit donnée une transformation réelle T des variables u, v :

$$u_1 = \varphi(u, v) = au + bv + \ldots$$
$$v_1 = \psi(u, v) = cu + dv + \ldots,$$

où les fonctions φ et ψ sont analytiques à l'origine (o, o) du plan des variables u, v et s'évanouissent en ce point. L'origine est donc un point fixe de T. Supposons de plus que l'intégrale double

$$\iint Q(u, v)\,du\,dv,$$

où

$$Q(u, v) = p + qu + rv + \ldots \qquad (p \neq 0),$$

soit invariante par la transformation T. Alors l'équation caractéristique en ρ au point fixe (o, o)

$$\rho^2 - (a + d)\rho + ad - bc = 0$$

sera une équation réciproque puisque $ad - bc = 1$. Dans le cas $|a + d| \leqq 2$ cette équation aura deux racines $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}\left(i = \sqrt{-1}\right)$ de module 1. Supposons de plus que ces racines ne soient pas des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Pour résoudre le problème de la stabilité effective pour cette transformation T (du type *formellement* stable) il faut : ou bien démontrer que dans n'importe quel voisinage du point (o, o) il existe des points P dont les images successives par T ou T^{-1} sortent à l'extérieur d'un voisinage fixe de (o, o), ou bien démontrer qu'un tel voisinage fixe n'existe pas. Dans le premier cas le point (o, o) serait instable; dans l'autre cas ce point serait stable.

Jusqu'ici, malgré les plus grands efforts des géomètres, on n'a pas pu démontrer que le cas instable puisse avoir lieu, quoique, selon toute probabilité, l'instabilité (très lente) ait lieu en général. Même si nous supposons seulement que T soit de classe C^k [1] (k fini et positif), il semble très difficile de démontrer que l'instabilité puisse avoir lieu.

D'autre part on sait qu'il existe en certains cas analytiques des régions annulaires d'instabilité dans le voisinage immédiat d'un point stable [2]. En effet dans le cas stable il existe toujours une famille infinie épanouissante de courbes invariantes fermées autour du point fixe; ces courbes sont rectifiables, et chacune d'elles est rencontrée par un rayon quelconque issu de (o, o) en un seul point. A une telle courbe invariante correspond un « coefficient de rotation ». Il peut arriver que tous ces coefficients soient incommensurables avec 2π. En ce cas toutes les courbes invariantes sont tout à fait distinctes entre elles. Les coefficients de rotation sont rangés alors dans le même ordre que ces courbes invariantes. Les régions annulaires d'instabilité sont les régions du plan entre deux courbes invariantes successives quelconques.

Il y a une analogie étroite entre le voisinage d'un des bords d'une telle région annulaire, et le voisinage annulaire d'un point fixe instable (mais *formellement* stable). Nous voulons dans cette Note faire ressortir plus clairement cette analogie. Si l'on introduit des coordonnées polaires r, θ, le point $r = 0$ correspondra à une courbe invariante avec un coefficient de rotation α tel que $\frac{\alpha}{2\pi}$ soit irrationnel. Soit β le coefficient de rotation qui correspond à une telle courbe invariante à la frontière d'une région d'instabilité. Introduisons les nouvelles variables ρ, φ où $\rho = r^2 - f^2(\theta)$, $\varphi = \theta$, et où $r = f(\theta)$ est l'équation

(1) Dire qu'une fonction est de classe C^k est dire (par définition) qu'elle possède des dérivées continues jusqu'au $k^{\text{ième}}$ ordre.

(2) Voir mon Livre *Dynamical Systems*.

de la courbe invariante. Avec ces variables, T devient une transformation T^* qui est biunivoque et continue dans le voisinage de l'origine du plan des variables ρ, φ, et dont l'origine est un point fixe. Cette transformation admet l'intégrale invariante $\iint P\,d\rho\,d\varphi$. De plus T^* transforme les directions radiales entre elles sans laisser invariante par T^{*k} (k quelconque) aucune direction radiale. Le coefficient de rotation β se rattache aussi à cette transformation des directions.

Donc cette transformation biunivoque et continue T^* *jouit des plus importantes propriétés qualitatives de la transformation analytique* T. *Néanmoins elle est évidemment instable à l'origine.*

Allons un peu plus loin.

En supposant que la stabilité ait lieu pour toutes les transformations analytiques T, on obtient une famille de courbes invariantes rectifiables correspondant à une transformation T quelconque. Il semble donc presque certain que, pour un choix convenable de T, on puisse obtenir une courbe invariante au bord d'une région annulaire d'instabilité pour laquelle le coefficient de rotation β est un nombre arbitraire. Il semble être certain aussi que ces courbes rectifiables puissent être de classe C^k (k arbitrairement grand). Mais le long d'une telle courbe, selon un résultat très important et bien connu de M. Denjoy, la transformation de la courbe invariante doit être pour $k \geqq 2$, topologiquement équivalente à une rotation ordinaire.

En d'autres termes il existe une fonction continue et périodique de période 2π, soit $\varphi(\theta)$, telle que la fonction $\theta + \varphi(\theta)$ croisse avec θ et satisfasse à l'équation fonctionnelle

$$\theta_1(\theta) + \varphi[\theta_1(\theta)] = \theta + \varphi(\theta) + \beta.$$

Ici θ désigne la valeur de la coordonnée θ au point considéré, tandis que $\theta_1(\theta)$ désigne la valeur de θ au point transformé. Il semble également certain que la fonction continue $\varphi(\theta)$ ainsi introduite puisse avoir autant de dérivées continues qu'on le veut, avec $1 + \varphi'(\theta) > 0$ partout.

En admettant tout cela comme très vraisemblable, on peut montrer sans difficulté qu'en partant de l'hypothèse de stabilité on est conduit nécessairement à rejeter cette hypothèse, au moins pour les transformations T^* de classe C^k (k arbitrairement grand) sinon analytiques.

En effet si l'on remplace la variable θ par $\psi = \theta + \varphi$ et la variable r par ρ où $\rho = r^2 - f^2(\theta)$, on peut écrire T de la manière suivante :

$$\rho_1 = \rho[a_1(\psi) + a_2(\psi)\rho + \ldots + A_k(\rho, \psi)\rho^{k-1}],$$
$$\psi_1 = \psi + \beta + \rho[b_1(\psi) + b_2(\psi)\rho + \ldots + B_k(\rho, \psi)\rho^{k-1}],$$

où les fonctions A_k, B_k sont de classe C^l (l arbitrairement grand) pour $\rho \geqq 0$ et bornées.

Puisqu'on peut prendre T elle-même telle que l'intégrale invariante soit l'aire ordinaire, la transformation T en des variables modifiées conservera aussi l'aire $\iint d\rho\, d\psi$. Donc on doit avoir l'identité $\frac{\partial(\rho_1, \psi_1)}{\partial(\rho, \psi)} = 1$. En substituant et comparant, on voit que $a_1(\psi) = 1$ dans les équations ci-dessus.

Cherchons maintenant à obtenir une fonction continue $\lambda(\psi)$ et une constante t_0 telles que

$$\lambda(\psi + \beta) - \lambda(\psi) = b_1(\psi) - t_0.$$

Pour cela, développons la fonction $b_1(\psi)$ en une série de Fourier

$$b_1(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n e^{in\psi} \qquad (t_0 = s_0).$$

D'une manière formelle nous obtenons pour λ une série analogue correspondante

$$\lambda(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{s_n}{e^{in\beta} - 1} e^{in\psi},$$

où $n \neq 0$ dans la sommation Σ'. Mais il est bien connu que pour un choix convenable de β (par exemple $\beta = 2\pi\sqrt{2}$) la valeur absolue de $e^{in\beta} - 1$ est au moins $\frac{K}{n^2}$ pour n quelconque, K étant une constante positive. Il est donc visible que la fonction $\lambda(\psi)$ ainsi obtenue aura des dérivées continues d'ordre $k - 4$ au moins, donc d'un ordre arbitrairement élevé.

Introduisons encore des nouvelles variables $\bar{\rho}$, $\bar{\psi}$,

$$\bar{\rho} = \rho, \qquad \bar{\psi} = \psi - \rho\lambda(\psi).$$

En adoptant ces variables modifiées la transformation T prend une forme analogue à la forme ci-dessus,

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1 &= \bar{\rho}[1 + a_2(\bar{\psi})\bar{\rho} + \ldots], \\ \bar{\psi}_1 &= \bar{\psi} + \beta + \bar{\rho}[t_0 + \bar{b}_2(\bar{\psi})\bar{\rho} + \ldots], \end{aligned}$$

mais avec $\bar{b}_1(\bar{\psi}) = t_0$. Avec ces variables $\bar{\rho}$, $\bar{\psi}$ l'intégrale invariante s'écrit

$$\iint \frac{d\bar{\rho}\, d\bar{\psi}}{1 - \rho\lambda'(\psi)}.$$

Par une autre légère modification on peut choisir des variables nouvelles $\rho^\star$, $\psi^\star$ pour lesquelles on ait

$$\frac{\partial(\rho_1^\star, \psi_1^\star)}{\partial(\bar{\rho}, \bar{\psi})} = 1,$$

tout en ne modifiant pas la forme que nous venons d'écrire; en effet on peut choisir $\rho^\star$, $\psi^\star$ de façon que

$$\psi^\star = \psi \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\rho^\star}{\partial\bar{\rho}} = \frac{1}{[1 - \rho\lambda'(\psi)]}.$$

Afin de simplifier, désignons ces variables $\rho^\star$ et $\psi^\star$ par ρ et ψ respectivement.

En employant la condition $\frac{\partial(\rho_1, \psi_1)}{\partial(\rho, \psi)} = 1$ pour $\rho = 0$, on obtient immédiatement par comparaison directe l'équation $a_2(\psi) = 0$. Ainsi nous pouvons écrire T sous une forme encore plus spécialisée

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho[1 + \star + a_2(\psi)\rho^2 + \ldots], \\ \psi_1 &= \psi + \beta + \rho[t_0 + b_2(\psi)\rho + \ldots], \end{aligned}$$

où les fonctions à droite possèdent encore des dérivées d'ordre arbitrairement élevé.

En continuant d'une manière analogue, on obtient, après d'autres modifications convenables des variables, la forme suivante pour T

$$\rho_1 = \rho[1 + \star + \star + \ldots + A_k(\rho, \psi)\rho^{k-1}],$$
$$\psi_1 = \psi + \beta + [t_0\rho + t_1\rho^2 + \ldots + B_k(\rho, \psi)\rho^{k-1}],$$

où A_k, B_k sont des fonctions continues de classe C^l (l arbitrairement grand) et d'ordre $k-1$ au plus en ρ, et où $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$ sont des constantes.

Mais avec les coordonnées rectangulaires u, v où

$$u = \rho^{\frac{1}{2}} \cos\psi, \qquad v = \rho^{\frac{1}{2}} \sin\psi$$

cette transformation s'écrit

$$\begin{aligned} u_1 &= u \cos[\beta + t_0(u^2 + v^2) + \ldots + t_{k-2}(u^2+v^2)^{k-1}] \\ &\quad - v \sin[\beta + t_0(u^2+v^2) + \ldots + t_{k-2}(u^2+v^2)^{k-1}] + U_k(u, v), \\ v_1 &= u \sin[\beta + t_0(u^2+v^2) + \ldots + t_{k-2}(u^2+v^2)^{k-1} \\ &\quad + v \sin[\beta + t_0(u^2+v^2) + \ldots + t_{k-2}(u^2+v^2)^{k-1}] + V_n(u, v), \end{aligned}$$

où U_k, V_k sont de classe C^m (m arbitrairement grand) et d'ordre $k-1$ au plus en ρ. De plus $\iint du\,dv$ reste avec ces variables l'intégrale invariante.

Voilà la forme normale que nous voulions obtenir. En effet, dans cette forme, la transformation est de classe C^m et formellement stable; néanmoins, l'origine est un point fixe instable.

Donc l'hypothèse de stabilité dans le cas de stabilité formelle nous conduit au cas instable exclu, au moins si l'on admet des transformations T *de classe* C^l (*l arbitrairement grand*) *aussi bien que les transformations analytiques.*

Par conséquent il semble certain que l'instabilité a lieu en général dans le cas de la stabilité formelle en Dynamique.