MATHEMATICAL SCIENCES

PROPERTIES OF THE BISUBDIFFERENTIAL OF BICONVEX FUNCTIONS

Sadygov Misraddin Allahverdi oglu
Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Baku State University

СВОЙСТВА БИСУБДИФФЕРЕНЦИАЛА БИВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы
доктор физико-математических наук
Бакинский Государственный Университет

Abstract

In this work, a number of properties of bisubdifferential and biconjugate functions for biconvex functions are studied. Necessary and sufficient conditions for the equality of the bisubdifferential of the sum and the sum of the bisubdifferentials of two biconvex functions are obtained. A biconvex mathematical programming problem is considered.

Аннотация

В работе изучен ряд свойств бисубдифференциала и бисопряженных функций для бивыпуклых функций. Получены необходимые и достаточные условия равенства бисубдифференциала суммы и суммы бисубдифференциалов двух бивыпуклых функций. Рассмотрена бивыпуклая задача математического программирования.

Keywords: bisublinear function, tensor product, biconjugate function.

Ключевые слова: бисублинейная функция, тензорное произведение, бисопряженная функция.

1. Введение

В исследовании оптимальности высокого порядка для негладких задач минимизации возникает новое направление n-выпуклый анализ. В n-выпуклом анализе в основном изучаются n-выпуклое множество и n-выпуклая функция. Известно, что в выпуклом анализе существенную роль играет теорема отделимости. В n-выпуклым анализе основную роль играет теория тензорного произведения.

В работе исследован ряд свойств сублинейных функций, определенных на тензорном произведении пространств. Изучена бисубдифференцируемость бивыпуклых функций и изучены ряд их свойств. Получены необходимые и достаточные условия бисубдифференциала суммы бивыпуклых функций. Рассмотрена бивыпуклая задача математического программирования. В исследовании бивыпуклых функций существенную роль играет бивыпуклое множество. Такие вопросы изучены также в работах [1]-[8].

Отметим, что n-выпуклое множество и n-выпуклая функция изучались в [6].

Пусть X-банахово пространство. Функцию $f: X \to R$ назовем 2-липшицевой с постоянной L в окрестности точки x_0, если f для некоторого $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию $|f(z+x+y) - f(z+x) - f(z+y) + f(z)| \le L\|x\|\|y\|$ при $x, y \in \varepsilon B$, $z \in x_0 + \varepsilon B$.

Если f 2-липшицевая с постоянной L в окрестности точки x_0 функция, то положим

$$f^{[2]}(x_0; x, y) = \overline{\lim_{\substack{z \to x_0, \\ t \downarrow 0, \tau \downarrow 0}}} \frac{1}{t\tau}(f(z+tx+\tau y) - f(z+tx) - f(z+\tau y) + f(z))$$

при $x, y \in X$. Легко проверяется, что $(x, y) \to f^{[2]}(x_0; x, y)$ бисублинейная функция. Именно это и приводит к изучению бивыпуклых функций.

Множество всех непрерывных билинейных симметричных функций из $X \times X$ в R, обозначим через $\overline{B}(X^2, R)$. Множество

$\partial_2 f(x_0) = \{b \in \overline{B}(X^2, R) : f^{[2]}(x_0; x, y) \ge b(x, y)$ при $x, y \in X\}$ назовем обобщенным 2-субдифференциалом функции f в точке x_0.

Отметим, что эти определения даны автором в 1980 году и обсуждены Ф.П. Демьяновым и А.М.Рубиновым и опубликованы только в 1988 году в более общим виде, где определен субдифференциал произвольного порядка. Считаю, что они не хорошо оценили теорию Ф.Кларка. Из этих определений следуют класс $n-$выпуклых функций, класс n-суб-линейных функций, класс $n-$липшицевых функций, класс $n-$выпуклых и $n-$нормальных множеств, которые подробно изучены автором.

Работа состоит из введения и трех пунктов. В п. 2 с помощью тензорного произведения изучается ряд свойств четных бисублинейных функций. Получены необходимые и достаточные условия равенства бисубдифференциала суммы и суммы бисубдифференциалов двух бисублинейных функций. В п. 3 изучен ряд свойств бисопряженных функций для бивыпуклых функций. Получены необходимые и достаточные условия равенства бисубдифференциала суммы и суммы бисубдифференциалов двух бивыпуклых функций. В п. 4 рассмотрена бивыпуклая задача математического программирования.

2. Свойства четных бисублинейных функций

Пусть X и Y действительные линейные пространства. Обозначим (см. [9], [10]) через $X\Theta Y$ пространство формальных линейных комбинаций (с действительными коэффициентами) элементов $X\times Y$. Употребляя запись $x\Theta y$ вместо $1(x,y)$ для элементов естественного базиса в $X\Theta Y$, рассмотрим множество $L\subset X\Theta Y$ элементов любого из следующих видов:

$$(x_1+x_2)\Theta y - x_1\Theta y - x_2\Theta y;$$
$$x\Theta(y_1+y_2) - x\Theta y_1 - x\Theta y_2,$$
$$\lambda x\Theta\mu y - \lambda\mu x\Theta y;$$

взятых по всем $x_1,x_2,x\in X,\ y_1,y_2,y\in Y,\ \lambda,\mu\in R.$ Введем обозначения $X\otimes Y$ для факторпространства $X\Theta Y/\operatorname{Lin}L$. Если $x\in X,\ y\in Y,$ то класс эквивалентности, содержащий $x\Theta y$, обозначим $x\otimes y$, т.е. обозначим через $x\otimes y$ класса смежности $x\Theta y+\operatorname{Lin}L$.

Пусть X и Y действительные банаховы пространства и $q: X\times Y\to R.$ Если функции $x\to q(x,y),\ y\to q(x,y)$ выпуклы и положительно однородны, то функцию q назовем бисублинейной. Множество всех непрерывных билинейных отображений из $X\times Y$ в R обозначим через $B(X\times Y,R).$ Обозначим через $X\otimes Y$ тензорные произведения пространств X и Y. Считаем, что $X\otimes Y$ снабжено проективной топологией (см. [9]). Множество четных (т.е. $q(x,y)=q(-x,-y)$) бисублинейных непрерывных функции из $X\times Y$ в R обозначим через $H.$ Множество сублинейных непрерывных функций из $X\otimes Y$ в R обозначим через H_1.

Положим $\bar q(\nu)=\inf\{\sum_{i=1}^{n} q(x^i,y^i):\ \nu=\sum_{i=1}^{n} x^i\otimes y^i,\ (x^i,y^i)\in X\times Y,\ n\in N\}$,

$$\bar q(x\otimes y)=\inf\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} q(x^i,y^i):\ x\otimes y=\sum_{i=1}^{n} x^i\otimes y^i,\ (x^i,y^i)\in X\times Y,\ n\in N\}.$$

Лемма 2.1. Если $q: X\times Y\to R$ четная бисублинейная функция, то $\bar q(x\otimes y)=q(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$ и $\bar q: X\otimes Y\to R$ сублинейная функция.

Доказательство. Так как $X\otimes Y = X\Theta X/\operatorname{Lin}M$, то $x\otimes y=\sum_{i=1}^{n} x^i\otimes y^i$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{n} x^i\Theta y^i \in x\Theta y+\operatorname{Lin}\{(x_1+x_2)\Theta y-x_1\Theta y-x_2\Theta y,\ x\Theta(y_1+y_2)-x\Theta y_1-x\Theta y_2,\ \lambda x\Theta\mu y-\lambda\mu x\Theta y,$$
$$:\ x_1,x_2\in X; y_1,y_2\in Y;\lambda,\mu\in R\}.$$

Поэтому

$$\bar q(x\otimes y)=\inf\{q(x,y)+\sum_{i=1}^{n} q(x_1^i+x_2^i,y^i)+\sum_{i=1}^{n} q(-x_1^i,y^i)+\sum_{i=1}^{n} q(-x_2^i,y^i)+\sum_{i=1}^{m} q(z^j,y_1^j+y_2^j)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m} q(z^j,(-y_1^j))+\sum_{j=1}^{m} q(z^j,(-y_2^j))+\sum_{s=1}^{k} q(\lambda^s u^s,\mu^s v^s)+\sum_{s=1}^{k} q(-\lambda^s\mu^s u^s,v^s)$$
$$:x,x_1^i,x_2^i,z^j,u^s\in X; y,y^i,y_1^j,y_2^j,v^s\in Y;\ \lambda^s,\mu^s\in R; n,m,k\in N\cup\{0\}\}.$$

Так как q бисублинейная функция, то

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} q(x_1^i+x_2^i,y^i)+\sum_{i=1}^{n} q(-x_1^i,y^i)+\sum_{i=1}^{n} q(-x_2^i,y^i)\ge 0,$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} q(z^j,y_1^j+y_2^j)+\sum_{j=1}^{m} q(z^j,(-y_1^j))+\sum_{j=1}^{m} q(z^j,(-y_2^j))\ge 0.$$

Так как q бисублинейная четная функция, то $\sum_{s=1}^{k} q(\lambda^s u^s,\mu^s v^s)+\sum_{s=1}^{k} q(-\lambda^s\mu^s u^s,v^s)\ge 0$. Тогда получим, что $\bar q(x\otimes y)=q(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$.

Ясно, что

$$\bar{q}(\nu_1+\nu_2)=\inf\{\sum_{i=1}^{n} q(u^i,\upsilon^i):\nu_1+\nu_2=\sum_{i=1}^{n} u^i\otimes\upsilon^i,\,(u^i,\upsilon^i)\in X\times Y,\,n\in N\}\le$$

$$\le\inf\{\sum_{i=1}^{k} q(x^i,y^i):\nu_1=\sum_{i=1}^{k} x_1^i\otimes y_1^i,\,(x_1^i,y_1^i)\in X\times Y,\,k\in N\}+$$

$$+\inf\{\sum_{i=1}^{m} q(x_2^i,y_2^i):\nu_2=\sum_{i=1}^{m} x_2^i\otimes y_2^i,\,(x_2^i,y_2^i)\in X\times Y,\,m\in N\}=\bar{q}(\nu_1)+\bar{q}(\nu_2)$$

при $\nu_1,\nu_2\in X\otimes Y$. Так как q бисублинейная четная функция, то

$$\bar{q}(\lambda\nu)=\inf\{\sum_{i=1}^{k} q(\lambda x^i,y^i):\lambda\nu=\sum_{i=1}^{k}\lambda x^i\otimes y^i,\,(x^i,y^i)\in X\times Y,\,k\in N\}=$$

$$=\lambda\inf\{\sum_{i=1}^{k} q(x^i,y^i):\nu=\sum_{i=1}^{k} x^i\otimes y^i,\,(x^i,y^i)\in X\times Y,\,k\in N\}=\lambda\bar{q}(\nu)$$

при $\lambda\ge 0$. Поэтому $\bar{q}:X\otimes Y\to R$ сублинейная функция. Лемма доказана.

Из леммы 2.1 следует, что если $q\in H$, то $\bar{q}\in H_1$.

Лемма 2.2. Если q непрерывная в нуле бисублинейная функция, то существует $c>0$ такое, что $|q(x,y)|\le c\|x\|\|y\|$ при $(x,y)\in X\times Y$.

Доказательство. Из непрерывности функций q в нуле вытекает, что для $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $|q(x,y)|\le\varepsilon$ при $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|\le\delta$. Тогда

$$\left|q\left(\frac{\delta x}{2\|x\|},\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\right|=\frac{\delta^2}{4\|x\|\|y\|}|q(x,y)|\le\varepsilon$$

при $(x,y)\in X\times Y$. Отсюда имеем, что $|q(x,y)|\le\frac{4\varepsilon}{\delta^2}\|x\|\|y\|$ при $(x,y)\in X\times Y$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. Если X и Y банаховы пространства, $q:X\times Y\to R$ четная бисублинейная непрерывная функция, то $\bar{q}:X\otimes Y\to R$ непрерывная функция.

Доказательство. Легко проверяется, что множество $\overline{B}=co(B_1\otimes B_2)$, является единичным шаром в $X\otimes Y$, где $B_1=\{x\in X:\|x\|\le 1\}$ и $B_2=\{y\in Y:\|y\|\le 1\}$. По условию q бисублинейная непрерывная функция, поэтому по лемме 2.2 существует $M>0$ такое, что $|q(x,y)|\le M\|x\|\|y\|$ при $(x,y)\in X\times Y$. Тогда имеем, что $q(x,y)\le M$ для любого $(x,y)\in B_1\times B_2$. Если $\nu\in co(B_1\otimes B_2)$, то существуют $x_i\in B_1$ $y_i\in B_2$ и $\lambda_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$ при $i=1,\dots,k$ такие, что $\nu=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x_i\otimes y_i)$, где $k\in N$. Тогда из равенства $\bar{q}(x_i\otimes y_i)=q(x_i,y_i)\le M$ и из сублинейности функции $\bar{q}$ имеем, что $\bar{q}(\nu)\le\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\bar{q}(x_i\otimes y_i)\le M$, т.е. $\bar{q}(\nu)\le M$ при $\nu\in co(B_1\otimes B_2)$. Так как $\bar{q}(0)=0$, то по теореме 3.2.1[11, с.181] получим, что $\bar{q}$ непрерывная функция в нуле. Поэтому $\bar{q}$ непрерывная функция в пространстве $X\otimes Y$. Лемма доказана.

Пусть X и Y банаховы пространства, $B(X\times Y,R)$ пространство всех непрерывных билинейных функций из $X\times Y$ в R. Отметим, что если $X\otimes Y$ наделено проективной топологией, то $(X\otimes Y)^*=B(X\times Y,R)$.

Положим $\partial_2 q=\{b\in B(X\times Y,R):q(x,y)\ge b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y\}$,

$$\partial\bar{q}=\{z^*\in(X\otimes Y)^*:\bar{q}(\nu)\ge z^*(\nu)\ \text{при}\ \nu\in X\otimes Y\}.$$

Лемма 2.4. Если X и Y банаховы пространства, $q:X\times Y\to R$ бисублинейная непрерывная четная функция, то $b\in B(X\times Y,R)$ принадлежит $\partial_2 q$ в том и только в том случае, когда $z^*(\nu)=\sum_{i=1}^{n} b(x^i,y^i)$ при $\nu=\sum_{i=1}^{n} x^i\otimes y^i$ принадлежит $z^*\in\partial\bar{q}$.

Доказательство. Если $b\in\partial_2 q$, то положив $z^*(\nu)=\sum_{i=1}^{n} b(x^i,y^i)$ при $\nu=\sum_{i=1}^{n} x^i\otimes y^i$, где $n\in N$,

получим, что $\sum_{i=1}^{n} q(x^i,y^i)\ge\sum_{i=1}^{n} b(x^i,y^i)$. Отсюда имеем, что $\bar{q}(\nu)\ge z^*(\nu)$ при $\nu\in X\otimes Y$. Поэтому $z^*\in\partial\bar{q}$. Обратно, если $z^*\in\partial\bar{q}$, то из представления $z^*(\nu)=\sum_{i=1}^{n} b(x^i,y^i)$, где $n\in N$, следует, что $z^*(x\otimes y)=b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$ и $q(x,y)=\bar{q}(x\otimes y)\ge z^*(x\otimes y)=b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$. Отсюда следует, что $b\in\partial_2 q$. Лемма доказана.

Следствие 2.1. Если X и Y банаховы пространства, $q: X\times Y \to R$ четная бисублинейная непрерывная функция, то $\bar{q}(\nu)=\max\{z^*(\nu): z^*\in\partial\bar{q}\}$ и $q(x,y)=\max\{b(x,y): b\in\partial_2 q\}$.

Доказательство. Если $q: X\times Y\to R$ бисублинейная непрерывная четная функция, то из леммы 2.1 следует, что $\bar{q}: X\otimes Y\to R$ непрерывная сублинейная функция. Тогда из предложения 4.1.1[11, с.203] имеем, что $\bar{q}(\nu)=\max\{\ z^*(\nu): z^*\in\partial\bar{q}\}$. Так как $z^*(x\otimes y)=b(x,y)$ и $q(x,y)=\bar{q}(x\otimes y)$ при $(x,y)\in X\times Y$, то отсюда следует, что $q(x,y)=\max\{b(x,y): b\in\partial_2 q\}$. Следствие доказано.

Отметим, что если $q: X\times Y\to R$ четная бисублинейная непрерывная функция, то

$$\bar{q}(\nu)=\inf\{\{\sum_{i=1}^{n}\sup\{b(x^i,y^i): b\in\partial_2 q\}:\ \nu=\sum_{i=1}^{n}x^i\otimes y^i,\ (x^i,y^i)\in X\times Y,\ n\in N\}=$$
$$=\sup\{\ z^*(\nu): z^*\in\partial\bar{q}\}=\sup\{\ b(\nu): b\in\partial_2 q\}$$

где $b(\nu)=\sum_{i=1}^{n}b(x^i,y^i)$ при $\nu=\sum_{i=1}^{n}x^i\otimes y^i$.

Лемма 2.5. Пусть X и Y векторные пространства, $\bar{y}\in Y$, $Y_0=\{\lambda\bar{y}:\lambda\in R\}$, $P: X\times Y_0\to R$ бисублинейная функция, $P(-x,-y)=P(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y_0$. Тогда если $\nu\in X\otimes Y_0$, то существует точка $x\in X$ такая, что $\nu=x\otimes\bar{y}$ и

$$\bar{P}(\nu)=\inf\{\sum_i P(x^i,y^i):\nu=\sum_i x^i\otimes y^i,\ (x^i,y^i)\in X\times Y\}=P(x,\bar{y}).$$

Доказательство. Ясно, что

$$\bar{P}(\nu)=\inf\{\sum_i P(x^i,\lambda_i\bar{y}):\nu=\sum_i x^i\otimes\lambda_i\bar{y},\ x^i\in X,\ \lambda_i\in R\}=$$
$$=\inf\{\sum_{\lambda_i>0}P(x^i,\lambda_i\bar{y})+\sum_{\lambda_i<0}P(x^i,\lambda_i\bar{y}):\nu=\sum_i x^i\otimes\lambda_i\bar{y},\ x^i\in X,\ \lambda_i\in R\}=$$
$$=\inf\{\sum_{\lambda_i>0}P(\lambda_i x^i,\bar{y})+\sum_{\lambda_i<0}P(-\lambda_i x^i,-\bar{y}):\nu=\sum_i\lambda_i x^i\otimes\bar{y},\ x^i\in X,\ \lambda_i\in R\}\geq$$
$$\geq\inf\{P(\sum_{\lambda_i>0}\lambda_i x^i,\bar{y})+P(-\sum_{\lambda_i<0}\lambda_i x^i,-\bar{y}):\nu=\sum_i\lambda_i x^i\otimes\bar{y},\ x^i\in X,\ \lambda_i\in R\}=$$
$$=\inf\{P(\sum_{\lambda_i>0}\lambda_i x^i,\bar{y})+P(\sum_{\lambda_i<0}(\lambda_i x^i,\bar{y}):\nu=(\sum_i\lambda_i x^i)\otimes\bar{y},\ x^i\in X,\ \lambda_i\in R\}.$$

Обозначив $x_1=\sum_{\lambda_i>0}\lambda_i x^i$, $\quad x_2=\sum_{\lambda_i<0}\lambda_i x^i$ и $x=x_1+x_2$ получим, что $\nu=x\otimes\bar{y}$ и

$$\bar{P}(\nu)\geq\inf\{P(x_1,\bar{y})+P(x_2,\bar{y}):\nu=(x_1+x_2)\otimes\bar{y},\ x_i\in X,\ i=1,2\}\geq$$
$$\geq\inf\{P(x,\bar{y}):\nu=x\otimes\bar{y},\ x\in X\}=P(x,\bar{y}).$$

Из определения $\bar{P}(\nu)$ вытекает, что $\bar{P}(\nu)\leq P(x,\bar{y})$. Поэтому $\bar{P}(\nu)=P(x,\bar{y})$. Лемма доказана.

Следствие 2.2. Пусть X и Y векторные пространства, $\bar{y}\in Y$, $Y_0=\{\lambda\bar{y}:\lambda\in R\}$, $P_1: X\times Y_0\to R$ и $P_2: X\times Y_0\to R$ бисублинейные функции, $P_1(-x,-y)=P_1(x,y)$, $P_2(-x,-y)=P_2(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y_0$ и $P=P_1+P_2$. Тогда если $\nu\in X\otimes Y_0$, то существует точка $x\in X$ такая, что $\nu=x\otimes\bar{y}$ и $\bar{P}(\nu)=P(x,\bar{y})=P_1(x,\bar{y})+P_2(x,\bar{y})=\bar{P}_1(\nu)+\bar{P}_2(\nu)$.

Если X и Y банаховы пространства, q_1,q_2 бисублинейные функции из $X\times Y$ в R, то из определения $\partial_2 q_1$ и $\partial_2 q_2$ следуют, что $\partial_2 q_1+\partial_2 q_2\subset\partial_2(q_1+q_2)$.

Если $q_1: X\times Y\to R$ и $q_2: X\times Y\to R$ четные бисублинейные непрерывные функции, то из следствия 2.1 следует, что

$$q_1(x,y)=\max\{b_1(x,y): b_1\in\partial_2 q_1\}\ \text{и}\ q_2(x,y)=\max\{b_2(x,y): b_2\in\partial_2 q_2\}$$

при $(x,y)\in X\times Y$. Положим

$$p_1(\nu)=\max\{b_1(\nu): b_1\in\partial_2 q_1\},\ p_2(\nu)=\max\{b_2(\nu): b_2\in\partial_2 q_2\}\ \text{и}\ p_3(\nu)=\max\{b(\nu): b\in\partial_2(q_1+q_2)\}$$

при $\nu\in X\otimes Y$, где $b(\nu)=\sum_{i=1}^{n}b(x^i,y^i)$ при $\nu=\sum_{i=1}^{n}x^i\otimes y^i$.

Теорема 2.1. Если $q_1: X\times Y\to R$ и $q_2: X\times Y\to R$ четные бисублинейные непрерывные функции, то $\partial_2 q_1+\partial_2 q_2=\partial_2(q_1+q_2)$ в том и только в том случае, когда $p_1(\nu)+p_2(\nu)=p_3(\nu)$ при $\nu\in X\otimes Y$.

Доказательство. Если $\partial_2 q_1+\partial_2 q_2=\partial_2(q_1+q_2)$, то

$$p_1(\nu)+p_2(\nu)=\max\{b_1(\nu):b_1\in\partial_2 q_1\}+\max\{b_2(\nu):b_2\in\partial_2 q_2\}=$$
$$=\max\{b_1(\nu)+b_2(\nu):b_1\in\partial_2 q_1, b_2\in\partial_2 q_2\}=$$
$$=\max\{b(\nu):b\in\partial_2 q_1+\partial_2 q_2\}=\max\{b(\nu):b\in\partial_2(q_1+q_2)\}=p_3(\nu),$$

т.е. $p_1(\nu)+p_2(\nu)=p_3(\nu)$ при $\nu\in X\otimes Y$.

Обратно, если $p_1(\nu)+p_2(\nu)=p_3(\nu)$ при $\nu\in X\otimes Y$, то

$$p_1(\nu)+p_2(\nu)=\max\{b_1(\nu):b_1\in\partial_2 q_1\}+\max\{b_2(\nu):b_2\in\partial_2 q_2\}=$$
$$=\max\{b(\nu):b\in\partial_2 q_1+\partial_2 q_2\}=\max\{b(\nu):b\in\partial_2(q_1+q_2)\}=p_3(\nu)$$

при $\nu\in X\otimes Y$. Ясно, что $\partial_2 q_1, \partial_2 q_2, \partial_2(q_1+q_2)$ выпуклое множество. Покажем, что $\partial_2 q_1, \partial_2 q_2, \partial_2(q_1+q_2)$ замкнутые множества относительно топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\otimes Y)$.

Пусть $b_k\in\partial_2 q_1$ и $b_k\to b$ в топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\times Y)$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} b_k(x,y)=b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$. Тогда из неравенства $q_1(x,y)\ge b_k(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$ следует, что $q_1(x,y)\ge b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$. Поэтому $\partial_2 q_1$ замкнутое множество относительно топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\times Y)$. Так как топология $\sigma(B(X\times Y,R),X\otimes Y)$ сильнее, чем топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\times Y)$, то имеем, что $\partial_2 q_1$ замкнутое множество относительно топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\otimes Y)$. Аналогично имеем, что $\partial_2 q_2$, $\partial_2(q_1+q_2)$ замкнутые множества относительно топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\otimes Y)$. Тогда получим, что $\partial p_1=\partial_2 q_1$, $\partial p_2=\partial_2 q_2$, $\partial p_3=\partial_2(q_1+q_2)$. Так как $p_1(\nu)$, $p_2(\nu)$ и $p_3(\nu)$ выпуклые функции, $p_1(\nu)\le\bar q_1(\nu)$, $p_2(\nu)\le\bar q_2(\nu)$ и $p_3(\nu)\le\bar q_3(\nu)$ при $\nu\in X\otimes Y$ и $\bar q_1(\nu)$, $\bar q_2(\nu)$ и $\bar q_3(\nu)$ непрерывные функции в $X\otimes Y$ (см.лемму 2.3), то имеем, что $p_1(\nu)$, $p_2(\nu)$ и $p_3(\nu)$ непрерывные функции в пространстве $X\otimes Y$. Поэтому $\partial_2 q_1, \partial_2 q_2, \partial_2 q_1+\partial_2 q_2$ и $\partial_2(q_1+q_2)$ компактные множества относительно топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\otimes Y)$. Тогда по теореме отделимости из равенства $\max\{b(\nu):b\in\partial_2 q_1+\partial_2 q_2\}=\max\{b(\nu):b\in\partial_2(q_1+q_2)\}$ при $\nu\in X\otimes Y$ следует, что $\partial_2 q_1+\partial_2 q_2=\partial_2(q_1+q_2)$. Лемма доказана.

Лемма 2.6. Если $p:X\otimes Y\to R_{+\infty}$ сублинейная функция, то $q(x,y)=p(x\otimes y)$ бисублинейная четная функция из $X\times Y$ в $R_{+\infty}$.

Доказательство. Если $(x_1,y),(x_2,y)\in X\times Y$, $\alpha\in[0,1]$, то

$$q(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,y)=p((\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\otimes y)=p((\alpha x_1\otimes y+(1-\alpha)x_2\otimes y)\le$$
$$\le\alpha p(x_1\otimes y)+(1-\alpha)p(x_2\otimes y)=\alpha q(x_1,y)+(1-\alpha)q(x_2,y).$$

Если $(x,y_1),(x,y_2)\in X\times Y$, $\alpha\in[0,1]$, то аналогично имеем, что

$$q(x,\alpha y_1+(1-\alpha)y_2)\le\alpha q(x,y_1)+(1-\alpha)q(x,y_2).$$

Если $\lambda\ge 0$, то

$$q(\lambda x,y)=p(\lambda x\otimes y)=\lambda p(x\otimes y)=\lambda q(x,y),$$
$$q(x,\lambda y)=p(x\otimes\lambda y)=\lambda p(x\otimes y)=\lambda q(x,y).$$

Ясно, что

$$q(-x,-y)=p(-x\otimes -y)=p(x\otimes y)=q(x,y)$$

при $(x,y)\in X\times Y$. Лемма доказана.

Если $p:X\otimes Y\to R_{+\infty}$ сублинейная функция и $q(x,y)=p(x\otimes y)$ при $(x,y)\in X\times Y$, то

$$\bar q(\nu)=\inf\{\sum_{i=1}^{n}p(x^i\otimes y^i):\nu=\sum_{i=1}^{n}x^i\otimes y^i,\ (x^i,y^i)\in X\times Y,\ n\in N\}\ge$$
$$\ge\inf\{p(\sum_{i=1}^{n}x^i\otimes y^i):\nu=\sum_{i=1}^{n}x^i\otimes y^i,\ (x^i,y^i)\in X\times Y,\ n\in N\}=p(\nu)$$

при $\nu\in X\otimes Y$, т.е. $\bar q(\nu)\ge p(\nu)$ при $\nu\in X\otimes Y$.

Лемма 2.7. Если $b_k\in B(X\times Y,R)$, то последовательность b_k сходится к b в топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\times Y)$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} b_k(x,y)=b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$, в том и только в том случае, когда b_k сходится к b в топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\otimes Y)$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} b_k(x,y)=b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$, то $\lim\limits_{k\to\infty} b_k(x^i,y^i)=b(x^i,y^i)$ при $(x^i,y^i)\in X\times Y$, $i=1,\dots,n$. Поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{k\to\infty} b_k(x^i,y^i)=\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}b_k(x^i,y^i)=\sum\limits_{i=1}^{n}b(x^i,y^i)$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} b_k(\nu)=b(\nu)$, т.е. b_k сходится к b в топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\otimes Y)$.

Обратно, если b_k сходится к b в топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\otimes Y)$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} b_k(\nu)=b(\nu)$ при $\nu\in X\otimes Y$, то $\lim\limits_{k\to\infty} b_k(x\otimes y)=\lim\limits_{k\to\infty} b_k(x,y)=b(x\otimes y)=b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$. Поэтому b_k сходится к b в топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\times Y)$. Лемма доказана.

Следствие 2.3. Множество $A\subset B(X\times Y,R)$ замкнуто относительно топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\times Y)$ в том и только в том случае, когда A замкнуто относительно топологии $\sigma(B(X\times Y,R),X\otimes Y)$.

Множество $A\subset B(X\times Y,R)$ называется B-выпуклым, если для любого $\overline{x}^*\notin A$ существуют $(\overline{x},\overline{y})\in X\times Y$ и $\alpha\in R$ такие, что $x^*(\overline{x},\overline{y})<\alpha<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$ при $x^*\in A$.

Лемма 2.8. Если $q:X\times Y\to R$ непрерывная бисублинейная четная функция, то множество $\partial_2 q$ B-выпукло.

Доказательство. Если $\overline{x}^*\notin\partial_2 q$, то существует точка $(\overline{x},\overline{y})\in X\times Y$ такая, что $q(\overline{x},\overline{y})<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$. Пусть число α такое, что $q(\overline{x},\overline{y})<\alpha<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$. Тогда $q(\overline{x},\overline{y})=\max\{x^*(\overline{x},\overline{y}):x^*\in\partial_2 q\}<\alpha<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$. Отсюда следует, что $x^*(\overline{x},\overline{y})<\alpha<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$ при $x^*\in\partial_2 q$. Лемма доказана.

Лемма 2.9. Если $q:X\times Y\to R$ непрерывная бисублинейная четная функция, $\overline{x}^*\notin\partial_2 q$ и $b_1,\ldots,b_k\in B(X\times Y,R)$, то существуют число $\overline{\alpha}$, $\overline{b}\in\{b_1,\ldots,b_k\}$ и точка $(\overline{x},\overline{y})\in X\times Y$ такие, что $x^*(\overline{x},\overline{y})+b(\overline{x},\overline{y})<\overline{\alpha}<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})+\overline{b}(\overline{x},\overline{y})$ при $x^*\in\partial_2 q$ и $b\in co\{b_1,\ldots,b_k\}$.

Доказательство. Если $\overline{x}^*\notin\partial_2 q$, то существует точка $(\overline{x},\overline{y})\in X\times Y$ такая, что $q(\overline{x},\overline{y})<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$. Пусть число α такое, что $q(\overline{x},\overline{y})<\alpha<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$. Тогда $q(\overline{x},\overline{y})=\max\{x^*(\overline{x},\overline{y}):x^*\in\partial_2 q\}<\alpha<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$. Отсюда следует, что $x^*(\overline{x},\overline{y})<\alpha<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$ при $x^*\in\partial_2 q$. Пусть билинейная функция $\overline{b}\in\{b_1,\ldots,b_k\}$ такая, что $\overline{b}(\overline{x},\overline{y})=\max\{b_1(\overline{x},\overline{y}),\ldots,b_k(\overline{x},\overline{y})\}$. Тогда получим, что $\overline{b}(\overline{x},\overline{y})\geq b(\overline{x},\overline{y})$ при $b\in co\{b_1,\ldots,b_k\}$. Поэтому $x^*(\overline{x},\overline{y})+b(\overline{x},\overline{y})<\overline{\alpha}<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})+\overline{b}(\overline{x},\overline{y})$ при $x^*\in\partial_2 q$ и $b\in co\{b_1,\ldots,b_k\}$, где $\overline{\alpha}=\alpha+\overline{b}(\overline{x},\overline{y})$. Лемма доказана.

Из леммы 2.9 следует, что если $q:X\times Y\to R$ непрерывная бисублинейная четная функция, $z^*\notin\partial_2 q+b$, где $b\in B(X\times Y,R)$, то существуют число $\overline{\alpha}$ и точка $(\overline{x},\overline{y})\in X\times Y$ такая, что $x^*(\overline{x},\overline{y})<\overline{\alpha}<z^*(\overline{x},\overline{y})$ при $x^*\in\partial_2 q+b$. Поэтому если $b_1\in B(X\times Y,R)$ такая билинейная функция, что $b\neq b_1$ и $b(\overline{x},\overline{y})=b_1(\overline{x},\overline{y})$, то имеем, что $x^*(\overline{x},\overline{y})<\overline{\alpha}<z^*(\overline{x},\overline{y})$ при $x^*\in\partial_2 q+co\{b,b_1\}$.

Следствие 2.4. Если $q:X\times Y\to R$ непрерывная бисублинейная четная функция, $\overline{x}^*\notin\partial_2 q+co\{0,b_1,\ldots,b_k\}$ и $b_1,\ldots,b_k\in B(X\times Y,R)$, то существуют число $\overline{\alpha}$, $\overline{b}\in\{0,b_1,\ldots,b_k\}$ и $(\overline{x},\overline{y})\in X\times Y$ такие, что $x^*(\overline{x},\overline{y})+b(\overline{x},\overline{y})<\overline{\alpha}<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})+\overline{b}(\overline{x},\overline{y})$ при $x^*\in\partial_2 q$ и $b\in co\{0,b_1,\ldots,b_k\}$.

Так как $\overline{x}^*\notin\partial_2 q+co\{0,b_1,\ldots,b_k\}$, то отсюда следует, что $\overline{x}^*\notin\partial_2 q$. Поэтому справедливость следствия 2.3 следует из леммы 2.9.

Пример 2.1. Покажем, что если $b\in B(X\times Y,R)$, то $co\{b,2b\}$ B-выпуклое множество. Ясно, что

$$\max_{z^*\in co\{b,2b\}} z^*(x,y)=\begin{cases}2b(x,y):b(x,y)\geq 0,\\ b(x,y):b(x,y)<0.\end{cases}$$

Пусть $\overline{x}^*\notin co\{b,2b\}$. Тогда существует точка $(\overline{x},\overline{y})\in X\times Y$ такая, что $\max\limits_{z^*\in co\{b,2b\}} z^*(\overline{x},\overline{y})<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$, т.е. $\begin{cases}2b(\overline{x},\overline{y}):b(\overline{x},\overline{y})\geq 0,\\ b(\overline{x},\overline{y}):b(\overline{x},\overline{y})<0\end{cases}<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$. Если $b(\overline{x},\overline{y})\geq 0$, то отсюда следует, что $2b(\overline{x},\overline{y})<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$. Поэтому $b(\overline{x},\overline{y})<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$. Если $b(\overline{x},\overline{y})<0$, то отсюда следует, что $b(\overline{x},\overline{y})<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$. Поэтому $2b(\overline{x},\overline{y})<\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})$. Тогда получим, что $co\{b,2b\}$ B-выпуклое множество.

Пример 2.2. Если $b\in B(X\times Y,R)$, то положим $\|b\|=\sup\limits_{x\in B_1,y\in B_2} b(x,y)=\sup\limits_{x\in B_1,y\in B_2}|b(x,y)|$, где $B_1=\{x\in X:\|x\|\leq 1\}$, $B_2=\{y\in Y:\|y\|\leq 1\}$. Покажем, что $B=\{b\in B(X\times Y,R):\|b\|\leq 1\}$ B-выпуклое множество. Пусть $\overline{x}^*\notin B$. Тогда существует точка $(\overline{x},\overline{y})\in B_1\times B_2$ такая, что $\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})>1$. Если число $\alpha>0$ такое, что $\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})>\alpha>1$, то получим, что $\overline{x}^*(\overline{x},\overline{y})>\alpha>1\geq b(\overline{x},\overline{y})$ при $b\in B$. Тогда получим, что B B-выпуклое множество.

Отметим, что $\sup\limits_{b\in B} b(x,y) \ge \sup\limits_{p\in B_1^*, q\in B_2^*} p(x)q(y) = \|x\|\|y\|$, где $B_1^* = \{p \in X : \|p\| \le 1\}$, $B_2^* = \{q \in Y^* : \|q\| \le 1\}$.

Известно, что $\sup\limits_{b\in B} b(x\otimes y) = \|(x\otimes y)\| = \|x\|.\|y\| \ge \sup\limits_{p\in B_1^*, q\in B_2^*} p(x)q(y) = \|x\|\|y\|$, т.е.

$$\sup_{b\in B} b(x,y) = \sup_{p\in B_1^*, q\in B_2^*} p(x)q(y) = \|x\|\|y\| .$$

Пример 2.3. Если $b \in B(R\times R, R)$, то существует число $\alpha \in R$ такое, что $b(x,y) = \alpha xy$. Из примера 2.1 и 2.2 следует, что $\{\alpha xy : \alpha \in [-1;1]\}$ и $\{\beta xy : \beta \in [2;3]\}$ B-выпуклое множество. Также получим, что $\{\alpha xy : \alpha \in [-1;1]\} + \{\beta xy : \beta \in [2;3]\} = \{\nu xy : \nu \in [1;4]\}$ B-выпуклое множество.

Лемма 2.10. Если $q_1 : X\times Y \to R$ и $q_2 : X\times Y \to R$ непрерывные бисублинейные четные функции, $\overline{x}^* \notin \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$, то для каждого $z^* \in \partial_2 q_2$ существуют число $\overline{\alpha}$, $\overline{b} \in \partial_2 q_2$ и $(\overline{x},\overline{y}) \in X\times Y$ такие, что $x^*(\overline{x},\overline{y}) + b(\overline{x},\overline{y}) < \overline{\alpha} < \overline{x}^*(\overline{x},\overline{y}) - z^*(\overline{x},\overline{y}) + \overline{b}(\overline{x},\overline{y})$ при $x^* \in \partial_2 q_1$ и $b \in \partial_2 q_2$.

Доказательство. Пусть $z^* \in \partial_2 q_2$. Так как $\overline{x}^* \notin \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$, то отсюда следует, что $\overline{x}^* - z^* \notin \partial_2 q_1$. Если $\overline{x}^* - z^* \notin \partial_2 q_1$, то существует точка $(\overline{x},\overline{y}) \in X\times Y$ такая, что $q_1(\overline{x},\overline{y}) < \overline{x}^*(\overline{x},\overline{y}) - z^*(\overline{x},\overline{y})$. Пусть число α такое, что $q_1(\overline{x},\overline{y}) < \alpha < \overline{x}^*(\overline{x},\overline{y}) - z^*(\overline{x},\overline{y})$. Тогда $q_1(\overline{x},\overline{y}) = \max\{x^*(\overline{x},\overline{y}) : x^* \in \partial_2 q_1\} < \alpha < \overline{x}^*(\overline{x},\overline{y}) - z^*(\overline{x},\overline{y})$. Отсюда имеем, что $x^*(\overline{x},\overline{y}) < \alpha < \overline{x}^*(\overline{x},\overline{y}) - z^*(\overline{x},\overline{y})$ при $x^* \in \partial_2 q_1$. Пусть $\overline{b} \in \partial_2 q_2$ такой, что $\overline{b}(\overline{x},\overline{y}) = \max\{b(\overline{x},\overline{y}) : b \in \partial_2 q_2\}$. Тогда получим, что $\overline{b}(\overline{x},\overline{y}) \ge b(\overline{x},\overline{y})$ при $b \in \partial_2 q_2$. Поэтому $x^*(\overline{x},\overline{y}) + b(\overline{x},\overline{y}) < \overline{\alpha} < \overline{x}^*(\overline{x},\overline{y}) - z^*(\overline{x},\overline{y}) + \overline{b}(\overline{x},\overline{y})$ при $x^* \in \partial_2 q_1$ и $b \in \partial_2 q_2$, где $\overline{\alpha} = \alpha + \overline{b}(\overline{x},\overline{y})$. Лемма доказана.

Следствие 2.5. Если $q_1 : X\times Y \to R$ и $q_2 : X\times Y \to R$ непрерывные бисублинейные четные функции, $\overline{x}^* \notin \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$ и $0 \in \partial_2 q_2$, то существуют число $\overline{\alpha}$, $\overline{b} \in \partial_2 q_2$ и $(\overline{x},\overline{y}) \in X\times Y$ такие, что $x^*(\overline{x},\overline{y}) + b(\overline{x},\overline{y}) < \overline{\alpha} < \overline{x}^*(\overline{x},\overline{y}) + \overline{b}(\overline{x},\overline{y})$ при $x^* \in \partial_2 q_1$ и $b \in \partial_2 q_2$.

Из соотношения $x^*(\overline{x},\overline{y}) + b(\overline{x},\overline{y}) < \overline{\alpha} < \overline{x}^*(\overline{x},\overline{y}) + \overline{b}(\overline{x},\overline{y})$ при $x^* \in \partial_2 q_1$ и $b \in \partial_2 q_2$ следует, что $\overline{x}^* + \overline{b} \notin \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$.

Теорема 2.2. Если $q_1 : X\times Y \to R$ и $q_2 : X\times Y \to R$ четные бисублинейные непрерывные функции и множество $\partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$ B-выпукло, то $\partial_2 q_1 + \partial_2 q_2 = \partial_2(q_1 + q_2)$.

Доказательство. Если q_1, q_2 бисублинейные функции из $X\times Y$ в R, то из определения бисубдифференциала следует, что $\partial_2 q_1 + \partial_2 q_2 \subset \partial_2(q_1 + q_2)$.

Если $q_1 : X\times Y \to R$ и $q_2 : X\times Y \to R$ четные бисублинейные непрерывные функции, то из следствия 2.1 следует, что

$$\begin{aligned} q_1(x,y) + q_2(x,y) &= \max\{b_1(x,y) : b_1 \in \partial_2 q_1\} + \max\{b_2(x,y) : b_2 \in \partial_2 q_2\} = \\ &= \max\{b(x,y) : b \in \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2\} = \max\{b(x,y) : b \in \partial_2(q_1 + q_2)\} \end{aligned}$$

при $(x,y) \in X\times Y$. Пусть существует $\overline{b} \in \partial_2(q_1 + q_2)$ такой, что $\overline{b} \notin \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$. Так как $\partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$ B-выпукло, то существуют $(\overline{x},\overline{y}) \in X\times Y$ и $\alpha \in R$ такие, что $b(\overline{x},\overline{y}) < \alpha < \overline{b}(\overline{x},\overline{y})$ при $b \in \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$. Поэтому $\max\{b(\overline{x},\overline{y}) : b \in \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2\} \le \alpha < \overline{b}(\overline{x},\overline{y})$. Отсюда следует, что $q_1(\overline{x},\overline{y}) + q_2(\overline{x},\overline{y}) < \overline{b}(\overline{x},\overline{y})$. Поэтому $\overline{b} \notin \partial_2(q_1 + q_2)$. Получим противоречие. Лемма доказана.

Из теоремы Хермандера (см. [11, с.203]) следует, что верна следующая лемма.

Лемма 2.11. Если $q_1 : X \to R$ и $q_2 : Y \to R$ сублинейные неотрицательные непрерывные четные функции, то $q(x,y) = q_1(x)q_2(y)$ бисублинейная неотрицательная непрерывная четная функция и

$$q(x,y) = \max_{(x^*,y^*)\in\partial q_1\times\partial q_2} x^*(x)y^*(y)$$

при $(x,y) \in X\times Y$, где $\partial q_1 = \{x^* \in X^* : q_1(x) \ge x^*(x)$ при $x \in X\}$, $\partial q_2 = \{y^* \in Y^* : q_2(y) \ge y^*(y)$ при $y \in Y\}$.

Отметим, что если $q : X \to R$ сублинейная непрерывная четная функция, то $q(x) \ge 0$ при $x \in X$.

Пусть X и Y действительные линейные пространства и $q : X\times Y \to R$. Множество всех билинейных функций из $X\times Y$ в R обозначим через $\widetilde{B}(X\times Y, R)$.

Отметим, что $(X\otimes Y)'=\widetilde{B}(X\times Y,R)$, где через $(X\otimes Y)'$ обозначено алгебраическое сопряженное пространство к $X\otimes Y$. Обозначим $z^*(\nu)=b(\nu)=\sum_{i=1}^{k} b(x^i,y^i)$ при $\nu=\sum_{i=1}^{k} x^i\otimes y^i$, где $b\in\widetilde{B}(X\times Y,R)$.

Положим $\partial_2^a q=\{b\in\widetilde{B}(X\times Y,R):q(x,y)\ge b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y\}$,

$$\partial^a\,\overline{q}=\{z^*\in(X\otimes Y)':\overline{q}(\nu)\ge z^*(\nu)\ \text{ при }\ \nu\in X\otimes Y\}.$$

Лемма 2.12. Если X и Y линейные пространства, $q:X\times Y\to R$ бисублинейная четная функция, то $b\in\widetilde{B}(X\times Y,R)$ принадлежит $\partial_2^a q$ в том и только в том случае, когда $z^*(\nu)=\sum_{i=1}^{n} b(x^i,y^i)$ принадлежит $z^*\in\partial^a\overline{q}$.

Доказательство. Если $b\in\partial_2^a q$, то положив $z^*(\nu)=\sum_{i=1}^{n} b(x^i,y^i)$ при $\nu=\sum_{i=1}^{n} x^i\otimes y^i$, где $n\in N$, получим, что $\sum_{i=1}^{n} q(x^i,y^i)\ge\sum_{i=1}^{n} b(x^i,y^i)$. Отсюда имеем, что $\overline{q}(\nu)\ge z^*(\nu)$ при $\nu\in X\otimes Y$. Поэтому $z^*\in\partial^a\overline{q}$. Обратно, если $z^*\in\partial^a\overline{q}$, то из представления $z^*(\nu)=\sum_{i=1}^{n} b(x^i,y^i)$, где $n\in N$, следует, что $z^*(x\otimes y)=b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$ и $q(x,y)=\overline{q}(x\otimes y)\ge z^*(x\otimes y)=b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$. Отсюда следует, что $b\in\partial_2^a q$. Лемма доказана.

Если $q:X\times Y\to R$ четная бисублинейная функция, то $\overline{q}(x\otimes y)=q(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$ и $\overline{q}:X\otimes Y\to R$ сублинейная функция. Тогда из 0.2.20 (2) [12] следует, что

$$\overline{q}(\nu)=\max_{z^*\in\partial^a\,\overline{q}} z^*(\nu)$$

при $\nu\in X\otimes Y$. Так как $z^*(x\otimes y)=b(x,y)$ и $q(x,y)=\overline{q}(x\otimes y)$ при $(x,y)\in X\times Y$, то отсюда следует, что

$$q(x,y)=\max_{b\in\partial_2^a q} b(x,y)$$

при $(x,y)\in X\times Y$.

Если X и Y действительные банаховы пространства, $q:X\times Y\to R$ бисублинейная непрерывная четная функция, то имеем, что $q(x,y)=\max_{b\in\partial_2^a q} b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$. Отсюда следует, что $q(x,y)\ge b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$ и $b\in\partial_2^a q$. Поэтому $b(x,y)$ раздельно непрерывная функция. Тогда из теоремы 2.17[13] получим, что $b\in B(X\times Y,R)$. Поэтому еще раз получим, что $q(x,y)=\max_{b\in\partial_2 q} b(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$.

3. Бисопряженная функция и его применение к бисубдифференцируемость бивыпуклых функций

В п.3 исследуется бисубдифференцируемость бивыпуклых функций и изучен ряд их свойств. В п.3 исследован также ряд свойств бисопряженных функций.

Пусть X и Y линейные пространства. Множество $C\subset X\times Y$ называется бивыпуклой, если для любого $x\in X$ и $y\in Y$ множества $C_x=\{\overline{y}:(x,\overline{y})\in C\}$ и $C_y=\{\overline{x}:(\overline{x},y)\in C\}$ выпуклые. Если C бивыпуклое множество, функция $f(\cdot,y):C_y\to R$ и $f(x,\cdot):C_x\to R$ выпуклые при $(x,y)\in C$, то функция $f:C\to R$ называется бивыпуклой.

Если $f:C\to R$, то положим $2-\mathrm{ep}\,f=\{((x,\alpha),(y,\beta)):(x,y)\in C,\ \alpha,\beta\in R,\ f(x,y)\le\alpha\beta\}$.

Следующие утверждения доказываются аналогично соответствующим утверждениям выпуклого анализа (см. [11,14]).

1) Функция $f:C\to R$ бивыпукла на C тогда и только тогда, когда множество $2-\mathrm{ep}\,f$ бивыпукло.

2) Если $C\subset X\times Y$, $f_i:C\to R$, $i\in I$, семейства функций и $g(x,y)=\sup\{f_i(x,y):i\in I\}$, то $2-\mathrm{ep}\,g=\bigcap_{i\in I} 2-\mathrm{ep}f_i$.

3) Пересечение бивыпуклых множеств бивыпукло.

4) Если $C\subset X\times Y$ бивыпуклое множество, $f_i:C\to R$, $i\in I$, семейства бивыпуклых функций и $g(x,y)=\sup\{f_i(x,y):i\in I\}<+\infty$, то функция $g(x,y)$ бивыпукла.

5) $C\subset X\times Y$ бивыпуклое множество тогда и только тогда, когда $\delta_C(x,y)=\begin{cases}0:(x,y)\in C,\\ +\infty:(x,y)\notin C\end{cases}$ бивыпуклая функция.

Функция $f:X\times Y\to R_{+\infty}$ называется бивыпуклой (или 2-выпуклой), если функции $x\to f(x,y)$, $y\to f(x,y)$ выпуклые.

Функция $f: X \times Y \to R_{+\infty}$ бивыпуклая функция тогда и только тогда, когда множество $2-\text{ep}\, f = \{((x,\alpha),(y,\beta)) \in (X\times R)\times(Y\times R): f(x,y) \le \alpha\beta\}$ бивыпуклое множество.

Лемма 3.1. Если $f: X\times Y \to R_{+\infty}$ бивыпуклая функция и $\alpha \in R$, то множество $C = \{(x,y) \in X\times Y : f(x,y) \le \alpha\}$ бивыпуклое множество.

Доказательство. Если $(x_1,y),(x_2,y) \in C$, то $f(x_1,y) \le \alpha$, $f(x_2,y) \le \alpha$. Поэтому если $\lambda \in [0,1]$, то имеем, что

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) \le \lambda f(x_1,y) + (1-\lambda) f(x_2,y) \le \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha .$$

Отсюда следует, что $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) \in C$.

Аналогично имеем, что из $(x,y_1),(x,y_2) \in C$ и $\lambda \in [0,1]$ следует, что $(x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in C$. Поэтому C бивыпуклое множество. Лемма доказана.

Если $x^* \in B(X\times Y, R)$, то легко проверяется $C = \{(x,y) \in X\times Y : x^*(x,y) = d\}$ бивыпуклое множество.

Лемма 3.2. Если $f: X\otimes Y \to R_{+\infty}$ выпуклая функция, то $g(x,y) = f(x\otimes y)$ бивыпуклая функция из $X\times Y$ в $R_{+\infty}$.

Доказательство. Если $(x_1,y),(x_2,y) \in X\times Y$, $\lambda \in [0,1]$, то

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) = f((\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\otimes y) = f(\lambda x_1 \otimes y + (1-\lambda)x_2 \otimes y) \le$$
$$\le \lambda f(x_1\otimes y) + (1-\lambda) f(x_2 \otimes y) = \lambda g(x_1,y) + (1-\lambda) g(x_2,y).$$

Если $(x,y_1),(x,y_1) \in X\times Y$, $\lambda \in [0,1]$, то аналогично имеем

$$g(x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \le \lambda g(x,y_1) + (1-\lambda) g(x,y_2).$$

Поэтому $g(x,y)$ бивыпуклая функция из $X\times Y$ в $R_{+\infty}$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. Если $D \subset \{x\otimes y : (x,y) \in X\times Y\}$ выпуклое множество и $C = \{(x,y) \in X\times Y : x\otimes y \in D\}$, то C бивыпуклое множество.

Доказательство. Пусть $(x_1,y),(x_2,y) \in C$. Так как $(x_1\otimes y),(x_2\otimes y) \in D$ и D выпуклое множество и $\lambda \in [0,1]$, то $\lambda(x_1\otimes y) + (1-\lambda)(x_2\otimes y) = \lambda x_1 \otimes y + (1-\lambda)(x_2\otimes y) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\otimes y \in D$

Отсюда следует, что $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) \in C$.

Аналогично имеем, что из $(x,y_1),(x,y_2) \in C$ и $\lambda \in [0,1]$ следует, что $(x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in C$. Лемма доказана.

Пусть X и Y банаховы пространства, $R_{+\infty} = R \cup \{+\infty\}$ и $q: X\times Y \to R_{+\infty}$ бивыпуклая функция. Обозначим $\text{dom}\, q = \{(x,y) \in X\times Y : q(x,y) < +\infty\}$. Легко проверяется, что, если q бивыпуклая функция, то $\text{dom}\, q$ -бивыпуклое множество. Бисубдифференциалом функции q в точке $(\bar{x},\bar{y}) \in \text{dom}\, q$ назовем следующее множество

$$\partial_2 q(\bar{x},\bar{y}) = \{x^* \in B(X\times Y, R) : q(x,y) - q(\bar{x},\bar{y}) \ge x^*(x,y) - x^*(\bar{x},\bar{y}) \text{ при } (x,y) \in X\times Y\}.$$

Пусть $x^* \in B(X\times Y, R)$, $q: X\times Y \to R_{+\infty}$. Положим

$$q^*(x^*) = \sup_{x\in X,\, y\in Y} \{x^*(x,y) - q(x,y)\}.$$

Лемма 3.4. Если q бивыпуклая функция, то $x^* \in \partial_2 q(\bar{x},\bar{y})$ тогда и только тогда, когда $q^*(x^*) + q(\bar{x},\bar{y}) = x^*(\bar{x},\bar{y})$.

Доказательство. Если $x^* \in \partial_2 q(\bar{x},\bar{y})$, то $x^*(\bar{x},\bar{y}) - q(\bar{x},\bar{y}) \ge x^*(x,y) - q(x,y)$ при $(x,y) \in X\times Y$. Поэтому $x^*(\bar{x},\bar{y}) - q(\bar{x},\bar{y}) = \sup_{x\in X, y\in Y} \{x^*(x,y) - q(x,y)\}$, т.е. $q^*(x^*) + q(\bar{x},\bar{y}) = x^*(\bar{x},\bar{y})$. Наоборот, если

$$q^*(x^*) + q(\bar{x},\bar{y}) = x^*(\bar{x},\bar{y}), \text{ то}$$

$$\sup_{(x,y)\in X\times Y} \{ x^*(x,y) - q(x,y)\} = x^*(\bar{x},\bar{y}) - q(\bar{x},\bar{y}).$$

Поэтому $x^*(x,y) - q(x,y) \le x^*(\bar{x},\bar{y}) - q(\bar{x},\bar{y})$ при $(x,y) \in X\times Y$, т.е. $q(x,y) - q(\bar{x},\bar{y}) \ge x^*(x,y) - x^*(\bar{x},\bar{y})$ при $(x,y) \in X\times Y$. Лемма доказана.

Положим

$$q^*(x^*) = \sup_{(x,y)\in X\times Y} \{x^*(x,y) - q(x,y)\}, \quad q^{**}(x,y) = \sup_{x^*\in B(X\times Y,R)} \{x^*(x,y) - q^*(x^*)\}.$$

Так как для каждой пары $(x,y) \in X\times Y$, отображение $x^* \to x^*(x,y)$ линейный непрерывный функционал на $B(X\times Y, R)$, то из определения вытекает, что $x^* \to q^*(x^*)$ выпуклая функция.

Ясно, что $(x,y)\to x^*(x,y)-q^*(x^*)$ бивыпуклая функция. Поэтому из предложения 2.2 [15] вытекает, что $(x,y)\to q^{**}(x,y)$ бивыпуклая функция.

Так как $q^*(x^*)\ge x^*(x,y)-q(x,y)$, то имеем, что $q^{**}(\bar{x},\bar{y})\le q(\bar{x},\bar{y})$ при $(x,y)\in X\times Y$. Ясно, что

$$q^*(0)=\sup_{(x,y)\in X\times Y}\{-q(x,y)\},\quad q^{**}(x,0)=q^{**}(0,y)=\sup\{-q^*(x^*):x^*\in B(X\times Y,R)\}.$$

Отметим, что функция $q:X\times Y\to R_{+\infty}$ называется собственной, если $\operatorname{dom} q\ne\varnothing$. Далее считаем, что все рассмотреные функции собственные.

Отметим, что ряд свойств бисопряженных функций аналогичен свойствам сопряженных функций (см. [11,14]).

Лемма 3.5. Если $\partial_2 q(\bar{x},\bar{y})\ne\varnothing$, то $q^{**}(\bar{x},\bar{y})=q(\bar{x},\bar{y})$.

Доказательство. Из леммы 3.4 вытекает, что $\bar{x}^*\in\partial_2 q(\bar{x},\bar{y})$ тогда и только тогда, когда $q^*(\bar{x}^*)+q(\bar{x},\bar{y})=\bar{x}^*(\bar{x},\bar{y})$. Поэтому

$$q^{**}(\bar{x},\bar{y})=\sup_{x^*\in B(X\times Y,R)}\{x^*(\bar{x},\bar{y})-q^*(x^*)\}\ge\bar{x}^*(\bar{x},\bar{y})-q^*(\bar{x}^*)=\bar{x}^*(\bar{x},\bar{y})-\bar{x}^*(\bar{x},\bar{y})+q(\bar{x},\bar{y})=q(\bar{x},\bar{y}),$$

т.е. $q^{**}(\bar{x},\bar{y})\ge q(\bar{x},\bar{y})$. Так как $q^{**}(\bar{x},\bar{y})\le q(\bar{x},\bar{y})$, то имеем, что $q^{**}(\bar{x},\bar{y})=q(\bar{x},\bar{y})$. Лемма доказана.

Следствие 3.1. Если $q(x,y)=q_1(x,y)+q_2(x,y)$ и $\partial_2 q_1(\bar{x},\bar{y})\ne\varnothing$ и $\partial_2 q_2(\bar{x},\bar{y})\ne\varnothing$, то $q^{**}(\bar{x},\bar{y})=q_1^{**}(\bar{x},\bar{y})+q_2^{**}(\bar{x},\bar{y})$

Доказательство. Так как $\partial_2 q_1(\bar{x},\bar{y})+\partial_2 q_2(\bar{x},\bar{y})\subset\partial_2 q(\bar{x},\bar{y})$, то имеем, что $\partial_2 q(\bar{x},\bar{y})\ne\varnothing$. Тогда из леммы 3.5 вытекает, что $q^{**}(\bar{x},\bar{y})=q(\bar{x},\bar{y})$, $q_1^{**}(\bar{x},\bar{y})=q_1(\bar{x},\bar{y})$, $q_2^{**}(\bar{x},\bar{y})=q_2(\bar{x},\bar{y})$. Отсюда получим справедливость следствия 3.1.

По определению субдифференциала имеем, что $\partial q^*(\bar{x}^*)$ принадлежит $X\otimes Y$.

Элемент $(\bar{x},\bar{y})\in X\times Y$ называется субградиентом функции $q^*(x^*)$ в точке $\bar{x}^*$, если

$$q^*(x^*)-q^*(\bar{x}^*)\ge x^*(\bar{x},\bar{y})-\bar{x}^*(\bar{x},\bar{y})$$

при всех $x^*\in B(X\times Y,R)$, а множество субградиентов называется субдифференциалом функции q^* в точке $\bar{x}^*$ и обозначается $\partial q^*(\bar{x}^*)$.

Пусть $(x_1\otimes y_1),\ (x_2\otimes y_2)\in\partial q^*(\bar{x}^*),\ \alpha\in(0,1)$. Тогда

$$q^*(x^*)-q^*(\bar{x}^*)\ge\alpha(x^*(x_1,y_1)-\bar{x}^*(x_1,y_1))+(1-\alpha)(x^*(x_2,y_2)-\bar{x}^*(x_2,y_2)),$$

т.е. $\alpha x_1\otimes y_1+(1-\alpha)x_2\otimes y_2\in\partial q^*(\bar{x}^*)$, т.е. $\partial q^*(\bar{x}^*)$ выпуклое множество.

Далее элемент $\bar{x}\otimes\bar{y}$ будем отождествлять элементом $(\bar{x},\bar{y})$.

Лемма 3.6. $(\bar{x},\bar{y})\in\partial q^*(\bar{x}^*)$ тогда и только тогда, когда

$$q^*(\bar{x}^*)+q^{**}(\bar{x},\bar{y})=\bar{x}^*(\bar{x},\bar{y}).$$

Доказательство. Если $(\bar{x},\bar{y})\in\partial q^*(\bar{x}^*)$, то по определению имеем, что

$$\bar{x}^*(\bar{x},\bar{y})-q^*(\bar{x}^*)\ge x^*(\bar{x},\bar{y})-q^*(x^*)$$

при $x^*\in B(X\times Y,R)$. Отсюда вытекает, что $\bar{x}^*(\bar{x},\bar{y})-q^*(\bar{x}^*)=q^{**}(\bar{x},\bar{y})$.

Обратно, если $q^*(\bar{x}^*)+q^{**}(\bar{x},\bar{y})=\bar{x}^*(\bar{x},\bar{y})$, то имеем, что

$$\bar{x}^*(\bar{x},\bar{y})-q^*(\bar{x}^*)=\sup_{x^*\in B(X\times Y,R)}\{x^*(\bar{x},\bar{y})-q^*(x^*)\}.$$

Поэтому $\bar{x}^*(\bar{x},\bar{y})-q^*(\bar{x}^*)\ge x^*(\bar{x},\bar{y})-q^*(x^*)$ *при* $x^*\in B(X\times Y,R)$, *т.е.* $(\bar{x},\bar{y})\in\partial q^*(\bar{x}^*)$. *Лемма доказана.*

Лемма 3.7. Для любой функции $q:X\times Y\to R_{+\infty}$ выполнено равенство $q^*=q^{***}$.

Доказательство. Так как $q^{**}(x,y)\le q(x,y)$ при $(x,y)\in X\times Y$, то из определения сопряженной функции следует, что $q^{***}\ge q^*$. Наоборот, из определения q^{**} вытекает, что $q^{**}(x,y)\ge x^*(x,y)-q^*(x^*)$ при $(x,y)\in X\times Y$. Поэтому

$$q^{***}(x^*)=\sup_{(x,y)\in X\times Y}\{x^*(x,y)-q^{**}(x,y)\}\le q^*(x^*).$$

Так как $q^{***}\ge q^*$ и $q^{***}\le q^*$, то имеем, что $q^*=q^{***}$. Лемма доказана.

Аналогично лемме 3.6 проверяется, что $x^*\in\partial_2 q(\bar{x},\bar{y})$ тогда и только тогда, когда $q^*(x^*)+q(\bar{x},\bar{y})=x^*(\bar{x},\bar{y})$; $x^*\in\partial_2 q^{**}(\bar{x},\bar{y})$ тогда и только тогда, когда $q^{***}(x^*)+q^{**}(\bar{x},\bar{y})=x^*(\bar{x},\bar{y})$.

Отсюда следует следующее следствие.

Следствие 3.2. Если $q(\bar{x},\bar{y}) = q^{**}(\bar{x},\bar{y})$, то $\partial_2 q(\bar{x},\bar{y}) = \partial_2 q^{**}(\bar{x},\bar{y})$.

Следствие 3.3. Для любой функции $q: X\times Y \to R_{+\infty}$ из $x^* \in \partial_2 q(\bar{x},\bar{y})$ вытекает, что $(\bar{x},\bar{y}) \in \partial q^*(x^*)$.

Доказательство. Так как $x^* \in \partial_2 q(\bar{x},\bar{y})$, то имеем, что $q^*(x^*) + q(\bar{x},\bar{y}) = x^*(\bar{x},\bar{y})$. Также по лемме 3.5 получим, что $q^{**}(\bar{x},\bar{y}) = q(\bar{x},\bar{y})$. Тогда $q^*(x^*) + q^{**}(\bar{x},\bar{y}) = x^*(\bar{x},\bar{y})$. По лемме 3.6 отсюда вытекает, что $(\bar{x},\bar{y}) \in \partial q^*(x^*)$. Следствие доказано.

Если $q_1: X\times Y \to R_{+\infty}$ и $q_2: X\times Y \to R_{+\infty}$, то

$$(q_1+q_2)^*(x^*) = \sup_{(x,y)\in X\times Y}\{x^*(x,y) - q_1(x,y) - q_2(x,y)\} \le \sup_{(x,y)\in X\times Y}\{x^*(x,y) - x_1^*(x,y) - q_1(x,y)\} +$$
$$+ \sup_{(x,y)\in X\times Y}\{x_1^*(x,y) - q_2(x,y)\} = q_1^*(x^* - x_1^*) + q_2^*(x_1^*)$$

при $x^* \in B(X\times Y, R)$. Поэтому

$$(q_1+q_2)^*(x^*) \le \inf_{x_1^*\in B(X\times Y,R)}\{q_1^*(x^*-x_1^*) + q_2^*(x_1^*)\} = \inf_{\substack{z_1^*,z_2^*\in B(X\times Y,R),\\ z_1^*+z_2^*=x^*}}\{q_1^*(z_1^*) + q_2^*(z_2^*)\}.$$

Положим

$$(q_1^*\nabla q_2^*)(x^*) = \inf_{\substack{z_1^*,z_2^*\in B(X\times Y,R),\\ z_1^*+z_2^*=x^*}}\{q_1^*(z_1^*) + q_2^*(z_2^*)\}.$$

Лемма 3.8. Если $q_1: X\times Y \to R_{+\infty}$ и $q_2: X\times Y \to R_{+\infty}$, то $(q_1^*\nabla q_2^*)^*(\bar{x},\bar{y}) = q_1^{**}(\bar{x},\bar{y}) + q_2^{**}(\bar{x},\bar{y})$ при $(\bar{x},\bar{y}) \in X\times Y$.

Доказательство. Если $(\bar{x},\bar{y}) \in X\times Y$, то

$$(q_1^*\nabla q_2^*)^*(\bar{x},\bar{y}) = \sup_{x^*\in B(X\times Y,R)}\{x^*(\bar{x},\bar{y}) - (q_1^*\nabla q_2^*)(x^*)\} =$$
$$= \sup_{x^*\in B(X\times Y,R)}\{x^*(\bar{x},\bar{y}) - \inf_{\substack{z_1^*,z_2^*\in B(X\times Y,R),\\ z_1^*+z_2^*=x^*}}\{q_1^*(z_1^*) + q_2^*(z_2^*)\}\} =$$
$$= \sup_{z_1^*,z_2^*\in B(X\times Y,R)}\{z_1^*(\bar{x},\bar{y}) + z_2^*(\bar{x},\bar{y}) - q_1^*(z_1^*) - q_2^*(z_2^*)\} = q_1^{**}(\bar{x},\bar{y}) + q_2^{**}(\bar{x},\bar{y}).$$

Лемма доказана.

Теорема 3.1. Если $q_1: X\times Y \to R$ и $q_2: X\times Y \to R$ четные бисублинейные непрерывные функции, то

$$\partial_2(q_1+q_2) = \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$$

в том и только в том случае, когда $(q_1+q_2)^*(x_1^*+x_2^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*)$ при $x_1^*, x_2^* \in B(X\times Y, R)$.

Доказательство. Если $q_1: X\times Y \to R$ и $q_2: X\times Y \to R$ четные бисублинейные непрерывные функции и $x^* \in \partial_2 q_1$, то $x^*(x,y) - q_1(x,y) \le 0$ при $(x,y) \in X\times Y$. Поэтому

$$q_1^*(x^*) = \sup_{(x,y)\in X\times Y}\{x^*(x,y) - q_1(x,y)\} \le 0 = x^*(0,0) - q_1(0,0) \le q_1^*(x^*).$$

Отсюда следует, что $q_1^*(x^*) = 0$.

Если $x^* \notin \partial_2 q_1$, то существует точка $(\bar{x},\bar{y}) \in X\times Y$ такая, что $x^*(\bar{x},\bar{y}) - q_1(\bar{x},\bar{y}) > 0$. Поэтому $q_1^*(x^*) = \sup_{(x,y)\in X\times Y}\{x^*(x,y) - q_1(x,y)\} \ge \sup_{\lambda\ge 0}\{x^*(\lambda\bar{x},\bar{y}) - q_1(\lambda\bar{x},\bar{y})\} = \sup_{\lambda\ge 0}\lambda\{x^*(\bar{x},\bar{y}) - q_1(\bar{x},\bar{y})\} = +\infty$. Получим, что

$$q_1^*(x^*) = \begin{cases} 0: \ x^* \in \partial_2 q_1, \\ +\infty: x^* \notin \partial_2 q_1. \end{cases}$$

Аналогично имеем, что

$$q_2^*(x^*) = \begin{cases} 0: \ x^* \in \partial_2 q_2, \\ +\infty: x^* \notin \partial_2 q_2 \end{cases} \text{ и } (q_1+q_2)^*(x^*) = \begin{cases} 0: \ x^* \in \partial_2(q_1+q_2), \\ +\infty: x^* \notin \partial_2(q_1+q_2). \end{cases}$$

Если $(q_1+q_2)^*(x_1^*+x_2^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*)$ при $x_1^*, x_2^* \in B(X\times Y, R)$, то

$$\begin{cases} 0: \ x_1^* \in \partial_2 q_1, \\ +\infty: x_1^* \notin \partial_2 q_1 \end{cases} + \begin{cases} 0: \ x_2^* \in \partial_2 q_2, \\ +\infty: x_2^* \notin \partial_2 q_2 \end{cases} = \begin{cases} 0: \ x_1^*+x_2^* \in \partial_2(q_1+q_2), \\ +\infty: x_1^*+x_2^* \notin \partial_2(q_1+q_2). \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} 0: \ x_1^* + x_2^* \in \partial_2 q_1 + \partial q_2, \\ +\infty : x_1^* + x_2^* \notin \partial_2 q_1 + \partial q_2 \end{cases} = \begin{cases} 0: \ x_1^* + x_2^* \in \partial_2 (q_1 + q_2), \\ +\infty : x_1^* + x_2^* \notin \partial_2 (q_1 + q_2). \end{cases}$$

Поэтому $\partial_2(q_1 + q_2) = \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$.

Обратно, если $\partial_2(q_1 + q_2) = \partial_2 q_1 + \partial_2 q_2$, то

$$\begin{cases} 0: \ x_1^* \in \partial_2 q_1, \\ +\infty : x_1^* \notin \partial_2 q_1 \end{cases} + \begin{cases} 0: \ x_2^* \in \partial_2 q_2, \\ +\infty : x_2^* \notin \partial_2 q_2 \end{cases} = \begin{cases} 0: \ x_1^* + x_2^* \in \partial_2 (q_1 + q_2), \\ +\infty : x_1^* + x_2^* \notin \partial_2 (q_1 + q_2). \end{cases}$$

Поэтому $(q_1 + q_2)^*(x_1^* + x_2^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*)$ при $x_1^*, x_2^* \in B(X \times Y, R)$. Теорема доказана.

Если $q: X \times Y \to R$ четная бисублинейная функция, то $q^*(x^*) = \begin{cases} 0: \ x^* \in \partial_2 q, \\ +\infty : x^* \notin \partial_2 q. \end{cases}$ Поэтому если $\partial_2 q(x, y) \neq \varnothing$ при $(x, y) \in X \times Y$, то из следствия 3.1 вытекает, что

$$q(x, y) = q^{**}(x, y) = \sup\{x^*(x, y) : x^* \in \partial_2 q\}.$$

Теорема 3.2. Если $q_1 : X \times Y \to R$ и $q_2 : X \times Y \to R$ бивыпуклые функции, $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ и $\partial_2 q_1(\overline{x}, \overline{y}) \neq \varnothing, \ \partial_2 q_2(\overline{x}, \overline{y}) \neq \varnothing$, то

$$\partial_2(q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_2 q_1(\overline{x}, \overline{y}) + \partial_2 q_2(\overline{x}, \overline{y})$$

в том и только в том случае, когда для $x^* \in \partial_2(q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y})$ существуют $x_1^*, x_2^* \in B(X \times Y, R)$ такие, что $x^* = x_1^* + x_2^*$ и $(q_1 + q_2)^*(x^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*)$.

Доказательство. Из определения бисубдифференциала следует, что $\partial_2 q_1(\overline{x}, \overline{y}) + \partial_2 q_2(\overline{x}, \overline{y}) \subset \partial_2(q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y})$. (3.1)

Так как $\partial_2 q_1(\overline{x}, \overline{y}) \neq \varnothing, \partial_2 q_2(\overline{x}, \overline{y}) \neq \varnothing$, то имеем, что $\partial_2(q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y}) \neq \varnothing$. Пусть $x^* \in \partial_2(q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y})$. Тогда по лемме 3.4 получим, что $x^* \in \partial_2(q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y})$ тогда и только тогда, когда $(q_1 + q_2)^*(x^*) + (q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y}) = x^*(\overline{x}, \overline{y})$. По условию существует $x_1^*, x_2^* \in B(X \times Y, R)$ такие, что $x^* = x_1^* + x_2^*$ и $(q_1 + q_2)^*(x^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*)$, то имеем, что

$$q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*) + (q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y}) = x_1^*(\overline{x}, \overline{y}) + x_2^*(\overline{x}, \overline{y}). \tag{3.2}$$

Так как

$$q_1^*(x_1^*) + q_1(\overline{x}, \overline{y}) \geq x_1^*(\overline{x}, \overline{y}), \ \ q_2^*(x_2^*) + q_2(\overline{x}, \overline{y}) \geq x_2^*(\overline{x}, \overline{y})$$

то из (3.2) следует, что $q_1^*(x_1^*) + q_1(\overline{x}, \overline{y}) = x_1^*(\overline{x}, \overline{y}), \ q_2^*(x_2^*) + q_2(\overline{x}, \overline{y}) = x_2^*(\overline{x}, \overline{y})$. Тогда по лемме 3.4 получим, что $x_1^* \in \partial_2 q_1(\overline{x}, \overline{y})$ и $x_2^* \in \partial_2 q_2(\overline{x}, \overline{y})$. Поэтому

$$\partial_2(q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y}) \subset \partial_2 q_1(\overline{x}, \overline{y}) + \partial_2 q_2(\overline{x}, \overline{y}) \tag{3.3}$$

Из (3.1) и (3.3) следует, что

$$\partial_2(q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_2 q_1(\overline{x}, \overline{y}) + \partial_2 q_2(\overline{x}, \overline{y}).$$

Обратно $\partial_2(q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_2 q_1(\overline{x}, \overline{y}) + \partial_2 q_2(\overline{x}, \overline{y})$ и $x^* \in \partial_2(q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y})$, $x_1^* \in \partial_2 q_1(\overline{x}, \overline{y})$ и $x_2^* \in \partial_2 q_2(\overline{x}, \overline{y})$ такие, что $x^* = x_1^* + x_2^*$, то из леммы 3.4 следует, что

$$(q_1 + q_2)^*(x_1^* + x_2^*) + (q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y}) = (x_1^* + x_2^*)(\overline{x}, \overline{y}), \tag{3.4}$$

$$q_1^*(x_1^*) + q_1(\overline{x}, \overline{y}) = x_1^*(\overline{x}, \overline{y}), \tag{3.5}$$

$$q_2^*(x_2^*) + q_2(\overline{x}, \overline{y}) = x_2^*(\overline{x}, \overline{y}). \tag{3.6}$$

Отнимая из (3.4) соотношения (3.5) и (3.6) получим, что

$$(q_1 + q_2)^*(x_1^* + x_2^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*).$$

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует следующее следствие

Следствие 3.4. Если $\partial_2(q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_2 q_1(\overline{x}, \overline{y}) + \partial_2 q_2(\overline{x}, \overline{y})$, $x^* \in \partial_2(q_1 + q_2)(\overline{x}, \overline{y})$, $x_1^* \in \partial_2 q_1(\overline{x}, \overline{y})$ и $x_2^* \in \partial_2 q_2(\overline{x}, \overline{y})$ такие, что $x^* = x_1^* + x_2^*$, то $(q_1 + q_2)^*(x^*) = q_1^*(x_1^*) + q_2^*(x_2^*)$.

4. Условия экстремума в бивыпуклом программировании

Пусть X и Y банаховы пространства, $f : X \times Y \to R_{+\infty}$ бивыпуклая функция.

Теорема 4.1. Для того чтобы $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ была точкой минимума бивыпуклой функции $f : X \times Y \to R_{+\infty}$ во всем пространстве, необходимо и достаточно, чтобы $0 \in \partial_2 f(\overline{x}, \overline{y})$.

Доказательство. Если $f(\overline{x}, \overline{y}) = \min\limits_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y)$, то $f(\overline{x}, \overline{y}) \leq f(x, y)$ при $(x, y) \in X \times Y$. Поэтому

$f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})\ge 0$ при $(x,y)\in X\times Y$. Отсюда следует, что $0\in\partial_2 f(\bar{x},\bar{y})$.

Обратно, если $0\in\partial_2 f(\bar{x},\bar{y})$, то $f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})\ge 0$ при $(x,y)\in X\times Y$. Отсюда следует, что $f(\bar{x},\bar{y})=\min\limits_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y)$. Теорема доказана.

Если $f(\bar{x},\bar{y})=\min\limits_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y)$, то получим, что

$$f(\bar{x},\bar{y})=-\max_{(x,y)\in X\times Y}\{-f(x,y)\}=-f^*(0).$$

Получим, что $f(\bar{x},\bar{y})+f^*(0)=0$. Отсюда также следует, что $0\in\partial_2 f(\bar{x},\bar{y})$.

Так как $\partial_2 f(\bar{x},\bar{y})\ne\varnothing$, то из леммы 3.5 следует, что $f^{**}(\bar{x},\bar{y})=f(\bar{x},\bar{y})$. Поэтому $f^{**}(\bar{x},\bar{y})+f^*(0)=0$. Тогда из леммы 3.6 следует, что $(\bar{x},\bar{y})\in\partial f^*(0)$.

Следствие 4.1. Если бивыпуклая функция f достигает на $X\times Y$ в точке $(\bar{x},\bar{y})$ минимума, то $0\in\partial_2 f(\bar{x},\bar{y})$ и $(\bar{x},\bar{y})\in\partial f^*(0)$.

Пусть X и Y банаховы пространства, $C\subset X\times Y$ и $(\bar{x},\bar{y})\in C$. Положим

$$\delta_C(x,y)=\begin{cases}0; & (x,y)\in C,\\ +\infty; & (x,y)\notin C.\end{cases}$$

Множество $\partial_2\delta_C(\bar{x},\bar{y})$ назовем бинормальным конусом к C в точке $(\bar{x},\bar{y})$ и обозначим через $\Omega_C(\bar{x},\bar{y})$. Из определения $\partial_2\delta_C(\bar{x},\bar{y})$ имеем

$$\Omega_C(\bar{x},\bar{y})=\{x^*\in B(X\times Y,R):\ x^*(x,y)-x^*(\bar{x},\bar{y})\le 0,\ \forall (x,y)\in C\}.$$

Из определения $\Omega_C(\bar{x},\bar{y})$ следует, что $x^*\in\Omega_C(\bar{x},\bar{y})$ тогда и только тогда, когда $\sup\{x^*(x,y):(x,y)\in C\}=x^*(\bar{x},\bar{y})$.

Если $A\subset B(X\times Y,R)$, то положим $\operatorname{con}A=\{\lambda x^*: x^*\in A,\ \lambda\ge 0\}$.

Лемма 4.1. Если $g: X\times Y\to R$, $C=\{(x,y)\in X\times Y: g(x,y)\le g(\bar{x},\bar{y})\}$, то $\operatorname{con}\partial_2 g(\bar{x},\bar{y})\subset\Omega_C(\bar{x},\bar{y})$.

Доказательство. Если $x^*\in\partial_2 g(\bar{x},\bar{y})$, то $g(x,y)-g(\bar{x},\bar{y})\ge x^*(x,y)-x^*(\bar{x},\bar{y})$ при $(x,y)\in X\times Y$. Поэтому $0\ge g(x,y)-g(\bar{x},\bar{y})\ge x^*(x,y)-x^*(\bar{x},\bar{y})$ при $(x,y)\in C$, т.е. $x^*(x,y)-x^*(\bar{x},\bar{y})\le 0$ при $(x,y)\in C$. Получим, что $\partial_2 g(\bar{x},\bar{y})\subset\Omega_C(\bar{x},\bar{y})$. Пусть $\lambda\ge 0$ и $x^*\in\partial_2 g(\bar{x},\bar{y})$. Тогда $\lambda x^*(x,y)-\lambda x^*(\bar{x},\bar{y})\le 0$ при $(x,y)\in C$, т.е. $\operatorname{con}\partial_2 g(\bar{x},\bar{y})\subset\Omega_C(\bar{x},\bar{y})$. Лемма доказана.

Рассмотрим задачу

$$f(x,y)\to\min,\ (x,y)\in C \tag{4.1}$$

Следствие 4.2. Пусть C бивыпуклое множество. Для того чтобы $(\bar{x},\bar{y})\in C$ была точкой минимума бивыпуклой функции $f: X\times Y\to R_{+\infty}$ в множестве C, необходимо и достаточно, чтобы $0\in\partial_2(f+\delta_C)(\bar{x},\bar{y})$.

Доказательство. По условию C бивыпуклое множество. Поэтому $\delta_C(x,y)$ бивыпуклая функция. Тогда получим, что $(f+\delta_C)(x,y)$ также бивыпуклая функция. Из теоремы 4.1 следует, что для того, чтобы $(\bar{x},\bar{y})\in X\times Y$ была точкой минимума бивыпуклой функции $f+\delta_C: X\times Y\to R_{+\infty}$ во всем пространстве, необходимо и достаточно, чтобы $0\in\partial_2(f+\delta_C)(\bar{x},\bar{y})$. Следствие доказано.

Лемма 4.2. Если $0\in\partial_2 f(\bar{x},\bar{y})+\Omega_C(\bar{x},\bar{y})$, то $(\bar{x},\bar{y})\in C$ является решением задачи (4.1).

Доказательство. Если $0\in\partial_2 f(\bar{x},\bar{y})+\Omega_C(\bar{x},\bar{y})$, то имеем, что $0\in\partial_2 f(\bar{x},\bar{y})+\partial_2\delta_C(\bar{x},\bar{y})$. Отсюда следует, что существуют $x_1^*\in\partial_2 f(\bar{x},\bar{y})$ и $x_2^*\in\partial_2\delta_C(\bar{x},\bar{y})$ такие, что $x_1^*+x_2^*=0$. Тогда получим, что

$$f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})\ge x_1^*(x,y)-x_1^*(\bar{x},\bar{y}) \text{ при } (x,y)\in X\times Y,$$

$$\delta_C(x,y)-\delta_C(\bar{x},\bar{y})\ge x_2^*(x,y)-x_2^*(\bar{x},\bar{y}) \text{ при } (x,y)\in X\times Y.$$

Сложив этих соотношений, имеем, что

$$f(x,y)+\delta_C(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})-\delta_C(\bar{x},\bar{y})\ge 0 \text{ при } (x,y)\in X\times Y.$$

Отсюда следует, что точка $(\bar{x},\bar{y})\in C$ является решением задачи (4.1). Лемма доказана.

Пусть $f_0: X\times Y\to R_{+\infty}$, $f_1: X\times Y\to R_{+\infty}$,…, $f_k: X\times Y\to R_{+\infty}$, $C\subset X\times Y$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(x,y)\to\min \tag{4.2}$$

$$f_1(x,y)\le 0,\ \ldots,\ f_k(x,y)\le 0, \tag{4.3}$$

$$(x,y)\in C. \tag{4.4}$$

Теорем 4.2(достаточное условие). Пусть точка $(\bar{x},\bar{y})$ удовлетворяют условиям (4.3), (4.4) и найдутся не равные одновременно нулю числа $\lambda_1 \ge 0,\ldots,\ \lambda_k \ge 0$ такие, что

$$0 \in \partial_2 f_0(\bar{x},\bar{y}) + \lambda_1 \partial_2 f_1(\bar{x},\bar{y}) + \cdots + \lambda_k \partial_2 f_k(\bar{x},\bar{y}) + \Omega_C(\bar{x},\bar{y}) \tag{4.5}$$

$$\lambda_i f_i(\bar{x},\bar{y}) = 0 \text{ при } i = 1,\ldots,k, \tag{4.6}$$

то $(\bar{x},\bar{y})$ является решением задачи (4.2) - (4.4).

Доказательство. Положим $C_i = \{(x,y) \in X \times Y : f_i(x,y) \le 0\}$ и $I(\bar{x},\bar{y}) = \{i \in \overline{1,k} : f_i(\bar{x},\bar{y}) = 0\}$.

Ясно, что, если $i \notin I(\bar{x},\bar{y})$, то $f_i(\bar{x},\bar{y}) < 0$. Поэтому $\lambda_i = 0$ при $i \notin I(\bar{x},\bar{y})$. Если $i \in I(\bar{x},\bar{y})$, то

$$C_i = \{(x,y) \in X \times Y : f_i(x,y) \le 0\} = \{(x,y) \in X \times Y : f_i(x,y) \le f_i(\bar{x},\bar{y})\}.$$

Тогда из леммы 4.1 следует, что $\operatorname{con} \partial_2 f_i(\bar{x},\bar{y}) \subset \Omega_{C_i}(\bar{x},\bar{y})$ при $i \in I(\bar{x},\bar{y})$.

Из (4.5) следует, что существует $x_0^* \in \partial_2 f_0(\bar{x},\bar{y}),\ x_1^* \in \partial_2 f_1(\bar{x},\bar{y}),\ldots,x_k^* \in \partial_2 f_k(\bar{x},\bar{y})$ и $x^* \in \Omega_C(\bar{x},\bar{y})$ такие, что $x_0^* + \lambda_1 x_1^* + \ldots,\lambda_k x_k^* + x^* = 0$. Так как $\operatorname{con} \partial_2 f_i(\bar{x},\bar{y}) \subset \Omega_{C_i}(\bar{x},\bar{y})$ при $i \in I(\bar{x},\bar{y})$, то имеем, что $\lambda_i x_i^* \in \Omega_{C_i}(\bar{x},\bar{y})$ при $i \in I(\bar{x},\bar{y})$. Если $i \notin I(\bar{x},\bar{y})$, то $\lambda_i = 0$. Поэтому $\lambda_i x_i^* = 0 \in \Omega_{C_i}(\bar{x},\bar{y})$ при $i \notin I(\bar{x},\bar{y})$.

Тогда получим, что $\lambda_i x_i^* \in \Omega_{C_i}(\bar{x},\bar{y})$ при $i = 1,\ldots,k$. Поэтому имеем

$$f_0(x,y) - f_0(\bar{x},\bar{y}) \ge x_0^*(x,y) - x_0^*(\bar{x},\bar{y}) \text{ при } (x,y) \in X \times Y,$$

$$\delta_{C_i}(x,y) - \delta_{C_i}(\bar{x},\bar{y}) \ge \lambda_i x_i^*(x,y) - \lambda x_i^*(\bar{x},\bar{y}) \text{ при } (x,y) \in X \times Y$$

при $i = 1,\ldots,k$ и

$$\delta_C(x,y) - \delta_C(\bar{x},\bar{y}) \ge x^*(x,y) - x^*(\bar{x},\bar{y}) \text{ при } (x,y) \in X \times Y.$$

Отсюда следует, что

$$f_0(x,y) + \sum_{i=1}^{k} \delta_{C_i}(x,y) + \delta_C(x,y) - f_0(\bar{x},\bar{y}) - \sum_{i=1}^{k} \delta_{C_i}(\bar{x},\bar{y}) - \delta_C(\bar{x},\bar{y}) \ge 0$$

при $(x,y) \in X \times Y$. Тогда получим, что $f_0(x,y) \ge f_0(\bar{x},\bar{y})$ при $(x,y) \in C \bigcap (\bigcap_{i=1}^{k} C_i)$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума высших порядков для негладких функций. // Изв. АН Азерб. ССР, сер.физ.-техн. и матем. наук., 1989, №6.- с.33-47.

2. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. - Баку, 1996.-148 с.

3. Садыгов М.А. О геометрических аспектах субдифференциала второго порядка. // ДАН Азерб., 2001, N 4-6.- с.35-39.

4. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. - Баку, Элм, 2002.-125 с.

5. Садыгов М.А. Исследование субдифференциала первого и второго порядков негладких функций. - Баку, Элм, 2007.- 224 с.

6. Садыгов М.А. n-выпуклые и $n-$положительно однородные функции. - Баку, «Муаллим» LTD, 2008.- 115 с.

7. Свойства $n-$положительно однородных функций. // Доклады НАН Азерб., №1, 2012. - с. 24-30.

8. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация.- Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014.- 359 p.

9. Хелемский А.Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. - Издат.-во МГУ, 1986.- 288с.

10. Пич А. Ядерные локально-выпуклые пространства. - М.: Мир, 1967.- 256 с.

11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974.- 479 с.

12. Кусраев А.Г. Векторная двойственность и ее приложения. - М.: Наука, 1985.- 256 с.

13. Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1975. - 443 с.

14. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М.: Мир, 1975.- 496 с.

15. Обен Ж.П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. - М.: Мир, 1988.- 264 с.

16. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. - М.: Наука, 1988.- 280 с.