

# Calibración de modelos numéricos de un pórtico mediante técnicas de análisis modal experimental

Marcelo A. Ceballos<sup>1,2</sup>, José E. Stuardi<sup>1</sup> y Guillermo D. Chiappero<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.

<sup>2</sup>Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT – CONICET), Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

Fecha de recepción del manuscrito: 05/02/2022

Fecha de aceptación del manuscrito: 02/09/2022

Fecha de publicación: 30/12/2022

**Resumen**— En el marco de las actividades programadas para el curso de posgrado Análisis Modal Experimental de la FCEFyN de la UNC se realizaron ensayos dinámicos impulsivos sobre un pórtico de laboratorio a los efectos de extraer sus parámetros modales, y en base a estos calibrar modelos numéricos con diferentes niveles de complejidad. El pórtico ensayado en el Laboratorio de Estructuras resulta representativo de estructuras típicas de edificios, con pisos rígidos en el plano, columnas deformándose flexionalmente y algún grado de flexibilidad rotacional de la base. Los ensayos se realizaron para la configuración original del pórtico, como también para una variante provista de un amortiguador de masa sintonizada introducido para reducir la respuesta en el modo fundamental. Por medio de parámetros modales previamente identificados, en este trabajo se ajustan parámetros mecánicos de diferentes modelos numéricos y se analiza la capacidad de éstos para reproducir dichos parámetros modales experimentales. El pórtico fue además ensayado imponiendo un movimiento armónico de frecuencia variable en la base y registrando la respuesta en estado de régimen permanente para cada frecuencia de análisis. La comparación de la respuesta medida con la que se obtiene utilizando el modelo numérico con mejor ajuste ha permitido verificar su capacidad de predicción y detectar cierto grado de no-linealidad en el comportamiento real de la estructura.

**Palabras clave**— análisis modal experimental, modelación numérica, ajuste de parámetros mecánicos, modificación estructural.

**Abstract**— Within the framework of the activities planned for the postgraduate course Experimental Modal Analysis of the FCEFyN at the UNC, impulsive dynamic tests were carried out on a laboratory frame in order to extract its modal parameters and, based on these, calibrate numerical models with different levels of complexity. The frame tested in the Structures Laboratory is representative of typical buildings with in-plane rigid floors, bending flexible columns, and some degree of rotational flexibility of the base. The tests were carried out for the original configuration of the frame and for an alternative provided with a tuned mass damper designed to reduce the response in the fundamental mode. Using previously identified modal parameters, the mechanical parameters of different numerical models were adjusted analyzing their accuracy. The frame was also tested by imposing a variable frequency harmonic motion on the base and recording the steady-state response for each analysis frequency. The predictive capacity of the numerical model was verified comparing the measured response with the best fit model. A certain degree of non-linearity in the real behavior of the structure was therefore detected.

**Keywords**— Experimental modal analysis, numerical modeling, adjustment of mechanical parameters, structural modification.

## INTRODUCCIÓN

El modelo numérico de una estructura ajustado en base a los parámetros modales extraídos usando técnicas de identificación permite predecir su comportamiento frente a diferentes excitaciones dinámicas, lo cual resulta de suma utilidad en varias ramas de la ingeniería. La precisión de las simulaciones numéricas depende de la fidelidad del modelo, siendo ésta importante en distintos análisis como, por ejemplo, el efecto de modificaciones estructurales, o una adecuada interpretación del monitoreo continuo de la salud estructural a través de la medición de la respuesta debida a vibraciones ambientales. El desarrollo de técnicas de identificación ha tenido un gran auge principalmente en

los últimos 40 años (Ewins, 2000; Maia y Silva, 1997), y a partir del año 2000 han cobrado notable interés las técnicas basadas en registros de larga duración de las vibraciones producidos por tránsito, viento, microtemores, etc. (Rainieri y Fabbrocino, 2014; Brincker y Ventura, 2015).

En el marco de las actividades del curso de posgrado Análisis Modal Experimental, dictado por los dos primeros autores en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba, se propuso un proyecto integrador que tuvo como uno de sus objetivos la identificación de los parámetros modales de una estructura simple recurriendo a diferentes técnicas. A tal efecto se utilizó un pórtico de aproximadamente 1 m de altura compuesto por 4 pisos, 4 columnas y una masa de aproximadamente 3 kg por piso, construido por el último autor con propósitos didácticos para materias afines a la Dinámica Estructural. Este pórtico está montado sobre una mesa vibratoria, lo cual permite efectuar diferentes tipos de ensayos dinámicos.

Dirección de contacto:

Marcelo Ceballos, Avenida Vélez Sarsfield 1611, Ciudad Universitaria, X5016 CGA. Tel: 5353800 interno 718, marcelo.cebaldos@unc.edu.ar.

Las técnicas utilizadas para identificar los parámetros modales se describen en detalle en el trabajo de Trono y colaboradores (2021). La primera técnica se basa en la Fracción Polinómica Matricial (FPM) propuesta por Juang (1994), que se combina con un ajuste fino de parámetros modales que permite minimizar las distorsiones producidas al forzar la simetría de los autovectores por derecha y por izquierda. La segunda técnica usa la Descomposición de Valores Singulares de las matrices de Función Respuesta en Frecuencia (FRF) para cada frecuencia de análisis, la cual separa la contribución de cada modo en la respuesta. Esta técnica se combina con el Método Inverso propuesto por Dobson (1984) para extraer los parámetros modales correspondientes al modo dominante en torno a cada pico.

Los parámetros modales identificados oportunamente se utilizan en este trabajo para calibrar modelos numéricos con distintos grados de complejidad, con el propósito de analizar los efectos de hipótesis que suelen adoptarse en la práctica sobre la precisión de los modelos para representar el comportamiento dinámico de la estructura. Por ejemplo, una hipótesis habitual y hasta incluso razonable consiste en adoptar valores iguales de rigidez y masa para todos los pisos de edificios regulares en altura. Asimismo, se suele ignorar la flexibilidad rotacional de la base de los edificios, lo cual puede resultar una aproximación algo burda cuando se somete a la estructura a solicitaciones horizontales.

Una vez ajustado aquel modelo numérico que mejor reproduce los parámetros modales para la configuración original del pórtico, se analiza una variante de la estructura que posee un amortiguador de masa sintonizada montado en el piso superior. En la etapa experimental se repiten los ensayos impulsivos en las mismas condiciones, mientras que en el modelo numérico seleccionado se ensamblan los elementos mecánicos del absorbedor de vibraciones y sólo se ajustan dichos parámetros en base a los nuevos datos experimentales. Luego, la comparación de los parámetros modales experimentales y numéricos permite chequear la validez del modelo modificado.

La etapa final de este estudio consiste en el análisis de un ensayo de barrido en frecuencias para un movimiento horizontal de la base, donde se deja que la estructura entre en régimen permanente antes de proceder a la medición de la respuesta en todos los pisos. Este ensayo se realiza para la configuración original del pórtico, y permite analizar una vez más la capacidad del modelo elegido para reproducir el comportamiento dinámico frente a esta solicitación.

## DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA

La estructura ensayada fue diseñada y proyectada con dimensiones y masas compatibles con las posibilidades del laboratorio para poder ser excitada de diferentes maneras, permitiendo el registro de vibraciones para la aplicación de distintas técnicas de identificación modal.

La Fig. 1 muestra una foto del modelo de laboratorio que constituye la estructura de ensayo, junto con un esquema donde se describen los principales parámetros mecánicos de un modelo plano de análisis estructural. Se trata de un pórtico de 4 pisos construidos con placas cuadradas de acero de lado  $l = 160$  mm y de espesor  $e = 15$  mm. La separación vertical de las placas entre baricentros resulta  $h = 240$  mm. Las 4 columnas del pórtico están formadas por varillas roscadas W1/4" que se empotran en las placas cerca

de los vértices. A los efectos de desacoplar los modos en las 2 direcciones horizontales, el pórtico se rigidiza en la dirección perpendicular a la de análisis vinculando de a pares a las columnas en planos verticales paralelos entre sí mediante 2 planchuelas por piso y por plano.

Con el propósito de producir una variante del sistema original, el modelo se complementa con un amortiguador de masa sintonizada de 1.2 kg vinculado a la placa del piso superior a través de una varilla similar a la usada para las columnas, tal como se esquematiza en la Fig. 1. El pórtico ensayado se encuentra montado sobre una mesa vibratoria provista de un sistema biela-manivela que permite imponer un movimiento armónico de base con una amplitud y una frecuencia que pueden regularse dentro de ciertos límites. El enrejado de la mesa vibratoria posee cierta flexibilidad, la cual se asume que representa una eventual flexibilidad de la fundación.

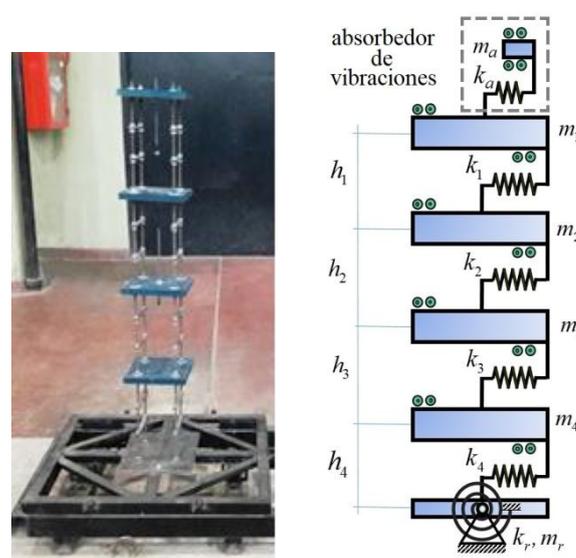


Fig. 1: Pórtico montado sobre una mesa vibratoria (izquierda) y modelo plano de análisis estructural (derecha)

## DESCRIPCIÓN DE LOS ENSAYOS DINÁMICOS

El pórtico fue sometido a las 2 condiciones de excitación dinámica que se describen a continuación:

a) Ensayo impulsivo con un martillo modal, aplicando un impacto en cada piso y sobre una de las direcciones horizontales principales, y tomando registros simultáneos de la fuerza aplicada y de las aceleraciones horizontales en todos los pisos. La fuerza se midió con una celda de carga PCB modelo 200M132, mientras que para la medición de la respuesta se usaron acelerómetros HBM modelo B12-200. El ensayo fue repetido 5 veces por cada impacto para reducir los errores experimentales y también para estimar la función de coherencia. Este mismo ensayo fue repetido para la modificación estructural obtenida con el agregado de un absorbedor de vibraciones (ver Fig. 1).

b) Ensayo de excitación armónica de la base en la misma dirección horizontal utilizada para el ensayo de impacto, variando la frecuencia excitatriz entre 2 Hz y 32 Hz, con incrementos de frecuencia de 0.1 Hz. El movimiento armónico impuesto en la base posee un valor fijo de desplazamiento de 0.57 mm pico-pico. Las mediciones se realizaron estando la estructura en régimen permanente para cada una de las frecuencias de análisis.

El objetivo de los ensayos impulsivos fue identificar los parámetros modales de la estructura a través de distintas técnicas, tanto sin como con el absorbedor, y explorando ventajas y desventajas. Los parámetros modales del pórtico sin el absorbedor se usan para calibrar modelos numéricos con distintas características. Luego se elige el modelo más representativo y se le ensambla el absorbedor tratando de reproducir los parámetros modales experimentales que se obtienen en tal condición ajustando sólo los parámetros de dicho dispositivo. Finalmente se aplica sobre este modelo de mejor ajuste la excitación armónica de base impuesta en el correspondiente ensayo con el propósito de comparar las mediciones experimentales con las predicciones numéricas.

**DATOS PROVENIENTES DE LA IDENTIFICACIÓN Y UTILIZADOS PARA EL AJUSTE DE LOS MODELOS**

La FRF expresada en términos de desplazamientos se designa receptancia  $[\alpha]$ , y considerando amortiguamiento viscoso para la estructura adopta la siguiente forma:

$$[\alpha(\omega)] = ([K] + i\omega[C] - \omega^2[M])^{-1} \quad (1)$$

donde las matrices físicas  $[K]$ ,  $[C]$  y  $[M]$  son cuadradas y poseen dimensiones  $N \times N$ . En el caso de sistemas que presentan amortiguamiento viscoso clásico se satisfacen las siguientes propiedades de ortogonalidad:

$$[\Phi]^T [K][\Phi] = \mathcal{K} \omega_r^2 \mathcal{R} \Rightarrow [K] = [\Phi]^{-T} \mathcal{K} \omega_r^2 \mathcal{R} [\Phi]^{-1} \quad (2)$$

$$[\Phi]^T [C][\Phi] = \mathcal{C} \xi_r \omega_r \mathcal{R} \Rightarrow [C] = [\Phi]^{-T} \mathcal{C} \xi_r \omega_r \mathcal{R} [\Phi]^{-1} \quad (3)$$

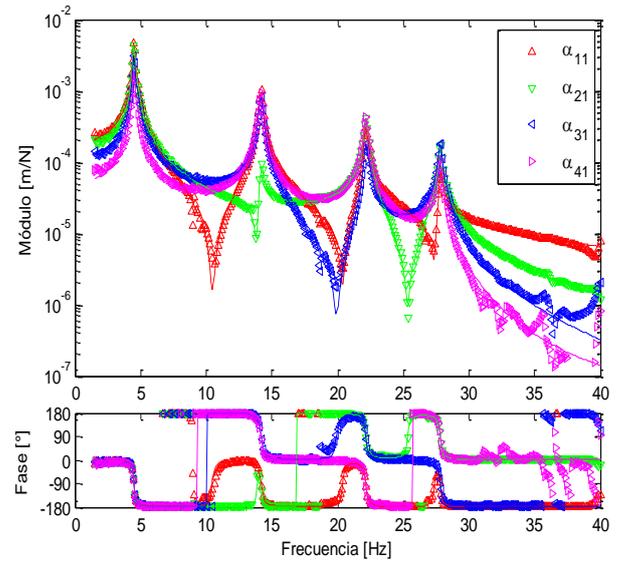
$$[\Phi]^T [M][\Phi] = \mathcal{M} \mathcal{R} \Rightarrow [M] = [\Phi]^{-T} \mathcal{M} \mathcal{R} [\Phi]^{-1} \quad (4)$$

donde  $[\Phi]$  constituye la matriz de formas modales, en tanto que  $\omega_r$  y  $\xi_r$  representan las frecuencias naturales no-amortiguadas y las relaciones de amortiguamiento, respectivamente, las cuales suelen posicionarse en matrices diagonales. Las ecuaciones (2) a (4) muestran cómo, bajo ciertas condiciones, pueden obtenerse las matrices físicas del sistema utilizando los parámetros modales identificados en forma experimental.

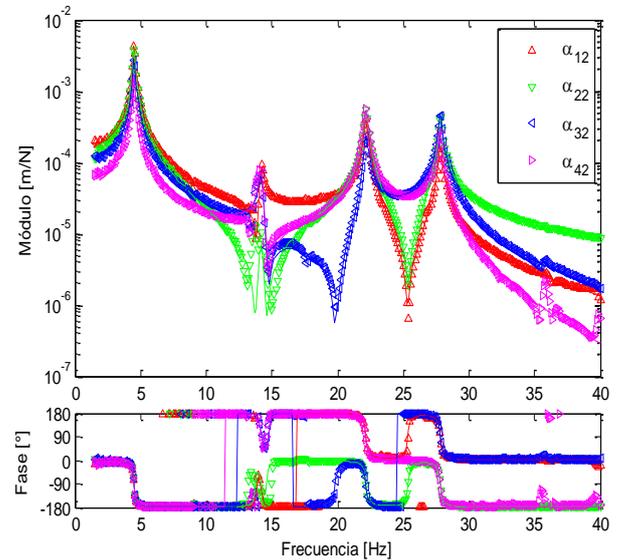
Las curvas de FRF del pórtico original fueron ajustadas con una técnica basada en la FPM que se describe en el trabajo de Trono y colaboradores (2021). Las Figuras 2 a 5 muestran las curvas correspondientes a cada columna de la matriz experimental de FRF usando símbolos triangulares, superpuestas con las curvas en líneas continuas obtenidas con los parámetros modales ajustados que se presentan en la Tabla 1. La técnica utilizada para identificar los parámetros modales produce que las formas modales resulten normalizadas respecto a la matriz de masa.

La correspondencia entre los pares de curvas resulta notable para todos los casos, incluso en proximidades de las anti-resonancias que normalmente están más afectadas por los ruidos experimentales.

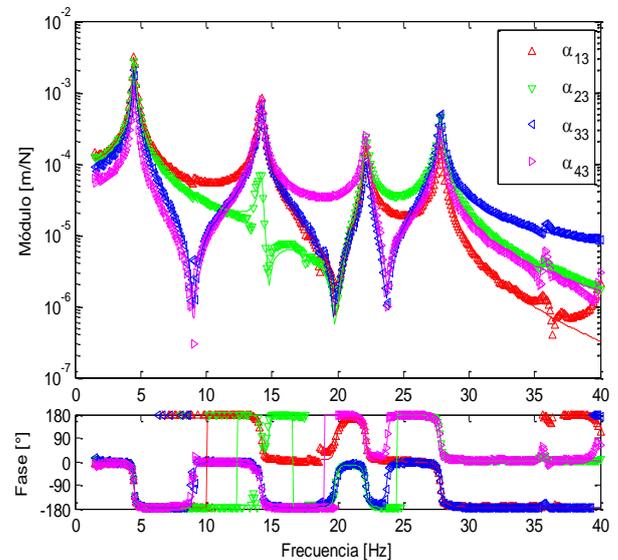
Las frecuencias naturales así como las formas modales identificadas se utilizan como parámetros de referencia para ajustar los modelos numéricos del pórtico original. Con respecto al amortiguamiento, se observa que permanece prácticamente constante para todos los modos, por lo podría considerarse un modelo de tipo histerético con un valor  $\eta = 2\xi = 0.6\%$  uniforme para todo el rango de frecuencias.



**Fig. 2:** Curvas de receptancia del pórtico original (1° columna)



**Fig. 3:** Curvas de receptancia del pórtico original (2° columna)



**Fig. 4:** Curvas de receptancia del pórtico original (3° columna)

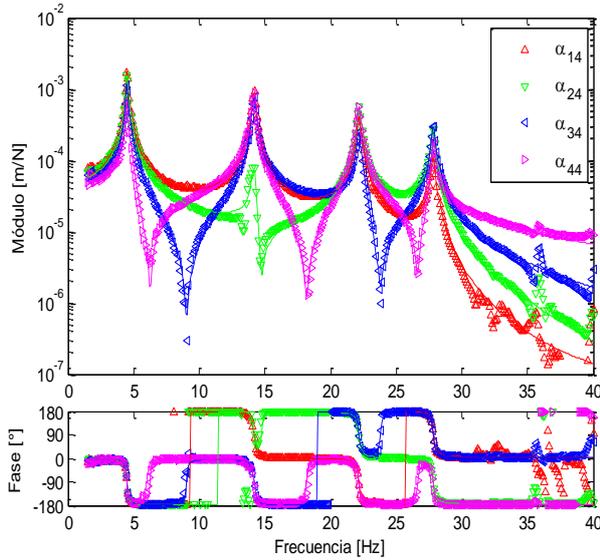


Fig. 5: Curvas de receptancia del pórtico original (4º columna)

TABLA 1: PARÁMETROS MODALES DEL PÓRTICO ORIGINAL IDENTIFICADOS CON FPM + AJUSTE FINO

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
$f_r$ [Hz]	4.527	14.18	22.18	27.84
$\zeta_r$ [%]	0.365	0.340	0.288	0.240
$\phi_r$ [ $\text{kg}^{-1/2}$ ]	0.370	0.349	0.258	0.138
	0.331	0.027	-0.338	-0.350
	0.242	-0.288	-0.152	0.379
	0.136	-0.326	0.351	-0.228

A los efectos de analizar la relación que existe entre las frecuencias naturales  $f_r$  correspondientes a los distintos modos identificados, estas frecuencias son normalizadas respecto a la frecuencia del cuarto modo obteniéndose  $\bar{\Omega}_r^{EXP}$ , dado que una eventual flexibilidad rotacional de la base tiene una menor influencia para las frecuencias más altas, tal como se discute más adelante. De esta forma, las frecuencias naturales resultan

$$f_r = [4.527 \quad 14.18 \quad 22.18 \quad 27.84] \rightarrow \bar{\Omega}_r^{EXP} = [0.163 \quad 0.509 \quad 0.797 \quad 1.000] \quad (5)$$

### ESTRATEGIAS DE MODELACIÓN NUMÉRICA

En virtud de que el número de modos identificados coincide con el número de los grados de libertad medidos, resulta posible calcular las matrices de rigidez y masa que reproducen los parámetros modales identificados a través de las fórmulas presentadas en las ecuaciones (2) y (4):

$$K [\text{N/m}] = [\Phi]^{-T} \mathbb{K} \omega_r^2 \mathbb{K} [\Phi]^{-1} = \begin{bmatrix} 24370 & -24150 & -800 & 290 \\ -24150 & 48480 & -25810 & -290 \\ -800 & -25810 & 54360 & -27070 \\ 290 & -290 & -27070 & 51320 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$M [\text{kg}] = [\Phi]^{-T} [\Phi]^{-1} = \begin{bmatrix} 2.904 & 0.030 & -0.018 & 0.039 \\ 0.030 & 2.884 & 0.083 & 0.033 \\ -0.018 & 0.083 & 3.245 & 0.141 \\ 0.039 & 0.033 & 0.141 & 3.338 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Estas matrices poseen básicamente la misma forma de las matrices de un pórtico con vigas muy rígidas y masas concentradas en los pisos (valores dominantes en negrita), lo que indica que el modelo de base rígida representa una aproximación razonable del pórtico ensayado. En efecto, las matrices de rigidez y masa resultan prácticamente tri-diagonal y diagonal, respectivamente, con coeficientes casi nulos por fuera de dichas diagonales. Por consiguiente, los coeficientes dominantes proporcionan valores de arranque adecuados para la calibración de los modelos numéricos.

En base a lo expuesto previamente, se propone un modelo de 4 grados de libertad (GL) con base fija y otro modelo de 5 GL con base rotacionalmente flexible. Los modelos sólo se diferencian en el GL rotacional de la base. La medición de GL rotacionales siempre resulta un desafío dentro del análisis modal experimental, para lo cual se han propuesto técnicas que involucran sensores especiales y otros procedimientos de limitado alcance y efectividad. Por tal circunstancia, se ha descartado en la fase experimental la medición de grados de libertad rotacionales.

En cuanto a la calibración de los modelos propuestos, ésta puede realizarse a través de una amplia variedad de técnicas que básicamente se diferencian tanto en los datos experimentales que se usan de referencia como en el peso asignado a los distintos parámetros de ajuste (Friswell y Mottershead, 1995). En este estudio se usan los parámetros modales para el ajuste, y se definen pesos diferentes para las frecuencias naturales y para las componentes de las formas modales a los efectos de analizar la sensibilidad de los valores ajustados para los parámetros mecánicos.

### Modelos de 4 GL

El comportamiento estructural del pórtico ensayado que se muestra en la Fig. 1 responde a la configuración típica de un edificio con pisos rígidos y masas concentradas, que para la hipótesis de base rígida se representa a través de las siguientes matrices de rigidez y masa:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Este modelo de 4 GL puede considerarse como una primera aproximación, aunque posee ciertas limitaciones para reproducir la relación entre las frecuencias naturales identificadas en forma experimental. En efecto, el planteo del determinante del problema de autovalores proporciona las frecuencias naturales del modelo numérico. Asumiendo una rigidez  $k$  y una masa  $m$  idénticas para todos los pisos del pórtico, lo cual es una hipótesis razonable para muchos casos reales, y normalizando las frecuencias naturales con estos parámetros, se obtiene:

$$\Omega^8 - 7\Omega^6 + 15\Omega^4 - 10\Omega^2 + 1 = 0 \quad (10)$$

donde  $\Omega = \omega \sqrt{m/k}$

Las raíces de esta ecuación característica pueden volver a normalizarse respecto a la frecuencia del cuarto modo

identificado, considerando que resultaría el menos afectado frente a una eventual flexibilidad rotacional de la base:

$$\Omega_r^{4GL} = [0.347 \quad 1.000 \quad 1.532 \quad 1.879] \rightarrow \bar{\Omega}_r^{4GL} = [0.185 \quad 0.532 \quad 0.815 \quad 1.000] \quad (11)$$

La razón por la cual esta flexibilidad afecta menos a los modos superiores es que las fuerzas en cada piso poseen más cambios de signo a medida que aumenta el orden del modo, reduciendo el momento de vuelco que actúa sobre el resorte rotacional. La comparación de las frecuencias naturales del modelo numérico con las experimentales indicadas en (5) permite obtener las siguientes diferencias porcentuales:

$$\varepsilon_r^{4GL} = [13.6\% \quad 4.5\% \quad 2.3\% \quad 0.0\%] \quad (12)$$

El error resulta francamente decreciente para modos de orden creciente y es importante para el modo fundamental, lo cual refleja la importancia de incorporar la flexibilidad de la base si se quisiera mejorar la capacidad del modelo para reproducir con mayor precisión la distribución de las frecuencias naturales identificadas experimentalmente.

El ajuste de los coeficientes de las matrices físicas en (8) y (9) se realiza utilizando las frecuencias naturales y las formas modales dadas en la Tabla 1, en base a una norma de error que involucra la diferencia entre los parámetros modales experimentales y numéricos. Las variaciones de los parámetros modales respecto a cambios pequeños de los parámetros mecánicos de ajuste fueron obtenidas por Fox y Kapoor (1968), y se conocen como sensibilidades propias. Estas expresiones involucran las formas modales  $\{\phi_r^A\}$  y las frecuencias naturales  $\omega_r^A$  del modelo, que representan los parámetros modales “analíticos” del modo genérico  $r$ :

$$\frac{\partial(\omega_r^A)^2}{\partial p_i} = \{\phi_r^A\}^T \left( \frac{\partial[K^A]}{\partial p_i} - (\omega_r^A)^2 \frac{\partial[M^A]}{\partial p_i} \right) \{\phi_r^A\} \quad (13)$$

$$\frac{\partial\{\phi_r^A\}}{\partial p_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^N \left( \frac{1}{(\omega_r^A)^2 - (\omega_j^A)^2} \cdot \{\phi_j^A\}^T \left[ \frac{\partial[K^A]}{\partial p_i} - (\omega_r^A)^2 \frac{\partial[M^A]}{\partial p_i} \right] \{\phi_r^A\} \right) \{\phi_j^A\} - \frac{1}{2} \left( \{\phi_r^A\}^T \frac{\partial[M^A]}{\partial p_i} \{\phi_r^A\} \right) \{\phi_r^A\} \quad (14)$$

Los  $p$ -valores  $p_i$  usados en estas expresiones representan variaciones relativas de los parámetros mecánicos de ajuste que permite obtener un sistema de ecuaciones balanceado y numéricamente bien condicionado. De todos modos, dado que las ec. (13) y (14) sólo son válidas para variaciones pequeñas de los parámetros mecánicos, se torna necesario realizar el ajuste en forma iterativa limitando las tasas de cambio en cada paso de iteración.

Los parámetros mecánicos ajustados tomando rigideces y masas iguales para todos los pisos se presentan en la Tabla 2. Una observación importante para este caso es que la 2° componente del 2° modo resulta indefectiblemente nula para el modelo con todos los parámetros iguales, por lo que esta componente modal debe excluirse del proceso de ajuste para evitar problemas numéricos. Los valores de arranque fueron definidos en función de los valores de las matrices en (6) y (7). En función de la forma teórica de las matrices físicas en (8) y (9), se adopta un valor de arranque para  $k$  próximo al promedio de los valores absolutos en negrita en (6), tomando la mitad para los coeficientes  $K_{22}$ ,  $K_{33}$  y  $K_{44}$ .

Por otra parte, el valor de arranque de  $m$  se toma próximo al promedio de los valores en negrita en (7). La última columna de la tabla presenta los valores ajustados dando a las frecuencias naturales el cuádruple de peso respecto a las componentes modales, lo cual se consigue multiplicando por 4 a las ecuaciones vinculadas a los errores de estas frecuencias en el sistema de ajuste. Tal estrategia produce que los parámetros ajustados resulten en este caso un 5% mayor respecto a los que se obtienen con igual peso para todos los parámetros modales. El error reportado en esta tabla (y las siguientes) se obtiene como el valor porcentual de la raíz cuadrada del error cuadrático de los parámetros modales, normalizados con los valores experimentales.

La Tabla 3 muestra los parámetros mecánicos ajustados asumiendo elementos diferentes para las matrices en (8) y (9), donde se observan diferentes patrones de distribución de rigideces y masas en función del peso asignado a los diferentes parámetros modales. Tal como podría esperarse, el error resulta menor si se permite que los parámetros de rigidez y masa sean distintos. En principio no habría razón que justifique ajustar valores diferentes para los parámetros mecánicos de pisos con idéntica geometría. Las diferencias podrían atribuirse a cierta flexibilidad en el empotramiento de las columnas respecto de las placas de los pisos, la que no es igual para todas las uniones, y a cierta compensación producida por el ajuste para concentrar masas distribuidas de la estructura sobre los grados de libertad definidos para el modelo, entre otras razones.

TABLA 2: MODELO DE 4 GL CON TODOS LOS ELEMENTOS IGUALES

Parámetro	Valores de arranque	V. ajustados c/ igual peso	V. ajustados c/ distinto peso
$k$ [N/m]	25000	23587	24801
$m$ [kg]	3.100	2.988	3.125
Error [%]	–	7.25	10.00

TABLA 3: MODELO DE 4GL CON TODOS LOS ELEMENTOS DIFERENTES

Parámetro	Valores de arranque	V. ajustados c/ igual peso	V. ajustados c/ distinto peso
$k_1$ [N/m]	24000	25447	27774
$k_2$ [N/m]	25000	25965	28600
$k_3$ [N/m]	26000	26783	26358
$k_4$ [N/m]	26000	20821	17483
$m_1$ [kg]	2.904	3.047	3.226
$m_2$ [kg]	2.884	3.119	3.295
$m_3$ [kg]	3.245	3.217	3.196
$m_4$ [kg]	3.338	3.123	2.825
Error [%]	–	4.52	3.43

### Modelos de 5 GL

Un modelo más representativo de la estructura ensayada se obtiene incorporando al modelo anterior una flexibilidad rotacional para la base, considerando para las matrices de rigidez y masa la siguiente forma:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & k_1 h_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & (k_2 h_2 - k_1 h_1) \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & (k_3 h_3 - k_2 h_2) \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & (k_4 h_4 - k_3 h_3) \\ k_1 h_1 & (k_2 h_2 - k_1 h_1) & (k_3 h_3 - k_2 h_2) & (k_4 h_4 - k_3 h_3) & k_R \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde  $k_R = k_1 h_1^2 + k_2 h_2^2 + k_3 h_3^2 + k_4 h_4^2 + k_r$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_r \end{bmatrix} \quad (16)$$

La matriz de rigidez indicada en (15) ha sido obtenida invirtiendo la matriz de flexibilidad correspondiente. Los coeficientes de la matriz de rigidez asociados al grado de libertad rotacional agregado dependen de la altura entre los pisos. El determinante del problema de autovalores permite obtener las frecuencias naturales del modelo numérico. Con el objeto de realizar una estimación preliminar de la capacidad del modelo de 5 GL para captar la distribución de las frecuencias experimentales, se consideran todas las rigideces traslacionales iguales a  $k$ , todas las masas traslacionales iguales a  $m$ , y todas las alturas de los pisos iguales a  $h$ . Los parámetros rotacionales se definen en base a las dimensiones reales de la estructura. De esta manera, la masa rotacional  $m_r$ , se obtiene como:

$$m_r = \sum \frac{ml^2}{12} \approx n \frac{ml^2}{12} = \frac{mh^2}{6} \quad (17)$$

donde  $n = 4.5$  y  $l = \frac{2}{3}h$

El valor  $n = 4.5$  representa la suma de los 4 pisos más la contribución de la masa rotacional del enrejado de la base, que se toma igual a otro medio piso adicional. El parámetro  $m_r$  involucra la masa rotacional del pórtico completo, dado que el giro de la base produce indefectiblemente el mismo giro para toda la estructura asumiendo que las columnas son inextensibles. La longitud  $l$  de las placas en la dirección ensayada resulta igual a  $2/3$  de  $h$ .

Por otro lado, la rigidez rotacional  $k_R$  se expresa como

$$k_R \approx \beta kh^2 \quad (18)$$

donde  $\beta = 15$

El producto  $kh^2$  surge naturalmente durante la obtención analítica de  $k_R$  (ver ec. (15)), mientras que el valor  $\beta = 15$  produce una buena correspondencia con las frecuencias naturales determinadas experimentalmente. Cabe acotar que estos valores de  $n$  y  $\beta$  fueron definidos tentativamente para adoptar los valores de arranque que se utilizan durante el ajuste de los modelos de 5 GL.

De esta forma, surge la siguiente ecuación característica:

$$\Omega^{10} - 97\Omega^8 + 639\Omega^6 - 1324\Omega^4 + 841\Omega^2 - 66 = 0 \quad (19)$$

donde  $\Omega = \omega\sqrt{m/k}$

Las primeras 4 raíces de esta ecuación característica se normalizan nuevamente respecto a la frecuencia del cuarto modo identificado por resultar el menos afectado frente a la flexibilidad rotacional de la base:

$$\Omega_r^{5GL} = [0.302 \quad 0.989 \quad 1.528 \quad 1.878] \rightarrow \bar{\Omega}_r^{5GL} = [0.160 \quad 0.526 \quad 0.814 \quad 1.000] \quad (20)$$

La comparación de las frecuencias del modelo numérico de 5 GL con las experimentales mostradas en (5) permite determinar las siguientes diferencias porcentuales:

$$\varepsilon_r^{5GL} = [-1.3\% \quad 3.4\% \quad 2.1\% \quad 0.0\%] \quad (21)$$

Estos errores resultan menores a los obtenidos en (12), e incluso se reducen admitiendo rigideces y masas diferentes para cada piso.

Los parámetros mecánicos ajustados asumiendo valores iguales para las rigideces y masas traslacionales en (15) y (16) se presentan en la Tabla 4. Al igual que como se hizo para los modelos de 4 GL, la última columna contiene los parámetros que se obtienen asignando a las frecuencias naturales el cuádruple del peso respecto a las componentes de las formas modales. La altura entre los baricentros de pisos consecutivos es un parámetro medido que resulta  $h = 0.240$  m. Se observa que los parámetros traslacionales son estables en relación al peso adoptado para los parámetros modales, en tanto que los parámetros rotacionales acusan una marcada sensibilidad frente a estos pesos presentando variaciones que superan el 50%.

Los parámetros mecánicos ajustados asumiendo valores diferentes para las matrices en (15) y (16) se muestran en la Tabla 5. En este caso se observan errores porcentuales menores, así como también una menor sensibilidad frente al peso asignado a los parámetros modales durante el ajuste de los parámetros mecánicos.

**TABLA 4:** RESULTADOS FINALES Y REDUCCIÓN RELATIVA DE LOS ERRORES (PROMEDIOS SOBRE 10 PARTICIONES DE ENTRENAMIENTO)

Parámetro	Valores de arranque	V. ajustados c/ igual peso	V. ajustados peso distinto
$k$ [N/m]	25000	24190	24499
$k_r$ [N.m]	16000	32080	20873
$m$ [kg]	3.100	2.955	2.935
$m_r$ [kg.m <sup>2</sup> ]	0.0300	0.0150	0.0230
Error [%]	–	6.82	4.62

**TABLA 5:** MODELO DE 5GL CON TODOS LOS ELEMENTOS DIFERENTES

Parámetro	Valores de arranque	V. ajustados c/ igual peso	V. ajustados peso distinto
k1 [N/m]	24000	25184	25196
k2 [N/m]	25000	26772	27996
k3 [N/m]	26000	30138	29321
k4 [N/m]	26000	22923	22426
kr [N.m]	16000	19989	20107
m1 [kg]	2.904	2.802	2.743
m2 [kg]	2.884	2.996	3.125
m3 [kg]	3.245	3.342	3.301
m4 [kg]	3.338	3.334	3.300
mr [kg.m <sup>2</sup> ]	0.0300	0.0250	0.0222
Error [%]	–	2.52	1.87

### Comparación de parámetros modales experimentales y obtenidos con los modelos numéricos ajustados

Una vez ajustados los distintos modelos se procede a la obtención numérica de parámetros modales resolviendo los correspondientes problemas de autovalores. Esto permite hacer diferentes tipos de comparaciones con los parámetros modales experimentales. En el caso de las formas modales, la comparación se realiza usando el parámetro denominado Diferencia Modal Normalizada (DMN) que se determina de la siguiente forma:

$$DMN(\{\phi_i^X\}, \{\phi_j^A\}) = \sqrt{\frac{1 - MAC(\{\phi_i^X\}, \{\phi_j^A\})}{MAC(\{\phi_i^X\}, \{\phi_j^A\})}} \quad (22)$$

donde

$$MAC(\{\phi_i^x\}, \{\phi_j^A\}) = \frac{|\{\phi_i^x\}^H \{\phi_j^A\}|^2}{(\{\phi_i^x\}^H \{\phi_i^x\})(\{\phi_j^A\}^H \{\phi_j^A\})} \quad (23)$$

En la definición de estos parámetros,  $\{\phi_i^x\}$  representa la forma modal experimental del modo  $i$ , mientras que  $\{\phi_j^A\}$  representa la forma modal analítico-numérica del modo  $j$ .

Las Tablas 6 a 13 presentan una comparación de los parámetros modales de los 4 modos identificados en forma experimental con los obtenidos con los modelos numéricos. Las columnas que contienen estos últimos poseen pares de valores en función al peso dado a los distintos parámetros modales: el primer valor corresponde a igual peso, en tanto que para el segundo valor se toma el cuádruple del peso para las frecuencias naturales respecto a las componentes de las formas modales. El parámetro  $\Delta f_r$  es el error entre las frecuencias experimentales y numéricas, mientras que  $\Delta \phi_r$  es el error entre las formas modales calculado con la DMN.

**TABLA 6:** COMPARACIÓN DE PARÁMETROS MODALES DEL PÓRTICO ORIGINAL (MODO 1, MODELO 4 GL)

	Experimental	Parámetros iguales	Parámetros diferentes
$f_1$ [Hz]	4.527	4.911 / 4.929	4.820 / 4.558
$\phi_1$ [kg <sup>-1/2</sup> ]	0.370	0.380 / 0.372	0.364 / 0.349
	0.331	0.334 / 0.327	0.324 / 0.316
	0.242	0.248 / 0.243	0.249 / 0.254
	0.136	0.132 / 0.129	0.149 / 0.161
$\Delta f_1$ [%]	-	8.5 / 8.9	6.5 / 0.7
$\Delta \phi_1$ [%]	-	1.3 / 1.3	3.1 / 6.5

**TABLA 7:** COMPARACIÓN DE PARÁMETROS MODALES DEL PÓRTICO ORIGINAL (MODO 1, MODELO 5 GL)

	Experimental	Parámetros iguales	Parámetros diferentes
$f_1$ [Hz]	4.527	4.648 / 4.525	4.555 / 4.532
$\phi_1$ [kg <sup>-1/2</sup> ]	0.370	0.389 / 0.393	0.385 / 0.382
	0.331	0.334 / 0.334	0.328 / 0.327
	0.242	0.244 / 0.242	0.242 / 0.245
	0.136	0.129 / 0.128	0.142 / 0.144
$\Delta f_1$ [%]	-	2.7 / 0.0	0.6 / 0.1
$\Delta \phi_1$ [%]	-	2.6 / 3.3	2.3 / 2.2

**TABLA 8:** COMPARACIÓN DE PARÁMETROS MODALES DEL PÓRTICO ORIGINAL (MODO 2, MODELO 4 GL)

	Experimental	Parámetros iguales	Parámetros diferentes
$f_2$ [Hz]	14.18	14.14 / 14.19	13.95 / 14.15
$\phi_2$ [kg <sup>-1/2</sup> ]	0.349	0.334 / 0.327	0.336 / 0.332
	0.027	0.000 / 0.000	0.027 / 0.027
	-0.288	-0.334 / -0.327	-0.301 / -0.294
	-0.326	-0.334 / -0.327	-0.341 / -0.360
$\Delta f_2$ [%]	-	-0.3 / 0.1	-1.6 / -0.2
$\Delta \phi_2$ [%]	-	9.2 / 9.2	3.9 / 6.3

**TABLA 9:** COMPARACIÓN DE PARÁMETROS MODALES DEL PÓRTICO ORIGINAL (MODO 2, MODELO 5 GL)

	Experimental	Parámetros iguales	Parámetros diferentes
$f_2$ [Hz]	14.18	14.32 / 14.42	13.98 / 14.13
$\phi_2$ [kg <sup>-1/2</sup> ]	0.349	0.332 / 0.331	0.345 / 0.352
	0.027	-0.008 / -0.012	0.027 / 0.027
	-0.288	-0.340 / -0.343	-0.297 / -0.292
	-0.326	-0.336 / -0.337	-0.333 / -0.338
$\Delta f_2$ [%]	-	1.0 / 1.7	-1.4 / -0.3
$\Delta \phi_2$ [%]	-	10.8 / 11.5	1.7 / 1.2

**TABLA 10:** COMPARACIÓN DE PARÁMETROS MODALES DEL PÓRTICO ORIGINAL (MODO 3, MODELO 4 GL)

	Experimental	Parámetros iguales	Parámetros diferentes
$f_3$ [Hz]	22.18	21.66 / 21.74	21.90 / 22.17
$\phi_3$ [kg <sup>-1/2</sup> ]	0.258	0.248 / 0.243	0.254 / 0.247
	-0.338	-0.334 / -0.327	-0.322 / -0.310
	-0.152	-0.132 / -0.129	-0.154 / -0.158
	0.351	0.380 / 0.372	0.359 / 0.379
$\Delta f_3$ [%]	-	-2.3 / -2.0	-1.3 / 0.0
$\Delta \phi_3$ [%]	-	6.3 / 6.3	3.1 / 7.2

**TABLA 11:** COMPARACIÓN DE PARÁMETROS MODALES DEL PÓRTICO ORIGINAL (MODO 3, MODELO 5 GL)

	Experimental	Parámetros iguales	Parámetros diferentes
$f_3$ [Hz]	22.18	22.03 / 22.23	22.49 / 22.32
$\phi_3$ [kg <sup>-1/2</sup> ]	0.258	0.246 / 0.245	0.266 / 0.274
	-0.338	-0.338 / -0.341	-0.332 / -0.321
	-0.152	-0.130 / -0.130	-0.153 / -0.153
	0.351	0.383 / 0.385	0.344 / 0.346
$\Delta f_3$ [%]	-	-0.7 / 0.2	1.4 / 0.6
$\Delta \phi_3$ [%]	-	6.8 / 7.1	2.0 / 4.1

**TABLA 12:** COMPARACIÓN DE PARÁMETROS MODALES DEL PÓRTICO ORIGINAL (MODO 4, MODELO 4 GL)

	Experimental	Parámetros iguales	Parámetros diferentes
$f_4$ [Hz]	27.84	26.58 / 26.67	27.08 / 27.70
$\phi_4$ [kg <sup>-1/2</sup> ]	0.138	0.132 / 0.129	0.135 / 0.130
	-0.350	-0.334 / -0.327	-0.334 / -0.327
	0.379	0.380 / 0.372	0.367 / 0.371
	-0.228	-0.248 / -0.243	-0.230 / -0.234
$\Delta f_4$ [%]	-	-4.5 / -4.2	-2.7 / -0.5
$\Delta \phi_4$ [%]	-	4.5 / 4.5	1.9 / 3.3

**TABLA 13:** COMPARACIÓN DE PARÁMETROS MODALES DEL PÓRTICO ORIGINAL (MODO 4, MODELO 5 GL)

	Experimental	Parámetros iguales	Parámetros diferentes
$f_4$ [Hz]	27.84	27.06 / 27.32	27.67 / 27.73
$\phi_4$ [kg <sup>-1/2</sup> ]	0.138	0.131 / 0.130	0.138 / 0.139
	-0.350	-0.335 / -0.336	-0.340 / -0.331
	0.379	0.383 / 0.384	0.359 / 0.367
	-0.228	-0.250 / -0.251	-0.225 / -0.221
$\Delta f_4$ [%]	-	-2.8 / -1.9	-0.6 / -0.4
$\Delta \phi_4$ [%]	-	4.8 / 4.9	1.9 / 1.6

Se observa que para algunos modos aumenta el error en las frecuencias considerando mayor peso para las mismas. Esto se explica por las disminuciones más pronunciadas de este error en los restantes modos que reducen la norma global. En términos generales, se produce una reducción de las diferencias porcentuales adoptando valores diferentes para los parámetros mecánicos de cada piso, e incorporando la flexibilidad rotacional para la base. El hecho de que los parámetros ajustados dependan del peso relativo dado a las frecuencias naturales y a las componentes modales puede indicar que el ajuste resulta demasiado forzado, tal como ocurre para el modelo de 4 GL con parámetros diferentes y también para el modelo de 5 GL con parámetros iguales. Caso contrario, puede deberse a que el modelo posee poca libertad de ajuste, como ocurre con el modelo de 4 GL con parámetros iguales, o que se alcanza un ajuste óptimo como ocurre para el modelo de 5 GL con parámetros diferentes.

**Estudio paramétrico de la influencia de la flexibilidad rotacional de la base del pórtico**

En el caso de contar con una estimación de la rigidez rotacional de la base de un pórtico regular, puede resultar de interés analizar su influencia sobre las frecuencias naturales para definir si debería considerarse esta rotación como grado de libertad del modelo numérico. A tal efecto, en esta sección se presenta un estudio paramétrico de las frecuencias naturales de una viga de corte puro en voladizo con flexibilidad rotacional en la base, la cual representa en forma adecuada al tipo de pórtico analizado en este trabajo, aunque reconociendo que éste debería poseer un número suficiente de pisos como para que el modelo continuo sea representativo de la versión real discreta.

La solución analítica de la viga de corte en voladizo con restricción al giro se encuentra en el trabajo de Aristizabal-Ochoa (2007). En la Fig. 6 se muestra un esquema de la estructura analizada, junto con la ecuación característica y una expresión genérica de las formas modales.

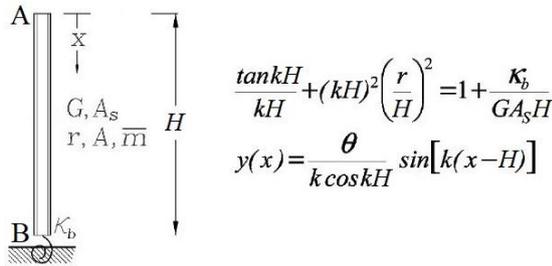


Fig. 6: Viga de corte en voladizo con restricción al giro

Los parámetros en esta figura son los siguientes:

- $H$  altura del voladizo
- $\bar{m}$  masa por unidad de longitud
- $G$  módulo de corte del material
- $A_s$  área de corte efectiva
- $\kappa_b$  rigidez rotacional de la base
- $r = \sqrt{I/A}$  radio de giro de la sección
- $k = \omega \sqrt{\bar{m}/GA_s}$  número de onda

Los parámetros equivalentes para un pórtico regular se pueden calcular en función de sus parámetros discretos:

- $n$  número de pisos
- $h$  altura de cada piso
- $l$  largo de cada piso
- $k_p$  rigidez de cada piso
- $m_p$  masa de cada piso
- $H = nh$  altura total del pórtico
- $\bar{m} = m_p/h$  masa por unidad de longitud
- $GA_s = k_p h$  rigidez cortante equivalente
- $r = l/\sqrt{12}$  radio de giro de las masas

La frecuencia fundamental del voladizo empotrado en la base responde a la siguiente fórmula:

$$\omega_s = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{GA_s}{\bar{m}H^2}} \quad (24)$$

La variación de la frecuencia fundamental para pórticos con base flexible, normalizada con la que se obtiene para un voladizo de corte puro empotrado en la base, se muestra en la Fig. 7 para  $r = 0$ . Las curvas para modelos discretos de 4, 10 y 50 pisos se obtienen usando modelos numéricos de pórticos. A medida que aumenta el número de pisos, las curvas tienden a la solución continua correspondiente a la ecuación diferencial. La rigidez rotacional de la base se normaliza con la rigidez cortante equivalente, que para el pórtico analizado toma un valor aproximado igual a:

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_b &= \frac{\kappa_b}{GA_s H} = \frac{\kappa_b}{n k_p h^2} \\ &= \frac{20000}{4 \cdot 25000 \cdot 0.240^2} = 3.472 \end{aligned} \quad (25)$$

El radio de giro de las masas para el pórtico analizado se normaliza con su altura total y, tal como puede apreciarse en las próximas figuras, toma un valor relativamente bajo:

$$\bar{r} = \frac{r}{H} = \frac{l}{\sqrt{12}H} = \frac{0.160}{\sqrt{12} \cdot 0.960} = 0.048 \quad (26)$$

El valor adimensional de la frecuencia fundamental para el pórtico analizado se indica con un círculo en la Fig. 7. Si bien el pórtico analizado no posee un número suficiente de pisos para que la solución analítica resulte representativa, dicha solución describe adecuadamente la influencia de la flexibilidad rotacional. En efecto, si se reescalan las curvas con la frecuencia fundamental del modelo discreto usando el número real de pisos, en lugar de la frecuencia analítica en (24), las mismas resultan prácticamente coincidentes.

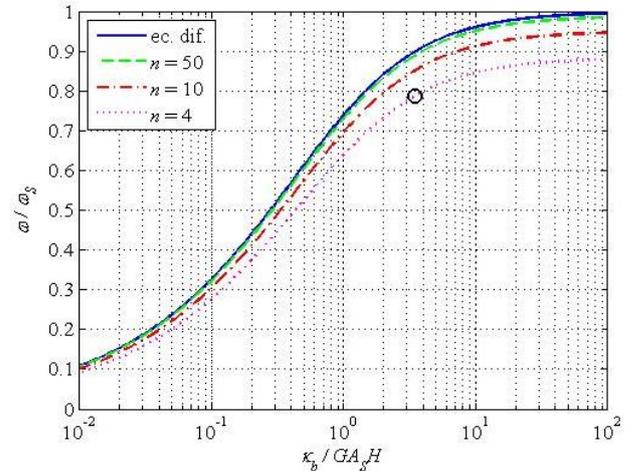


Fig. 7: Frecuencia fundamental de pórticos regulares

Las frecuencias correspondientes a modos superiores del voladizo empotrado se obtienen multiplicando la expresión en (24) por 3, 5, 7, etc. Las Figuras 8 a 11 presentan las frecuencias naturales adimensionalizadas de los modos 1 a 4, respectivamente, para distintos valores del radio de giro normalizado. Los círculos representan las frecuencias que se obtienen con la rigidez cortante del pórtico analizado, mostrando que a los fines prácticos su radio de giro puede asumirse nulo. Se observa además que la influencia de la flexibilidad rotacional es relevante para la frecuencia del 1º modo (se reduce 10% respecto a la base empotrada), es muy baja para el 2º modo (se reduce 1%), y es despreciable a partir del 3º modo (con reducciones menores al 0.4%).

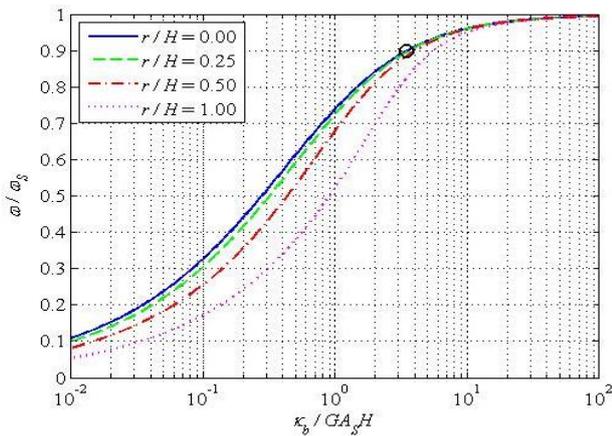


Fig. 8: Frecuencia natural del modo 1 para viga de corte en voladizo

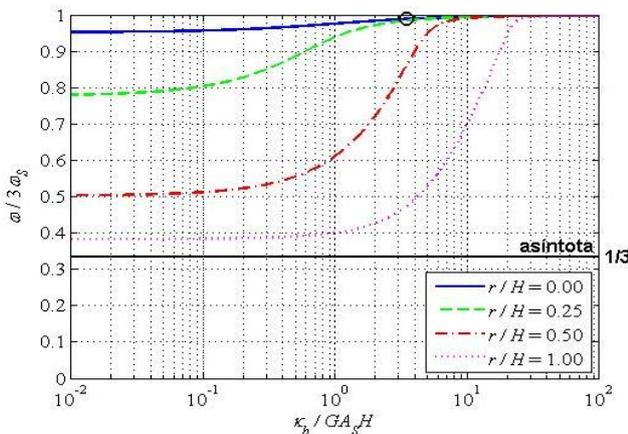


Fig. 9: Frecuencia natural del modo 2 para viga de corte en voladizo

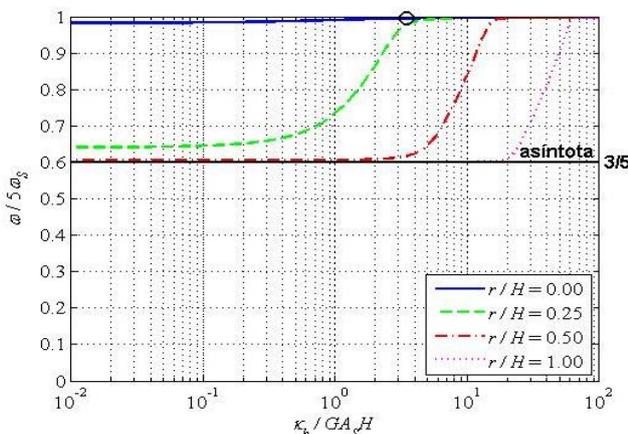


Fig. 10: Frecuencia natural del modo 3 para viga de corte en voladizo

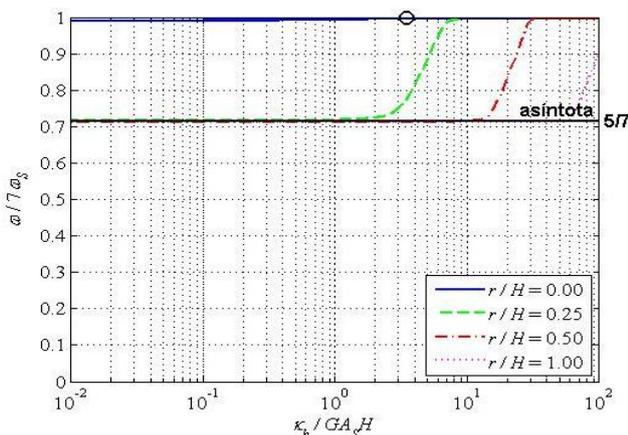


Fig. 11: Frecuencia natural del modo 4 para viga de corte en voladizo

Las Figuras 9 a 11 indican los valores asintóticos que representan límites inferiores que alcanzan las frecuencias naturales de los modos considerados cuando la rigidez rotacional adimensional tiende a cero. Estos valores surgen del análisis de la forma de la ecuación frecuencia, lo cual escapa del alcance del presente trabajo.

### PREDICCIONES REALIZADAS CON EL MODELO DE MEJOR AJUSTE

En esta sección se muestran las predicciones tanto de los parámetros modales del pórtico con el agregado del absorbedor de masa sintonizada, como de la respuesta dinámica del pórtico sometido a un movimiento armónico horizontal de la base. En ambos casos, se comparan los resultados experimentales para ambas condiciones con las predicciones obtenidas utilizando el modelo 5 GL con todos los parámetros diferentes que fue ajustado dando mayor peso a las frecuencias naturales.

En el caso del pórtico con el agregado del amortiguador de masa sintonizada, siguiendo el criterio de modificación estructural sólo se ajustaron los parámetros del absorbedor ensamblados al modelo elegido, dado que los restantes parámetros ya han sido optimizados. Los valores ajustados para la masa y la rigidez de dicho absorbedor resultan  $m_a = 1.204$  kg y  $k_a = 1249$  N/m, respectivamente. No se incorpora amortiguamiento adicional para el absorbedor por resultar bajo y quedar adecuadamente representado con una extensión del modelo histerético. Por lo tanto, la frecuencia natural del absorbedor resulta:

$$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_a}{m_a}} = 5.126 \text{ Hz} \quad (27)$$

Dado que esta frecuencia resulta un 13% mayor que la frecuencia del modo fundamental del pórtico original, la efectividad del absorbedor podría optimizarse a través de una mejor sintonización. Las frecuencias naturales de los modos 1A y 1B, que resultan de la bifurcación del modo fundamental por la presencia del absorbedor, resultan un 14% menor y un 31% mayor, respectivamente, respecto a la frecuencia fundamental del sistema original.

Los parámetros modales experimentales y analíticos se comparan en las Tablas 14 y 15. Puede observarse que la predicción de las frecuencias naturales resulta excelente, con diferencias que no superan el 1%. En relación a las formas modales, los errores porcentuales en términos de DMN se encuentran entre 2% y 4%.

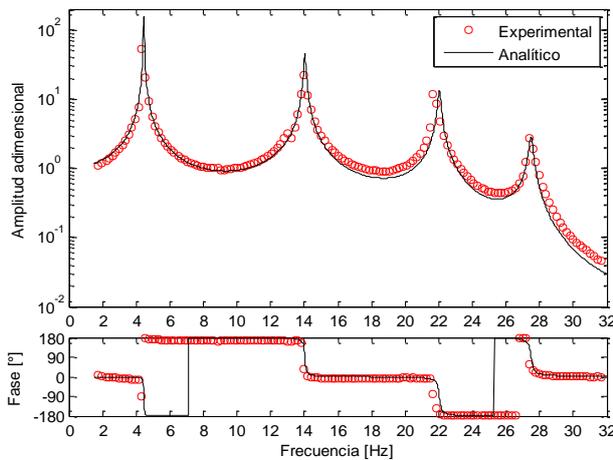
TABLA 14: COMPARACIÓN DE PARÁMETROS MODALES DEL PÓRTICO MODIFICADO (MODOS 1A Y 1B)

	Modo 1A		Modo 1B	
	Exper.	Modelo	Exper.	Modelo
$f_r$ [Hz]	3.894	3.853	5.920	5.946
$\phi_r$	0.300	0.285	0.225	0.239
$[kg^{-1/2}]$	0.238	0.234	0.215	0.231
	0.179	0.171	0.186	0.186
	0.096	0.099	0.114	0.114
$\Delta f$ [%]	-	-1.0	-	0.4
$\Delta \phi$ [%]	-	2.2	-	3.0

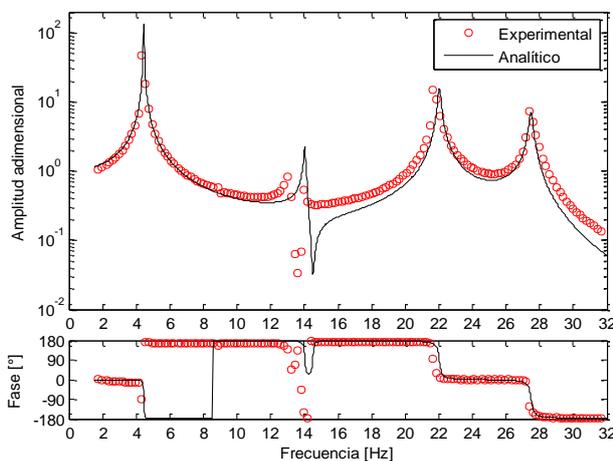
**TABLA 15:** COMPARACIÓN DE PARÁMETROS MODALES DEL PÓRTICO MODIFICADO (MODOS 2 A 4)

	Modo 2		Modo 3		Modo 4	
	Exper.	Modelo	Exper.	Modelo	Exper.	Modelo
$f_r$ [Hz]	14.22	14.27	22.15	22.37	27.80	27.74
$\phi$	0.355	0.357	0.269	0.280	0.137	0.142
[kg <sup>-1/2</sup> ]	0.028	0.039	-0.325	-0.317	-0.336	-0.332
	-0.300	-0.285	-0.162	-0.156	0.395	0.366
	-0.336	-0.337	0.362	0.344	-0.234	-0.220
$\Delta f$ [%]	-	0.4	-	1.0	-	-0.2
$\Delta \phi$ [%]	-	3.2	-	3.5	-	3.6

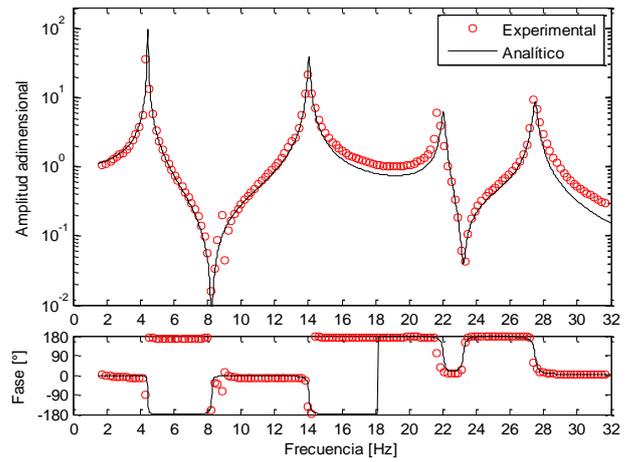
Las Figuras 12 a 15 presentan una comparación de los desplazamientos relativos de todos los pisos respecto al desplazamiento armónico impuesto en la base ejecutando un barrido en frecuencias entre 2 Hz y 32 Hz. El grado de correspondencia resulta notable. Por otra parte, se observa tanto una leve reducción de las frecuencias de los picos para los modos superiores como un aumento apreciable del amortiguamiento ( $\eta \approx 0.8\%$ ), lo cual se atribuye a algún grado de no-linealidad mecánica de la estructura debido a las mayores amplitudes de la respuesta para este ensayo. En efecto, se estima que la respuesta en régimen permanente produce desplazamientos un orden de magnitud mayores a los producidos durante los ensayos impulsivos, y dado que las amplitudes no decaen se genera una mayor contribución de las fuerzas disipativas.



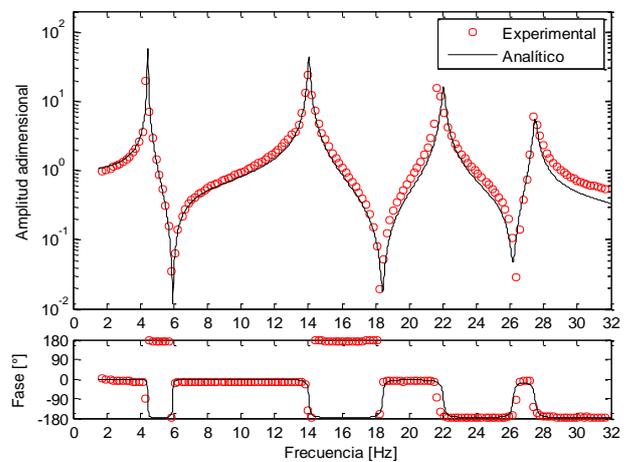
**Fig. 12:** Comparación del desplazamiento relativo del piso 1 para movimiento armónico de base



**Fig. 13:** Comparación del desplazamiento relativo del piso 2 para movimiento armónico de base



**Fig. 14:** Comparación del desplazamiento relativo del piso 3 para movimiento armónico de base



**Fig. 15:** Comparación del desplazamiento relativo del piso 4 para movimiento armónico de base

## CONCLUSIONES

Los parámetros modales de un pórtico regular obtenidos mediante técnicas experimentales fueron utilizados para el ajuste de los parámetros mecánicos de modelos numéricos con distintos grados de complejidad. Especial atención fue dada a la conveniencia de incluir la flexibilidad rotacional de la base. El estudio paramétrico realizado demuestra que dicha flexibilidad produce una reducción del 10% para la frecuencia fundamental del caso analizado. Los parámetros modales experimentales son luego comparados con los que se obtienen resolviendo el problema de autovalores para los modelos ajustados mostrando una buena correspondencia, especialmente para el modelo con flexibilidad rotacional de la base y parámetros mecánicos diferentes para cada piso.

Los modelos numéricos con mayor libertad de ajuste, con parámetros de rigidez y masa diferentes para cada piso de este pórtico regular, reproducen mejor las propiedades modales experimentales. La dispersión de los valores de los parámetros mecánicos ajustados para los distintos pisos resulta pequeña y razonable para el caso analizado, aunque una excesiva libertad de ajuste para casos más complejos podría atentar contra el sentido físico del modelo completo. Por ejemplo, debe considerarse que de no definir en forma correcta la conectividad de los elementos estructurales o la distribución de las masas, estos defectos podrían en alguna

medida compensarse a través de valores poco realistas de los parámetros mecánicos obtenidos por medio del ajuste.

La robustez de los parámetros mecánicos ajustados para un modelo determinado ha sido analizada tomando pesos diferentes para las frecuencias naturales y las componentes modales en la definición de la norma de error durante el ajuste. Pudo constatar que una marcada dependencia de los valores ajustados respecto al peso dado a los parámetros modales constituye un síntoma de un ajuste forzado debido a la baja capacidad del modelo para reproducir la respuesta medida. En caso contrario, puede indicar que el modelo es demasiado restrictivo, o que efectivamente se ha alcanzado un ajuste satisfactorio y confiable.

El modelo de pórtico con pisos rígidos, columnas biempotradas y base fija constituye una apropiada primera aproximación para reproducir el comportamiento dinámico del pórtico, a tal punto que resulta posible obtener matrices físicas que responden adecuadamente a esta configuración usando directamente parámetros modales experimentales. Además, en el caso que se desee mejorar la capacidad del modelo para reproducir su comportamiento dinámico, los parámetros de base fija pueden tomarse como valores de arranque para el ajuste de modelos de mayor complejidad que involucren la flexibilidad rotacional de la base.

El estudio paramétrico desarrollado sobre la influencia de la flexibilidad rotacional de la base sobre las frecuencias naturales constituye un marco de referencia para decidir si debería considerarse al giro de la base del pórtico como un grado de libertad adicional. Los modelos propuestos para el pórtico analizado resultan notablemente mejorados cuando se considera a este giro como grado de libertad.

El pórtico original fue luego modificado agregando un amortiguador de masa sintonizada unido al piso superior. El modelo numérico de mejor ajuste para la configuración original se completó agregando los parámetros mecánicos del amortiguador, cuyos valores fueron ajustados con los parámetros modales identificados para el pórtico con esta modificación estructural, manteniendo los valores de los parámetros mecánicos ya ajustados. La comparación de los parámetros modales experimentales con los que surgen del modelo calibrado muestra una correspondencia notable, con diferencias en las frecuencias naturales que no superan el 1%, y con diferencias modales normalizadas inferiores al 4%.

El ajuste de los parámetros del amortiguador de masa sintonizada del pórtico modificado permitió detectar un pequeño defecto de sintonización durante la condición de ensayo entre la frecuencia fundamental del pórtico original y este absorbedor de vibraciones. La varilla de sujeción resultó ser demasiado rígida, lo que eventualmente podría haberse modificado durante la correspondiente campaña de medición dejando esta varilla ligeramente más larga.

La predicción de la respuesta dinámica del pórtico original usando el modelo numérico de mejor ajuste para el caso del movimiento armónico de la base fue notoriamente satisfactoria, e incluso pudo detectarse una leve reducción de las frecuencias de los modos superiores y un pequeño aumento del amortiguamiento que se atribuyen a posibles efectos de no-linealidad mecánica del sistema estructural.

## REFERENCIAS

- [1] Aristizabal-Ochoa, J.D. (2007), "Static and dynamic stability of uniform shear beam-columns under generalized boundary conditions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 307, pp. 69–88.
- [2] Brincker R. y Ventura C.E. (2015), *Introduction to Operational Modal Analysis*, John Wiley and Sons.
- [3] Dobson B. (1984), "Modal Analysis Using Dynamic Stiffness Data" en *Royal Naval Engineering College (RNEC)*, TR-84015.
- [4] Ewins D.J. (2000), *Modal Testing: Theory, Practice, and Application*, Research Studies Press Ltd.
- [5] Fox R.L. y Kapoor M.P. (1968), "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors" en *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 12, pp. 2426-2429.
- [6] Friswell M.I. y Mottershead J.E. (1995), *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, Kluwer Academic Publishers.
- [7] Juang J.N. (1994), *Applied System Identification*, PTR Prentice-Hall, Inc., New Jersey, USA.
- [8] Maia N.M.M. y Silva J.M.M. (1997), *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research Studies Press Ltd.
- [9] Rainieri, C. y Fabbrocino, G. (2014), *Operational Modal Analysis of Civil Engineering Structures*, Springer Science.
- [10] Trono A., Beltramo E., Stuardi J. y Ceballos M. (2021), "Estrategias Mixtas de Extracción de Parámetros Modales Aplicadas a un Pórtico de Laboratorio", *Memorias de MECOM 2021, XXXVII Congreso Argentino de Mecánica Computacional*.