

Origami: una perspectiva geométrica y combinatoria



Jesús Gacías Franco

Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: Enrique Artal Bartolo y José
Ángel Iranzo Sanz
13 de junio de 2023

Summary

The art of origami (from the Japanese *oru*, “to fold” and *kami*, “paper”) is a technique by which a sheet of paper is bent and creased in such ways to create structures, called origami models or figures, often with artistic intent. The link between origami and geometry perhaps seems obvious, as geometric structures often arise naturally as a result of bending in three-dimensional space (cylinders, cones) or creasing on a flat surface (straight lines), called flat folding. The main goals of this bachelor thesis are to, first, generalize the core ideas that define origami to a larger family of manifolds, and second, review some of the most well-known theorems on flat folding from a combinatorial and topological perspective. We hope to provide the reader with a richer understanding of the fundamental properties of origami and the mathematical notions that correspond to them.

We take connected and orientable n -dimensional submanifolds of \mathbb{R}^{n+1} as the pieces of paper P in which origamis –continuous maps from P to the ambient space \mathbb{R}^{n+1} – should be defined. As we wish to include creases in our definition of origamis, we let these maps be stratified \mathcal{C}^k , and name all the points in which differentiability fails the set of creases. This set, we assume, is a union of manifolds of lower dimensions. Furthermore, these maps are defined in a recursive manner, as a crease of a given dimension can itself have creases of lower dimensions.

A number of conditions needs to be set on origamis, namely, that the paper does not tear, shrink or expand, and that it does not cross itself, although we allow superpositions. The first condition cannot be reduced to a local isometry, as the image of an origami is not necessarily a manifold, nor is any origami locally injective. It can be established in one of two ways, which we prove are equivalent: preservation of the intrinsic distance of any two points before and after folding (when on the image, only curves that unfold into curves on P are taken into account) or a local isometry on the points with no creases along with this same condition applied recursively to the set of creases.

The second condition, non-crossing, is undecidable in general when only the information of the map f is given. This is due to the fact that if several pieces of paper map to the same location, crossings will generally depend on which layer of paper is “on top” of the other. We define a new concept, order functions, that deal with this issue, and we place conditions on them to disallow any crossings. Order functions are, in a sense, a combinatorial object that has to be given to completely describe the folding. We end the section on foundations of origami by discussing an additional isotopic condition in loose terms.

Beginning the latter half of the thesis, we turn ourselves towards flat folding: folding of a two-dimensional flat piece of paper so that the finished model is also flat. We first establish the intuitive fact that all creases must be straight lines, and that these creases cannot represent anything other than symmetries. This allows us to partially describe flat origamis as crease patterns: oriented edges which tell us where to fold and in what direction, called mountain and valley folds.

The main problem in flat folding is deciding whether or not a given crease pattern can be folded flat. Despite being NP-hard, there are a number of known necessary conditions that flat foldable crease patterns have to verify. Most stem from a theorem given by Jacques Justin in *Towards a mathematical theory of origami* [1] that is rarely mentioned in the literature. We give a complete proof of it and show how it employs several knot theoretic notions to essentially give a condition without which, the paper would twist in impossible ways. Furthermore, the equation Justin presents serves as an excellent example of the mingling between geometry (angles) and combinatorics (orientation of folds) in origami. From this, we prove the three most important results in flat folding: Kawasaki’s theorem, Maekawa’s theorem

and the Big-Little-Big lemma. The proofs of the latter two are inspired by Justin's approach and, as far as the author of this thesis knows, original. We end by briefly mentioning related problems on flat folding that strengthen certain hypotheses in hopes of simplifying the problem, with varying success.

Resumen

El arte del origami (del japonés *oru*, “plegar” y *kami*, “papel”) es una técnica mediante la cual una hoja de papel es curvada y plegada de una cierta forma para crear estructuras, llamadas modelos o figuras de origami, generalmente con intención artística. La relación entre el origami y la geometría puede parecer obvia, ya que se manifiestan estructuras geométricas de forma natural como resultado de deformaciones en el espacio (cilindros, conos) o presionando el papel contra una superficie plana (líneas rectas), lo que se conoce como plegado plano. Los principales objetivos de este trabajo de fin de grado son, primero, generalizar las ideas de base que definen el origami a una familia más amplia de variedades, y segundo, revisar algunos de los teoremas más conocidos del plegado plano desde una perspectiva combinatoria y topológica. Esperamos brindar al lector un mayor entendimiento de las propiedades fundamentales del origami y las nociones matemáticas correspondientes.

Tomamos subvariedades de \mathbb{R}^{n+1} conexas y orientables de dimensión n como las hojas de papel P en las cuales los origamis –aplicaciones continuas de P al espacio ambiente \mathbb{R}^{n+1} – deben estar definidas. Ya que deseamos incluir pliegues en nuestra definición de origamis, permitimos que estas aplicaciones sean \mathcal{C}^k estratificadas, y llamamos a todos los puntos en los que la diferenciabilidad falla el conjunto de pliegues. Asumimos que dicho conjunto es una unión de variedades de dimensión menor. Aún más, estas aplicaciones vienen definidas de manera recursiva, ya que un pliegue de una cierta dimensión puede a su vez tener pliegues de dimensiones menores.

Los origamis deben satisfacer una serie de condiciones, principalmente, que el papel no se rasgue, encoja o expanda, y que no se cruce consigo mismo, aunque permitamos superposiciones. La primera condición no puede ser reducida a una isometría local, ya que la imagen de un origami no es necesariamente una variedad, ni todo origami es localmente inyectivo. Puede ser establecida de dos formas, que probamos que son equivalentes: preservación de la distancia intrínseca de dos puntos cualesquiera antes y después del plegado (donde en la imagen, solo las curvas que se despliegan a curvas en P son consideradas) o una isometría local en los puntos sin pliegues junto con esta misma condición aplicada recursivamente al conjunto de pliegues.

La segunda condición, el no atravesamiento, no puede ser determinada en general cuando solo se dispone de la información de la aplicación f . Esto se debe a que si varios trozos de papel acaban en el mismo sitio, los cruces dependerán en general de qué capa de papel está “por encima” de la otra. Definimos un nuevo concepto, las funciones de orden de capas, que lidian con este problema, e imponemos condiciones en ellas para prohibir los cruces. Las funciones de orden de capas son, en un sentido, un objeto combinatorio que ha de ser dado para describir completamente el plegado. Terminamos la sección de formalización del origami discutiendo una condición isotópica en términos generales.

En la segunda parte del trabajo, centramos nuestra atención en el plegado plano: el plegado de una hoja de papel plana y bidimensional de forma que el modelo final también sea plano. Establecemos primero el hecho intuitivo de que todos los pliegues han de ser líneas rectas, y que no pueden representar otra cosa que no sean simetrías. Esto nos permite describir parcialmente los origamis planos como patrones de plegado: segmentos orientados que nos indican dónde plegar y en qué dirección, llamados pliegues valle y montaña.

El principal problema en el plegado plano es decidir si un patrón de plegado puede ser plegado plano. Pese a ser NP-duro, hay un número de condiciones necesarias que los patrones de plegado planos deben verificar. La mayoría surgen de un teorema dado por Jacques Justin en *Towards a mathematical theory of origami* [1] que rara vez es mencionado en la literatura. Damos una demostración completa de él

y mostramos cómo utiliza varias nociones de teoría de nudos para, en esencia, dar una condición sin la cual el papel se retorcería de modos imposibles. Aún más, la ecuación que presenta Justin es un excelente ejemplo de la mezcla entre la geometría (ángulos) y combinatoria (orientación de pliegues) hallado en el origami. De aquí, probamos los tres principales resultados en plegado plano: el teorema de Kawasaki, el teorema de Maekawa y el lema Big-Little-Big. Las demostraciones de los dos últimos están inspiradas por el enfoque de Justin y, según cree el autor de esta memoria, son originales. Acabamos mencionando brevemente problemas relacionados con el plegado plano que fortalecen ciertas hipótesis en aras de simplificar el problema, con mayor o menor éxito.

Índice general

1. Formalización matemática del origami	1
1.1. Hipótesis previas y dificultades del modelo	1
1.2. Condiciones de diferenciabilidad e isometría	2
1.3. Orden de capas	7
1.3.1. Motivación	7
1.3.2. Función de orden de capas	9
1.3.3. Condiciones de no cruce 1-dimensionales	10
1.3.4. Condiciones de no cruce: aumento de dimensión	13
1.4. Condición de isotopía	13
2. Origami plano	15
2.1. Primeras propiedades	15
2.2. Descripción combinatoria: patrones de plegado	16
2.3. Condiciones necesarias de patrones planos	17
2.3.1. Condiciones combinatorias	17
2.3.2. Teorema de Justin	18
2.3.3. Condiciones locales	21
2.4. Simplificaciones del problema de plegado plano	24
A. Anexo	27
Bibliografía	31
Agradecimientos	33

Capítulo 1

Formalización matemática del origami

El objetivo principal de este trabajo es dar una descripción matemática del proceso de deformar y doblar una hoja de papel, al que nos referiremos como *origami*. En esta primera sección, tratamos este problema desde una perspectiva muy amplia, generalizando allá donde sea posible para entresacar sus características esenciales. La formalización que expondremos, tomada de [2] y [3], engloba otras menos específicas y puede extenderse a espacios de dimensión arbitraria, además de servir de ejemplo ilustrativo de la precaución y minucia necesarias para construir un buen modelo.

1.1. Hipótesis previas y dificultades del modelo

Una figura (física) de origami/papiroflexia consiste en una deformación en el espacio de una hoja de papel (o más en general, una plancha lo suficientemente fina como para que su grosor sea despreciable), que no presenta roturas, cortes, ni se atraviesa a sí misma. Una técnica característica es la de realizar pliegues, lugares del papel que experimentan un cambio brusco en su dirección. También se permite que sucedan superposiciones: aunque dos puntos por muy próximos que sean no están nunca en la misma posición física real, a efectos prácticos y despreciando el grosor resulta conveniente pensar que es el caso. La superposición de capas forma parte integral del proceso de creación de figuras de papel planas, de las cuales hablaremos en el segundo capítulo.

Un buen modelo geométrico del origami debe así capturar las características que hemos expuesto en el párrafo anterior, y además, que todo modelo físico tenga una descripción matemática y viceversa. Podemos añadir de forma razonable dos condiciones matemáticas más. Primero, que las regiones del papel sin pliegues sean suaves, entiéndase, \mathcal{C}^k para algún $k \in \mathbb{N}$, puesto que por definición un pliegue es allá donde hay un cambio brusco en la dirección, en las zonas sin pliegues debe haber al menos una derivada primera. Segundo, que el número de pliegues sea finito. Evitamos de este modo un comportamiento fractal que puede ser engorroso, y que podría incluso acabar con que la hoja entera esté cubierta de pliegues.

Podemos hacer así una tabla con las características a modelizar y su interpretación matemática usual (ver Cuadro 1.1). Inmediatamente, vemos una contradicción en la tabla. Para modelar que el papel no se atraviesa a sí mismo, hemos impuesto la condición de inyectividad, sin embargo, sí que queremos que se superponga en algunos puntos. Por supuesto, en términos físicos, la diferencia entre superponer y atravesar es más que clara, pero matemáticamente, necesitamos de una mayor precisión para describirla adecuadamente.

Por otra parte, una isometría local siempre es una inyección local, que sigue siendo una condición demasiado restrictiva: al doblar una hoja de papel por la mitad, cualquier punto situado en el pliegue tiene puntos arbitrariamente cerca de él que acaban superpuestos. Vamos a empezar relajando sutilmente la condición de isometría local.

Característica física	Interpretación matemática intuitiva
Deformación de un papel en el espacio	Aplicación continua de un subconjunto de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3
Sin estiramiento ni encogimiento	Localmente isométrica
Que no se atravesase a sí misma	Inyectiva
Con un número finito de pliegues	\mathcal{C}^k a trozos
Con posible superposición	Posiblemente no inyectiva

Cuadro 1.1: Traslado de las características del origami a sus interpretaciones matemáticas más directas.

1.2. Condiciones de diferenciabilidad e isometría

Las primeras características que vamos a formular se van a hacer en dimensión arbitraria, y van a ser descritas en términos de variedades orientables. Sin pérdida de generalidad, supondremos también que dichas variedades son conexas.

Definición 1.2.1. Una **hoja de papel** n -dimensional es una n -subvariedad de \mathbb{R}^{n+1} orientable y conexa, dotada de la métrica de Riemann inducida por \mathbb{R}^{n+1} .

En todo lo que sigue y salvo que se indique lo contrario, P será una hoja de papel n -dimensional. La primera condición que queremos imponer sobre un plegado es que sea \mathcal{C}^k para algún $1 \leq k \leq \infty$ salvo quizás en conjuntos de dimensión menor: los pliegues. En efecto, si doblamos una varilla en el plano, los pliegues son puntos; cuando plegamos papel en el espacio, son curvas. Queremos sin embargo que al fijarnos solo en la red de pliegues, la aplicación siga exhibiendo un comportamiento adecuado. Esto llama a una definición recursiva:

Definición 1.2.2. Una aplicación continua $f : P \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ se dice \mathbf{C}^k **estratificada** si existen subvariedades abiertas $P_1, P_2, \dots, P_m \subseteq P$ cumpliendo:

- I) $(P_i)_{i=1}^m$ son disjuntas.
- II) $\bar{P}_1 \cup \dots \cup \bar{P}_m = P$.
- III) $f|_{P_i}$ es \mathcal{C}^k para cada $i = 1, \dots, m$.
- IV) Existe una partición finita de $\bigcup_{i=1}^m \partial P_i$ en variedades de dimensión menor que n tales que f restringida a cada una de ellas es \mathcal{C}^k estratificada (considerando que toda función en una 0-variedad es \mathcal{C}^k estratificada).

La unión de las fronteras $\bigcup_{i=1}^m \partial P_i$ se denomina **los pliegues** de f . Diremos que un punto está en un pliegue si pertenece a esta unión.

Notas. Cabe la posibilidad de que en alguna de las fronteras comunes entre dos regiones P_i, P_j , la aplicación f siga siendo diferenciable, es decir, que f restringida a $\bar{P}_i \cup \bar{P}_j$ sea \mathcal{C}^k . En ese caso, no ocurre un plegado real, diremos que la frontera que los separa es un **pliegue superfluo**.

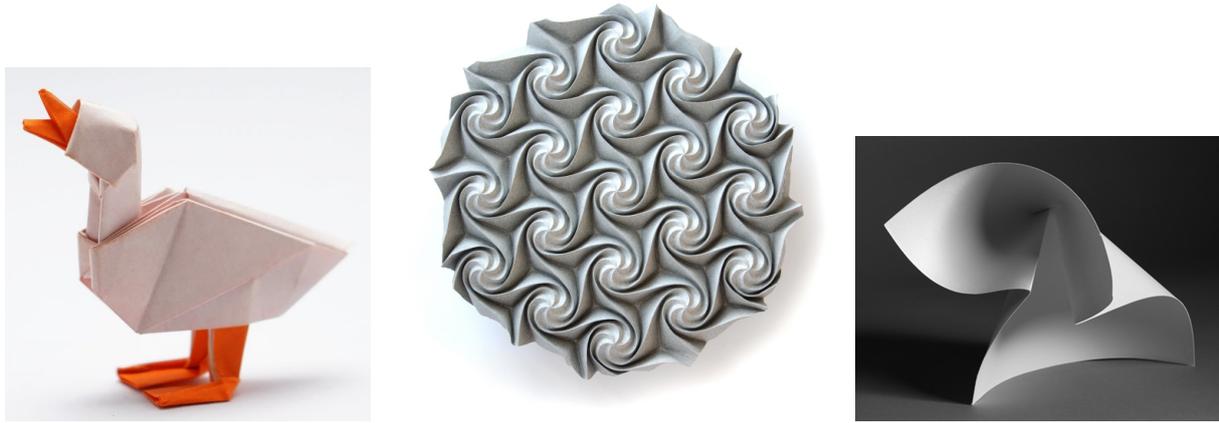
Para una discusión de diferentes situaciones que engloba esta definición, consultar la Figura 1.1.

La siguiente condición geométrica que necesitamos es que la aplicación sea isométrica en un cierto modo, para que no se produzca estiramiento ni encogimiento del papel. Recordemos que la distancia de dos puntos p y q en P viene dada por

$$d(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow P \text{ curva } \mathcal{C}^1 \text{ a trozos, con } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\},$$

donde $L(\gamma)$ denota la longitud de la curva γ .

Como ya hemos comentado anteriormente, la isometría local no es una condición adecuada ya que implica inyectividad local. De hecho, la imagen geométrica de un plegado no es una variedad en general,



(a) Duck, Jo Nakashima[4]. (b) Energy-D, Ekaterina Lukasheva[5]. (c) One-Crease, Paul Jackson[6].

Figura 1.1: Modelos de origami de diferentes artistas contemporáneos. El primero es una figura más clásica, con pliegues rectos en su mayoría. El segundo presenta pliegues curvos, un estilo menos común, pero que sigue contemplado en la definición que hemos dado. El tercer modelo es un ejemplo del carácter recursivo de los pliegues: se trata de un pliegue 1-dimensional (recto) al que se le ha aplicado posteriormente un pliegue 0-dimensional, creando así una forma de pinza.

así que ni siquiera se pueden medir distancias de forma intrínseca en la imagen. Vamos a garantizar de otro modo que se conserven las longitudes.

Para dar una motivación intuitiva, pensemos en una hoja de papel usual. Tomemos dos puntos en ella y dibujemos la recta que los une. Después de deformar el papel como queramos, esa recta tendrá una forma distinta: una curva en el espacio. Sin embargo, su longitud debería ser la misma antes y después de plegarlo: si fuese más larga, alrededor de ella el papel se habría estirado, si fuese más corta, se habría encogido. Esto motiva las siguientes definiciones:

Definición 1.2.3. Dada una función $f : P \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ \mathcal{C}^k estratificada, se define la **distancia post- f** entre dos puntos $p, q \in P$ como

$$d_f(p, q) := \inf\{L(f \circ \gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow P \text{ curva } \mathcal{C}^1 \text{ a trozos, con } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\},$$

siendo $f \circ \gamma$ una curva medida en \mathbb{R}^{n+1} bajo la métrica euclídea usual. Se dice que una curva γ en P con $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ **realiza la distancia post- f** entre p y q si $L(f \circ \gamma) = d_f(p, q)$.

La aplicación d_f está bien definida ya que puede comprobarse que las imágenes por una aplicación \mathcal{C}^k estratificada de curvas \mathcal{C}^1 en P son curvas \mathcal{C}^1 en \mathbb{R}^{n+1} .

Definición 1.2.4. Una aplicación $f : P \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ \mathcal{C}^k estratificada se dice **equilongitudinal** si cumple:

$$d(p, q) = d_f(p, q) \quad \forall p, q \in P.$$

Una gran ventaja que tienen estas definiciones es que nos permiten descartar las curvas que solo son realizables en $f(P)$ y que no tienen representación al levantarse a P . Por ejemplo, si $p \neq q$ pero $f(p) = f(q)$, la existencia de la curva constante en $f(p) = f(q)$ devuelve una distancia en el sentido usual 0. Sin embargo, al tomar su preimagen, vemos que no se trata de una curva en P , sino de dos puntos distintos. Intuitivamente, al plegar el papel, uno puede formar “atajos” entre puntos, pero ninguno de estos atajos es realizable en el papel original, por lo que no aportan información sobre qué ha ocurrido al deformarlo (ver Figura 1.2).

En [2], no se establece una conexión de estas condiciones con la noción clásica de isometría local. En el resto de la sección, probaremos como trabajo original que la condición de equilongitudinalidad y una de isometría local en un sentido generalizado son, de hecho, equivalentes para funciones \mathcal{C}^∞ estratificadas.

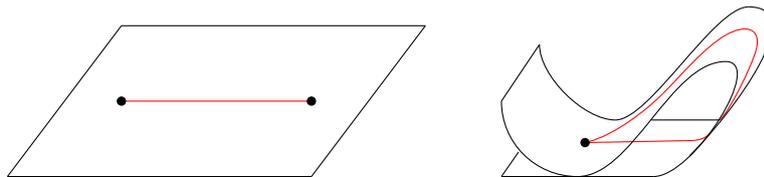


Figura 1.2: Ejemplo de dos puntos con la misma imagen con distancia no nula. La distancia post- f entre ambos es la longitud de la curva roja.

Definición 1.2.5. Un conjunto $U \subseteq P$ se dice **geodésicamente convexo** si dados $p, q \in U$ cualesquiera, existe una única geodésica que realiza su distancia y los une, y está totalmente contenida en U .

Damos por sabido el siguiente resultado de variedades de Riemann:

Proposición 1.2.6 ([7]). *Todo punto en una variedad admite un entorno geodésicamente convexo U .*

Lema 1.2.7. *Sea U un entorno geodésicamente convexo, y $p, q \in U$ con $d(p, q) = d > 0$. Entonces, si existen, las esferas geodésicas de radios $\frac{d}{2}$ centradas en p y q respectivamente tienen un único punto de intersección.*

Demostración. Sean p_1 y p_2 dos puntos de intersección distintos entre ambas esferas. Dado uno de ellos cualquiera, se puede construir una curva que realice la distancia entre p y q tomando la geodésica radial que une p con p_i y ligándola con la que une p_i y q . Si fuesen distintos, obtendríamos dos geodésicas distintas que unen p y q , lo que contradice la unicidad de geodésicas minimizantes (ver Figura 1.3). \square

Notas. Puede suponerse que las esferas geodésicas del lema anterior siempre existen al restringir U lo suficiente en torno a p . En efecto, se puede elegir U de forma que esté contenido en las bolas geodésicas $B(p, \varepsilon)$ con $p \in U$ cualquiera y un cierto $\varepsilon > 0$ (ver [8]), de forma que $\frac{d}{2} < \varepsilon$ y garantizando así la existencia de esas bolas geodésicas. Lo asumiremos de ahora en adelante.

Proposición 1.2.8. *Sea $f : P \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una aplicación equilongitudinal, y sea $U \subseteq P$ geodésicamente convexo. Entonces, para cualesquiera $p, q \in U$, si γ es la geodésica minimizante entre p y q , γ también es la única curva que realiza la distancia post- f entre p y q .*

Demostración. Sea δ una curva que realiza la distancia post- f de p y de q , veamos que es γ . Pongamos que ambas curvas están parametrizadas en un mismo intervalo I , y asumamos por reducción al absurdo que son distintas. Existe así un $t_0 \in I$ tal que $\delta(t_0) \notin \gamma(I)$; por continuidad, no coinciden en un intervalo (t_1, t_2) al que pertenece t_0 . Ese intervalo será, como mucho, I . Así, renombrando los extremos $p = \gamma(t_1)$ y $q = \gamma(t_2)$, asumimos sin pérdida de generalidad que γ y δ solo coinciden en p y q . Veamos que llegamos a un absurdo.

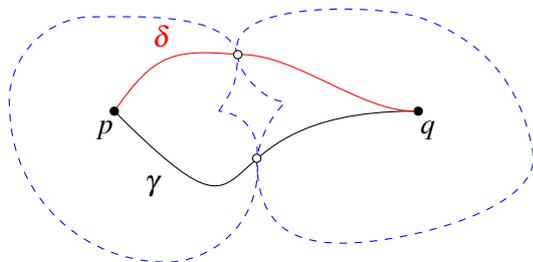


Figura 1.3: En un entorno geodésicamente convexo, las esferas geodésicas tangentes no pueden intersectarse en dos puntos, ya que obtenemos dos curvas minimizantes γ y δ distintas.

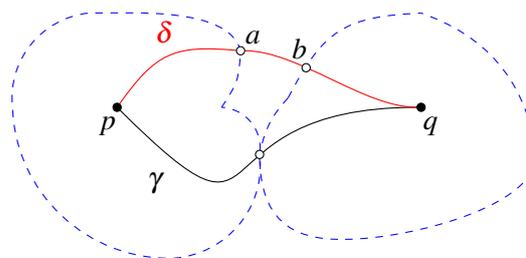


Figura 1.4: Construcción de los puntos a y b en la prueba de la Proposición 1.2.8.

Sea $d := d(p, q) = L(\gamma)$, y consideremos las esferas geodésicas de radio $\frac{d}{2}$ centradas en p y q . Estudiemos los puntos de corte de éstas con la curva δ , es decir, definimos:

$$t_a := \sup \left\{ t \in I \mid d(p, \delta(t)) < \frac{d}{2} \right\}, \quad t_b := \inf \left\{ t \in I \mid d(\delta(t), q) < \frac{d}{2} \right\}.$$

Éstos deben existir, y cumplen $d(p, \delta(t_a)) = \frac{d}{2}$ y $d(\delta(t_b), q) = \frac{d}{2}$ por continuidad. Notar que no puede darse $t_b < t_a$, pues contradice que la distancia entre p y q es d . Sean $a = \delta(t_a)$ y $b = \delta(t_b)$, ambos puntos en δ (ver Figura 1.4).

Notar ahora lo siguiente: como $f \circ \delta$ es de longitud mínima entre todas las curvas que unen p con q , también lo es $f \circ \delta|_{[t_a, t_b]}$ entre todas las que unen a con b , y lo mismo para cualquier pareja de puntos. En efecto, si no fuese el caso, se podría sustituir el fragmento de curva entre a y b por otro más corto post- f , y obtendríamos uno más corto entre p y q . Por otra parte, se cumple que por realizar δ la distancia post- f y ser f equilongitudinal:

$$L(f \circ \delta) = d_f(p, q) = d(p, q) = d.$$

Con todo esto, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d &= \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d(p, a) + d(b, q) = d_f(p, a) + d_f(b, q) \\ &\leq d_f(p, a) + d_f(a, b) + d_f(b, q) \\ &= L(f \circ \delta|_{[0, t_a]}) + L(f \circ \delta|_{[t_a, t_b]}) + L(f \circ \delta|_{[t_b, 1]}) \\ &= L(f \circ \delta) \\ &= d. \end{aligned}$$

La desigualdad es por tanto una igualdad, y así, $d_f(a, b) = d(a, b) = 0$ con lo que $a = b$: se trata de un punto de intersección de las esferas geodésicas. Pero por la unicidad de éste probada en el lema anterior, necesariamente $a = b = \gamma(t')$, donde $d(p, \gamma(t')) = \frac{d}{2}$. Esto contradice que γ y δ no coinciden más allá de en p y en q ; por reducción al absurdo, γ y δ son iguales salvo reparametrización.

Se ha visto que en el caso de existir, la curva minimizante es γ . Para la existencia, un argumento similar prueba que existe una sucesión de curvas δ_n de forma que $L(f \circ \delta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d$ tienden a γ (consultar Anexo A.1). □

Este resultado nos permite asegurar que, localmente, las longitudes de geodésicas se mantienen. Lo siguiente que probaremos es que en puntos donde no hay pliegues, una aplicación equilongitudinal se comporta de forma localmente inyectiva (o, visto de otro modo, solo con un pliegue es posible pegar puntos con otros en todo un entorno).

Proposición 1.2.9. *Sea $f : P \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ equilongitudinal y $p \in P$ no situado en un pliegue de f . Entonces, f es una inmersión local en p (y en concreto, localmente inyectiva en p).*

Demostración. Por ser f de clase \mathcal{C}^k en torno a p , bastará ver que df_p es inyectiva. Sea $v \in T_p P$ de forma que $df_p(v) = 0$, y supongamos por reducción al absurdo que $v \neq 0$. Sea γ_p^v la geodésica empezando en p con vector velocidad v , bien definida en un entorno geodésicamente convexo U de p . La consideramos parametrizada por el arco en un intervalo $[0, l]$, con $\gamma_p^v([0, l]) \subseteq U$. De esa forma, para todo $x \in [0, l]$, la curva $\gamma_p^v|_{[0, x]}$ es la que realiza la distancia x entre p y $\gamma_p^v(x)$. La Proposición 1.2.8 asegura que también realiza su distancia post- f , de modo que $L(\gamma_p^v|_{[0, x]}) = L((f \circ \gamma_p^v)|_{[0, x]})$. Así, para todo $x \in [0, l]$:

$$x = d(p, \gamma_p^v(x)) = L(\gamma_p^v|_{[0, x]}) = L((f \circ \gamma_p^v)|_{[0, x]}) = \int_0^x \|(f \circ \gamma_p^v)'(t)\| dt = \int_0^x \|df_{\gamma_p^v(t)}(\gamma_p^{v'}(t))\| dt.$$

Expresando $x = \int_0^x 1 dt$, podemos escribir en definitiva:

$$\int_0^x \left(1 - \|df_{\gamma_p^v(t)}(\gamma_p^{v'}(t))\| \right) dt = 0, \quad x \in [0, l].$$

Definiendo ahora $g(t) := 1 - \left\| df_{\gamma_p'(t)}(\gamma_p'(t)) \right\|$, se trata de una función continua que por hipótesis verifica $g(0) = 1 - \|df_p(v)\| = 1$. La función g cumple así la siguiente ecuación integral para un cierto $l > 0$:

$$\begin{cases} \int_0^x g(t) dt = 0 \quad \forall x \in [0, l] \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Esta ecuación no tiene solución cuando g es continua, puesto que en un entorno del 0 g es estrictamente positiva ($g(0) = 1 > 0$) luego su integral en ese entorno lo es también. La contradicción surge al parametrizarla por el arco y asumir $l > 0$. La curva γ_p^v debe ser así constante, con lo que $v = 0$. \square

A partir de aquí, para simplificar los argumentos y poder hablar de difeomorfismos, asumiremos que f es \mathcal{C}^∞ estratificada, pero es esperable que se trasladen los resultados a órdenes menores de diferenciabilidad.

Corolario 1.2.10. *Sea $f : P \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ equilongitudinal y $p \in P$ no situado en un pliegue de f . Entonces, f es un difeomorfismo local en p en el siguiente sentido: existe un entorno U de p de modo que $f(U)$ es una subvariedad encajada n -dimensional de \mathbb{R}^{n+1} y $f|_U : U \rightarrow f(U)$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Gracias al resultado anterior, basta restringir f a un abierto de p en el que sea una inmersión y aplicar el teorema de encaje local (ver [9]), asegurando así que en un entorno U de p , f es un encaje. Por tanto, $f(U)$ es una n -variedad, y como además las dimensiones de P y $f(U)$ coinciden, f es un difeomorfismo local en p . \square

Con esto, podemos asegurar la isometría local en un sentido relajado:

Proposición 1.2.11. *Sea $f : P \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ equilongitudinal. Entonces, es localmente isométrica en el sentido siguiente:*

- *Para todo punto $p \in P$ no situado en un pliegue de f , existe un entorno U de p de modo que $f|_U : U \rightarrow f(U)$ es una isometría entre variedades de Riemann.*
- *Para todo punto $p \in P$ en un pliegue de f , se cumple la condición anterior en alguna m -subvariedad de los pliegues ($m < n$) que contenga a p .*

Demostración. La segunda afirmación es inmediata a partir de la primera retomando la definición recursiva de aplicación \mathcal{C}^∞ estratificada (Definición 1.2.2). Restringiendo lo necesario en torno a p , podemos tomar un entorno U de p geodésicamente convexo y en el que $f|_U : U \rightarrow f(U)$ sea un difeomorfismo gracias al Corolario 1.2.10. Notar que entonces $f|_U^{-1}$ también es equilongitudinal, puesto que por ser difeomorfos U y $f(U)$, las curvas en uno y en otro están relacionadas bajo una biyección. En efecto, para todos $x, y \in f(U)$:

$$\begin{aligned} d_{f^{-1}}(x, y) &= \inf\{L(f^{-1} \circ \gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow f(U), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\} \\ &= d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \\ &= d_f(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \\ &= \inf\{L(f \circ \delta) \mid \delta : [0, 1] \rightarrow U, \delta(0) = f^{-1}(x), \delta(1) = f^{-1}(y)\} \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Siendo d_U y $d_{f(U)}$ las distancias de Riemann en U y en $f(U)$ respectivamente, veamos ahora que $\forall q, r \in U, d_U(q, r) = d_{f(U)}(f(q), f(r))$. Dados $q, r \in U$ y γ la geodésica que los une:

$$d_U(q, r) = L(\gamma) = L(f \circ \gamma) \geq d_{f(U)}(f(q), f(r)).$$

Por otro lado, restringiendo lo necesario para que $f(U)$ sea también geodésicamente convexo y habiendo probado que $f|_U^{-1}$ es equilongitudinal, también se da

$$d_{f(U)}(f(q), f(r)) = L(\delta) = L(f^{-1} \circ \delta) \geq d_U(q, r),$$

con δ la curva que realiza la distancia entre $f(q)$ y $f(r)$: en efecto ambas distancias son iguales. \square

Así, podemos dar una caracterización de las aplicaciones equilongitudinales y ver que coinciden con las isometrías locales en sentido relajado, y con la idea intuitiva de preservación de las longitudes.

Corolario 1.2.12. *Una función f de tipo \mathcal{C}^∞ estratificada es equilongitudinal si y solo si es localmente isométrica en todo punto en el sentido de la Proposición 1.2.11. En particular, las longitudes de todas las curvas en P se mantienen bajo f .*

Demostración. El sentido directo ya ha sido probado en la Proposición 1.2.11. Para el recíproco, dada una curva γ en P , se puede descomponer por compacidad en un número finito de componentes de forma que cada una esté contenida en un entorno donde f actúe como una isometría (eventualmente, con componentes en alguna subvariedad de los pliegues). Las isometrías preservan las longitudes de curvas, luego $L(\gamma) = L(f \circ \gamma)$ para cualquier curva γ en P y así los ínfimos de d y d_f se toman en los mismos conjuntos, lo que demuestra que f es equilongitudinal. \square

Notas. Puesto que las isometrías locales preservan la curvatura de Gauss K , f preserva la curvatura del papel fuera de los pliegues. En particular, si P es plano ($K = 0$), su imagen también lo es localmente.

Con esto terminamos la primera consideración que necesitábamos imponer. Nos falta estudiar las autointersecciones y garantizar que el papel no se atraviese a sí mismo. Sin embargo, ya que esta condición no es necesaria cuando el plegado es inyectivo, podemos definir ya un primer ejemplo de origami:

Definición 1.2.13. Dada una n -hoja de papel P , un **origami libre** es una aplicación equilongitudinal $f : P \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ inyectiva.

1.3. Orden de capas

1.3.1. Motivación

La condición que queda por establecer es la que llamaremos de no cruce, y que garantiza que el papel no se atraviesa a sí mismo al aplicarle el origami f . Sin embargo, varios indicios parecen apuntar a que una serie de condiciones impuestas sobre f por sí sola no son suficientes para determinar esto.

Los ejemplos siguientes –que haremos en una dimensión– son ilustrativos de aplicaciones equilongitudinales que se cruzan o no se cruzan a sí mismas, pero también de algunas ambiguas, que requieren de más información. En los dos primeros ejemplos, consideramos que estamos plegando el segmento $(-1, 1)$ en \mathbb{R}^2 . Coloreamos su primera mitad en azul y la segunda en rojo para visualizar qué partes del segmento van adónde.

Para empezar, bien es cierto que en ciertos casos un análisis de f permite determinar si hay autocortes o no en la imagen. Considerar la Figura 1.5. La imagen geométrica, en negro, no permite saber si hay un autocorte o no: es posible que las partes azules y roja se atraviesen en el punto de intersección, o que al contrario, solo se toquen en él y se separen. Esa información la aporta la expresión de f . En dimensión 1, este tipo de cruces pueden caracterizarse mediante un análisis de los vectores tangentes o normales alrededor de estos puntos. Si no se trata de puntos de pliegue, un análisis de las curvaturas es suficiente para determinar si se cruzan o si no.

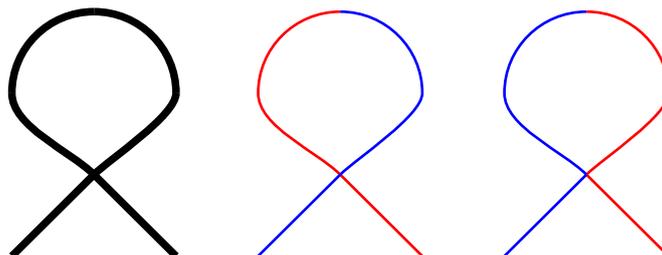


Figura 1.5: Dos aplicaciones que devuelven la misma imagen geométrica: una con cruces y otra sin cruces.

Sin embargo, no siempre es posible determinar con f si hay un cruce o no. Consideremos la siguiente función equi longitudinal definida en $(-1, 1)$:

$$f(x) = \begin{cases} (-\frac{1}{2}, -x - \frac{1}{2}) & x \in (-1, -\frac{1}{2}) \\ (x, 0) & x \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ (-x, 0) & x \in (0, 1) \end{cases} .$$

Consiste en girar 90° el segmento $(-1, -\frac{1}{2})$, mantener inmóvil $[-\frac{1}{2}, 0]$ y hacer la simetría con respecto a 0 del segmento $(0, 1)$. La imagen de f puede verse en negro en la Figura 1.6, junto con dos representaciones idénticas para f : una con cruce y otra sin cruce.



Figura 1.6: Imagen geométrica y dos representaciones indistinguibles para f : una con cruce y otra sin cruce. Se ensanchan artificialmente los pliegues (coloreados en gris) para poder visualizar el orden de las capas de papel.

Lo que diferencia ambas representaciones no es f , ya que cada intervalo en el dominio tiene la misma imagen en ambas, sino el “sentido” del pliegue, un concepto que no hemos definido. Un modo usual de hablar de estos sentidos de pliegue en la práctica es el siguiente: si la parte de arriba del segmento está pintada de un cierto color, y la de debajo es blanca, el primer plegado sería del tipo “color con color”, y el segundo del tipo “blanco con blanco”¹. Este aspecto –que en esencia es especificar cómo están colocadas unas capas sobre otras– no ha entrado en juego hasta ahora, y requiere la orientabilidad del papel.

Este último ejemplo que proporcionan Demaine y O’Rourke en [2] (Figura 1.7) hace ver que esta colocación de las capas no puede ser una propiedad puramente local. Tenemos dos plegados de un segmento rectilíneo con la misma imagen geométrica, uno con cruces y uno sin cruces. Los segmentos azul y rojo van a parar en ambos al mismo sitio. En el primer plegado, cualquier orden de las capas azul y roja va a conllevar un cruce, y además, no se puede solucionar analizando cada punto problemático por separado: al intentar arreglar un cruce invirtiendo las capas, se crea otro en el otro lado. En el segundo, colocar la capa roja bajo la azul sí genera un pliegue sin cruces. Así pues, un orden de capas sin cruces no puede ni depender exclusivamente de un análisis restringido a las capas involucradas, ni a uno local en cada punto potencialmente problemático.

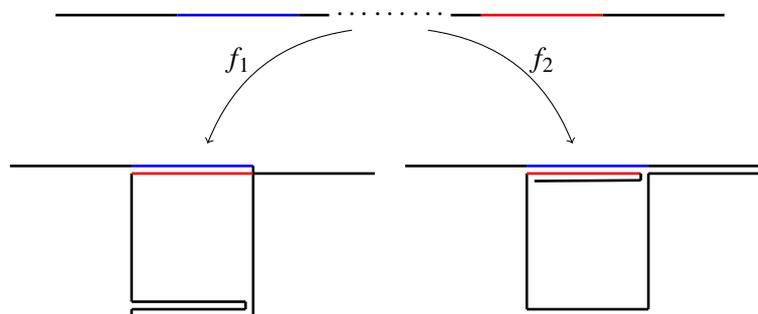


Figura 1.7: Dos aplicaciones equi longitudinales con misma imagen geométrica. En ambas, las capas azul y roja van al mismo segmento. Notar como para la primera, cualquier colocación de éstas produce un cruce. Para la segunda, hay que colocar la capa azul sobre la roja para que no se produzca un cruce.

¹Otro modo de hablar de ello, más común, es el de pliegues valle o pliegues montaña, aunque reservamos esta nomenclatura para los origamis planos.

1.3.2. Función de orden de capas

Para describir este nuevo concepto de colocación de capas, vamos a necesitar una función que describa el orden en el que están superpuestas. En esencia, vamos a definir una relación de orden y a exigirle una cierta compatibilidad con la geometría que da f .

Definición 1.3.1. Dada una aplicación equi longitudinal f , decimos que dos puntos $p, q \in P$ están **colocados** si cumplen $p \neq q, f(p) = f(q)$, y ninguno está en un pliegue de f . Denotamos mediante C_f a las parejas de estos puntos.

En este contexto, al no estar p y q en pliegues, están bien definidos los planos tangentes $T_p f$ y $T_q f$, y también los vectores normales $\mathbf{n}_f(p)$ y $\mathbf{n}_f(q)$. Es un resultado clásico que si estos vectores no tienen la misma dirección, los planos tangentes a ambos puntos no son paralelos y se provoca un cruce en los puntos. Esto va a ser tomado en consideración en la definición siguiente.

Definición 1.3.2. Dada una aplicación equi longitudinal f , definimos una **función de orden de capas** para f como una función $\lambda : C_f \rightarrow \{1, -1\}$ que cumpla, para $p, q, r \in P$:

- **Antisimetría:** Si p y q están colocados, $\lambda(q, p)\mathbf{n}_f(p) = -\lambda(p, q)\mathbf{n}_f(q)$.
- **Transitividad:** Si p, q y r están colocados y $\lambda(p, q) = -\lambda(r, q)$ entonces $\lambda(r, p) = \lambda(q, p)$.
- **Consistencia:** λ es constante en cada componente conexa por caminos de C_f .

Notas.

La interpretación de una función de orden de capas es la siguiente: estamos definiendo la posición relativa de un punto con respecto al vector normal en el otro. La expresión $\lambda(p, q) = 1$ se lee como “ p está del lado que indica el vector normal a q ”, abreviado “ q apunta a p ” mientras que $\lambda(p, q) = -1$ se lee como “ p está del lado opuesto al que indica el vector normal a q ”, abreviado “ q no apunta a p ” (ver Figura 1.8).

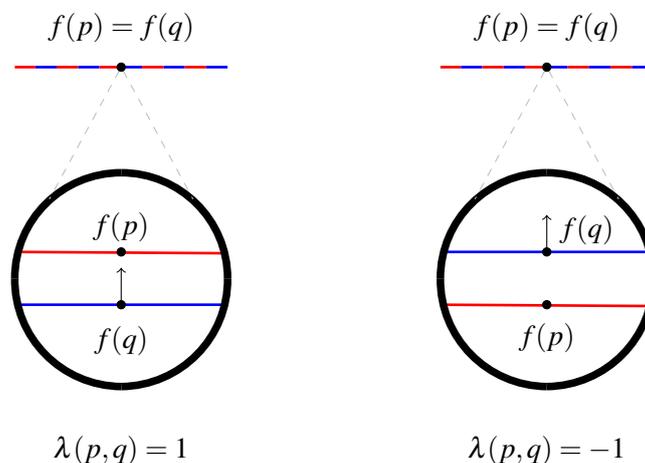


Figura 1.8: Dos órdenes de capas posibles para una misma aplicación f representados en vista de lupa. En ésta y todas las figuras que siguen, una línea bicolor representa que las capas azul y roja están superpuestas. El espacio entre las capas no existe en la práctica, pero se representa en la vista de lupa para ayudar a la visualización. Un cambio en el signo de $\lambda(p, q)$ corresponde a un intercambio de las capas.

La condición de antisimetría se interpreta así:

- Si ambos puntos se apuntan mutuamente, los vectores normales son opuestos.
- Si solo uno de los puntos apunta al otro, los vectores normales son iguales.
- Si ningún punto apunta al otro, los vectores normales son opuestos.

En particular, los vectores normales deben tener siempre la misma dirección, que como hemos comentado antes, ya restringe un tipo de cruce geométrico.

La precondition de la propiedad transitiva, $\lambda(p, q) = -\lambda(r, q)$, se lee cómo “exactamente uno de p y r es apuntado por q ”. La implicación es que entonces “ p apunta o bien a q y a r , o a ninguno de ellos”, es decir, “ q y r están del mismo lado de p ”. Esencialmente, es caracterizar que si un punto apunta a exactamente uno de dos puntos, debe estar entre ellos. En efecto, cambiando los papeles de p y r , se puede obtener que $\lambda(p, r) = \lambda(q, r)$, esta condición es simétrica para p y r .

Finalmente, la consistencia permite asegurar que se aplica el mismo orden a todos los puntos colocados a lo largo de dos capas. Esto dota a las capas una propiedad no local, que como hemos argumentado previamente, es necesaria.

Un orden de capas es una herramienta esencialmente combinatoria que describe y permite discernir las situaciones ambiguas que hemos expuesto antes. No siempre es posible definir un orden de capas correcto que no produzca cruces, y de hecho el conteo de órdenes de capas en ciertos contextos es un problema combinatorio que sigue abierto [10]. Aun con esto, no hemos eliminado la mayoría de los cruces: muchos de ellos se provocan en pliegues, donde los vectores normales no están bien definidos (Figuras 1.6 y 1.7). Por otra parte, aunque los vectores normales estén definidos, que sean paralelos es una condición necesaria pero no suficiente para que no suceda un cruce. En los siguientes párrafos vamos a describir las restricciones que deben cumplir un origami 1-dimensional y su orden de capas para garantizar que no se provoquen cruces de ningún tipo. Después, veremos cómo se trasladan inductivamente estas condiciones a dimensiones mayores.

1.3.3. Condiciones de no cruce 1-dimensionales

La condición de no cruce se aplica a toda pareja de puntos $p \neq q$ de forma que $f(p) = f(q)$ aunque alguno esté en un pliegue. Esto quiere decir que en general no vamos a comparar los valores de λ de los dos puntos, sino de los puntos en un entorno: en dimensión 1, como los pliegues son puntos y no son densos, podemos restringirnos a entornos suficientemente pequeños para que los únicos pliegues, si los hubiese, estén en p y q . Dados estos dos puntos, queremos encontrar una cota $E(p, q) > 0$ de modo que las condiciones siguientes se cumplan para todo $\varepsilon \in (0, E(p, q))$.

Dado $\varepsilon > 0$ y un punto $q \in P$, consideremos su imagen $f(q)$ y la circunferencia en \mathbb{R}^2 con centro $f(q)$ y radio ε . Dada una carta local cualquiera de un entorno de q , definimos los puntos q^- y q^+ como los valores más próximos a q con imagen en la circunferencia: q^- el menor y q^+ el mayor (bien definidos puesto que P es orientable). Llamamos al arco entre $f(q^-)$ y $f(q^+)$ recorrido en sentido horario C^+ , y al otro arco C^- , ambos incluyendo a los extremos (ver Figura 1.9). Si $f(q^-) = f(q^+)$, estas definiciones son ambiguas, y en tal caso utilizamos $\lambda(q^-, q^+)$: si $\lambda(q^-, q^+) = 1$, C^+ es el punto $\{f(q^-)\} = \{f(q^+)\}$ y C^- todo el círculo; si $\lambda(q^-, q^+) = -1$, al revés. Intuitivamente, el arco C^+ es al que apuntan los vectores normales conforme se recorre $[q^-, q^+] \setminus \{q\}$.

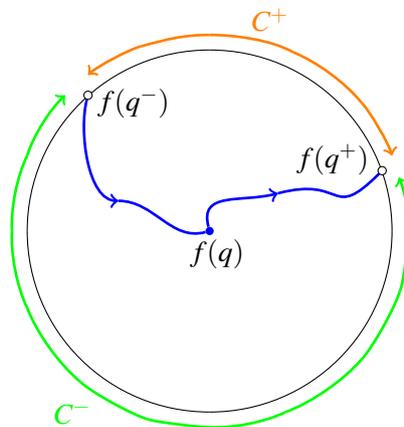


Figura 1.9: Definición de los puntos q^- y q^+ y de los arcos C^- y C^+ .

Se puede realizar la misma construcción de los puntos p^- y p^+ para p . Si q determina C^- y C^+ , la condición previa que hay que imponer es que tanto p^- como p^+ estén ambos en C^- o ambos en C^+ , es un argumento clásico para que no se realice un cruce a escala local. Sin embargo, esto no suele ser suficiente: la información adicional que proporciona la función de orden de capas va a forzar a que sea a uno u otro de los arcos. Para hallar estas condiciones adicionales, vamos a estudiar las diferentes estructuras locales permitidas en aquellos lugares donde coinciden varios puntos (sean o no pliegues).

Estructura local de puntos colocados

Si p y q están en C_f , el valor de $\lambda(p, q)$ determina por completo el arco del círculo al que deben pertenecer p^- y p^+ : C^+ si vale 1, C^- si vale -1 (ver Figura 1.10a).

Estructuras locales de pliegues

Si p o q está en un pliegue de f , la función de orden de capas no está bien definida en ellos. El análisis de cómo están situadas las capas dependerá entonces de los puntos a su alrededor (que localmente, no son pliegues), en concreto, estudiamos el orden de capas para los puntos p^- y p^+ con q^- y q^+ .

Ningún orden de capas definido Si p^\pm y q^\pm no están colocados para ninguna elección de los signos, no hay ninguna restricción adicional al no haber órdenes de capas por considerar. Ambos casos, p^- y p^+ en uno u otro arco, son posibles.

Un orden de capas definido Si hay una única elección de signos para la cual p^\pm y q^\pm están colocados, esos dos puntos están determinando un orden de capas que hay que respetar. Si $\lambda(p^\pm, q^\pm) = 1$, el vector normal de q^\pm apunta a p^\pm , luego se tiene que mantener esa condición en todo el entorno: p^- y p^+ pertenecerán a C^+ (ver Figura 1.10b). En el caso $\lambda(p^\pm, q^\pm) = -1$, deberán pertenecer a C^- . Esta situación es la que ocurría en el pliegue en ángulo recto de la Figura 1.6.

Dos órdenes de capas definidos La situación donde dos órdenes de capas confluyen tiene dos subcasos distintos. Si dos parejas de p^\pm y q^\pm están colocadas y ningún punto viene repetido, quiere decir que tenemos dos parejas disjuntas que están colocadas. En ese caso, la condición de no cruce se traduce en que la posición relativa de ambos con respecto a q^- y q^+ sea la misma. Así, la estructura no tendrá cruces siempre que los valores de λ definidos en ambos extremos sean iguales (ver Figura 1.10c).

El segundo caso, si hay un punto repetido en los órdenes de capas definidos –por ejemplo, si $\lambda(p^-, q^+)$ y $\lambda(p^+, q^+)$ están definidos– tenemos tres capas de papel superpuestas. La condición que se pide aquí es que los dos órdenes con el punto repetido en el segundo argumento sean iguales: p^- y p^+ deben estar del mismo lado de q^+ , uno a un lado y otro al otro provocaría un cruce en el pliegue (Figura 1.10d).

Todos los órdenes de capas definidos Por último, falta estudiar la situación donde los cuatro puntos están colocados: $\lambda(p^\pm, q^\pm)$ está definido para cualquier elección de los signos. En esta situación, solo hay dos estructuras locales posibles que no generen un cruce en el pliegue, que llamamos U's encajadas y U's apiladas (Figuras 1.10e y 1.10f). Ambas situaciones pueden resumirse en una misma equivalencia:

$$\lambda(p^+, q^+) = \lambda(p^-, q^+) \iff \lambda(p^+, q^-) = \lambda(p^-, q^-).$$

Que se lee del modo siguiente:

- Caso afirmativo: “Si p^+ y p^- están del mismo lado de q^+ , también del mismo lado de q^- y viceversa” (U's apiladas, o U's encajadas con q^\pm fuera).
- Caso negativo: “Si p^+ y p^- están de lados contrarios a q^+ , también están de lados contrarios a q^- y viceversa” (U's encajadas con q^\pm dentro).

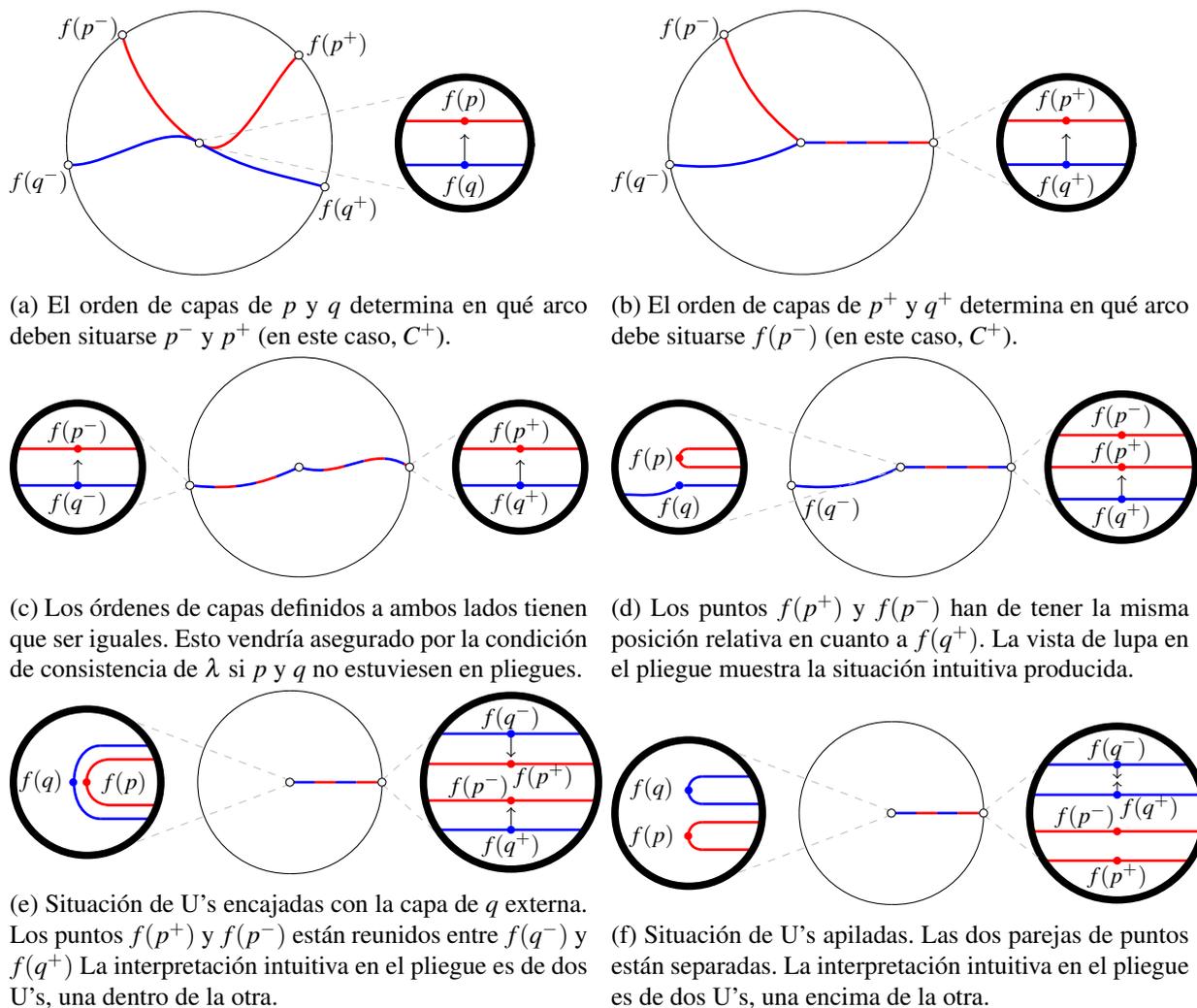


Figura 1.10: Ejemplos de diferentes estructuras locales de capas de papel.

En resumen:

Definición 1.3.3. Sea f una aplicación equilongitudinal sobre un papel 1-dimensional P . Una función de orden de capas λ sobre C_f se dice **compatible con f** si para cualesquiera $p \neq q$ con $f(p) = f(q)$ existe un $E(p, q) > 0$ de modo que para todo $\varepsilon < E(p, q)$ se cumpla que $f(p^-)$ y $f(p^+)$ pertenecen al mismo arco de la circunferencia de centro $f(p)$ y radio ε determinado por $f(q^-)$ y $f(q^+)$. Además:

- Si $\lambda(p, q) = 1$, pertenecen a C^+ , y si $\lambda(p, q) = -1$, a C^- .
- Si $\lambda(p, q)$ no está definido, pero sí $\lambda(p^\pm, q^\pm)$ para alguna elección de signos:
 - Si hay una única pareja colocada (elección de signos única), el valor $\lambda(p^\pm, q^\pm)$ definido corresponde con el arco al que pertenecen $f(p^-)$ y $f(p^+)$: si es 1, en C^+ ; si es -1 , en C^- .
 - Si hay exactamente dos parejas colocadas (dos elecciones de signos):
 - Si las dos parejas no tienen punto en común, los valores $\lambda(p^\pm, q^\pm)$ definidos son iguales.
 - Si un punto $r \in \{p^\pm, q^\pm\}$ está en ambas parejas, los valores $\lambda(\cdot, r)$ definidos son iguales.
 - Si todos los puntos p^-, p^+, q^- y q^+ están colocados, se cumple

$$\lambda(p^+, q^+) = \lambda(p^-, q^+) \iff \lambda(p^+, q^-) = \lambda(p^-, q^-).$$

Definición 1.3.4. Sea P un papel 1-dimensional. Llamamos **origami 1-dimensional** a (f, λ) donde $f : P \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es equilongitudinal y λ es un orden de capas compatible con f .

Notas. Cuando C_f es vacío, lo que sucede cuando todos los puntos de contacto están en pliegues, no hay función de orden de capas que definir, pero hay que seguir asegurando la primera condición de la Definición 1.3.3. En el caso de una aplicación f inyectiva, también se pierde esta condición, recayendo en la Definición 1.2.13.

1.3.4. Condiciones de no cruce: aumento de dimensión

Las condiciones de compatibilidad de un orden de capas λ con f han sido establecidas por ahora solo para dimensión 1. Para dimensiones mayores, el razonamiento es inductivo: presentamos aquí el paso de dimensión $n - 1$ a n .

Sean $p \neq q$ dos puntos de P tales que $f(p) = f(q)$. Consideremos la esfera $\partial B(f(p), \varepsilon)$ para cada $\varepsilon > 0$, donde $B(f(p), \varepsilon)$ es la bola de centro $f(p)$ y radio ε bajo la métrica usual en \mathbb{R}^{n+1} . La idea es estudiar cómo se comporta f en todas las esferas con ε suficientemente pequeño, cuya dimensión es menor, asegurando que no se producen cruces en ninguna de ellas.

En lo que sigue, dado $p \in P$, denotamos N_p como la componente conexa de $f^{-1}(\overline{B(f(p), \varepsilon)})$ que contiene a p , y $S_p := \partial N_p$ como su borde (ver Figura 1.11).

Proposición 1.3.5. *Para cualesquiera $p \neq q$ en P tales que $f(p) = f(q)$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, N_p y N_q son disjuntos y homeomorfos a discos. En particular, son orientables e inducen una orientación sobre S_p y S_q .*

Demostración. El hecho de que sean disjuntos para ε suficientemente pequeño es inmediato tomándolo de tal modo que N_p y N_q estén contenidos en bolas de radios $\frac{d}{2}$, donde $d = d(p, q)$. La otra propiedad se da por hecho en [2] y creemos que sale de los límites de este trabajo: puede consultarse un esbozo de la prueba en el Anexo A.2. □

La idea ahora es la siguiente: después de orientar los bordes S_p y S_q a partir de la orientación de P , restringimos f y λ a ambos. Lo resultante es una aplicación equilonitudinal y una función de orden de capas de una dimensión menos, definida sobre $S_p \cup S_q$. La condición de compatibilidad impuesta inductivamente para λ es por tanto que exista un $E(p, q) > 0$ de modo que $(f, \lambda)|_{S_p \cup S_q}$ cumpla las condiciones de no cruce de dimensión $n - 1$ para todo $\varepsilon < E(p, q)$ (en otras palabras, que sea un origami $n - 1$ dimensional).

Definición 1.3.6. Un **origami** sobre P es una tupla (f, λ) con $f : P \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una aplicación equilonitudinal y λ una función de orden de capas consistente con f en el sentido del párrafo anterior.

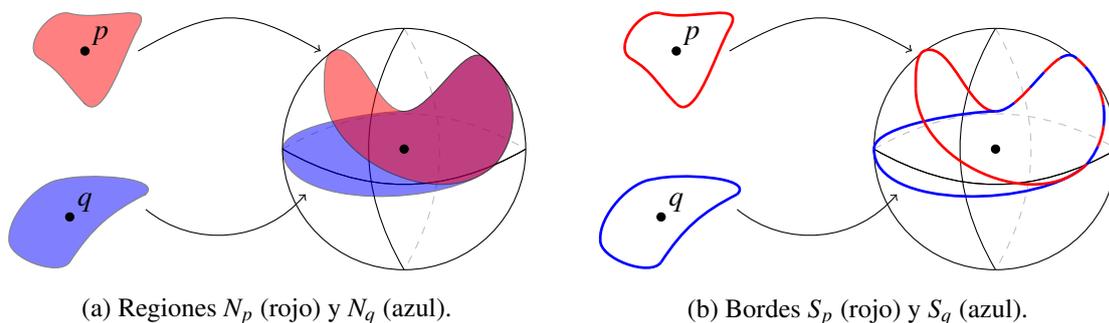


Figura 1.11: Construcción de N_p, N_q, S_p y S_q para el paso de inducción en el caso bidimensional.

1.4. Condición de isotopía

Por mucho que un origami esté bien definido, no deja de ser un estado final: su existencia no quiere decir que se haya podido llegar a él de una forma continua y que no atravesase el papel. Según cómo de

estrictos queramos ser en este modelo, podemos permitir cortes de tijera durante el plegado siempre que se reparen antes de llegar a la forma final, o no. Definimos esta última restricción opcional en términos laxos puesto que no le daremos un tratamiento formal.

Definición 1.4.1. Una colección de origamis $(f_t, \lambda_t), t \in [0, 1]$ se dice **continua temporalmente** si:

- La aplicación $(x, t) \mapsto f_t(x)$ es continua en $P \times [0, 1]$.
- Si $\lambda_t(p, q)$ está definido para valores t en un intervalo $I \subseteq [0, 1]$, es constante en I . Además, dados $p, q \in P$ y $t_0 \in I$ tales que $\lambda_{t_0}(p, q)$ está definido, si en el intervalo de tiempo $(t_0 - \delta, t_0)$ p y q tienen una misma posición relativa en cuanto a sus vectores normales, $\lambda_{t_0}(p, q)$ y $\lambda_{t_0}(q, p)$ deben mantenerla. Lo mismo para intervalos $(t_0, t_0 + \delta)$.

Un origami (f, λ) se dice **plegable temporalmente** si existe una colección de origamis continua temporalmente con $f_0 = \text{Id}_P$ y $(f_1, \lambda_1) = (f, \lambda)$.

Estas condiciones son muy cercanas a las de una isotopía, la misma herramienta que se utiliza en teoría de nudos para prohibir que dos curvas se atraviesen. En efecto, aunque bien es cierto que el carácter topológico de la hoja de papel puede variar al hacer puntos de contacto, la función de orden de capas preserva la información necesaria para “desplegar” la hoja y recuperarlo. No vamos a demostrar formalmente esto en el trabajo, pero admitiremos lo siguiente:

Teorema 1.4.2. Mientras se tenga en cuenta la posición relativa de puntos colocados, los invariantes isotópicos de una hoja de papel P se preservan al aplicarle un origami plegable temporalmente.

La principal aplicación de toda la teoría expuesta anteriormente es el siguiente resultado, probado inicialmente en [3] y reformulado en [2]:

Teorema 1.4.3. Sea P una hoja de papel de dimensión 2 y poligonal. Todo origami (f, λ) sobre P con $f \in \mathcal{C}^2$ estratificada es plegable temporalmente. En particular, (f, λ) preserva los invariantes isotópicos de P .

Lo que prueba que para hojas poligonales y funciones lo suficientemente diferenciables, las nociones de origami y origami plegable temporalmente son equivalentes. En el próximo capítulo veremos un ejemplo de origami no plegable temporalmente, que estará definido sobre una hoja de papel no poligonal.

Capítulo 2

Origami plano

Los primeros modelos que suele realizar un aprendiz de origami suelen ser planos: modelos que, una vez plegados, no sobresalen de la mesa. Es más, un gran número de modelos complejos son planos durante la mayor parte del proceso de construcción, y es en los últimos pasos en los que adquieren tridimensionalidad. Esta característica tiene un interés práctico que ha inspirado a ingenieros e investigadores estas últimas décadas: el plegado de una plancha fina permite reducir el tamaño del contenedor que lo transporta, y si se asegura que el plegado es plano, una de las dimensiones del contenedor es despreciable. Por ejemplo, el plegado de Miura-ori permite desplegar paneles solares desde satélites minimizando el espacio ocupado durante el transporte, y sigue inspirando nuevos diseños [11].

El estudio de estos plegados planos tiene por tanto interés en el ámbito de la ingeniería. Desde un punto de vista computacional, este campo es una gran fuente de ejemplos de problemas NP-duros. En esta sección, trataremos sus propiedades básicas y expondremos los resultados más relevantes del área.

2.1. Primeras propiedades

En lo que sigue, asumiremos que P es una 2-hoja de papel compacta contenida en el plano $\{z = 0\}$ de \mathbb{R}^3 . En la mayoría de los ejemplos, representaremos P por un cuadrado, aunque puede tener cualquier forma.

Definición 2.1.1. Un **origami plano** es un origami $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya imagen está contenida en un plano (asumimos sin pérdida de generalidad que es el plano $\{z = 0\}$).

La principal característica que cumplen los origamis planos y que resulta perfectamente natural es que todos sus pliegues son rectos. Demostramos esta propiedad apoyándonos en un lema previo:

Lema 2.1.2. Sean S_1 y S_2 superficies planas, y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una isometría entre ambas. Entonces, f es una composición de una traslación y una isometría lineal.

Demostración. Trasladando y rotando adecuadamente los planos donde estén contenidas S_1 y S_2 podemos suponer que ambos son $\{z = 0\}$, que identificamos con \mathbb{R}^2 . Veamos que la restricción de f a un cierto entorno abierto de S_1 admite una única extensión a \mathbb{R}^2 , que sabemos que debe ser rígida.

Trasladando de nuevo, supongamos que $0 \in \text{Int}(S_1)$ y $0 = f(0) \in \text{Int}(S_2)$. Extendamos f restringida a un entorno circular del origen U contenido en S_1 . Dado $x \in \mathbb{R}^2$, existe un único segmento de recta que une 0 con x . Llamando γ al fragmento de éste contenido en U , puesto que las isometrías conservan geodésicas, $f(\gamma)$ es una geodésica en $S_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, es decir, es un fragmento de recta. Prolongándolo hasta que su longitud sea $d(x, 0)$, llamando a esta prolongación parametrizada por el arco $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\delta(0) = 0$ se define

$$\tilde{f}(x) := \delta(1),$$

bien definida ya que dicha prolongación es única. La aplicación \tilde{f} extiende a $f|_U$, ya que si $x \in U$, γ y $f(\gamma)$ tienen longitud x , y así $\delta(1) = f(\gamma(1)) = f(x)$. Además, es una isometría, ya que dado $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\|x\| = d(x, 0) = L(\delta) = \|\tilde{f}(x)\|.$$

Con esto, hemos extendido la isometría a una en todo \mathbb{R}^2 , que sabemos que es tal y como expresa el enunciado. \square

Proposición 2.1.3. *Los pliegues no superfluos de un origami plano son curvas poligonales. Más aún, los únicos puntos donde pueden cambiar de dirección son aquellos donde se intersecan varias de estas curvas.*

Demostración. Sea f un origami plano, y tomemos x_0 un punto en un pliegue C de f de forma que exista un entorno U de x_0 que contenga una única curva como pliegue: C . Llamemos U_1 y U_2 a las dos componentes conexas de $U \setminus C$. Restringiendo más U si es necesario, podemos suponer que U_1 y U_2 están contenidos en entornos donde f actúa isométricamente. Aún más, rotando y trasladando si es necesario podemos suponer por el Lema 2.1.2 que U_1 queda fijo, y así $U_1 \cup C$ también por continuidad.

Si $U_2 \cup C$ también quedase fijo, f actuaría como la identidad en torno al pliegue C , y sería un pliegue superfluo. Si no, debe acabar en el plano $\{z = 0\}$ y como C está fija punto a punto, solo puede tratarse de una simetría: es la única isometría rígida no trivial con más de un punto fijo en \mathbb{R}^2 . Aún más, debe ser una simetría de giro de 180° al verla en \mathbb{R}^3 . El pliegue C debe de estar contenido en el eje de la simetría, es decir, es recto en torno a x_0 . \square

Esto nos cerciora del hecho intuitivo de que todo origami plano tendrá líneas de plegado rectas y de que se describe mediante una colección de simetrías.

2.2. Descripción combinatoria: patrones de plegado

Lo recién comentado lleva a la representación usual de un origami plano: una hoja de papel con rectas que delimitan diferentes regiones y que indican por dónde plegar. En muchas ocasiones, las rectas se marcan de dos formas distintas para indicar si el pliegue ha de realizarse hacia la mesa (valle) o al contrario (montaña) (ver Figura 2.1). Esto puede generalizarse desde el punto de vista de los grafos planos:

Definición 2.2.1. Un **patrón de plegado** \mathcal{F} en P es un conjunto de segmentos rectilíneos de interiores disjuntos contenidos en P , llamados **pliegues**, cuyos extremos o bien están situados en el borde del papel, o bien son **vértices**: extremos de al menos tres pliegues en el interior de P . Una región delimitada por pliegues y/o partes del borde de P que no contenga pliegues en su interior se llama una **cara** del patrón (ver la Figura 2.2 para un ejemplo ilustrativo).

Se dice que \mathcal{F} es **orientado** si cada pliegue tiene asignado un elemento de $\{1, -1\}$, que llamaremos “valle”(V) y “montaña” (M).

Se dice que un origami plano (f, λ) de P **respeto el patrón** \mathcal{F} si todos sus pliegues no superfluos son exactamente los de \mathcal{F} , y, si \mathcal{F} es orientado, para cualesquiera caras $P_i \neq P_j$ cuyos bordes compartan un pliegue C , $\lambda(p, q)$ coincida con la orientación de C para cualesquiera $p \in P_i, q \in P_j$ con $f(p) = f(q)$ suficientemente cerca de C . En el caso de existir, se dice que \mathcal{F} es un **patrón plano**, y si (f, λ) es plegable temporalmente, **plano temporalmente**.

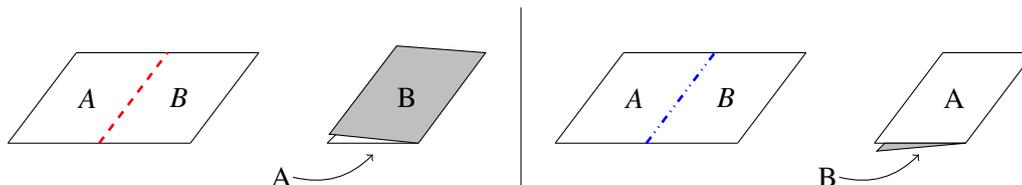


Figura 2.1: Visión en perspectiva de pliegues valle y montaña en una hoja bicolor. En todas las figuras, se marcan los pliegues valle en rojo y con líneas discontinuas, y los montaña en azul con dos puntos y una línea.

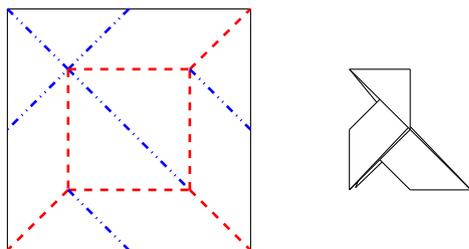


Figura 2.2: Patrón de plegado de una pareja de papel y figura resultante vista en perspectiva. Cada uno de los polígonos es una cara del patrón

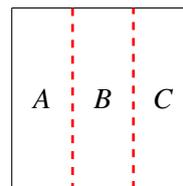


Figura 2.3: Ejemplo de no unicidad en el orden de capas. Dejando la cara B inmóvil, el orden de capas de abajo a arriba puede ser $B-A-C$ o $B-C-A$. Físicamente hablando, depende que cuál de los dos pliegues se realice antes.

Notas.

- I) Un patrón no siempre aporta un origami plano. No cualquier configuración de segmentos marcados va a definir un origami, y si lo define, no tiene porqué ser plano.
- II) La asignación valle-montaña no sustituye a un orden de capas: en efecto, el carácter de un pliegue tan solo informa del orden de las caras que delimita, ignorando así en qué orden se sitúan caras cuyos bordes no comparten un pliegue. Es por tanto posible dar distintos órdenes de capas para un patrón. La Figura 2.3 da un ejemplo sencillo de este hecho.
- III) Aunque el orden de capas no sea único, en el caso de existir, la estructura geométrica plana *f* sí que está totalmente determinada por el patrón salvo rotación y traslación. En efecto, los pliegues solo pueden representar simetrías, así que la posición geométrica de todos los puntos viene determinada una vez se fija una cara.
- IV) Si realizamos un origami físicamente (sin marcar pliegues que no se utilicen en el modelo final) y lo desplegamos, lo que vamos a obtener es el patrón como información residual: los pliegues y su orientación, perdiendo el orden de capas que teníamos con el modelo terminado. Así surgen los patrones de forma natural en el proceso de construcción.

Surgen varias preguntas clásicas de este contexto. Dado un patrón de plegado:

- ¿Es posible determinar si existe un origami plano que lo respete?
- Suponiendo que existe, ¿cómo hallarlo?

Estas dos preguntas han estado en el corazón del origami computacional desde su concepción. Ambos problemas son, en la formulación general que acabamos de exponer, NP-duros [12]. La razón de fondo de este hecho es que aunque es fácil determinar el carácter plano o no plano a escala local observándolo vértice a vértice, esto no se traslada en absoluto a escala global. Pese a ello, existen varias condiciones necesarias que estudiaremos a continuación.

2.3. Condiciones necesarias de patrones planos

2.3.1. Condiciones combinatorias

Definición 2.3.1. Sea \mathcal{F} un patrón de plegado. Un **ciclo de caras** de \mathcal{F} es una sucesión P_1, \dots, P_n de caras distintas entre sí y de forma que P_i comparta un pliegue p_{i+1} con la siguiente (P_n comparte p_1 con P_1), todos ellos distintos entre sí (ver Figura 2.4).

Proposición 2.3.2. *Todo ciclo de caras de un patrón plano se compone de un número par de caras.*

Demostración. Estudiemos la dirección del vector normal al papel conforme recorremos el ciclo de caras tras el plegado. Al pasar de una cara a la siguiente, al efectuarse una simetría, el vector normal cambia de sentido. Al completar el ciclo, debe coincidir con su sentido inicial, es decir, debe efectuar un número par de cambios, que corresponde a un número par de pliegues y caras. \square

Definición 2.3.3. Un patrón de plegado se dice **2-coloreable** si su conjunto de caras pueden ser dividido en dos conjuntos disjuntos A y B de forma que dos caras cualesquiera que compartan un pliegue pertenezcan una a A , y otra a B .

Corolario 2.3.4. Los polígonos delimitados por un patrón plano son 2-coloreables.

Demostración. La no existencia de ciclos impares es equivalente a la 2-coloreabilidad. Para una demostración, consultar [13]. \square

Intuitivamente, uno puede colorear las caras de un patrón de dos colores, que corresponderían a si al final del plegado están mirando hacia arriba o mirando hacia abajo.

2.3.2. Teorema de Justin

En su texto fundacional *Towards a mathematical theory of origami* [1], Jacques Justin enuncia un resultado que, pese a generalizar los dos teoremas más importantes de plegado plano, ha sido muy ignorado por la literatura posterior. En parte, porque juega con la condición de isotopía que definimos al final del primer capítulo de una manera algo sofisticada.

Como ya hemos comentado en el Teorema 1.4.3, un origami \mathcal{C}^2 estratificado sobre una hoja de papel poligonal es plegable temporalmente, luego en particular ambas nociones son equivalentes para plegados planos sobre hojas poligonales. Demaine y O'Rourke conjeturan en [2] que este resultado puede extenderse a otros tipos de hojas de papel. Sin embargo, Justin ya dio un contraejemplo de esto en [1] con una hoja de papel no simplemente conexa, que puede hallarse en las dos primeras imágenes de la Figura 2.5.

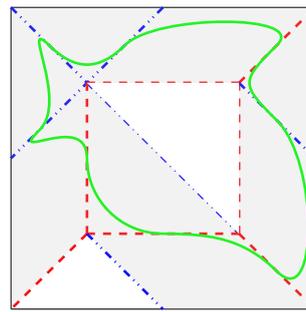


Figura 2.4: Ciclo de caras (coloreado en gris) y curva que lo recorre de forma tangente a los pliegues.

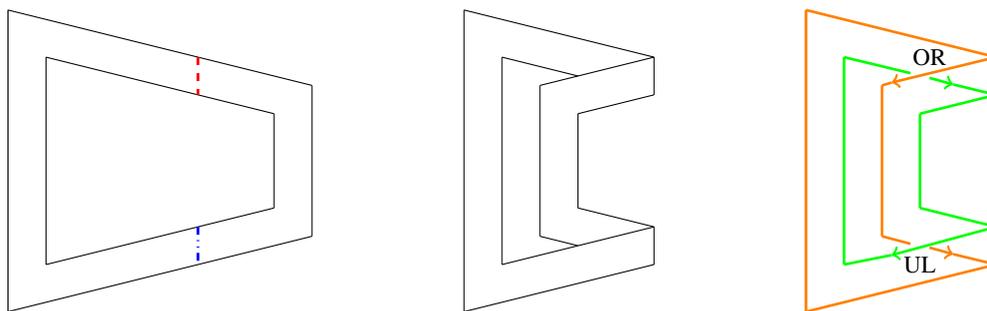


Figura 2.5: Origami plano no realizable temporalmente de Justin. El origami está bien definido y puede realizarse en la práctica, pero requiere de un corte de tijera y un pegado. La tercera imagen es un análisis de sus fronteras como diagrama de enlaces plano. Es también un ejemplo de dos caras que no tienen un orden consistente globalmente.

Se anima al lector a que lo realice: basta plegar ambos pliegues en valle, recortar por el pliegue de abajo, intercambiar ambas capas para obtener un pliegue montaña, y volver a pegar. Si podemos realizar esta construcción, es gracias al agujero que presenta la hoja: si estuviese relleno, ambas zonas estarían conectadas y la condición de consistencia por regiones de λ prohibiría el intercambio del orden.

Exponemos a continuación unas nociones de teoría de nudos que nos serán útiles:

Definición 2.3.5. Un **diagrama de enlaces plano** es una colección de una o varias curvas cerradas planas y orientadas, donde en cada punto de intersección (de una curva con otra, o consigo misma) se intersecan a lo sumo dos puntos, y se destaca uno como por encima del otro. Después de una eventual rotación, se distinguen cuatro tipos de cruce, que pueden encontrarse en la Figura 2.6.

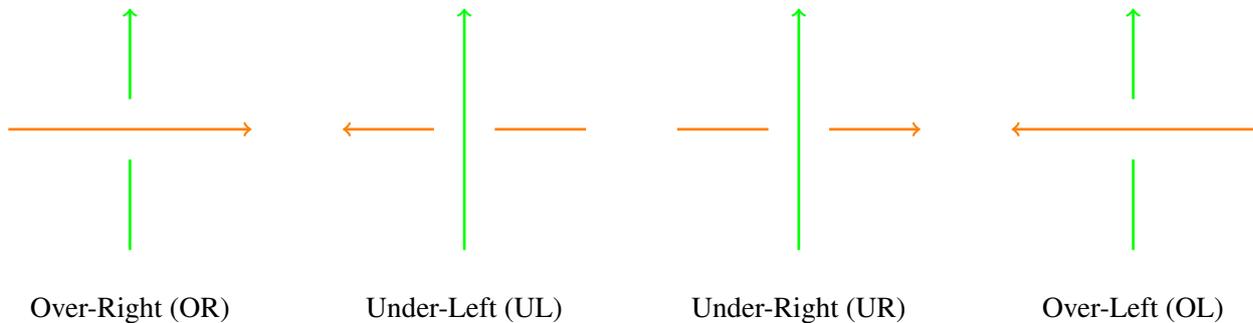


Figura 2.6: Los cuatro tipos de cruces. OR y UL se llaman positivos, y UR y OL, negativos.

Dadas dos curvas en un diagrama de enlaces, se define su **número de enlace** como

$$N = \frac{OR + UL - UR - OL}{2} = OR - OL = UL - UR,$$

donde las siglas representan la cantidad de cruces entre ambas de cada tipo.

Notas. Los cruces positivos OR y UL son simétricos, en el sentido que si en uno de ellos cambiamos los colores de ambas curvas y rotamos, obtenemos el otro. Lo mismo ocurre entre los negativos. Esto quiere decir que para calcular el número de enlace, es irrelevante cual de las dos curvas se observa con respecto a la otra, y podemos incluso cambiar de cruce a cruce.

Teorema 2.3.6 ([14]). El número de enlace de dos curvas es un invariante isotópico.

Con esta herramienta, podemos demostrar que el plegado de la Figura 2.5 no es plegable temporalmente: se ha modificado el número de enlace de las dos fronteras del papel. En el estado desplegado, no se cruzan: su número de enlace es 0. Sin embargo, en el estado plegado, (describiendo la frontera interior con respecto a la exterior) se producen cruces UL y OR, dando un número de enlace de 1. Ambas curvas acaban enlazadas¹, lo que no puede suceder sin romper la isotopía.

En esencia, nos preguntamos si una modificación del número de enlace de curvas como el recién visto podía haberse previsto antes de realizar el plegado, analizando el patrón y el carácter de sus pliegues. La idea es que, cerca de los pliegues, la posición relativa de dos puntos colocados es conocida, y esto permite distinguir entre los tipos de cruce que hemos expuesto. Bajo este enfoque, el teorema de Justin aún una característica geométrica, los ángulos que forman distintos pliegues entre sí, con una combinatoria, la orientación de cada pliegue:

Teorema 2.3.7 (Justin [1]). Sea \mathcal{F} un patrón plano temporalmente. Sea P_1, \dots, P_{2n} un ciclo de caras del patrón con pliegues p_1, \dots, p_{2n} . Llamando θ_i al ángulo que forma el pliegue p_i con p_{i+1} (θ_{2n} el que forma p_{2n} con p_1), se cumple:

$$\theta_1 + \theta_3 + \dots + \theta_{2n-1} \equiv \theta_2 + \theta_4 + \dots + \theta_{2n} \equiv \frac{M - V}{2} \pi \pmod{2\pi},$$

donde V y M es la cantidad de pliegues valle y montaña respectivamente en $(p_i)_{i=1}^{2n}$. En particular, la suma alterna de los ángulos es igual a $0 \pmod{2\pi}$.

¹El lector puede comprobar esto si ha realizado la construcción, recortando longitudinalmente el papel para separar ambas fronteras, quedarán dos trozos de papel enlazados.

Demostración. Sea γ una curva cerrada simple en P que no atraviesa vértices y de tal forma que atraviesa cada pliegue p_i una única vez y de forma tangente a él. Una vez que abandona una cara mediante un pliegue, no vuelve a ella (ver la curva dibujada en la Figura 2.4). Por ser simple, se sabe que su giro total es $\pm 2\pi$, y además, como gira un ángulo θ_i entre dos caras:

$$\theta_1 + \dots + \theta_{2n} = \pm 2\pi. \quad (2.1)$$

La imagen de γ por f es una curva cerrada que puede presentar intersecciones. Calculemos de dos formas el giro \mathcal{R} que se experimenta al recorrer $f(\gamma)$:

En primer lugar, cambiando la orientación si es necesario, podemos suponer que recorre la cara P_1 en sentido positivo y la curva, por ser tangente a los pliegues y simple en esa cara, experimenta un giro θ_1 . Al cruzar p_2 , por efectuarse una simetría en la siguiente cara, su dirección se invierte, y girará un ángulo $-\theta_2$. Así sucesivamente hasta terminar el recorrido, donde habrá de cerrarse. Se tiene así

$$\mathcal{R} = \theta_1 - \theta_2 + \dots + \theta_{2n-1} - \theta_{2n}. \quad (2.2)$$

Por otra parte, es sabido (consultar el Teorema 2 de [15]) que si m es el número de autointersecciones de la curva γ , su giro total cumple

$$\mathcal{R} \equiv 2(m+1)\pi \pmod{4\pi}. \quad (2.3)$$

Sumando 2.1 y 2.2, y aplicando 2.3, se obtiene

$$2(\theta_1 + \theta_3 + \dots + \theta_{2n-1}) = \mathcal{R} \pm 2\pi \equiv 2(m+1)\pi \pm 2\pi \pmod{4\pi},$$

de donde

$$\theta_1 + \theta_3 + \dots + \theta_{2n-1} \equiv m\pi \pmod{2\pi},$$

y se obtiene lo mismo para los ángulos pares restando 2.1 y 2.2. Bastaría ver que $2m = M - V \pmod{4}$ para terminar.

Sea σ una curva paralela a γ lo suficientemente cercana a ella como para estar bien definida, atravesar los mismos pliegues, y no cruzar vértices. En particular, las curvas no se cruzan (asumiremos σ por dentro de γ , es decir, si se recorre γ en sentido horario, σ queda a su derecha). Por claridad, modificaremos ligeramente la curva σ en los diagramas.

Al efectuar el plegado, γ y σ se entrelazan, creando dos curvas $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\sigma}$ en un diagrama de enlaces. Cuando son lo suficientemente cercanas, se pueden evitar los puntos de entrelazado en todas las situaciones salvo en estas dos:

- En cada pliegue valle, $\tilde{\gamma}$ cruza a $\tilde{\sigma}$. Si estamos recorriendo una cara con la orientación conservada y llegamos a un pliegue valle, $\tilde{\gamma}$ se cruza con $\tilde{\sigma}$ en UL (ver Figura 2.7). Si en cambio es una cara con la orientación invertida, el cruce es OR. En ambos casos, se suma 1 al número de enlace. En cada pliegue montaña, las situaciones son inversas. Se da o bien un UR, o un OL: se resta 1. En definitiva, todos estos cruces se traducen en una suma total $V - M$.
- Cada vez que $\tilde{\gamma}$ se interseca consigo misma, suceden dos cruces entre $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\sigma}$. Siempre es de una cara sobre otra, y se producen del mismo modo, que es aquel de la autointersección de $\tilde{\gamma}$: ambos tienen el mismo signo (ver Figura 2.8). Los dos cruces tienen valor $\varepsilon_i 2$, donde $\varepsilon_i = \pm 1$ es el signo del cruce i -ésimo de $\tilde{\gamma}$, para $i = 1, \dots, m$.

Sumando todas las cantidades, se obtiene dos veces el número de enlace de las curvas. Como esta cantidad es invariante bajo isotopía, y las curvas γ y σ no se cruzan, es igual a 0. Así:

$$V - M + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i 2 = 0 \implies V - M + 2m \equiv 0 \pmod{4},$$

puesto que al sumar $4k$ a $\sum_{i=1}^m \varepsilon_i 2$ donde k es el número de cruces negativos se obtiene $2m$. \square

Notas. La igualdad de las sumas de ángulos pares e impares módulo 2π es cierta aun sin imponer la condición de isotopía: si no se cumple, el patrón no es plano.

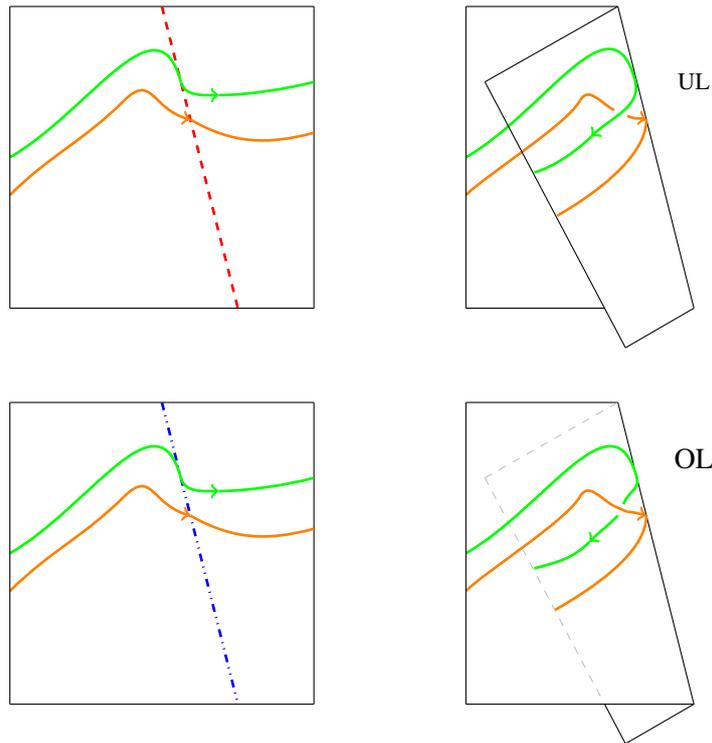


Figura 2.7: Cruces de las curvas $\tilde{\gamma}$ (en verde) y $\tilde{\sigma}$ (en naranja) según el pliegue en el que se incide desde una cara orientada positiva.

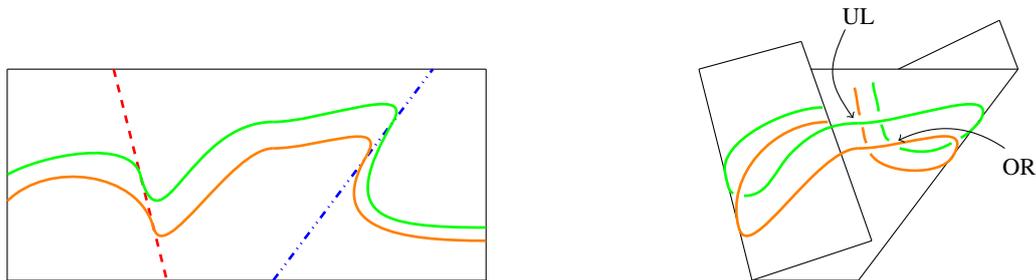


Figura 2.8: Cruces de $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\sigma}$ en varios casos. Notar que en los cuatro cruces centrales, el signo de todos ellos es igual: en concreto, el de $\tilde{\gamma}$ consigo misma.

2.3.3. Condiciones locales

El teorema de Justin tiene como consecuencias dos de los resultados más clásicos de origami plano, que versan sobre el carácter de pliegues incidentes a un mismo vértice: los teoremas de Kawasaki y Maekawa. A su vez, estos resultados nos dan más información sobre las propiedades geométricas de los patrones planos. Ya que localmente podemos tomar entornos poligonales, podemos suponer la condición de isotopía por el Teorema 1.4.3 de aquí en adelante sin perder generalidad.

Corolario 2.3.8 (Teorema de Kawasaki [16]). Sean $\theta_1, \dots, \theta_n$ los ángulos sucesivos que forman los pliegues incidentes a un vértice de un patrón plano (no necesariamente orientado). Entonces,

$$\sum_{j=1}^n (-1)^j \theta_j = 0.$$

En particular, la suma de los ángulos pares y la de los impares son iguales y valen π .

Demostración. Consideremos el ciclo de caras del patrón que rodean al vértice. Por el teorema de Justin,

la suma alterna de los ángulos es congruente a 0 mód 2π . Como además la suma de todos ellos es exactamente 2π y los ángulos son todos positivos, la única solución posible es la del enunciado. \square

Corolario 2.3.9. *Una cara de un patrón plano cuya frontera consista enteramente de pliegues es un polígono convexo.*

Demostración. Si no fuese el caso, el ángulo en un vértice cóncavo es mayor que π , lo que contradice el teorema de Kawasaki. \square

Corolario 2.3.10. *Si la hoja de papel P es un polígono convexo, dos caras superpuestas mantienen el mismo orden en toda su intersección.*

Demostración. De lo anterior, es inmediato que todas las caras son polígonos convexos. Si no es vacía, la intersección de dos polígonos convexos es un polígono convexo, en particular conexo, luego la función de orden tiene que mantenerse constante en toda ella. \square

Notas. Este resultado no es cierto si la hoja de papel es un polígono no convexo: el ángulo cóncavo permite a parte del papel pasar por debajo de uno de los lados y por encima del otro. Cuando se puede determinar sin ambigüedad la posición relativa de todas las caras que acaban superpuestas, como es el caso en el Corolario 2.3.10, se pueden ordenar las caras de abajo a arriba, lo que crea una relación de orden parcial. No probamos este hecho intuitivo.

Lema 2.3.11. *Sea \mathcal{F} un patrón plano y sea Q un vértice cualquiera de él. Entonces, localmente, una de las caras incidentes a Q está por debajo de todas las que se superponen a ella.*

Demostración. Situándonos en un entorno poligonal convexo centrado en Q , se pueden ordenar parcialmente las caras incidentes a Q por el corolario anterior. Así, por finitud, toda cadena de caras que mantenga un orden tiene que tener un mínimo: esa es la cara buscada. \square

Damos a continuación una demostración del clásico teorema de Maekawa basada en el de Justin que, creemos, es original.

Corolario 2.3.12 (Teorema de Maekawa [16]). *Sean M y V el número de pliegues montaña y valle que inciden en un mismo vértice de un patrón plano orientado. Entonces,*

$$M - V = \pm 2.$$

Demostración. Retomando la demostración del Teorema 2.3.7, se tiene

$$M - V = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i 2,$$

donde cada ε_i es signo del cruce de γ consigo misma. Veamos que podemos construir una curva γ de forma que esa suma sea ± 2 .

Como en la Figura 2.9, construir una curva escalonada γ donde el retorno a la posición inicial se hace en una cara que quede debajo de todas las que se superpongan con ella. Sin pérdida de generalidad, asumamos que la orientación de esa cara se conserva después del plegado. Al trenzar γ , ya que por la Proposición 2.3.2 el número de pliegues en torno al vértice es par, sufre un número par de cambios de dirección. Esto hace que deba pasar al otro lado del segmento de retorno (naranja) para poder cerrarse. Pero para ello, deberá cruzarlo un número impar de veces: como éste está por debajo, todos los cruces serán de tipo UL (positivo) o UR (negativo), y por cada uno de ellos, hay otro del otro tipo, menos el último: los elementos de la suma se cancelan dos a dos excepto un UR, dando así una suma $M - V = 2$. Si la orientación de la cara no se conserva en el plegado, se obtiene $M - V = -2$. \square

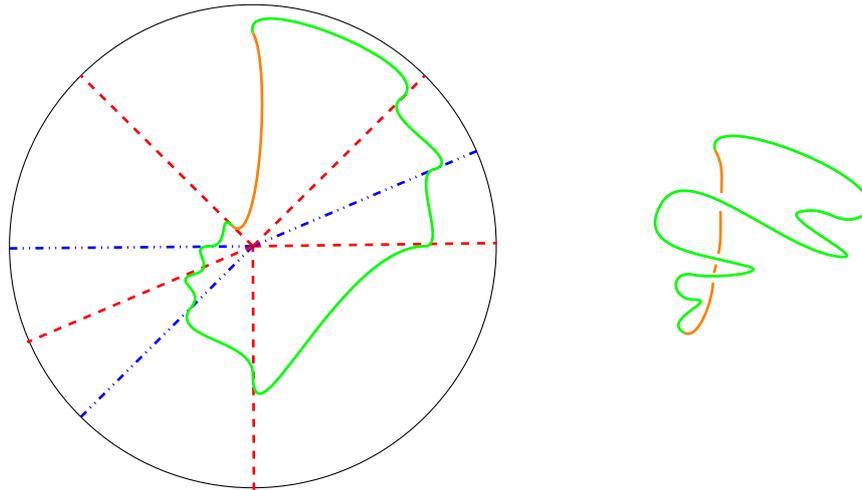


Figura 2.9: Construcción y trenzado de la curva escalonada en un patrón extraído de [17]. El retorno hacia arriba (dibujado en naranja por claridad) se produce en una cara que se sitúa por debajo de todas las que se superpongan a ella: así, todos los cruces son UL o UR.

Notas. El número de cruces que se producen es precisamente el número de veces que cambia de signo (estrictamente) la suma alterna

$$\frac{\theta_1}{2} - \theta_2 + \theta_3 - \dots - \theta_{2n} + \frac{\theta_1}{2}$$

Aunque, por supuesto, es irrelevante que hayamos dibujado el retorno en la mitad del ángulo. Acercándolo al pliegue izquierdo, el número de cruces que se producen ahora es el cambio de signos de

$$\theta_1 - \theta_2 + \dots + \theta_{2n-1} - \theta_{2n}$$

más uno. Así, puede pensarse que realmente el teorema de Maekawa es una consecuencia del teorema de Kawasaki, ya que se sigue de él que el número de cambio de signos de esa suma ha de ser par. Para un futuro trabajo, podría ser interesante estudiar si el cambio de signos de esa suma alterna revela alguna información sobre el carácter del vértice más allá de su paridad.

Como corolario, tenemos la siguiente propiedad:

Corolario 2.3.13. *Toda curva cerrada simple que rodee a un único vértice de un patrón plano debe cruzarse a sí misma un número impar de veces después del plegado. En particular, debe cruzarse consigo misma al menos una vez.*

Demostración. Si no, $M - V = 0 \pmod 4$, lo que contradice el teorema de Maekawa. □

Por último, exponemos una última condición necesaria local que se basa en evitar la autointersección del papel. Damos también una demostración original basada en argumentos de isotopía.

Teorema 2.3.14 (Lema Big-Little-Big [18]). *Sea un patrón plano \mathcal{F} de P , y un ciclo de caras P_1, \dots, P_{2n} incidentes a un vértice con pliegues p_1, \dots, p_{2n} . Sea θ_j el ángulo entre p_j y p_{j+1} . Si se cumple*

$$\theta_j < \min\{\theta_{j-1}, \theta_{j+1}\}$$

para un $j \in \{1, \dots, 2n - 1\}$, entonces p_j y p_{j+1} son de orientaciones contrarias.

Demostración. Cambiando de orientación si fuese necesario, supongamos que ambos pliegues son valles, de forma que las caras P_{j-1} y P_{j+1} queden ambas por encima de P_j , y que, renombrando, P_{j-1} quede por encima de P_{j+1} . Construir entonces dos curvas no enlazadas como en la Figura 2.10, donde se pide que el arco que realice la curva naranja sea mayor que θ_j y que el arco que realice la verde en la cara P_{j-1} sea a su vez mayor que éste. El resultado del plegado son dos curvas enlazadas (con número de enlace ± 1 , según las orientaciones), conque se ha roto la isotopía: la situación es imposible. □

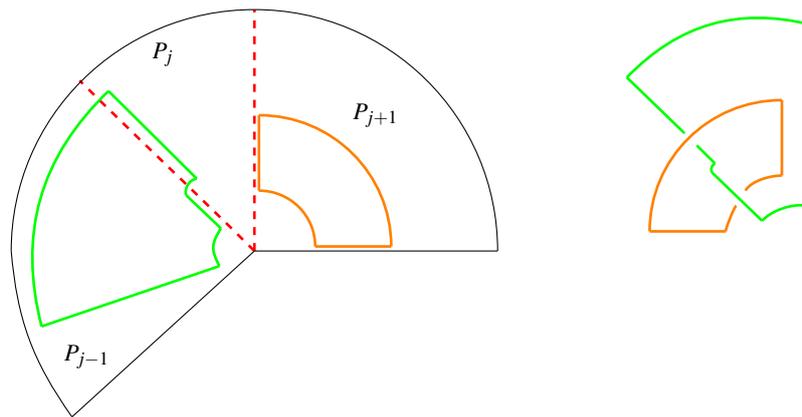


Figura 2.10: Construcción y trenzado de las curvas para la demostración del Teorema 2.3.14. La curva naranja cruza a la verde en dos momentos: en uno, la verde está en P_j , pasa por encima, y en el otro, está en P_{j-1} , pasa por debajo.

Notas. La demostración clásica e intuitiva de este hecho es que no se puede definir un orden de capas sin cruces entre las caras P_{j-1} y P_{j+1} . Al realizar uno de los pliegues, “tapa” al otro y no puede efectuarse en la misma dirección. Una manera de formalizar esto es retomar la definición de pliegues valle y montaña y viendo que no es posible dar un orden de capas entre las tres caras que cumpla las condiciones de la Definición 1.3.3 en los pliegues. Esta demostración pone en evidencia el cruce no permitido de otro modo, encontrando dos curvas que se entrelazarían tras el plegado.

2.4. Simplificaciones del problema de plegado plano

Como ya hemos comentado, el problema general de determinación de si un patrón es plano o no es NP-duro [12]. Esto ha llevado a múltiples simplificaciones y versiones del problema. Vamos a exponer, informalmente, algunas de ellas, que se detallan en [19].

En primer lugar, cuando el patrón tiene un único vértice, sí se puede decidir en tiempo lineal si es plano o no. El Cuadro A.3 en el Anexo muestra que ninguna de las tres condiciones locales que hemos expuesto antes (por separado, o juntas) son suficientes para determinar esto. La caracterización completa de los plegados planos requiere de una generalización del lema Big-Little-Big y de extender la teoría de plegados planos a conos. La idea es realizar un plegado algorítmico que elimina pliegues valle y montaña por parejas haciendo pliegues escalonados (ver Figura 2.11) hasta que o bien el modelo acabe siendo plano, o bien no se pueda efectuar un plegue escalonado.

Otra idea para simplificar el problema es exigir que los pliegues se sitúen en una cuadrícula, llamado plegado de mapas. Lo cierto es que esto por sí solo no es demasiado útil: existen plegados planos de mapas muy poco intuitivos y que, aunque realizables, requieren de grandes deformaciones del papel (ver tercer ejemplo de la Figura 2.12). Aún más, es un problema abierto de combinatoria determinar cuántas asignaciones valle-montaña existen que den un plegado plano de un mapa. Es por eso que se junta esta restricción con otra más, la de pliegues simples: pliegues rectos que recorren toda la hoja sin cambiar de orientación (ver ejemplos de la Figura 2.1). Determinar si un mapa puede plegarse por una sucesión de pliegues simples sí puede resolverse en tiempo lineal.

Por último, volviendo al punto de vista isotópico, podemos definir origamis rígidos: origamis que, a lo largo de todo su plegado, mantienen las zonas sin pliegues rígidas. Una forma práctica de imaginarlo es si podría plegar una plancha de metal con bisagras en los lugares con pliegues. La búsqueda de patrones planos que además puedan plegarse de forma rígida añade una condición al problema, que permite a veces descartar ciertos patrones. Es una hipótesis más débil que la de plegable por pliegues simples, ya que todo patrón plegable por pliegues simples es rígido, pero no necesariamente al revés (ver el primer y el segundo ejemplo de la Figura 2.12). Un estudio de patrones rígidos con un solo vértice puede encontrarse en [20].

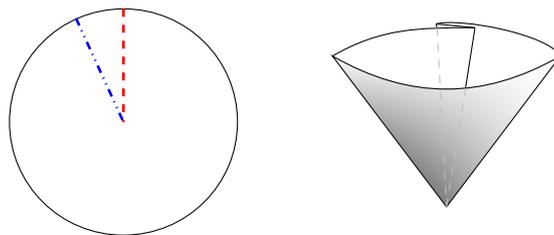


Figura 2.11: Realización de un cono en torno a un vértice a partir de un pliegue escalonado (denominado *crimp fold* en [19]).

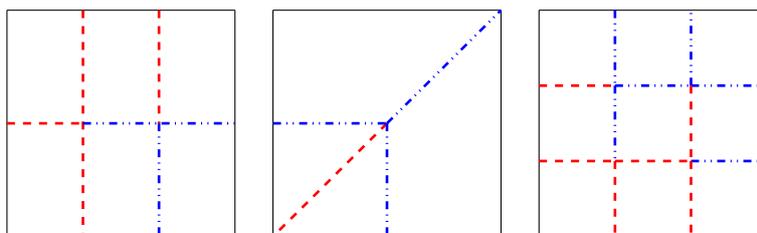


Figura 2.12: Tres patrones planos de complejidad creciente: el primero puede plegarse con pliegues simples, el segundo no, pero sí rígidamente, y el tercero requiere importantes deformaciones no rígidas para realizarse [19].

Observaciones finales

En este trabajo hemos visto solamente alguno de las múltiples enfoques desde los cuales se puede estudiar el origami a través de las matemáticas. En el campo del álgebra, el origami puede ser axiomatizado tal y como lo está la regla y el compás, y su constructibilidad puede ser analizada. De especial interés es que con origami, se pueden resolver problemas imposibles con regla y compás, como son la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la resolución de polinomios de tercer grado, este último debido a Beloch [21] [22]. En la matemática aplicada y la ingeniería, el origami ha inspirado paneles solares [11], microrobots [23] o brazos mecánicos [24] entre otros. Por último, el origami tiene una estrecha relación con las superficies desarrollables, en las cuales no hemos indagado, y que son de gran importancia en el diseño industrial y arquitectónico [25].

Por otra parte, las matemáticas han contribuido en la creación artística de origami de forma muy contundente. El mayor avance en este área fue de Robert J. Lang, creador del software de diseño de origami asistido por ordenador *TreeMaker*, muy utilizado por artistas de origami contemporáneos [26].

Apéndice A

Anexo

A.1. Proposición 1.2.8: prueba de la existencia.

Demostración. Sean $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ curvas en P de forma que $L(f \circ \delta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d_f(p, q) = d$, cuya existencia viene garantizada por definirse $d_f(p, q)$ como un ínfimo. Sean para cada δ_n los puntos $a_n, b_n \in P$ tal y como hemos definido a y b en la unicidad de la Proposición 1.2.8. En particular, $d(p, a_n) = d(q, b_n) = \frac{d}{2}$.

Sin pérdida de generalidad, sustituyamos $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ por curvas de longitud menor, uniendo las geodésicas entre p y a_n ; a_n y b_n ; y b_n y q . Así,

$$d = d(p, q) \leq d(p, a_n) + d(a_n, b_n) + d(b_n, q) = d_f(p, a_n) + d_f(a_n, b_n) + d_f(b_n, q) \leq L(f \circ \delta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d.$$

Como $d(p, a_n) = d(b_n, q) = \frac{d}{2}$, necesariamente $d_f(a_n, b_n) = d(a_n, b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, de modo que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: c$ (tomando subsucesiones si fuese necesario). Como ambas sucesiones se encuentran en las fronteras de las respectivas esferas geodésicas, cerradas, el punto límite debe encontrarse en la intersección de ambas. Sabemos que es único por el Lema 1.2.7, y la curva límite resultante –uniendo p con c y c con q mediante curvas de longitudes $\frac{d}{2}$ – es precisamente la geodésica γ que une p y q . Finalmente, por continuidad de f y la función longitud,

$$L(f \circ \gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f \circ \delta_n) = d,$$

luego en efecto γ siempre realiza la distancia post- f entre p y q . □

A.2. Proposición 1.3.5: prueba del homeomorfismo a un disco.

La demostración emplea herramientas de teoría de Morse. La nomenclatura y resultados empleados pueden encontrarse en [27], en concreto, empleamos el lema de Morse (Lema 2.2 en el texto), que enunciamos a continuación.

Lema (Morse). Sea $G : M \rightarrow N$ una función diferenciable entre variedades M y N y sea $p \in M$ un punto crítico no degenerado de G , es decir:

- $d_p G \equiv 0$.
- Dadas unas coordenadas locales (x_1, \dots, x_n) en p , la matriz Hessiana $H = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^i \partial x^j} (p) \right)_{i,j}$ tiene inversa.

Entonces, existen coordenadas (y_1, \dots, y_n) en un entorno de p de manera que

$$G(y_1, \dots, y_n) = G(p) - y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_n^2,$$

donde λ es el número de valores propios negativos de H . Llamamos a (y_1, \dots, y_n) coordenadas de Morse.

Demostración. Probemos primero que para un punto p que no esté en un pliegue, N_p es homeomorfo a un disco. Por el Corolario 1.2.10, existe un entorno U de p de manera que $f : U \rightarrow f(U)$ es un difeomorfismo. Restringiendo lo suficiente podemos suponer que $N_p \subseteq U$, luego es difeomorfo a $f(N_p)$, y así basta probar el resultado para $f(N_p) \subseteq f(U)$. Denotamos $\tilde{N}_p := f(N_p)$ y $\tilde{U} := f(U)$, y suponemos sin pérdida de generalidad que $f(p) = 0$.

Tomemos coordenadas locales (u_1, \dots, u_{n+1}) en torno a $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ de forma que \tilde{U} venga caracterizado por $\{u_{n+1} = 0\}$. Consideremos la función $G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$, de modo que $\tilde{N}_p = \tilde{U} \cap G^{-1}([0, \varepsilon^2])$. Es inmediato ver que G tiene un único punto crítico en 0 y matriz Hessiana en éste definida positiva. La restricción de G a \tilde{U} cumple igualmente esto, ya que al ser la matriz Hessiana de G en coordenadas (u_1, \dots, u_{n+1}) en 0 definida positiva, la de $G|_{\tilde{U}}$ también, pues no es más que la de G eliminando las últimas fila y columna.

Habiendo visto esto, por el lema de Morse, es posible:

- Transformar las n primeras coordenadas locales (u_1, \dots, u_n) en coordenadas de Morse (y_1, \dots, y_n) en \tilde{U} .
- Transformar la coordenada u_{n+1} en coordenada de Morse y_{n+1} para obtener coordenadas de Morse (y_1, \dots, y_{n+1}) en \mathbb{R}^{n+1} .

Así, garantizamos que en el entorno V de 0 donde estén definidas dichas coordenadas, $G(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_1^2 + \dots + y_{n+1}^2$ y $\tilde{U} \cap V = \{y_{n+1} = 0\}$. Restringiendo lo suficiente para que \tilde{N}_p esté contenido en V , se tiene

$$\tilde{N}_p = \tilde{U} \cap G^{-1}([0, \varepsilon^2]) = \{(y_1, \dots, y_n, 0) \mid y_1^2 + \dots + y_n^2 \leq \varepsilon^2\},$$

difeomorfo a un disco n -dimensional.

Para puntos en pliegues, la prueba parece más complicada. Damos un esbozo:

- Intersecar N_p con $\overline{P_1}, \dots, \overline{P_m}$, donde P_1, \dots, P_m son subvariedades de la descomposición de P (ver Definición 1.2.2) y $p \in \partial P_i$, $i = 1, \dots, m$.
- Restringiendo lo suficiente, esos fragmentos junto con las fronteras que los delimitan son homeomorfos a discos, repitiendo el argumento anterior para variedades con borde o esquinas.
- El pegado de discos por sus bordes con un punto en común p resultante es homeomorfo a un disco.

□

Notas. La demostración de este resultado está basada en una discusión del foro *Mathematics Stack Exchange* [28].

Patrón	Kawasaki	Maekawa	BLB	Plano
	×	✓	✓	×
	✓	×	✓	×
	✓	✓	×	×
	✓	✓	✓	✓
	✓	✓	✓	×

Cuadro A.3: Ejemplos de uso de los teoremas de Kawasaki y Maekawa y el lema Big-Little-Big para descartar patrones de plegado como no planos. Los tres primeros ejemplos demuestran que no son equivalentes, y el último ejemplo demuestra que no son suficientes.

Bibliografía

- [1] Jacques Justin. Towards a mathematical theory of origami. In *Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami, 1997*, 1997.
- [2] Erik D Demaine and Joseph O'Rourke. *Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra*, pages 172–192. Cambridge university press, 2007.
- [3] Erik D Demaine, Satyan L Devadoss, Joseph SB Mitchell, and Joseph O'Rourke. Continuous foldability of polygonal paper. In *CCCG*, pages 64–67, 2004.
- [4] Jo Nakashima. Duck. <https://jonakashima.com.br/2022/01/23/origami-duck/>.
- [5] Ekaterina Lukasheva. Energy-d. <http://gallery.bridgesmathart.org/exhibitions/2018-joint-mathematics-meetings/pavlovicen>.
- [6] Paul Jackson. One-crease. <https://passionforpaperandprint.wordpress.com/2014/04/21/paul-jacksons-one-crease-folds/>.
- [7] Manfredo Perdigao Do Carmo and J Flaherty Francis. *Riemannian geometry*, pages 74–77. Springer, english edition, 1992.
- [8] John M Lee. *Introduction to Riemannian manifolds*, pages 78–81. Springer, 2018.
- [9] John M Lee. *Smooth manifolds*, page 87. Springer, second edition, 2012.
- [10] Takuya Umesato, Toshiki Saitoh, Ryuhei Uehara, and Hiro Ito. Complexity of the stamp folding problem. In *Combinatorial Optimization and Applications: 5th International Conference, COCOA 2011, Zhangjiajie, China, August 4-6, 2011. Proceedings 5*, pages 311–321. Springer, 2011.
- [11] Koryo Miura. Triangles and quadrangles in space. In *Symposium of the International Association for Shell and Spatial Structures (50th. 2009. Valencia). Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures: Proceedings*. Editorial Universitat Politècnica de València, 2009.
- [12] Marshall Bern and Barry Hayes. The complexity of flat origami. In *SODA*, volume 96, pages 175–183. Atlanta, GA, 1996.
- [13] Reinhard Diestel. *Graph Theory*, pages 17–18. Springer, electronic edition, 2005.
- [14] Dale Rolfsen. *Knots and links*, page 135. American Mathematical Soc., 2003.
- [15] Hassler Whitney. On regular closed curves in the plane. *Compositio Mathematica*, 4:276–284, 1937.
- [16] Thomas Hull. The combinatorics of flat folds: a survey. In *Origami3: Proceedings of the 3rd International Meeting of Origami Science, Math, and Education*, pages 29–38, 2002.

- [17] David Eppstein. Realization and connectivity of the graphs of origami flat foldings. In *Graph Drawing and Network Visualization: 26th International Symposium, GD 2018, Barcelona, Spain, September 26-28, 2018, Proceedings 26*, pages 541–554. Springer, 2018.
- [18] Thomas C Hull. Coloring connections with counting mountain-valley assignments. In *Origami6: Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education. I. Mathematics*, pages 3–10, 2015.
- [19] Erik D Demaine and Joseph O’Rourke. *Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra*, pages 193–230. Cambridge university press, 2007.
- [20] Zachary Abel, Jason Cantarella, Erik D Demaine, David Eppstein, Thomas C Hull, Jason S Ku, Robert J Lang, and Tomohiro Tachi. Rigid origami vertices: Conditions and forcing sets. *arXiv preprint arXiv:1507.01644*, 2015.
- [21] Mordechai Ben-Ari. *Geometric Constructions Using Origami*, pages 141–150. Springer International Publishing, 2022.
- [22] Thomas C Hull. Solving cubics with creases: the work of Beloch and Lill. *The American Mathematical Monthly*, 118(4):307–315, 2011.
- [23] Tianqi Xu, Jiachen Zhang, Mohammad Salehizadeh, Onaizah Onaizah, and Eric Diller. Millimeter-scale flexible robots with programmable three-dimensional magnetization and motions. *Science Robotics*, 4(29):eaav4494, 2019.
- [24] Naoki Ando, Kohei Takahashi, and Sadayoshi Mikami. Disposable soft robotic gripper fabricated from ribbon paper with a few steps of origami folding. In *2022 25th International Conference on Mechatronics Technology (ICMT)*, pages 1–4. IEEE, 2022.
- [25] Yang Liu, Helmut Pottmann, Johannes Wallner, Yong-Liang Yang, and Wenping Wang. Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces. In *ACM SIGGRAPH 2006 Papers*, pages 681–689. 2006.
- [26] Robert J. Lang. <https://langorigami.com/article/treemaker/>.
- [27] John Willard Milnor, Michael Spivak, and Robert Wells. *Morse theory*. Number 51. Princeton university press, 1963.
- [28] <https://math.stackexchange.com/questions/2368552/intersecting-a-submanifold-with-a-small-ball>.

Agradecimientos

Un especial agradecimiento a la Escuela-Museo de Origami de Zaragoza (EMOZ) por permitirme consultar su copia del texto *Towards a mathematical theory of origami*, sin el cual buena parte del trabajo no hubiese sido posible.

Aprovecho para dar las gracias a José Ángel y Enrique por su labor, y a mis compañeros de grado y seres queridos, por su apoyo y por no tirar a la basura los trozos de papel que he ido dejando por el camino.