



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Ruptura espontánea de simetría: El bosón de Higgs

Autor

Ángel Martín Sarasa

Directora

Siannah Peñaranda Rivas

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
FACULTAD DE CIENCIAS
2022/2023

Índice

1. Introducción.	1
2. Modelo Estándar.	2
3. Ruptura espontánea de simetría. Mecanismo de Higgs.	4
3.1. Ejemplo simple de ruptura de simetría.	4
3.2. Ruptura de simetría global. Bosones de Golstone.	6
3.3. Ruptura de simetría gauge local.	8
3.4. Otros posibles potenciales.	11
3.5. Mecanismo de Higgs en el Modelo Estándar.	12
4. Desintegración del bosón de Higgs.	18
5. Superconductividad y partícula de Higgs.	22
6. Conclusiones.	23
Referencias	24
Anexos	25
A. Ejemplo simple de ruptura de simetría.	25
B. Ruptura de simetría global. Bosones de Golstone.	25
C. Ruptura de simetría gauge local.	27
D. Otros posibles potenciales.	29
E. Mecanismo de Higgs en el Modelo Estándar.	30
F. Desintegración del bosón de Higgs.	33
G. Superconductividad y partícula de Higgs.	38

1. Introducción.

Actualmente podríamos afirmar que los componentes fundamentales de toda la materia ordinaria en nuestro Universo son las denominadas partículas elementales, partículas sin estructura interna conocida hasta el momento. Estas se dividen entre partículas materiales, los fermiones agrupados en *quarks* y leptones, y partículas mediadoras de las interacciones. Hoy en día, sabemos que tenemos cuatro fuerzas o interacciones fundamentales: electromagnética, nuclear fuerte, nuclear débil y la gravedad. Para describir estas partículas e interacciones necesitamos desarrollar una *Teoría cuántica relativista de campos* (QFT - del inglés " *Quantum Field Theory* ").

El Modelo Estándar de las partículas elementales es una teoría cuántica de campos, basada en determinados grupos de simetría, que describe con notable éxito las partículas elementales y sus interacciones e incluye las interacciones electromagnética, débil y fuerte. Este modelo no sólo describe con una precisión sin precedente los resultados experimentales; sino que además predice la unificación de las dos primeras interacciones antes mencionadas en la denominada *teoría electrodébil*, con el anuncio de la existencia de los bosones mediadores de las interacciones débiles y la relación entre sus masas.

Todas las partículas que conforman el Modelo Estándar se han descubierto experimentalmente con una gran precisión y se ha determinado su masa. Sin embargo, en este modelo las partículas no tiene masa. Se hace necesario entonces introducir el denominado *Mecanismo de Higgs*. Este es un mecanismo de ruptura de la simetría que proporciona masa a las partículas del modelo y que tiene asociada la partícula de Higgs, último eslabón del Modelo Estándar que fue descubierto en el 2012 en el colisionador de hadrones LHC (del inglés *Large Hadron Collider*) en el CERN. El objetivo central de este trabajo ha sido precisamente el estudio y comprensión del mecanismo de ruptura de simetría y la partícula de Higgs.

En esta memoria discutiremos, en primer lugar, el contenido de materia e interacciones del Modelo Estándar y la importancia y consecuencias que conllevan sus leyes de simetría. Posteriormente, introduciremos, a través de ejemplos simplificados, el concepto de ruptura espontánea de simetría y el mecanismo de Higgs, que presentaremos en el marco del Modelo Estándar. En el capítulo siguiente se calculan las amplitudes de desintegración del bosón de Higgs y se hace un pequeño análisis comparativo de las razones de desintegración que hemos obtenido en este trabajo y los resultados de la literatura. Finalmente, veremos como el mecanismo de Higgs puede ser utilizado para explicar otros fenómenos, en concreto el de la superconductividad. Las conclusiones se incluyen al final del trabajo, así como las referencias utilizadas. Los cálculos realizados a lo largo del desarrollo de este trabajo se encuentran detallados en un anexo.

2. Modelo Estándar.

Las partículas de materia en el Modelo Estándar (ME) son fermiones de espín $\frac{1}{2}$ organizados en *quarks* y leptones, y sus correspondientes antipartículas. Los *quarks* son: up (u), down (d), charm (c), strange (s), top (t) y bottom (b). Los leptones son: el electrón e , el muón μ , el tau τ , y sus correspondientes neutrinos, ν_e, ν_μ y ν_τ . Además, tanto leptones como *quarks*, se organizan en tres familias o generaciones con características similares excepto por sus masas.

Por otro lado, las partículas mediadoras de las interacciones son bosones. El fotón (γ) junto con los bosones débiles W^\pm y Z son los mediadores de la interacción electrodébil. Además, tenemos ocho gluones mediadores de la interacción fuerte. La partícula de Higgs es un bosón incluido en el ME al considerar la ruptura espontánea de la simetría, como veremos más adelante. Es el responsable de explicar los orígenes de la masa de los bosones W^\pm y Z , los leptones cargados, los *quarks* y su propia masa.

El ME está basado, entre otras cosas, en la idea de la conservación de un determinado grupo de simetrías. Para ello, mediante el uso de las teorías *gauge* locales, cuyas transformaciones dependen de las coordenadas espacio-temporales, aseguramos que el Lagrangiano de interacciones sea invariante bajo las transformaciones del grupo elegido. Veamos esto mediante el Lagrangiano de Dirac, el cual usamos para describir los fermiones y que se establece de tal forma que sea invariante bajo transformaciones de simetría del grupo $U(1)$,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi. \quad (1)$$

La transformación del grupo $U(1)$ viene dada por $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi$,

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi} i\gamma^\mu [i\partial_\mu (\alpha(x)) + \partial_\mu] \psi, \quad (2)$$

donde $\alpha(x)$ es el parámetro de la transformación.

Si la transformación es global, $\alpha \neq \alpha(x)$, el parámetro de la transformación no depende de las coordenadas espacio-temporales y el Lagrangiano es invariante, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$. Sin embargo, si la transformación es local; el parámetro de la transformación depende de las coordenadas espacio-temporales y el Lagrangiano no es invariante. Para tener un Lagrangiano invariante bajo transformaciones locales debemos sustituir la derivada por la derivada covariante *gauge*,

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu(x) = \partial_\mu + ieA_\mu(x), \quad (3)$$

donde la idea es añadir el término $A_\mu(x)$ para cancelar el $i\partial_\mu (\alpha(x))$ y restaurar la invariancia *gauge*. Además, $A_\mu(x)$ es un campo vectorial que es función del espacio-tiempo porque $\alpha(x)$ también lo es. La constante ie se añade por conveniencia.

Para restaurar la invariancia *gauge* debemos también especificar como transforma el campo vectorial bajo transformaciones *gauge*,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} (\partial_\mu \alpha(x)). \quad (4)$$

En consecuencia,

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = \partial_\mu + ieA'_\mu = D_\mu - i(\partial_\mu \alpha). \quad (5)$$

Veamos como esto nos restaura la invariancia en nuestro Lagrangiano de Dirac,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu) \psi \rightarrow \mathcal{L}' = e^{-i\alpha} \bar{\psi} (i\gamma^\mu D'_\mu) e^{i\alpha} \psi. \quad (6)$$

Desarrollando el término $D'_\mu e^{i\alpha} \psi$,

$$\begin{aligned} D'_\mu e^{i\alpha} \psi &= (D_\mu - i(\partial_\mu \alpha)) e^{i\alpha} \psi = (\partial_\mu + ieA_\mu - i(\partial_\mu \alpha)) e^{i\alpha} \psi \\ &= e^{i\alpha} (i(\partial_\mu \alpha) + \partial_\mu + ieA_\mu - i(\partial_\mu \alpha)) \psi = e^{i\alpha} D_\mu \psi, \end{aligned} \quad (7)$$

y sustituyendo en el Lagrangiano obtenemos,

$$\mathcal{L}' = e^{-i\alpha} \bar{\psi} i\gamma^\mu e^{i\alpha} D_\mu \psi = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu) \psi = \mathcal{L}. \quad (8)$$

Si reorganizamos la expresión del Lagrangiano podemos ver que obtenemos el Lagrangiano original de Dirac, que correspondería con el Lagrangiano libre del campo fermiónico, más un término extra, que hemos llamado $\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{QED}}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu) \psi = \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)) \psi = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi - e\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \\ &= \mathcal{L}_D - e\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{QED}}. \end{aligned} \quad (9)$$

En esta expresión $\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{QED}} = -e\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$ corresponderá con un término de interacción entre el campo fermiónico ψ y el campo A_μ .

Por lo tanto, el procedimiento para hacer una teoría invariante bajo transformaciones locales conduce tanto a introducir nuevos campos bosónicos, llamados campos de *gauge*, como a generar una teoría de interacciones. El número de campos de *gauge* y las características particulares de las interacciones dependen del grupo de simetría. En concreto, habrá tantos campos como generadores del grupo.

En el ME la fuerza débil y la electromagnética están unificadas en la interacción electrodébil, actuando sobre los mismos campos fermiónicos, siendo la simetría asociada $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Además, a través del teorema de Noether, podemos asegurar que la simetría $SU(2)$ conserva el isospín débil (T) y la $U(1)$ la hipercarga débil (Y). El porqué en el ME las partículas no tienen masa es precisamente debido a que los términos responsables de dársela, $\frac{1}{2}m_b^2 A_\mu A^\mu$ para bosones y $m_f \bar{\psi} \psi$ para fermiones, no respetan la invariancia. Veámoslo para los bosones,

$$\frac{1}{2}m_b A_\mu A^\mu \rightarrow \frac{1}{2}m_b A'_\mu A'^\mu = \frac{1}{2}m_b \left(A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \right) \left(A^\mu - \frac{1}{e} \partial^\mu \alpha \right) \neq \frac{1}{2}m_b A_\mu A^\mu. \quad (10)$$

Para el caso de los fermiones tenemos que tener en cuenta que las partículas *left* (levógiras) acoplan débil y electromagnéticamente, mientras que las *right* (dextrógiras) solo electromagnéticamente. Por tanto, sus campos transforman como,

$$\psi_L \rightarrow \psi'_L = e^{i\theta_a(x)T^a + i\alpha(x)Y} \psi_L \quad ; \quad \psi_R \rightarrow \psi'_R = e^{i\alpha(x)Y} \psi_R. \quad (11)$$

Así, descomponiendo los campos en los estados levógiro y dextrógiro, tenemos que,

$$\begin{aligned} m_f \bar{\psi} \psi &\rightarrow m_f \bar{\psi}' \psi = m_f (\bar{\psi}'_R + \bar{\psi}'_L) (\psi'_R + \psi'_L) = [\bar{\psi}_R \psi_R = \bar{\psi}_L \psi_L = 0] \\ &= m_f (\bar{\psi}'_R \psi'_L + \bar{\psi}'_L \psi'_R) \\ &= m_f \left(e^{-i\alpha(x)Y} \bar{\psi}_R e^{i\theta_a(x)T^a + i\alpha(x)Y} \psi_L + e^{-i\theta_a(x)T^a - i\alpha(x)Y} \bar{\psi}_L e^{i\alpha(x)Y} \psi_R \right) \\ &\neq m_f (\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R). \end{aligned} \quad (12)$$

Por consiguiente, con la finalidad de incorporar las masas de las partículas, se incluye además un Lagrangiano escalar que rompa espontáneamente la simetría y permite la existencia de términos de masa en el Lagrangiano del ME mediante el mecanismo de Higgs. En los siguientes capítulos nos centramos en discutir estos últimos puntos.

3. Ruptura espontánea de simetría. Mecanismo de Higgs.

En esta sección primero estudiaremos como implementar la ruptura de simetría y la generación de las masas a través de algunos ejemplos simplificados. Finalmente, analizaremos el caso del mecanismo de Higgs en el ME.

3.1. Ejemplo simple de ruptura de simetría.

En primer lugar, considérese un Lagrangiano simple para un campo escalar real ϕ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad \text{donde} \quad V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4. \quad (13)$$

Las características de estos campos, tales como su masa o sus interacciones, dependerán de la elección del signo de los dos parámetros libres del potencial, μ y λ . Dado que el potencial debe tener al menos un mínimo ², el auto-acoplamiento debe satisfacer que $\lambda > 0$, sin embargo no hay restricción aparente sobre el signo de μ^2 . Notar que \mathcal{L} es simétrico bajo $\phi \rightarrow -\phi$. Además, el término ϕ^4 describe una auto-interacción con intensidad λ . Otros términos ϕ^n con $n > 4$, siendo n par, o potenciales con exponentes impares deben ser excluidos por razones que se discutirán en 3.4.

Para encontrar un espectro de excitación del sistema descrito por el Lagrangiano, primero debemos encontrar los mínimos del potencial $V(\phi)$. El mínimo será nuestro estado fundamental (vacío) del sistema. Luego, estudiaremos las perturbaciones en torno a la

²Los cálculos detallados de los signos de los parámetros μ y λ se presentan en el anexo A.

vecindad del estado fundamental y encontraremos los estados excitados. En una teoría de campos el estado fundamental es el vacío y las excitaciones son partículas. Las masas de estas partículas están definidas por la forma que toma el Lagrangiano al estudiarlo en torno a la vecindad del mínimo, como veremos más adelante.

Sea el caso de $\mu^2 > 0$. Para estudiar el espectro de la partícula debemos estudiar el Lagrangiano para pequeñas perturbaciones entorno al mínimo (vacío), figura 1a. En este caso tenemos un único estado de vacío en $\phi = 0$ y es simétrico bajo reflexión de ϕ . De esta manera, vemos que el Lagrangiano (13) simplemente describe una partícula libre con masa μ y una auto-interacción de 4 puntos.

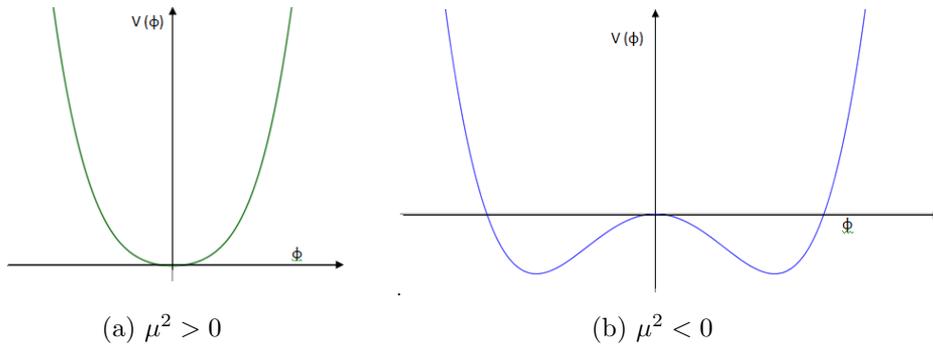


Figura 1: Potencial $V(\phi)$ del campo escalar real ϕ .

Sea ahora el caso de $\mu^2 < 0$. A primera vista, podría parecer que estamos describiendo con nuestro Lagrangiano una partícula de masa imaginaria con una auto-interacción de 4 puntos. Sin embargo, mirando el potencial, figura 1b, vemos que no tiene sentido interpretar el espectro de la partícula usando teoría de perturbaciones en el campo ϕ en torno a $\phi = 0$ porque al no ser un mínimo estable no convergerá. Ahora, el sistema tiene dos estados de mínima energía (vacíos) con valor $V_{min} = -\frac{v^4\lambda}{4}$ y localizados en,

$$\phi_1 = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv v > 0 \quad \text{y} \quad \phi_2 = -\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv -v, \quad (14)$$

siendo v el denominado valor esperado en el vacío, que denotaremos por *v.e.v* - del inglés *vacuum expectation value*.

Para encontrar el espectro de la partícula (e interpretar la teoría correctamente), realizaremos perturbaciones entorno al mínimo de energía. Para ello lo primero que debemos hacer es situarnos en este mínimo, lo que conseguimos con un cambio de variables en los campos. Así, introducimos un nuevo campo escalar centrado en el vacío, $\eta = \phi - v$, y expandimos el Lagrangiano en términos de este nuevo campo,

$$\text{Término cinético: } \mathcal{L}_{kin}(\eta) = \frac{1}{2}\partial_\mu(\eta + v)\partial^\mu(\eta + v) = \frac{1}{2}\partial_\mu(\eta)\partial^\mu(\eta) \quad \text{porque} \quad \partial_\mu(v) = 0$$

$$\text{Potencial: } V(\eta) = \frac{1}{2}\mu^2(\eta + v)^2 + \frac{1}{4}\lambda(\eta + v)^4 = \lambda v^2\eta^2 + \lambda v\eta^3 + \frac{1}{4}\lambda\eta^4 - \frac{1}{4}\lambda v^4, \quad (15)$$

donde en la última igualdad se usa que $\mu^2 = -\lambda v^2$, según (14)³. De esta forma, obtenemos el Lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu(\eta)\partial^\mu(\eta) - \lambda v^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \frac{1}{4}\lambda v^4. \quad (16)$$

Destacamos que si bien el Lagrangiano sigue siendo simétrico para el campo ϕ , las perturbaciones en torno al mínimo no son simétricas para η , $V(\eta) \neq V(-\eta)$, siendo este el ejemplo más simple de ruptura espontánea de la simetría. Es decir, hemos roto la simetría global, lo que es una consecuencia de la ruptura de simetría local del mínimo de energía.

En este Lagrangiano tenemos términos de masa y términos de interacción: El término en η^2 lo podemos interpretar como el término de masa y los términos tercero y cuarto corresponderían a las auto-interacciones. De esta manera el Lagrangiano (16) describe un campo escalar con masa $m_\eta^2 = 2\lambda v^2 = -2\mu^2$.

3.2. Ruptura de simetría global. Bosones de Golstone.

Consideremos ahora la existencia de un campo escalar complejo $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$. El Lagrangiano está dado por,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - V(\phi), \quad \text{con} \quad V(\phi) = \mu^2(\phi^*\phi) + \lambda(\phi^*\phi)^2. \quad (17)$$

Este Lagrangiano es invariante bajo una transformación *gauge* global $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha}\phi$, luego tiene una simetría global U(1). Si desarrollamos tanto el término cinético como el potencial en (17), tenemos que:

$$\begin{aligned} V(\phi_1, \phi_2) &= \frac{\mu^2}{2}(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) + \frac{\lambda}{4}((\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2))^2 \\ &= \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\mathcal{L}(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (19)$$

En el lagrangiano podemos apreciar la existencia de dos bosones escalares cuyos campos son ϕ_1 y ϕ_2 . Como en la sección anterior, pasamos a estudiar los mínimos del potencial⁴.

Si $\mu^2 > 0$ es fácil darse cuenta, tanto gráficamente (figura 2a) como analíticamente que tenemos un único mínimo estable en $\phi_1 = \phi_2 = 0$. En este caso los dos primeros términos en el Lagrangiano son términos cinéticos de los dos bosones escalares ϕ_1 y ϕ_2 , los dos siguientes corresponderían a dos partículas de masa μ y el último sus interacciones.

Cuando $\mu^2 < 0$ (figura 2b), el potencial escalar tiene infinitos mínimos a lo largo del círculo $\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2$, con valor $V(\phi)_{min} = -\frac{\lambda}{4}v^4 < 0$. Al igual que en el caso anterior, necesitamos estudiar la situación en torno a la vecindad (pequeñas perturbaciones) del vacío.

³Los cálculos para $V(\eta)$ se desarrollan en el anexo B.

⁴Todos los cálculos de esta sección se presentan de manera explícita en el anexo B.

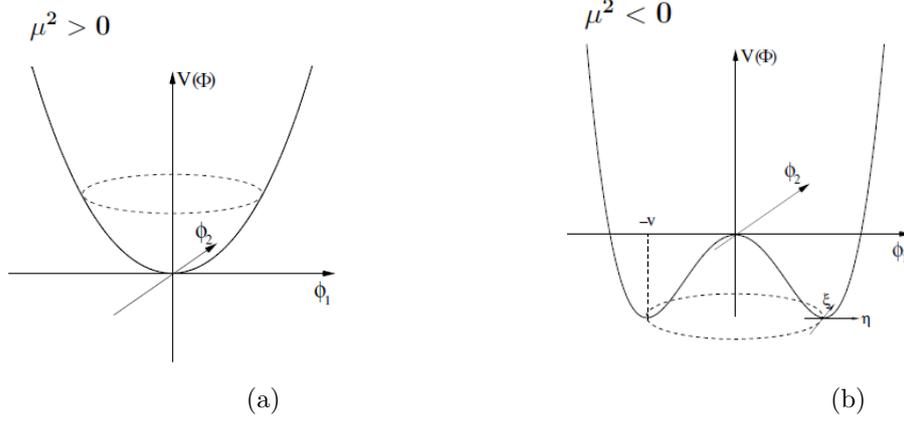


Figura 2: Potencial V del campo escalar complejo ϕ .

Para situarnos en el mínimo del potencial, hacemos entonces un cambio de variable en los campos escalares tal que escogemos el campo escalar real ϕ_1 con un *v.e.v* distinto de cero, $\phi_1 = v$ y $\phi_2 = 0$.

Por comodidad, conviene definirse los campos trasladados η y ξ , con $\eta = \phi_1 - v$ y $\xi = \phi_2$. De esta manera, el campo escalar complejo ϕ puede ser también parametrizado de la forma

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + v + i\xi), \quad (20)$$

con el origen de estos nuevos campos ($\eta=\xi=0$) en el vacío.

Reescribimos el Lagrangiano en términos de estos campos,

$$\text{Termino cinético: } \mathcal{L}_{kin}(\eta, \xi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2, \quad (21)$$

$$\text{Potencial: } V(\eta, \xi) = -\frac{1}{4}\lambda v^4 + \lambda v^2 \eta^2 + \lambda v \eta^3 + \frac{1}{4}\lambda \eta^4 + \frac{1}{4}\lambda \xi^4 + \lambda v \eta \xi^2 + \frac{1}{2}\lambda \eta^2 \xi^2.$$

De esta manera obtenemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\eta, \xi) = & \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - (\lambda v^2) \eta^2}_{\text{partícula masiva escalar } \eta} + \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + 0 \cdot \xi^2}_{\text{partícula no masiva escalar } \xi} \\ & + \underbrace{\frac{1}{4}\lambda v^4 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda \eta^4 - \frac{1}{4}\lambda \xi^4 - \lambda v \eta \xi^2 - \frac{1}{2}\lambda \eta^2 \xi^2}_{\text{términos de interacción}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Ahora el Lagrangiano describe las interacciones de dos campos escalares reales, η y ξ . Noté que el lagrangiano no es simétrico respecto al campo η , es decir, hemos roto la simetría global. Con lo visto previamente, ignorando los términos de interacción, podemos asegurar que este Lagrangiano describe la cinemática tanto de una partícula masiva η , de masa $m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2} > 0$, como de una partícula no masiva ξ . Este bosón sin masa es consecuencia directa del teorema de Goldstone. La razón física es la siguiente: Las excitaciones radiales, descritas por η , están en contra del incremento del potencial. El potencial obliga a las partículas a volver al mínimo y estas excitaciones son masivas. Las excitaciones en la

dirección del círculo, descritas por ξ , no tienen ninguna fuerza de retorno y carecen de masa. Este es el primer ejemplo del teorema de Goldstone: cuando la simetría global se rompe espontáneamente, aparece un bosón sin masa; también conocido como bosón de Goldstone.

3.3. Ruptura de simetría gauge local.

Como paso final previo a introducir el mecanismo de Higgs en el ME para obtener la masa de los bosones del mismo, vamos a estudiar lo que sucede si se rompe una teoría invariante *gauge* local. Esto lo hacemos con la finalidad de explicar de manera más sencilla como el mecanismo de Higgs puede aportar masa a las partículas de nuestro modelo. Concretamente, nos centraremos en el caso simple de una simetría local abeliana $U(1)$, la cual contiene un campo escalar complejo y un campo electromagnético A_μ . Estamos refiriéndonos a la denominada QED, del inglés *Quantum Electrodynamics*.

La invariancia *gauge* local $U(1)$ requiere que el Lagrangiano sea invariante bajo transformaciones del tipo $\phi' \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi$. Esto último se consigue cambiando a una derivada covariante *gauge* con una regla de transformación especial para el campo vectorial. En concreto,

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad y \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \quad (23)$$

El Lagrangiano invariante para un campo escalar complejo está dado por ⁵,

$$\mathcal{L} = (D^\mu\phi)^\dagger (D_\mu\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\phi), \quad (24)$$

donde $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ es el término cinético del campo *gauge* (fotón) y $V(\phi)$ es el potencial definido en (17) con $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$. Desarrollando este Lagrangiano llegamos a,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 + \frac{e^2}{2}A_\mu^2\phi_1^2 + \frac{e^2}{2}A_\mu^2\phi_2^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ & + e\partial^\mu\phi_1 A_\mu\phi_2 - e\partial^\mu\phi_2 A_\mu\phi_1. \end{aligned} \quad (25)$$

Si interpretamos físicamente los distintos términos del Lagrangiano encontramos que los dos primeros corresponden con la cinemática de los campos escalares ϕ_1 y ϕ_2 , el tercer término con la masa de estos bosones ($m=\mu$), el cuarto nos da las auto-interacciones de los campos escalares e interacciones entre ellos y los siguientes dos términos corresponden con la interacción de estos campos con el campo vectorial A_μ . El siguiente término describe la cinemática del campo vectorial (fotón no masivo). Los últimos dos términos aparecen debido a la derivada covariante *gauge* que se introduce para exigir la invariancia de Lorentz (local y relativista). Claramente, hemos obtenido un fotón (campo bosónico vectorial A_μ) no masivo y dos partículas masivas escalares ϕ_1 y ϕ_2 de masa μ .

⁵Todos los cálculos de esta sección se presentan de manera explícita en el anexo C.

Ahora, si $\mu^2 > 0$ el potencial corresponde con el que se presenta en la figura 2a y como ya estudiamos en las secciones anteriores sólo tenemos un mínimo en el origen. Nos centramos entonces en el caso de interés, $\mu^2 < 0$. Como hemos discutido antes, si $\mu^2 < 0$ todos los puntos que satisfacen $\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2$ son mínimos. Para encontrar el espectro de los campos escalares debemos realizar perturbaciones en torno al vacío. Para ello, conviene definir unos campos trasladados cuyo origen se encuentre precisamente en algún punto de los infinitos mínimos, como por ejemplo $\eta = \phi_1 - v$ y $\xi = \phi_2$ con origen en $\phi_1 = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$ y $\phi_2 = 0$. De esta manera, nuestro campo queda $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + v + i\xi)$.

Reescribiendo el Lagrangiano (24) en función de estos nuevos campos resulta obvio que la contribución del potencial es la misma que en (21). Sin embargo, al tener ahora una invariancia *gauge* local, no podemos decir lo mismo del término cinético al cual le aparecen términos extra. Para este término obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kin} &= (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 + e\partial^\mu \phi_1 A_\mu \phi_2 - e\partial^\mu \phi_2 A_\mu \phi_1 + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2 \phi_2^2 \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2 \eta^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2 \xi^2 + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2 v^2 + e^2 A_\mu^2 \eta v \\
&\quad + e\partial^\mu \eta A_\mu \xi - e\partial^\mu \xi A_\mu \eta - e\partial^\mu \xi A_\mu v.
\end{aligned} \tag{26}$$

El Lagrangiano total reescrito en los nuevos campos está dado por,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \lambda v^2 \eta^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + 0 \cdot \xi^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu^2 - evA_\mu(\partial^\mu \xi) \\
&\quad + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2 \eta^2 + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2 \xi^2 + e^2 A_\mu^2 \eta v + e\partial^\mu \eta A_\mu \xi - e\partial^\mu \xi A_\mu \eta \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda(-v^4 + \eta^4 + 4\eta^3 v + \xi^4 + 2\eta^2 \xi^2 + 4\eta v \xi^2),
\end{aligned} \tag{27}$$

donde las dos últimas líneas son términos de interacción.

En este Lagrangiano tenemos un término $\frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu^2$, lo cual nos indica que nuestro campo vectorial (fotón) tiene una masa de $m_\gamma = ev = -e\frac{\mu^2}{\lambda}$. Además, también podemos identificar una partícula escalar η con masa $\sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$ y otra ξ sin masa. Si observamos en detalle el Lagrangiano veremos que aunque este mantenga su simetría para los campos originales ϕ_1 y ϕ_2 , la pierde en torno al vacío, es decir para los campo η y ξ . Esto es lo que conocemos como ruptura espontánea de la simetría y atendiendo al teorema de Goldstone, que nos indica que existirán tantos bosones no masivos como simetrías globales hayan sido rotas espontáneamente, podemos justificar la existencia del bosón no masivo.

Además, en (27) aparecen términos de una difícil interpretación física, como $evA_\mu(\partial^\mu \xi)$. Sin embargo, podemos eliminar el bosón de Goldstone ξ utilizando las transformaciones de *gauge* definidas en (23), buscando así redefinir A_μ a través de fijar el *gauge*. Nótese que si el Lagrangiano presenta simetrías locales estos bosones de Goldstone se absorben por los

bosones de *gauge* asociados a las simetrías rotas, dotándolos de masa. Ignorando los términos de interacción en (27) y manipulando el resto de términos que involucran a A_μ y ξ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 - evA^\mu(\partial_\mu \xi) + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu^2 &= \frac{1}{2}e^2v^2 \left(A_\mu - \frac{1}{ev}(\partial_\mu \xi) \right)^2 = \left[\alpha = -\frac{\xi}{v} \right] \\ &= \frac{1}{2}e^2v^2 \left(\underbrace{A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha}_{A'_\mu \text{ como indica (23)}} \right)^2 = \frac{1}{2}e^2v^2(A'_\mu)^2. \end{aligned} \quad (28)$$

En consecuencia el campo ϕ trasforma como,

$$\phi' = e^{i\alpha}\phi = e^{-\frac{\xi}{v}i} \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta + i\xi) \approx e^{-i\frac{\xi}{v}} \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta) e^{i\frac{\xi}{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h), \quad (29)$$

donde en la aproximación se usa el desarrollo en primer orden de la exponencial.

Por tanto, es justo la transformación $\alpha = -\frac{\xi}{v}$, conocida como *gauge* unitario, la que nos soluciona tanto el problema de los grados de libertad como de la interpretación de $evA_\mu(\partial^\mu \xi)$. Lo podemos ver más claro si calculamos la forma explícita del Lagrangiano ahora con este nuevo campo $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h)$. Aplicando por tanto la transformación encontrada sobre el Lagrangiano original (24) tenemos,

$$\begin{aligned} \text{Termino cinético: } \mathcal{L}_{kin}(h) &= (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = \frac{1}{2}((\partial_\mu h)^2 + e^2A_\mu^2v^2 + e^2A_\mu^2h^2 + 2e^2A_\mu^2vh), \\ \text{Potencial: } V(h) &= \frac{1}{4}\lambda(-v^4 + 4v^2h^2 + 4vh^3 + h^4). \end{aligned} \quad (30)$$

Teniendo en cuenta que el término $-\frac{1}{4}\lambda v^4$ es constante y no aporta información, el Lagrangiano bajo el *gauge* unitario queda,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2v^2A_\nu^2 + e^2vA_\nu^2h + \frac{1}{2}e^2A_\mu^2h^2 - \lambda vh^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4. \quad (31)$$

Finalmente, se ha conseguido obtener un Lagrangiano donde todos los términos tienen interpretación física y donde no aparece el término del bosón de Goldstone, por lo que los grados de libertad concuerdan con los iniciales. Cabe destacar que este desarrollo nos muestra de manera natural la existencia de una nueva partícula masiva bosónica h , denominada partícula de Higgs.

Interpretemos ahora los términos del Lagrangiano obtenido,

- Los dos primeros términos corresponden al bosón de Higgs, el primero nos describe su cinemática y el segundo nos da la masa $m_h = \sqrt{2\lambda v^2}$. Estos términos tienen la misma forma de la densidad lagrangiana de Klein-Gordon que describe partículas de espín cero, por tanto parece razonable pensar que el Higgs es un bosón de espín nulo.
- Los dos siguientes términos corresponden al bosón vectorial de la teoría, el fotón. En concreto el primero nos describe su cinemática y el segundo nos da la masa $m_\gamma = ev$.

- Los dos siguientes términos describen las interacciones entre el Higgs y el fotón. El quinto describe una interacción de tres puntos Higgs-fotón-fotón con constante de acoplo proporcional a $e^2 v = e m_\gamma$, y el siguiente una interacción de cuatro puntos entre fotón y Higgs con constante de acoplo proporcional a $\frac{1}{2}e^2 = \frac{m_\gamma^2}{2v^2}$. Además, como la carga es una magnitud conservada en el vértice de interacción, podemos deducir de estos términos que el Higgs es una partícula de carga nula.
- Los dos últimos términos hacen referencia a las auto-interacciones del Higgs. En concreto el primero nos describe una auto-interacción de tres puntos con constante de acoplo proporcional a $-\lambda v = -\frac{m_h^2}{2v}$ y el siguiente una auto-interacción de cuatro puntos con constante de acoplo proporcional a $-\frac{1}{4}\lambda$.

Aunque hemos obtenido una masa para el fotón distinta de cero en este modelo simple, en el ME obtenemos una masa nula, como veremos en 3.5.

3.4. Otros posibles potenciales.

Hemos visto a lo largo de las secciones anteriores que si incluimos un potencial de la forma $V(\phi) = \mu^2(\phi^*\phi) + \lambda(\phi^*\phi)^2$ en nuestro Lagrangiano somos capaces de dotar de masa a los bosones vectoriales de nuestra teoría. Sin embargo, sería totalmente natural y legítimo cuestionarse porque este potencial y no otro, pues esto podría conducir a diferencias en las masas de las partículas derivadas. ¿Se escoge este por simplicidad o hay razones fundamentales para esta elección?[1] Es por eso que nace esta sección, para responder a estas preguntas ⁶. Para ello trabajaremos, por comodidad, con un campo real $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h)$ unidimensional.

Primero, si consideramos un potencial con términos ϕ^n , $V(\phi) = \mu^2\phi^2 + \beta\phi^n$, con $n \geq 3$ e impar, entonces los puntos críticos son $\phi = 0$ y $\phi = \left(-\frac{2\mu^2}{n\beta}\right)^{\frac{1}{n-2}} \equiv v$. A través de la segunda derivada es fácil ver que si $\mu^2 > 0$ entonces $\phi = 0$ es un mínimo ($V''(0) > 0$) y $\phi = v$ es un máximo ($V''(v) < 0$). Si $\mu^2 < 0$ pasa justo al contrario. Es decir, en ambos casos tenemos un único mínimo. Si nos centramos en el caso $\mu^2 < 0$, hemos deducido que el único mínimo está en $\phi = v = \left(-\frac{2\mu^2}{n\beta}\right)^{\frac{1}{n-2}}$, es decir, que se está rompiendo la simetría explícitamente, no dinámicamente. Esto supone un problema, porque una característica clave de nuestra teoría es que nuestro Lagrangiano no rompe la simetría bajo un cierto grupo. Por lo tanto, el potencial de Higgs, como parte de nuestro Lagrangiano, debe ser invariante bajo la transformación *gauge* en la que estemos y como hemos podido ver agregar potencias impares violaría esta simetría deseada.

Segundo, si consideramos un potencial de la forma $V(\phi) = \mu^2\phi^2 - \lambda\phi^4 + \frac{4}{3}\delta\phi^6$ con $\mu^2, \lambda < 0$ y $\delta = -\frac{2\lambda^2}{\mu^2}$, podemos ver que tenemos dos mínimos en $\phi = \pm\sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} \equiv \pm v'$. A diferencia de un potencial que contenga un término de exponente impar este potencial si es simétrico. De

⁶Todas las cuentas de esta sección están explícitas en el anexo D.

esta manera, podemos calcular la masa de la partícula usando que el valor de la segunda derivada en el mínimo es igual a $\frac{1}{2}m_h^2$. Si además recordamos que en la sección 3.1 se llega a $m_h^2(\text{old}) = 2\lambda v^2$ obtenemos que $m_h = 2\sqrt{3}m_h(\text{old})$.

Finalmente, hemos llegado a que con un potencial que contenga términos en el campo escalar con exponentes pares superiores a orden cuatro obtenemos también la masa de una partícula escalar, siendo esta proporcional a la obtenida con un potencial de orden máximo ϕ^4 . Por lo tanto, invocando el principio de parsimonia ⁷, si usando solo un término de orden cuatro el mecanismo funciona no hay necesidad de extenderlo más.

3.5. Mecanismo de Higgs en el Modelo Estándar.

Como ya mencionamos en la sección 3.3, tenemos como objetivo dotar de masa a las partículas de la teoría electrodébil del ME. El grupo de simetría *gauge* mínimo capaz de describir las interacciones electrodébiles es $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Sabemos, por el teorema de Noether, que cualquier simetría de un sistema físico tiene asociada su correspondiente ley de conservación. En nuestro caso particular, la simetría *gauge* local del grupo $SU(2)_L$ conlleva la conservación del isospín débil, T , mientras que la cantidad conservada por el grupo $U(1)_Y$ es la hipercarga, Y . Ambas cantidades se relacionan con la carga mediante la fórmula de Gell-Mann–Nishijima,

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}. \quad (32)$$

De manera similar a QED, para que el Lagrangiano que describe la cinemática de los fermiones sea invariante bajo transformaciones *gauge* del grupo de simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$, se introducen de manera natural cuatro campos bosónicos para transformar la derivada ∂_μ en la derivada covariante *gauge*⁸,

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{g}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + ig'\frac{Y}{2}B_\mu, \quad (33)$$

donde los campos \vec{W}_μ están asociados a $SU(2)_L$ y B_μ a $U(1)_Y$. El vector $\vec{\tau}$ está formado por las tres matrices de Pauli, $\vec{\tau} = \frac{\sigma_i}{2}$.

Sabemos que los términos de masa $\frac{1}{2}m^2 W_\mu^i W_i^\mu$ romperían explícitamente (no dinámicamente) la simetría *gauge*, por lo cual debemos eliminarlos del Lagrangiano. Sin embargo, la evidencia experimental de que las interacciones débiles son de corte alcance nos está indicando que estos bosones deben tener masa. Es aquí donde debemos aplicar lo aprendido, la ruptura espontánea de la simetría.

⁷Este principio metodológico nos indica que en igualdad de condiciones, la explicación más simple suele ser la más probable. En ciencia este principio no es irrefutable pues la explicación más simple y suficiente es la más probable, mas no necesariamente la verdadera. Sin embargo, en este caso, es acertado invocarlo porque realmente se puede justificar mediante teoría de renormalización que debemos ignorar términos con $n > 4$. No obstante, no es el objetivo de este trabajo.

⁸Todos los cálculos explícitos desarrollados para esta sección se incluyen en el anexo E.

En el caso de la simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ del ME debemos generar masa para los tres bosones *gauge* W^\pm y el Z , pero el fotón debe permanecer sin masa. Por lo tanto, se necesitan al menos 3 grados de libertad. Además, para poder respetar todas las simetrías del Lagrangiano, solo podemos añadir multipletes de $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Por lo tanto vamos a añadir el mínimo posible, un doblete de campos escalares complejos $SU(2)_L$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Este campo tiene isoespín débil $T = \frac{1}{2}$ y la carga eléctrica de las componentes tanto superiores como inferiores ha sido escogida, por motivos que veremos adelante, tal que la hipercarga valga 1. La parte escalar del Lagrangiano tiene la forma,

$$\mathcal{L} = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi) \text{ con } V(\Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (35)$$

Para la ruptura espontánea de la simetría sabemos que necesitamos un *v.e.v* distinto de cero. Escogemos entonces $\mu^2 < 0$ y $\lambda > 0$ tal que el potencial $V(\Phi)$ tiene el mínimo en $\Phi^\dagger \Phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}$ con un número infinito de posibles vacíos. Una elección conveniente, que mantiene la invariancia $U(1)_{EM}$ y deja al fotón sin masa, es escoger como vacío $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$ y $\phi_3 = v$. Definiendo ahora los nuevos campos $h = \phi_3 - v$ y $\xi = \phi_4$ tenemos que,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ h + v + i\xi \end{pmatrix} \text{ y el vacío, } \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \text{ se encuentra en el origen.} \quad (36)$$

Teniendo en cuenta que vamos a aplicar perturbaciones en torno al mínimo, tomamos primer orden en el desarrollo de la exponencial, como hicimos en 3.3, y pasando al *gauge* unitario, a través de la transformación *gauge* propia del campo, finalmente tenemos,

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta_a \tau^a / v} \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}, \quad (37)$$

donde θ_a son los parámetros de la transformación que dependen de las coordenadas espacio-temporales.

Hemos visto en las secciones previas que los bosones que obtienen masa mediante el mecanismo de Higgs son aquellos vinculados a subgrupos que no permanecen invariantes al trabajar en el vacío. La invariancia *gauge* implica que $e^{i\alpha Z} \Phi = \Phi$, donde Z es el generador del grupo, y como estamos trabajando con transformaciones infinitesimales (perturbaciones) podemos hacer lo siguiente, $e^{i\alpha Z} \Phi \approx (1 + i\alpha Z) \Phi = \Phi \Leftrightarrow Z\Phi = 0$. Veamos que simetrías han sido rotas y cuales no:

• Generadores de $SU(2)_L$:

$$\begin{aligned}
W_1: \quad \tau_1 \Phi &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v+h \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{simetría rota} . \\
W_2: \quad \tau_2 \Phi &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v+h \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{simetría rota} . \\
W_3: \quad \tau_3 \Phi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{simetría rota} .
\end{aligned} \tag{38}$$

• Generadores de $U(1)_Y$:

$$B: \quad Y\Phi = Y_\Phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_\Phi \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{simetría rota} . \tag{39}$$

Por tanto, los bosones $W_{1,2,3}$ y el B adquirirán masa mediante el mecanismo de Higgs.

El generador de la simetría electromagnética $U(1)_{EM}$ es la carga y haciendo uso de (32) e imponiendo que $Y_\Phi = 1$, podemos ver,

$$Q\Phi = (T_3 + \frac{Y}{2})\Phi = \frac{\tau_3}{2}\Phi + \frac{Y_\Phi}{2}\mathbb{I}\Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{simetría conservada} . \tag{40}$$

Es decir, que el bosón vectorial de $U(1)_{EM}$ (el fotón) no obtendrá masa mediante el mecanismo de Higgs; permanece sin masa. Destacar de nuevo el hecho de que esto solo sucede porque se ha impuesto que la hipercarga del vacío sea $Y_\Phi = 1$.

Para obtener la masa de los bosones vectoriales, sabemos desde 3.3, que tenemos que analizar el término cinético del Lagrangiano, pues desde el potencial se obtendrá la masa del bosón de Higgs y sus interacciones. Por tanto, tenemos que,

$$(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) \quad \text{donde} \quad D_\mu \Phi = (\partial_\mu + i\frac{g}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + ig'\frac{Y}{2}B_\mu) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} . \tag{41}$$

Además, no consideramos en el análisis el término ∂_μ que solo nos describirá la cinemática de los bosones *gauge*, y nos podemos situar en el vacío $h=0$, pues solo nos interesan los términos $\propto v^2$. De esta manera el análisis queda reducido a,

$$\begin{aligned}
D_\mu \Phi &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \left(g \begin{pmatrix} 0 & W_1 \\ W_1 & 0 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 & -iW_2 \\ iW_2 & 0 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} W_3 & 0 \\ 0 & -W_3 \end{pmatrix} + g'Y_\Phi B_\mu \mathbb{I} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\
&= \frac{i}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} gW_3 + g'Y_\Phi B_\mu & gW_1 - giW_2 \\ gW_1 + giW_2 & -gW_3 + g'Y_\Phi B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{8}} v \begin{pmatrix} g(W_1 - iW_2) \\ -gW_3 + g'Y_\Phi B_\mu \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{42}$$

Calculemos ahora $(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) = |D_\mu \Phi|^2$:

$$\begin{aligned}
|D_\mu \Phi|^2 &= \frac{v^2}{8} \left(g(W_1 + iW_2) - gW_3 + g'Y_\Phi B_\mu \right) \begin{pmatrix} g(W_1 - iW_2) \\ -gW_3 + g'Y_\Phi B_\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{v^2}{8} (g^2(W_1^2 + W_2^2) + (-gW_3 + g'Y_\Phi B_\mu)^2) .
\end{aligned} \tag{43}$$

Deducimos de aquí que los cuatro bosones obtienen masa. Sin embargo, estos no son campos físicos. Necesitamos pasar a la base física, y obtener la masa de los campos de gauge reales W^\pm, Z y A_μ con masa cero.

Por un lado, podemos reescribir los campos bosónicos reales, W^\pm , a partir de $W_{1,2}$ como,

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 \mp iW_2) \Rightarrow (W^+)^2 + (W^-)^2 = W_1^2 + W_2^2. \quad (44)$$

Por otro lado, podemos reescribir el término que involucra a W_3 y B_μ de la siguiente manera,

$$(-gW_3 + g'Y_\Phi B_\mu)^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} W_3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg'Y_\Phi \\ -gg'Y_\Phi & (g')^2 Y_\Phi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3 \\ B_\mu \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}}. \quad (45)$$

Nótese que si $Y_\Phi = 0$ no existe término de mezcla entre los campos. De nuevo, se puede justificar que Y_Φ debe valer ± 1 porque de esta manera nos aseguramos que el determinante sea nulo y por tanto uno de los autovalores de la matriz de mezcla valdrá cero y en consecuencia el autovector (campo) asociado a él será de masa nula, como se ha obtenido en el anexo E. Además, Y_Φ solo puede valer $+1$ porque como vimos en (40) es la única manera de que se conserve la simetría $U(1)_{EM}$. Si diagonalizamos la matriz \mathcal{M} obtenemos los autovalores $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = g^2 + (g')^2$, y sus respectivos autovectores,

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0 &\rightarrow A_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{g^2 + (g')^2}}(g'W_3 + gB_\mu), \\ \lambda_2 = g^2 + (g')^2 &\rightarrow Z_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{g^2 + (g')^2}}(gW_3 - g'B_\mu). \end{aligned} \quad (46)$$

De esta manera podemos reescribir el término que involucra a W_3 y B_μ como,

$$(-gW_3 + g'Y_\Phi B_\mu)^2 = (g^2 + (g')^2)Z_\mu^2 + 0 \cdot A_\mu^2. \quad (47)$$

Finalmente, el término cinético del Lagrangiano queda,

$$(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) = \frac{v^2}{8} (g^2((W^+)^2 + (W^-)^2) + (g^2 + (g')^2)Z_\mu^2 + 0 \cdot A_\mu^2). \quad (48)$$

Podemos entonces concluir que las masas de los bosones de nuestra teoría son,

$$M_{W^+} = M_{W^-} = \frac{v}{2}g \quad ; \quad M_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2} \quad ; \quad M_\gamma = 0. \quad (49)$$

Hemos obtenido que de los cuatro bosones introducidos para respetar la invariancia *gauge* solo tres de ellos obtienen masa. Cabe destacar que el hecho de que el fotón tenga masa nula no es una predicción del modelo; tiene su base en que imponemos que la simetría $U(1)_{EM}$ se conserve. Por otro lado, nuestro modelo no realiza predicciones absolutas sobre la masa de los bosones W^\pm y Z debido a que g y g' son parámetros libres. En cambio, sí podemos obtener algunas predicciones relativas, como que las masas de los bosones W^+ y W^- son iguales y

que $M_Z \geq M_{W^\pm}$. Además, también podemos deducir algunas consecuencias fenomenológicas relevantes en este modelo, que han convalidado a su vez una confirmación experimental del mismo.

En primer lugar, desde (46) observamos que podemos interpretar que la ruptura espontánea de simetría realmente nos rota el plano original de los bosones vectoriales W_3 y B_μ , produciendo como resultado los bosones A_μ y Z_μ . De esta manera se introduce el ángulo de Weinberg, definido como:

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + (g')^2}} = \frac{e}{g} \quad , \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + (g')^2}} = \frac{e}{g'} \quad \text{y} \quad \tan \theta_W = \frac{g'}{g} . \quad (50)$$

Desde (49) podemos ver que las masas de los bosones W^\pm y Z dependen de los parámetros g y g' y según (50) estos dos parámetros están relacionados por el ángulo de Weinberg. Esta relación implica que las masas de los bosones están relacionadas mediante:

$$M_{W^\pm} = M_Z \cos \theta_W . \quad (51)$$

Por tanto, si medimos experimentalmente las masas o tenemos un valor para el ángulo de Weinberg, podemos inferir el valor del otro parámetro que no conozcamos y/o comprobar la relación entre ellos, verificando así la validez del modelo. De hecho, actualmente se pueden medir experimentalmente con gran precisión las masas de los bosones de gauge y deducir así el valor del ángulo de Weinberg.

Por otra parte, el hecho de que tenemos las igualdades $\sin \theta_W = \frac{e}{g}$ y $\cos \theta_W = \frac{e}{g'}$ en (50) viene dado de que sabemos de la QED que el fotón se acopla a los fermiones con un término de interacción proporcional a la carga y por tanto los parámetros libres están relacionados con ella (ver anexo E). De esta forma, a partir de (49) y (50) podemos obtener una expresión para las masas de los bosones W^\pm y Z como función de θ_W y el $v.e.v$ ($M_{W^\pm} = \frac{v}{2} \frac{e}{\sin \theta_W}$, $M_Z = \frac{ve}{\sin 2\theta_W}$) y podríamos pensar que las masas son funciones de dos variables, v y θ_W . Sin embargo, el $v.e.v$ puede obtenerse a partir del cálculo de la vida media del muón, $v \approx 246,49$ GeV [2]. Por tanto, teniendo en cuenta que en unidades naturales ($\hbar = c = 1$) $e = \sqrt{4\pi\alpha_{EM}}$ y tomando $\theta_W = 45^\circ$; porque es el valor que mejor minimiza simultáneamente las expresiones de M_{W^\pm} y M_Z dadas anteriormente, finalmente obtenemos un límite inferior a estas masas,

$$M_{W^\pm} \geq 52,74 \text{ GeV} \quad ; \quad M_Z \geq 74,57 \text{ GeV} . \quad (52)$$

Si comparamos estas predicciones relativas para las masas de los bosones W^\pm y Z con los valores obtenidos experimentalmente de $M_{W^\pm} = 80,377 \pm 0,012 \text{ GeV}$ y $M_Z = 91,1876 \pm 0,0021 \text{ GeV}$ [3] vemos que todas se satisfacen.

Para terminar de dar masa a los bosones centrémonos ahora en la partícula de Higgs. La parte cinética del campo del Higgs está claro que vendría de $|D_\mu \Phi|^2$ si no hubiésemos tomado

$h=0$, mientras que la masa del Higgs y sus auto-interacciones vienen del potencial $V(\Phi)$ dado en (35), que escribimos ahora como,

$$V(h) = \frac{\mu^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & v+h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{4} \left| \begin{pmatrix} 0 & v+h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{\mu^2}{2}(v+h)^2 + \frac{\lambda}{4}(v+h)^4. \quad (53)$$

Recordando que $\mu^2 = -v^2\lambda$ y utilizando los resultados de las secciones anteriores y el anexo C, podemos concluir que la masa del Higgs es $M_h = \sqrt{2\lambda v^2}$. De nuevo, puesto que λ es un parámetro libre, el modelo no predice un valor concreto para la masa del bosón de Higgs.

Una vez hemos conseguido dotar de masa a los bosones de *gauge* y a la partícula de Higgs mediante la incorporación del mecanismo de Higgs, solo nos queda estudiar cómo dotar de masa a los fermiones. En la sección 2 vimos que, al igual que para los bosones, el término de masa del Lagrangiano de los fermiones, $-m\bar{\psi}\psi$, no respeta la invariancia *gauge* de nuestra teoría. Esto sucedía porque al descomponer en términos quirales los fermiones levógiros no transforman igual que los dextrógiros porque los primeros acoplan débil y electromagnéticamente (dobletes de isoespín) mientras que los segundos solo electromagnéticamente (singletes de isoespín). Sin embargo, este problema se puede solucionar introduciendo un acoplamiento entre fermiones y escalares, o Lagrangiano de Yukawa, invariante frente al grupo $SU(2) \times U(1)$. El Lagrangiano modificado para leptones y *quarks down* de todas las generaciones estaría dado por,

$$\mathcal{L}_d = -\lambda_e(\bar{L}\Phi e_R + \Phi^\dagger \bar{e}_R L) - \lambda_d(\bar{Q}\Phi d_R + \Phi^\dagger \bar{d}_R Q), \quad (54)$$

donde hemos introducido una notación más compacta para los dobletes levógiros (\bar{L}) y para los singletes dextrógiros (\bar{Q}), y λ_e y λ_d son los acoplos de Yukawa de los leptones y los *quarks down* respectivamente.

Para los *quarks up*, debemos usar el doblete de isoespín $\tilde{\Phi} = i\tau_2\Phi^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v+h \\ 0 \end{pmatrix}$, con hipercarga $Y_{\tilde{\Phi}} = -1$ debido a la conjugación, tal que el Lagrangiano modificado para ellos es,

$$\mathcal{L}_u = -\lambda_u(\bar{Q}\tilde{\Phi} u_R + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{u}_R Q), \quad (55)$$

siendo λ_u el acoplo de Yukawa para los *quarks up*.

Después de la ruptura espontánea de la simetría, cuando el campo de Higgs obtiene un *v.e.v* distinto de cero, podemos generar la masa de los fermiones del ME a partir de los términos de interacción de (54) y (55). Veamos el caso particular de los electrones,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e &= -\lambda_e(\bar{L}\Phi e_R + \Phi^\dagger \bar{e}_R L) = -\frac{\lambda_e}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{v}_e & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} e_R - \frac{\lambda_e}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & v+h \end{pmatrix} \bar{e}_R \begin{pmatrix} v_e \\ e_L \end{pmatrix} \\ &= \frac{\lambda_e v}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - \frac{\lambda_e}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)h. \end{aligned} \quad (56)$$

Usando que $\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L = \bar{\psi}\psi$ podemos concluir que el primer término de la última igualdad de (56) tiene la forma del término de masa de los electrones; $-m\bar{e}e$, mientras que

el segundo término representa su interacción con el campo de Higgs. Esto se puede hacer análogamente para el resto de leptones y *quarks*, obteniendo sus masas,

$$m_e = \frac{\lambda_e v}{\sqrt{2}} \quad , \quad m_u = \frac{\lambda_u v}{\sqrt{2}} \quad , \quad m_d = \frac{\lambda_d v}{\sqrt{2}}. \quad (57)$$

Debido a que $\lambda_{e,d,u}$ son parámetros libres del modelo este no predice un valor exacto para la masa de los fermiones. Como hemos dicho, el segundo término de la última igualdad de (56) nos proporciona la interacción fermión-fermión-Higgs y de esta podemos inferir que al ser proporcional a $\lambda_{e,d,u}$ lo será por tanto a $m_{e,d,u}$. Esta dependencia con la masa de los fermiones es lo que nos justifica el porqué esta clase de interacciones son más probables si tenemos fermiones más masivos. Finalmente, uno podría haberse dado cuenta que este mecanismo nos predice una masa nula para los neutrinos, pero sabemos que no es así. Es aquí cuando necesitamos lo que se conoce como mecanismo *seesaw*, que se utiliza para comprender los tamaños relativos de las masas de neutrinos observadas. Sin embargo, este modelo se escapa a nuestro objetivo y no lo tratamos en este trabajo.

4. Desintegración del bosón de Higgs.

Al introducir el mecanismo de Higgs hemos visto que se obtienen una serie de términos de interacción entre el bosón de Higgs y los fermiones y bosones de *gauge*. En esta sección tenemos como objetivo discutir sobre la fenomenología asociada a estas interacciones, analizando los procesos de desintegración del Higgs a fermiones y bosones de *gauge*. Vamos a hallar paso por paso y en detalle la sección eficaz de estos procesos haciendo uso de las reglas de Feynman ⁹. La expresión general para la razón de desintegración a dos cuerpos esta dada [4],

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_p^2} |p_f| S, \quad (58)$$

donde \mathcal{M} es el elemento de matriz, p_f el momento de las partículas producidas, m_p la masa de la partícula que ha decaído y $S = \frac{1}{n!}$ con n el número de partículas idénticas.

Empezaremos estudiando el proceso de desintegración del Higgs a dos fermiones. El diagrama de Feynman de este proceso se presenta en la figura 3. Describiremos este proceso en su orden más bajo en teoría de perturbaciones (nivel árbol).

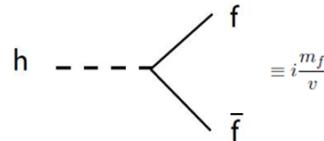


Figura 3: $h \rightarrow \bar{f}f$.

⁹Los cálculos detallados de esta sección se presentan en el anexo F.

En primer lugar, asignamos momentos a todas las partículas del diagrama y usamos la conservación del cuadrimomento en el vértice, $p_h^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$ donde 1 denota al fermión y 2 al antifermión. Las patas externas son fermiones, cuyos espines etiquetamos mediante índices s_1, s_2 . Aplicando las reglas de Feynman, recorriendo las líneas fermiónicas de abajo a arriba, el elemento de matriz viene dado por,

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} &= \bar{u}^{(s_1)}(p_1^\mu) i \frac{m_f}{v} v^{(s_2)}(-p_2^\mu) \\ i\mathcal{M}^\dagger &= \bar{v}^{(s_2)}(-p_2^\mu) \frac{-im_f^{(s_1)}}{v} u(p_1^\mu), \end{aligned} \quad (59)$$

donde el acoplo de interacción, $i \frac{m_f}{v}$, se infiere del termino proporcional a $h\bar{e}\bar{e}$ de (56). De esta manera,

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M} = \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 \sum_{s_1, s_2} \bar{v}^{(s_2)}(-p_2^\mu) u^{(s_1)}(p_1^\mu) \bar{u}^{(s_1)}(p_1^\mu) v^{(s_2)}(-p_2^\mu). \quad (60)$$

Sumando sobre el espín y considerando las conocidas como relaciones de completitud de los espinores de Dirac, $\sum_s u^{(s)}(p^\mu) \bar{u}^{(s)}(p^\mu) = \not{p} + m$ y $\sum_s v^{(s)}(p^\mu) \bar{v}^{(s)}(p^\mu) = \not{p} - m$, llegamos a,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 \text{Tr} \{(\not{p}_1 + m_f)(-\not{p}_2 - m_f)\} = \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 (-4p_1^\mu \cdot p_2^\mu - 4m_f^2) \\ &= \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 [2m_h^2 - 8m_f^2] = \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 2m_h^2 \beta^2 \text{ con } \beta = \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_h^2}}, \end{aligned} \quad (61)$$

donde la segunda y tercera igualdad son resultado del uso de diferentes propiedades de la conocida *Diracología*, del hecho de que los dos fermiones externos están sobre su capa de masas y por tanto $p^\mu p_\mu = m_f^2$, de usar como marco de referencia aquel donde el Higgs está en reposo y la ya mencionada conservación del cuadrimomento en el vértice.

Sustituyendo (61) en la expresión (58) y teniendo en cuenta que $p_f^2 = E_f^2 - m_f^2 = \frac{m_h^2}{4} - m_f^2 = \frac{m_h^2}{4} \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_h^2}\right) = \frac{m_h^2}{4} \beta^2$, obtenemos,

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{N_c}{32\pi^2} \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 m_h \beta^3 \Rightarrow \Gamma(h \rightarrow f\bar{f}) = \frac{N_c}{8\pi v^2} m_f^2 m_h \beta^3, \quad (62)$$

donde N_c es el número de color, $N_c = 3$ para los *quarks*. Destacar que de esta expresión se deduce que el decaimiento solo es posible si $m_h > 2m_f$, que es cuando β es real. Además, vemos que la probabilidad de desintegración es proporcional al cuadrado de la masa de los fermiones y por tanto, cuanto mayor es la masa del fermión mayor será su probabilidad de desintegración, como se ha mencionado anteriormente. Pero hay que tener en cuenta que el proceso debe ser posible energéticamente, es decir, que la suma de las masas de las partículas a las que se desintegra no puede ser mayor que la masa del Higgs. Claramente, la razón de desintegración depende del valor de la masa del Higgs.

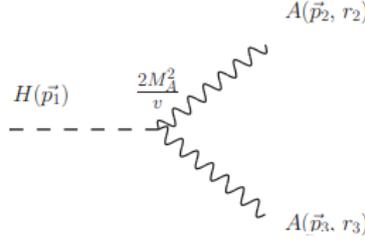


Figura 4: $h \rightarrow ZZ/WW$ [5].

Ahora vamos a calcular la amplitud de desintegración del Higgs en dos bosones de *gauge* a nivel árbol. Realizamos el cálculo en genérico y posteriormente se particularizará el resultado para cada uno de ellos, considerando que en el espacio de fases del decaimiento ZZ hay un factor extra $\frac{1}{2}$ debido a que son partículas idénticas. El diagrama genérico se presenta en la figura 4, donde $A \equiv Z, W^\pm$. La amplitud está dada por,

$$\mathcal{M} = \frac{2m_A^2}{v} \epsilon_{r_2}^\mu \epsilon_{\mu, r_3}, \quad \mathcal{M}^\dagger = \frac{2m_A^2}{v} \epsilon_{r_2}^{\nu*} \epsilon_{\nu, r_3}^*, \quad (63)$$

donde el acoplo de interacción, $2\frac{m_A^2}{v}$, se infiere del término proporcional a hAA que se obtiene de (48)-(49) y ϵ_{r_i} representan los estados de polarización. Encontramos así el cuadrado de la amplitud de transición,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{4m_A^4}{v^2} \sum_{r_i} \epsilon_{r_2}^\mu \epsilon_{r_2}^{\nu*} \epsilon_{\mu, r_3} \epsilon_{\nu, r_3}^* = \frac{4m_A^4}{v^2} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{p_2^\mu p_2^\nu}{m_A^2} \right) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_{3\mu} p_{3\nu}}{m_A^2} \right) \\ &= \frac{4m_A^4}{v^2} \left(2 + \frac{(p_2^\mu p_{3\mu})^2}{m_A^4} \right) = \frac{4m_A^4}{v^2} \left(3 + \frac{1}{4} \frac{m_h^4}{m_A^4} - \frac{m_h^2}{m_A^2} \right). \end{aligned} \quad (64)$$

Si introducimos ahora este resultado en (58) y manipulamos llegamos a,

$$\Gamma(h \rightarrow AA) = \frac{1}{16\pi} \frac{m_h^3}{v^2} \left(1 - x + \frac{3}{4} x^2 \right) (1 - x)^{\frac{1}{2}} S_{AA} \quad \text{con } x = \frac{4m_A^2}{m_h^2}, \quad (65)$$

donde S_{AA} vale 1 para el bosón W y $\frac{1}{2}$ para el Z . Destacar de nuevo que el decaimiento solo se producirá si $m_h > 2m_A$. Nótese que en ambos casos las amplitudes de desintegración dependen del valor de la masa del Higgs.

Una vez conocidas las expresiones de las amplitudes de desintegración del Higgs vamos a centrar nuestra atención en el estudio de las razones de desintegración, conocidas como *branching ratios*. Estas razones de desintegración se definen como la relación entre las anchuras de desintegración de los distintos canales con respecto a la anchura de desintegración total,

$$\text{BR} = \frac{\Gamma(h \rightarrow xx)}{\sum_j \Gamma(h \rightarrow jj)}. \quad (66)$$

Hemos obtenido que las amplitudes de desintegración dependen del valor de la masa del Higgs. Por tanto, vamos a analizar como evoluciona (66) en función de m_h para cada uno de los canales de desintegración que hemos calculado antes. Esto nos permitirá sacar conclusiones

sobre la probabilidad de h de desintegrarse por un canal frente al resto de los posibles. Para ello, tomaremos los valores de las masas de los fermiones y de los bosones *gauge* dados en [3]. Los resultados obtenidos se presentan en la figura 5a. Con el objetivo de comparar nuestros resultados con los obtenidos en la literatura se incluyen los mismos en la figura 5b [1].

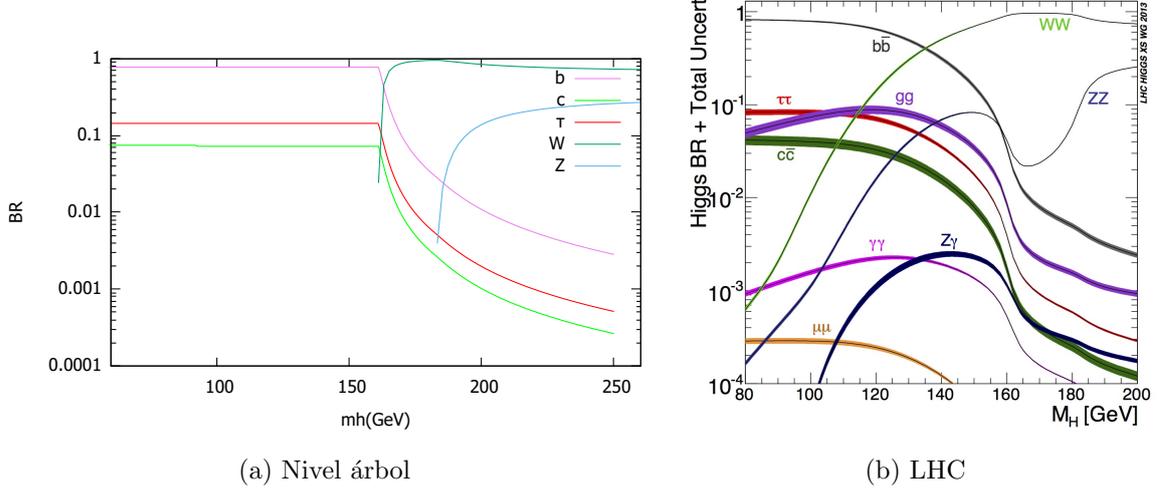


Figura 5: Razones de desintegración del bosón de Higgs.

Claramente, las figuras expuestas muestran diferencias. El lector cuidadoso se habrá podido dar cuenta que las fuentes de las disimilitudes son fruto de diferentes consideraciones hechas durante los desarrollos. Primero, nuestros cálculos son a nivel árbol y no hemos considerado todos los canales de desintegración posibles, mientras que en figura 5b se incluyen todos los canales posibles y se han considerado contribuciones que sólo aparecen cuando tenemos correcciones a orden mayor en teoría de perturbaciones. Segundo, hemos supuesto que tanto los parámetros libres de nuestro modelo como las constantes de acoplamiento o las masas de las partículas son constantes con la escala de energía. Sin embargo, se sabe que estas evolucionan con la escala. Finalmente, es importante discutir que una gran diferencia entre los resultados mostrados en estas dos figuras es la existencia de los canales ZZ y WW cuando $m_h < 160$ GeV. Esto se debe a que en este trabajo hemos considerado a los bosones *gauge* en procesos *on-shell*, es decir, sobre la capa de masas. Por tanto, no se considera la posibilidad de que intervengan en otros procesos como partículas virtuales (*off-shell*) donde $m_h < 2m_A$.

No obstante, si que es cierto que si comparamos los canales de la figura 5a con los de 5b por debajo de unos 160 GeV (hasta entonces ZZ y WW no aparecen porque no son energicamente favorables) en ambos dominan los canales de desintegración a fermiones y aparecen en el mismo orden, de acuerdo a la jerarquía de masas de los mismos; *bottom*, *tau* y *charm*. Así mismo, en ambas gráficas, una vez se alcanzan los 160 GeV y son posibles los procesos de desintegración en WW y ZZ , los canales de los fermiones decaen y ganan

prioridad los bosones *gauge*, siendo más favorable la desintegración del Higgs a través del canal de WW con respecto al de ZZ .

5. Superconductividad y partícula de Higgs.

Históricamente, la teoría del campo de Higgs, que explica la masa de las partículas gracias a una ruptura espontánea de la simetría, podemos relacionarla con la teoría BCS de la superconductividad (que recibe su nombre de las iniciales de quienes la idearon: John Bardeen, Leon Cooper, y John Robert Schrieffer) [6]. En concreto, con la explicación de Philip Anderson del efecto Meissner como resultado de una masa efectiva para el fotón. Si bien es cierto que las analogías entre ambas teorías son fundamentalmente formales, es decir, sin un contenido físico común¹⁰, veamos como a partir del Lagrangiano QED escalar y el mecanismo de Higgs uno es capaz de reproducir las tres principales propiedades de los superconductores: resistividad cero, exclusión del flujo magnético (efecto Meissner) y formación de un gap energético.

Sea por tanto el Lagrangiano (24) bajo el *gauge* $\partial^0\phi = \partial^0\vec{A} = 0$ y $A_0 = 0$. Se llega de esta manera a que la ecuación del movimiento para \vec{A} es de la forma¹¹,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{J} \text{ con } \vec{J} = ie \left[-\phi^*(\vec{\nabla} + ieA_j)\phi + \phi(\vec{\nabla} - ieA_j)\phi^* \right], \\ \vec{E} &= \vec{0}.\end{aligned}\tag{67}$$

Si evaluamos este resultado en el vacío de la ruptura espontánea de simetría clásica, $\phi_0 = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}}$, nos queda,

$$\vec{J} = -2e^2 v^2 \vec{A}.\tag{68}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ y haciendo $\vec{\nabla} \times \vec{J}$ es fácil llegar a,

$$\nabla^2 \vec{B} = 2e^2 v^2 \vec{B}.\tag{69}$$

que es la conocida ecuación del efecto Meissner. Luego, en superconductividad, el mecanismo de Higgs es el fenómeno responsable para la generación dinámica de la masa de los fotones que intentan penetrar en el material y que propagan la interacción electromagnética. Por consiguiente, el efecto Meissner en superconductores, es una consecuencia natural del mecanismo de Higgs, pues de esta forma los campos magnéticos no pueden entrar en los superconductores porque los mensajeros de la interacción electromagnética, los fotones, al hacerse masivos dentro del material pasan a tener un rango de interacción mas corto evitando así penetrar en él.

Además, si definimos la resistividad como $E = \rho J$, como hemos visto que $\vec{E} = \vec{0}$ nos queda que $\rho = 0$. Finalmente, nos faltaría mencionar el gap energético, el cual sería análogo

¹⁰Para el lector interesado en un estudio más detallado de las similitudes de estas teorías léase [6].

¹¹Todos los cálculos de esta sección están explícitos en el anexo G.

al *v.e.v.* De la misma forma que si $v = 0$ las partículas no tienen masa, si el gap no existe tampoco lo hace la superconductividad.

Por lo tanto, vemos que haciendo uso del formalismo de Higgs hemos sido capaces de explicar satisfactoriamente las tres características por antonomasia del fenómeno de la superconductividad.

6. Conclusiones.

El Modelo Estándar es una teoría cuántica de campos basada en determinadas simetrías, que es capaz de describir exitosamente la materia y sus interacciones. En particular, reduce a un esquema común el electromagnetismo y la fuerza nuclear débil, en la conocida como teoría electrodébil, y describe mediante la cromodinámica cuántica la fuerza nuclear fuerte. Como hemos discutido en este trabajo, son precisamente estas ideas de simetría del modelo lo que no nos permite dotar de masa a sus partículas. En consecuencia, nace la idea de introducir el mecanismo de Higgs, mecanismo capaz de producir la ruptura espontánea de simetría electrodébil en una teoría de *gauge* invariante. Concretamente, hemos explicado en este trabajo cómo este mecanismo dota de masa a los bosones *gauge* por medio de la absorción de los bosones de Goldstone procedentes de la ruptura espontánea de la simetría. Además, fruto de este mecanismo, surge una nueva partícula escalar elemental de espín 0 y carga nula, conocida como el bosón de Higgs. Esta nueva partícula, predicha teóricamente, fue descubierta experimentalmente en el año 2012 por el CERN.

En lo que respecta a las interacciones del Higgs con el resto de partículas del Modelo Estándar, hemos obtenido que la constante de acoplamiento es proporcional a la masa de dichas partículas. Posteriormente, hemos calculado las amplitudes de desintegración del Higgs a fermiones y bosones de *gauge* a nivel árbol, haciendo uso de las reglas de Feynman, y hemos demostrado que estas dependen de la masa del Higgs. A razón de esto, hemos hecho un análisis numérico de estas desintegraciones en función de la masa del bosón de Higgs, comparando nuestros resultados con los existentes en la literatura. Como resultado de este análisis inferimos la importancia de considerar todos los posibles canales de desintegración del bosón de Higgs y de incluir correcciones a mayor orden en teoría de perturbaciones.

Para finalizar, se ha querido dar un enfoque distinto al del resto del trabajo con el objetivo de demostrar la relación existente entre diferentes áreas de conocimiento dentro de la física. Para ello hemos considerado como este mecanismo de Higgs tiene sentido más allá de la física teórica y se puede relacionar con el fenómeno de la superconductividad.

Referencias

- [1] Ivo Van Vulpen. *The Standard Model Higgs Boson*. 2013.
- [2] Lluç Vayreda Calbó. *Muon Decay and the Higgs Vacuum Expectation Value*. 2021.
- [3] P. A. Zyla et al. “Review of Particle Physics”. *PTEP*, 2020(8):083C01, 2020.
- [4] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. 1995.
- [5] Antonio Pich Zardoya. *S.M. Higgs Decay and Production Channels*. 2011.
- [6] Abel Carlos Gutiérrez Camacho. *Analogías entre el modelo de Higgs en física de partículas elementales y las teorías de superconductividad GL y BCS*. 2021.

ANEXOS

A. Ejemplo simple de ruptura de simetría.

En este anexo se analiza el carácter de los puntos críticos del potencial de la sección 3.1 en función del signo de μ^2 .

Sea el potencial,

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4.$$

• Si $\mu^2 > 0$, estudiemos sus puntos críticos,

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0, \\ \phi^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda} < 0 \text{ porque } \mu^2, \lambda > 0. \end{cases}$$

Como el campo ϕ es real, la segunda opción no existe. Estudiemos la primera,

$$\left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = \mu^2 > 0.$$

Por lo tanto, podemos afirmar que $V(\phi)$ tiene un mínimo en 0.

• Si $\mu^2 < 0$ los puntos críticos son los mismos. Sin embargo, al cambiar el signo de μ^2 , si $\lambda > 0$, ahora el punto crítico $\phi^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda}$ existe. Estudiemos el carácter de ambos puntos,

$$\left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = \mu^2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo.}$$
$$\left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}} = -2\mu^2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo.}$$

Queda así visto que para garantizar que en ambos casos del signo de μ^2 exista al menos un mínimo se debe cumplir que $\lambda > 0$.

B. Ruptura de simetría global. Bosones de Golstone.

En este anexo se analizará el carácter de los puntos críticos del potencial de la sección 3.2 en función del signo de μ^2 . Además, se desarrollarán los cálculos tanto de la parte cinética como del potencial del Lagrangiano (17).

B.1.

Sea el potencial

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2.$$

Estudiemos sus mínimos en función del signo de μ^2 :

• Si $\mu^2 > 0$,

$$\frac{\partial V(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_1} = \mu^2 \phi_1 + \lambda \phi_1(\phi_1^2 + \phi_2^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = 0, \\ \phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda} < 0 \quad \text{porque } \mu^2, \lambda > 0. \end{cases}$$

Debido a la simetría que tiene el potencial bajo el intercambio $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ es obvio que al derivar respecto ϕ_2 los puntos que obtendremos al igualar a cero son $\phi_2 = 0$ y $\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda} < 0$. Por lo tanto, el único punto crítico es el $(\phi_1, \phi_2) = (0, 0)$. Para saber si es un máximo, un mínimo o un punto silla debemos calcular el Hessiano,

$$D = \frac{\partial^2 V(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_1^2} \cdot \frac{\partial^2 V(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_2^2} - \left(\frac{\partial}{\partial \phi_1} \left(\frac{V(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_2} \right) \right)^2,$$

donde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_i^2} &= \mu^2 + 3\lambda \phi_i^2 + \lambda \phi_j^2 \quad \text{con } i=1,2 \text{ y } j=2,1, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \phi_1} \left(\frac{V(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_2} \right) \right) &= 2\lambda \phi_1 \phi_2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$D|_{(\phi_1, \phi_2)=(0,0)} = ((\mu^2 + 3\lambda \phi_1^2 + \lambda \phi_2^2)(\mu^2 + 3\lambda \phi_2^2 + \lambda \phi_1^2) - 4\lambda^2 \phi_1^2 \phi_2^2)|_{(\phi_1, \phi_2)=(0,0)} = \mu^4 > 0.$$

Por lo tanto, como $D|_{(\phi_1, \phi_2)=(0,0)}$ y $\frac{\partial^2 V(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_i^2}|_{(\phi_1, \phi_2)=(0,0)}$ son ambos mayores que cero podemos afirmar que el punto $(\phi_1, \phi_2) = (0, 0)$ es un mínimo.

• Si $\mu^2 < 0$ el punto $(0,0)$ ahora pasa a ser un máximo, pues $D|_{(\phi_1, \phi_2)=(0,0)} > 0$ y $\frac{\partial^2 V(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_i^2}|_{(\phi_1, \phi_2)=(0,0)} < 0$ y no podemos aplicar perturbaciones. Sin embargo, al cambiar el signo de μ^2 ahora $\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda} > 0$ y por lo tanto aparecen infinitos puntos críticos. Calculemos su Hessiano para ver si son máximos, mínimos o puntos silla,

$$\begin{aligned} D|_{\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda}} &= \mu^4 + 4\mu^2 \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 3\lambda^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 = \mu^4 + 4\mu^2 \lambda \frac{-\mu^2}{\lambda} + 3\lambda \left(-\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 \\ &= \mu^4 - 4\mu^4 + 3\mu^4 = 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, este criterio no es concluyente para saber si estamos ante un mínimo. De hecho, es que no es un mínimo en el espacio de dos dimensiones. Si miramos la figura 2b podemos apreciar que lo que tenemos es una dirección plana con infinitos mínimos. Por lo tanto, si realizamos perturbaciones en la dirección radial podremos obtener la masa debido a que existe potencial, pero si lo hacemos en la dirección plana al no tener potencial obtenemos una partícula no masiva, un bosón de Goldstone.

B.2.

• Calculemos el producto de las derivadas (parte cinética) del Lagrangiano (17),

$$\begin{aligned}\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi &= \frac{1}{2} \partial^\mu (\phi_1 - i\phi_2) \partial_\mu (\phi_1 + i\phi_2) \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_1 + \underbrace{i\partial^\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_2 - i\partial^\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_1}_{=0} + \partial^\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_2) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2.\end{aligned}$$

Si lo hacemos con los nuevos campos η y ξ ,

$$\begin{aligned}(\partial_\mu \phi)^* &= \left(\partial_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta + i\xi) \right) \right)^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\mu \eta - i\partial_\mu \xi), \\ (\partial^\mu \phi) &= \left(\partial^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta + i\xi) \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial^\mu \eta + i\partial^\mu \xi),\end{aligned}$$

donde hemos usado que ∂_μ es un operador lineal y que $\partial_\mu v = 0$, pues v es una constante. De esta manera,

$$(\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \underbrace{i\partial_\mu \eta \partial^\mu \xi - i\partial_\mu \xi \partial^\mu \eta}_{=i\partial^\mu \eta \partial_\mu \xi} + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi) = \frac{1}{2} \underbrace{\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta}_{(\partial_\mu \eta)^2} + \frac{1}{2} \underbrace{\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi}_{(\partial_\mu \xi)^2}.$$

• En lo que respecta al término del potencial del Lagrangiano tenemos,

$$\begin{aligned}\phi^* \phi &= \frac{1}{2} (v + \eta - i\xi)(v + \eta + i\xi) = \frac{1}{2} ((v + \eta)^2 + \xi^2) = \frac{1}{2} (v^2 + 2v\eta + \eta^2 + \xi^2), \\ (\phi^* \phi)^2 &= \frac{1}{4} ((\eta + v)^2 + \xi^2)^2 = \frac{1}{4} ((\eta + v)^4 + \xi^4 + 2(\eta + v)^2 \xi^2) \\ &= \frac{1}{4} (\eta^4 + 4\eta^3 v + 6\eta^2 v^2 + 4\eta v^3 + v^4 + \xi^4 + 2\eta^2 \xi^2 + 2v^2 \xi^2 + 4\eta v \xi^2).\end{aligned}$$

Finalmente, recordando que $\mu^2 = -v^2 \lambda$, el potencial queda,

$$\begin{aligned}V(\phi) &= -\frac{v^2 \lambda}{2} (v^2 + 2v\eta + \eta^2 + \xi^2) \\ &+ \frac{\lambda}{4} (\eta^4 + 4\eta^3 v + 6\eta^2 v^2 + 4\eta v^3 + v^4 + \xi^4 + 2\eta^2 \xi^2 + 2v^2 \xi^2 + 4\eta v \xi^2) \\ &= -\frac{1}{4} \lambda v^4 + \lambda v^2 \eta^2 + \lambda v \eta^3 + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \frac{1}{4} \lambda \xi^4 + \lambda v \eta \xi^2 + \frac{1}{2} \lambda \eta^2 \xi^2.\end{aligned}$$

C. Ruptura de simetría gauge local.

En este anexo se desarrollaran los cálculos del término cinético del Lagrangiano de la sección 3.3 tanto para los campos originales (ϕ_1, ϕ_2) , como los trasladados (η, ξ) , como el del *gauge* unitario (h) . Se calcula también el potencial con el campo h .

• Calculemos el término cinético y operemos,

$$\begin{aligned}(D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) &= (\partial^\mu + ieA^\mu) \phi^* (\partial_\mu - ieA_\mu) \phi = (\partial^\mu \phi^* + ieA^\mu \phi^*) (\partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi) \\ &= \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - ie\partial^\mu \phi^* A_\mu \phi + ieA^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + e^2 A^\mu \phi^* A_\mu \phi.\end{aligned}$$

Vayamos término por término. En primer lugar,

$$\begin{aligned}\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi &= \frac{1}{2} \partial^\mu (\phi_1 - i\phi_2) \partial_\mu (\phi_1 + i\phi_2) \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_1 + \underbrace{i\partial^\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_2 - i\partial^\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_1}_{=0} + \partial^\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_2) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2.\end{aligned}$$

En segundo lugar,

$$\begin{aligned}-ie\partial^\mu \phi^* A_\mu \phi + \underbrace{ieA^\mu \phi^* \partial_\mu \phi}_{=ieA_\mu \phi^* \partial^\mu \phi} &= \\ -\frac{1}{2} ie\partial^\mu (\phi_1 - i\phi_2) A_\mu (\phi_1 + i\phi_2) + \frac{1}{2} ieA_\mu (\phi_1 - i\phi_2) \partial^\mu (\phi_1 + i\phi_2) &= \\ = -\frac{1}{2} ie(\partial^\mu \phi_1 - i\partial^\mu \phi_2)(A_\mu \phi_1 + iA_\mu \phi_2) + \frac{1}{2} ie(\partial^\mu \phi_1 + i\partial^\mu \phi_2)(A_\mu \phi_1 - iA_\mu \phi_2) = \left[C \equiv \frac{1}{2} ie \right] &= \\ = -C\partial^\mu \phi_1 A_\mu \phi_1 - Ci\partial^\mu \phi_1 A_\mu \phi_2 + Ci\partial^\mu \phi_2 A_\mu \phi_1 - C\partial^\mu \phi_2 A_\mu \phi_2 &= \\ + C\partial^\mu \phi_1 A_\mu \phi_1 - Ci\partial^\mu \phi_1 A_\mu \phi_2 + Ci\partial^\mu \phi_2 A_\mu \phi_1 + C\partial^\mu \phi_2 A_\mu \phi_2 &= \\ = e\partial^\mu \phi_1 A_\mu \phi_2 - e\partial^\mu \phi_2 A_\mu \phi_1.\end{aligned}$$

Y finalmente, el último término,

$$\begin{aligned}e^2 A^\mu \phi^* A_\mu \phi &= \frac{1}{2} e^2 A^\mu (\phi_1 - i\phi_2) A_\mu (\phi_1 + i\phi_2) \\ &= \frac{1}{2} e^2 \left(A^\mu \phi_1 A_\mu \phi_1 + \underbrace{iA^\mu \phi_1 A_\mu \phi_2 - iA^\mu \phi_2 A_\mu \phi_1}_{0} + A^\mu \phi_2 A_\mu \phi_2 \right) = \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 \phi_2^2.\end{aligned}$$

De esta manera el término cinético queda,

$$(D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2 + e\partial^\mu \phi_1 A_\mu \phi_2 - e\partial^\mu \phi_2 A_\mu \phi_1 + \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 \phi_2^2.$$

- Si lo pasamos ahora a expresar en función de los campos $\eta = \phi_1 - v$ y $\xi = \phi_2$ nos queda,

$$\begin{aligned}(D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) &= \frac{1}{2} (\partial_\mu (\eta + v))^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 (\eta + v)^2 \\ &+ \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 \xi^2 + e\partial^\mu (\eta + v) A_\mu \xi - e\partial^\mu \xi A_\mu (\eta + v) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 (\eta^2 + v^2 + 2\eta v) + \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 \xi^2 \\ &+ e\partial^\mu \eta A_\mu \xi - e\partial^\mu \xi A_\mu \eta - e\partial^\mu \xi A_\mu v \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 \eta^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 \xi^2 + \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 v^2 + e^2 A_\mu^2 \eta v + e\partial^\mu \eta A_\mu \xi \\ &- e\partial^\mu \xi A_\mu \eta - e\partial^\mu \xi A_\mu v.\end{aligned}$$

- Una vez fijamos el *gauge* unitario, $\alpha = -\frac{\xi}{v}$, el campo pasa a ser $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h)$ y debemos

calcular de nuevo el término cinético y potencial del Lagrangiano. En cuanto al cinético,

$$\begin{aligned}
(D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) &= (\partial^\mu + ieA^\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h)(\partial_\mu - ieA_\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) = [\partial^\mu(v) = 0] \\
&= \frac{1}{2}(\partial^\mu h + ieA^\mu v + ieA^\mu h)(\partial_\mu h - ieA_\mu v - ieA_\mu h) = \frac{1}{2}(\partial^\mu h \partial_\mu h + e^2 A^\mu v A_\mu v \\
&\quad + e^2 A^\mu v A_\mu h + e^2 A^\mu h A_\mu v + e^2 A^\mu h A_\mu h \underbrace{-ie\partial^\mu h A_\mu v + ieA^\mu v \partial_\mu h}_{=0} \\
&\quad \underbrace{-ie\partial^\mu h A_\mu h + ieA^\mu h \partial_\mu h}_{=0}) \\
&= \frac{1}{2}((\partial_\mu h)^2 + e^2 A_\mu^2 v^2 + e^2 A_\mu^2 h^2 + 2e^2 A_\mu^2 v h).
\end{aligned}$$

El potencial, recordando que $\mu^2 = -v^2 \lambda$,

$$\begin{aligned}
V(h) &= \frac{1}{2}\mu^2(v+h)^2 + \frac{1}{4}\lambda(v+h)^4 = \frac{1}{4}\lambda(-2v^2(v+h)^2 + (v+h)^4) \\
&= \frac{1}{4}\lambda(-2v^4 - 2v^2 h^2 - 4v^3 h + v^4 + 4v^3 h + 6v^2 h^2 + 4vh^3 + h^4) \\
&= \frac{1}{4}\lambda(-v^4 + 4v^2 h^2 + 4vh^3 + h^4).
\end{aligned}$$

D. Otros posibles potenciales.

En este anexo se analiza el carácter de los puntos críticos de los nuevos potenciales planteados en la sección 3.4.

• Sea $V(\phi) = \mu^2 \phi^2 + \beta \phi^n$ con $n \geq 3$ e impar,

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = 2\mu^2 \phi + n\beta \phi^{n-1} \quad ; \quad \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} = 2\mu^2 + \beta n(n-1)\phi^{n-2}. \quad (70)$$

Cuyos puntos críticos son,

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \Rightarrow \phi(2\mu^2 + n\beta \phi^{n-2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0, \\ 2\mu^2 + n\beta \phi^{n-2} = 0 \Rightarrow \phi = \left(-\frac{2\mu^2}{n\beta}\right)^{\frac{1}{n-2}} \equiv v. \end{cases} \quad (71)$$

Al ser $(n-2)$ un número impar ambos puntos críticos existen siempre. Como nos interesa saber los mínimos evaluémoslos en la segunda derivada.

$$\left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = 2\mu^2 \quad ; \quad \left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=\left(-\frac{2\mu^2}{n\beta}\right)^{\frac{1}{n-2}}} = 2\mu^2 + n(n-1)\beta \left(-\frac{2\mu^2}{n\beta}\right) = 2\mu^2(2-n). \quad (72)$$

Si $\mu^2 > 0$ entonces $V''(0) > 0$ y $\phi = 0$ es mínimo y $V''(v) < 0$ y $\phi = v$ es máximo. Si $\mu^2 < 0$ pasa justo al contrario. Es decir, en ambos casos tenemos un único mínimo.

• Sea $V(\phi) = \mu^2 \phi^2 - \lambda \phi^4 + \frac{4}{3}\delta \phi^6$ con $\mu^2, \lambda < 0$ y $\delta = -\frac{2\lambda^2}{\mu^2}$.

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = 2\mu^2\phi - 4\lambda\phi^3 + 8\delta\phi^5 \quad ; \quad \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} = 2\mu^2 - 12\lambda\phi^2 + 40\delta\phi^4. \quad (73)$$

Cuyos puntos críticos son,

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \Rightarrow \phi(2\mu^2 - 4\lambda\phi^2 + 8\delta\phi^4) = 0 \begin{cases} \phi = 0, \\ \phi^2 = \frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 16\mu^2 \left(-\frac{2\lambda^2}{\mu^2}\right)}}{8\delta} = \frac{2\lambda \pm \sqrt{36\lambda^2}}{8\delta}. \end{cases} \quad (74)$$

Manipulando la raíz,

$$\phi^2 = \frac{2\lambda \pm 6\lambda}{8 \left(-\frac{2\lambda^2}{\mu^2}\right)} = -\frac{1 \pm 3}{8} \frac{\mu^2}{\lambda} \Rightarrow \begin{cases} (1+3) \Rightarrow \phi^2 > 0 \text{ y por lo tanto existe solución.} \\ (1-3) \Rightarrow \phi^2 < 0 \text{ y por lo tanto no existe solución.} \end{cases} \quad (75)$$

Estudiamos con la segunda derivada el carácter de los puntos críticos,

$$\left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = 2\mu^2 < 0 \Rightarrow \text{es un máximo,}$$

$$\left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}} = 2\mu^2 - 12\lambda \left(-\frac{\mu^2}{2\lambda}\right) + 40 \left(-\frac{2\lambda^2}{\mu^2}\right) \left(-\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2 = -12\mu^2 > 0 \Rightarrow \text{es mínimo.} \quad (76)$$

Por lo tanto podemos afirmar que tenemos dos mínimos en $\phi = \pm\sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} \equiv \pm v'$, y a diferencia de un potencial que contenga un término de exponente impar podemos ver que este si es simétrico. De esta manera, podemos calcular la masa de la partícula usando que el valor de la segunda derivada en el mínimo es igual a $\frac{1}{2}m_h^2$,

$$\frac{1}{2}m_h^2 = -12\mu^2 = -12(-2(v')^2\lambda) = 24(v')^2\lambda. \quad (77)$$

En la sección 3.1 se llega, para el potencial $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$ con $\mu^2 < 0$, a que $v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$ y que $m_h^2(\text{old}) = 2\lambda v^2$. Por tanto, $(v')^2 = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\lambda} = \frac{1}{2}v^2$ y así,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_h^2 &= 24(v')^2\lambda = 24\left(\frac{1}{2}v^2\right)\lambda = 12v^2\lambda = 6m_h^2(\text{old}) \Rightarrow m_h^2 = 12m_h^2(\text{old}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_h = 2\sqrt{3}m_h(\text{old}). \end{aligned} \quad (78)$$

E. Mecanismo de Higgs en el Modelo Estándar.

En este anexo se estudia tanto el carácter de los puntos críticos del potencial de la sección 3.5 como un pequeño teorema del álgebra lineal. Se calculan los autovalores y autovectores de la matriz de mezcla y se muestra la unificación electrodébil. Finalmente, plantea un pequeño esquema de los generaciones de leptones y *quarks*.

E.1.

• Veamos que puntos críticos tiene nuestro potencial $V(\Phi) = \mu^2(\Phi^\dagger\Phi) + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$ con $\mu^2 < 0, \lambda > 0$ y $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$. Para ello,

$$\Phi^\dagger\Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi_1 - i\phi_2 & \phi_3 - i\phi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2).$$

Derivamos e igualamos a cero,

$$\begin{aligned} V_{\phi_i} &= \mu^2\phi_i + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2)\phi_i = \phi_i(\mu^2 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2)) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \phi_i = 0, \\ \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2 < 0 \quad \text{porque } \mu^2, \lambda > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Para saber si son mínimos o máximos necesitamos,

$$\begin{aligned} V_{\phi_i\phi_i} \Big|_{\phi_i\phi^i=v^2} &= (\mu^2 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) + 2\lambda\phi_i^2) \Big|_{\phi_i\phi^i=v^2} = 2\lambda\phi_i^2 \\ V_{\phi_i\phi_j} &= 2\lambda\phi_i\phi_j, \end{aligned}$$

de esta manera el primer menor en $\phi_i\phi^i = v^2$ tendrá la forma,

$$\begin{vmatrix} 2\lambda\phi_1^2 & 2\lambda\phi_1\phi_2 \\ 2\lambda\phi_2\phi_1 & 2\lambda\phi_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo tanto el método no es concluyente. Esto es porque, al igual que para el caso de dos dimensiones, no estamos en un mínimo en el espacio de 4 dimensiones, lo que implica que al realizar perturbaciones en las direcciones en las que existe potencial obtendremos partículas masivas y en otras direcciones bosones de Goldstone.

E.2.

• Sea una matriz cuadrada A,

$\det(A) = 0 \Rightarrow$ las columnas de A son linealmente dependientes \Rightarrow existe un vector no nulo tal que $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow A\vec{v} = \vec{0} = 0 \cdot v \Rightarrow 0$ es un valor propio de A.

• Sea la matriz \mathcal{M} ,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & (g')^2 \end{pmatrix}.$$

Si diagonalizamos la matriz, $\det(\mathcal{M} - \lambda\mathbb{I}) = 0$, sus autovalores son,

$$\begin{vmatrix} g^2 - \lambda & -gg' \\ -gg' & (g')^2 - \lambda \end{vmatrix} = (g^2 - \lambda)((g')^2 - \lambda) - g^2(g')^2 = -\lambda(g^2 + (g')^2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = g^2 + (g')^2. \end{cases}$$

Para $\lambda_1 = 0$ el autovector es,

$$\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & (g')^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \frac{g'}{g}b.$$

Si tomamos $b = g \Rightarrow a = g'$, normalizamos y recordamos que estamos en la base de W_3, B_μ nos sale el siguiente autovector,

$$A_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{g^2 + (g')^2}} \begin{pmatrix} g' \\ g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + (g')^2}} (g'W_3 + gB_\mu).$$

Si ahora hacemos lo mismo para el autovalor $\lambda_2 = g^2 + (g')^2$,

$$\begin{pmatrix} -(g')^2 & -gg' \\ -gg' & -g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -\frac{g}{g'}b.$$

Si tomamos $b = -g' \Rightarrow a = g$, normalizamos y recordamos que estamos en la base de W_3, B_μ nos sale el siguiente autovector,

$$Z_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{g^2 + (g')^2}} \begin{pmatrix} g \\ -g' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + (g')^2}} (gW_3 - g'B_\mu).$$

E.3.

• Sea el Lagrangiano de Dirac sin el término de masa,

$$\mathcal{L} = \sum_j^3 i\bar{\psi}_j(x) D_\mu \psi_j(x),$$

donde la derivada covariante tiene la forma de (33) y es introducida con el propósito de respetar las invariancias *gauge*. De esta manera, recordando que los términos levógiros acoplan débil y electromagnéticamente mientras que los dextrógiros solo de la segunda manera, podemos escribir los términos de interacción entre campos fermiónicos y bosónicos como,

$$\mathcal{L} \approx g\bar{\psi}_1\gamma^\mu \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i \psi_1 + g'B_\mu \sum_{j=1}^3 \frac{Y_j}{2} \bar{\psi}_j\gamma^\mu \psi_j,$$

donde la aproximación es fruto de haber ignorado el ∂_μ , pues no aporta información respecto a las interacciones.

Si usamos ahora las transformaciones vistas anteriormente para W_3 y B_μ e ignoramos el resto de componentes nos queda,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_j \bar{\psi}_j\gamma^\mu \left\{ g\frac{\sigma^3}{2} (\cos(\theta_W)Z_\mu + \sin(\theta_W)A_\mu) + g'\frac{Y_j}{2} (-\sin(\theta_W)Z_\mu + \cos(\theta_W)A_\mu) \right\} \psi_j \\ &= \sum_j \bar{\psi}_j\gamma^\mu \left\{ A_\mu \left[g\frac{\sigma^3}{2} \sin(\theta_W) + g'\frac{Y_j}{2} \cos(\theta_W) \right] + Z_\mu \left[g\frac{\sigma^3}{2} \cos(\theta_W) - g'\frac{Y_j}{2} \sin(\theta_W) \right] \right\} \psi_j. \end{aligned}$$

Sabemos de la QED, la teoría cuántica del campo electromagnético, que el término de interacción fermión-bosón es,

$$\mathcal{L}_{QED} \approx eA_\mu \sum_j \bar{\psi}_j\gamma^\mu Q_j \psi_j.$$

Por lo tanto, para seguir conservando la QED en nuestra teoría, se tiene que imponer que,

$$e \equiv g \sin(\theta_W) = g' \cos(\theta_W) \quad \text{y} \quad \frac{Y}{2} = Q - \frac{\sigma^3}{2}.$$

E.4.

• Hay tres generaciones de *quarks* y leptones levógiros y dextrógiros. Los fermiones levógiros son dobletes de isospín (tercera componente del isospín débil $\pm \frac{1}{2}$) y los dextrógiros son singletes de isospín (tercera componente del isospín débil 0),

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}, \quad e_{R1} = e_R^- \quad ; \quad Q_1 = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad u_{R1} = u_R, \quad d_{R1} = d_R; \\ L_2 &= \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L^- \end{pmatrix}, \quad e_{R2} = \mu_R^- \quad ; \quad Q_2 = \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad u_{R2} = c_R, \quad d_{R2} = s_R; \\ L_3 &= \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L^- \end{pmatrix}, \quad e_{R3} = \tau_R^- \quad ; \quad Q_3 = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad u_{R3} = t_R, \quad d_{R3} = b_R; \end{aligned}$$

La hipercarga de los fermiones,

$$Y_f = 2Q_f - 2T_f^3,$$

definida en términos de la tercera componente de isospín débil y la carga eléctrica, en unidades de +e, esta dada por,

$$Y_{L_i} = -1, \quad Y_{e_{R_i}} = -2, \quad Y_{Q_i} = \frac{1}{3}, \quad Y_{u_{R_i}} = \frac{4}{3}, \quad Y_{d_{R_i}} = -\frac{2}{3}.$$

F. Desintegración del bosón de Higgs.

En este anexo presentamos los cálculos detallados de las amplitudes de desintegración de un bosón de Higgs a fermiones y a bosones de *gauge*. Primero, demostramos las relaciones de completitud que satisfacen los espinores de Dirac. Posteriormente, calculamos las amplitudes de desintegración.

F.1.

• Demostración de las relaciones de completitud:

$$\begin{aligned} \sum_s u^{(s)}(p^\mu) \bar{u}^{(s)}(p^\mu) &= \not{p} + m, \\ \sum_s v^{(s)}(p^\mu) \bar{v}^{(s)}(p^\mu) &= \not{p} - m, \end{aligned}$$

donde $\not{p} = P_\mu \gamma^\mu$.

La solución general de la ecuación de Dirac es una superposición de ondas planas,

$$\psi(x) = u(p^\mu) e^{-ipx} \quad \text{modos de energía positiva } E > 0,$$

$$\psi(x) = v(p^\mu) e^{ipx} \quad \text{modos de energía negativa } -E < 0,$$

donde las formas explícitas de $u(p^\mu)$ y $v(p^\mu)$ son,

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{P}}{E+m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} \text{ con } \chi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \chi(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v^{(s)} = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{P}}{E+m} \chi'(s) \\ \chi'(s) \end{pmatrix} \text{ con } \chi'(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \chi'(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

siendo $\vec{\sigma}$ las matrices de Pauli y $N = \sqrt{|E| + m}$ la normalización.

Empecemos la demostración de la relación de completitud para $u(p^\mu)$. Para ello, veamos primero,

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{P})\chi(i) &= (\sigma_1 P_x + \sigma_2 P_y + \sigma_3 P_z) \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & P_x \\ P_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -P_y i \\ P_y i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_z & 0 \\ 0 & -P_z \end{pmatrix} \right] \chi(i) \\ &= \begin{pmatrix} P_z & P_x - P_y i \\ P_x + P_y i & -P_z \end{pmatrix} \chi(i) \\ &= \begin{cases} \text{Si } \chi(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} P_z \\ P_x + P_y i \end{pmatrix} \\ \text{Si } \chi(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} P_x - P_y i \\ -P_z \end{pmatrix}, \end{cases} \end{aligned}$$

y segundo,

$$\bar{u}^{(i)} = u^{(i)\dagger} \gamma^0 \text{ con } \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_s u^{(s)}(p^\mu) \bar{u}^{(s)}(p^\mu) &= |N|^2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{P_z}{E+m} \\ \frac{P_x+iP_y}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{P_z}{E+m} & -\frac{P_x-iP_y}{E+m} \end{pmatrix} \right. \\
&+ \left. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{P_x-iP_y}{E+m} \\ -\frac{P_z}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{P_x+iP_y}{E+m} & \frac{P_z}{E+m} \end{pmatrix} \right] \\
&= E+m \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{P_z}{E+m} & -\frac{P_x-iP_y}{E+m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{P_z}{E+m} & 0 & -\frac{P_z^2}{(E+m)^2} & -\frac{(P_x-iP_y)P_z}{(E+m)^2} \\ \frac{P_x+iP_y}{E+m} & 0 & -\frac{(P_x+iP_y)P_z}{(E+m)^2} & -\frac{P_x^2+P_y^2}{(E+m)^2} \end{pmatrix} \right. \\
&+ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{P_x+iP_y}{E+m} & \frac{P_z}{E+m} \\ 0 & \frac{P_x-iP_y}{E+m} & -\frac{P_x^2+P_y^2}{(E+m)^2} & \frac{(P_x-iP_y)P_z}{(E+m)^2} \\ 0 & -\frac{P_z}{E+m} & \frac{(P_x+iP_y)P_z}{(E+m)^2} & -\frac{P_z^2}{(E+m)^2} \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} E+m & 0 & -P_z & -(P_x-iP_y) \\ 0 & E+m & -(P_x+iP_y) & P_z \\ P_z & P_x-iP_y & \frac{P_z^2}{E+m} & 0 \\ P_x+iP_y & -P_z & 0 & -\frac{P_z^2}{E+m} \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{l} \text{Teniendo en cuenta:} \\ \frac{P^2}{E+m} = \frac{E^2-m^2}{E+m} = \frac{(E+m)(E-m)}{E+m} = E-m \\ \vec{P} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} P_z & P_x-iP_y \\ P_x+iP_y & -P_z \end{pmatrix} \end{array} \right] \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E+m & 0 \\ 0 & E+m \end{pmatrix} & -(\vec{P} \cdot \vec{\sigma}) \\ (\vec{P} \cdot \vec{\sigma}) & \begin{pmatrix} -E+m & 0 \\ 0 & -E+m \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{E\gamma^0}_{P_0\gamma^0} + m\mathbb{I} - \underbrace{\vec{P} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}}_{P_i\gamma^i} \\
&= P_\mu\gamma^\mu + m\mathbb{I} \\
&= \not{p} + m\mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Finalmente llegamos a lo que se quería demostrar,

$$\sum_s u^{(s)}(p^\mu) \bar{u}^{(s)}(p^\mu) = \not{p} + m.$$

No se hace explícitamente para $v^{(s)}$ pues las cuentas a realizar son idénticas.

F.2.

• Desarrollemos ahora los cálculos para las amplitudes de desintegración de un Higgs a dos fermiones. En la sección 4 se escribió la siguiente cadena de igualdades,

$$\begin{aligned} \sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2 &= \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 \text{Tr} \{(\not{p}_1 + m_f)(-\not{p}_2 - m_f)\} = \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 (-4p_1^\mu \cdot p_2^\mu - 4m_f^2) \\ &= \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 [2m_h^2 - 8m_f^2]. \end{aligned}$$

Vamos a analizarla poco a poco:

La primera igualdad es automática una vez son conocidas las relaciones de completitud de los espinores de Dirac.

La segunda igualdad es algo más complicada. Empecemos desarrollando la traza,

$$\text{Tr} \{(\not{p}_1 + m_f)(-\not{p}_2 - m_f)\} = \text{Tr}(-\not{p}_1\not{p}_2 - \not{p}_1 m_f - \not{p}_2 m_f - m_f^2).$$

Para continuar es necesario hacer uso de 2 propiedades de la conocida *Diracología*¹²:

1) La traza de un número impar de matrices γ^μ es cero¹³.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^p) &= \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^p) = (-1)^n \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^p \gamma^5) = [\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA)] \\ &= (-1)^n \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^p \gamma^5 \gamma^5) = (-1)^n \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^p) = 0 \Leftrightarrow n \text{ es impar.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{Tr}(\not{a}\not{b}) &= \text{Tr}(\not{b}\not{a}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a}) = \frac{1}{2} \text{Tr}[a_\mu b_\nu (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)] = \frac{1}{2} \text{Tr}[a_\mu b_\nu (2g^{\mu\nu})] = \\ \text{Tr}(a_\mu b_\nu g^{\mu\nu}) &= \text{Tr}(a \cdot b) = ab \text{Tr}(\mathbb{I}) = 4ab. \end{aligned}$$

Por lo tanto, recordando $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$,

$$\text{Tr}(-\not{p}_1\not{p}_2 - \not{p}_1 m_f - \not{p}_2 m_f - m_f^2) = -4p_1^\mu \cdot p_2^\mu - 4m_f^2.$$

Para la tercera igualdad, nos situamos en el marco de referencia de la partícula de Higgs en reposo. En consecuencia, los cuadrimomentos nos quedan como $p_h^\mu = (m_h, 0, 0, 0)$ (al estar en reposo $E=m_h$) y por conservación $p_1^\mu = (\frac{m_h}{2}, \vec{p})$ y $p_2^\mu = (\frac{m_h}{2}, -\vec{p})$. Si recordamos que los fermiones externos están sobre su capa de masas, $p^\mu p_\mu = E^2 - |\vec{p}|^2 = (m_f^2 + |\vec{p}|^2) - |\vec{p}|^2 = m_f^2$, nos queda,

$$\begin{aligned} p_h^\mu p_{(h)\mu} &= (p_1^\mu - p_2^\mu)^2 = p_1^\mu p_{(1)\mu} + p_2^\mu p_{(2)\mu} - 2p_1^\mu \cdot p_2^\mu = 2m_f^2 - 2p_1^\mu \cdot p_2^\mu = m_h^2 \\ \Rightarrow p_1^\mu \cdot p_2^\mu &= m_f^2 - \frac{m_h^2}{2} \Rightarrow -4(p_1^\mu \cdot p_2^\mu + m_f^2) = -4(m_f^2 - \frac{m_h^2}{2} + m_f^2) = 2m_h^2 - 8m_f^2. \end{aligned}$$

Queda así demostrado que,

$$\sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 [2m_h^2 - 8m_f^2].$$

¹²Recordemos que las matrices gamma están definidas mediante la relación de anticonmutación $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$, con $g^{\mu\nu}$ la métrica de Minkowski y $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$.

¹³Para su demostración haremos uso de los siguientes resultados, $(\gamma^5)^2 = \mathbb{I}$ y $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$, los cuales no se demostrarán por la trivialidad de los mismos.

• Desarrollemos ahora los cálculos de las amplitudes de desintegración de un Higgs a dos bosones *gauge*. En la sección 4 se escribió la siguiente igualdad,

$$\sum_{r_i} |\mathcal{M}|^2 = \frac{4m_A^4}{v^2} \sum_{r_i} \epsilon_{r_2}^\mu \epsilon_{r_2}^{\nu*} \epsilon_{\mu,r_3} \epsilon_{\nu,r_3}^* = \frac{4m_A^4}{v^2} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{p_2^\mu p_2^\nu}{m_A^2} \right) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_{3\mu} p_{3\nu}}{m_A^2} \right).$$

Los paréntesis de la segunda igualdad vienen de que los estados de polarización se escogen tal que satisfagan las siguientes relaciones de ortogonalidad y completitud,

$$\begin{aligned} \epsilon_r^\mu \epsilon_{\mu,s}^* &= -\xi_r \delta_{r,s} \quad r, s = 0, \dots, 3, \\ \sum_{r=0}^3 \xi_r \epsilon_r^\mu \epsilon^{*\nu} &= -g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

con $\xi_0 = -1$ y $\xi_{1,2,3} = 1$. Teniendo en cuenta lo siguiente,

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= E^2 - |\vec{p}|^2 = (m_A^2 + |\vec{p}|^2) - |\vec{p}|^2 = m_A^2 \\ g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= \text{Tr}[g^{\mu\nu}] = 4, \end{aligned}$$

podemos seguir desarrollando,

$$\begin{aligned} & \frac{4m_A^4}{v^2} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{p_2^\mu p_2^\nu}{m_A^2} \right) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_{3\mu} p_{3\nu}}{m_A^2} \right) \\ &= \frac{4m_A^4}{v^2} \left(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \frac{p_{3\mu} p_{3\nu}}{m_A^2} - g_{\mu\nu} \frac{p_2^\mu p_2^\nu}{m_A^2} + \frac{p_2^\mu p_2^\nu p_{3\mu} p_{3\nu}}{m_A^4} \right) \\ &= \frac{4m_A^4}{v^2} \left(4 - 1 - 1 + \frac{(p_2^\mu \cdot p_{3\mu})^2}{m_A^4} \right). \end{aligned}$$

Usando conservación del cuadrимomento en el vértice y los resultados expuestos arriba (las partículas están sobre su capa de masas),

$$\begin{aligned} p_h^\mu p_{h\mu} &= m_h^2 = (p_2^\mu + p_3^\mu)^2 = p_2^\mu p_{2\mu} + p_3^\mu p_{3\mu} + 2p_2^\mu \cdot p_{3\mu} = 2m_A^2 + 2p_2^\mu \cdot p_{3\mu} \\ \Rightarrow p_2^\mu \cdot p_{3\mu} &= \frac{1}{2} [m_h^2 - 2m_A^2]. \end{aligned}$$

Sustituyendo en nuestra expresión,

$$\begin{aligned} & \frac{4m_A^4}{v^2} \left(4 - 1 - 1 + \frac{(p_2^\mu \cdot p_{3\mu})^2}{m_A^4} \right) \\ &= \frac{4m_A^4}{v^2} \left(2 + \frac{1}{4m_A^4} (m_h^2 - 2m_A^2)^2 \right) = \frac{4m_A^4}{v^2} \left(2 + \frac{1}{4} \frac{m_h^4}{m_A^4} - \frac{m_h^2}{m_A^2} + 1 \right) \\ &= \frac{4m_A^4}{v^2} \left(3 + \frac{1}{4} \frac{m_h^4}{m_A^4} - \frac{m_h^2}{m_A^2} \right). \end{aligned}$$

Por conservación del cuadrимomento, al igual que con la desintegración a dos fermiones, es fácil darse cuenta que $E_A = \frac{m_h}{2}$ y por tanto, $p_A^2 = E_A^2 - m_A^2 = \frac{m_h^2}{4} - m_A^2 = \frac{m_h^2}{4} (1 - \frac{4m_A^2}{m_h^2})$. Además, al no depender del ángulo sólido y definiendo $x = 4 \frac{m_A^2}{m_h^2}$, al introducirlo en (58) nos

queda,

$$\begin{aligned}
\Gamma(h \rightarrow AA) &= \frac{1}{8\pi m_h^2} \frac{m_h}{2} (1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{4m_A^4}{v^2} \left(3 + \frac{1}{4} \frac{m_h^4}{m_A^4} - \frac{m_h^2}{m_A^2}\right) S_{AA} \\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{m_A^4}{v^2} m_h^3 \left(\frac{3}{m_h^4} + \frac{1}{4} \frac{1}{m_A^4} - \frac{1}{m_A^2 m_h^2}\right) (1-x)^{\frac{1}{2}} S_{AA} \\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{m_h^3}{v^2} \left(\frac{1}{4} + 3 \frac{m_A^4}{m_h^4} - \frac{m_A^2}{m_h^2}\right) (1-x)^{\frac{1}{2}} S_{AA} \\
&= \frac{1}{16\pi} \frac{m_h^3}{v^2} \left(1 + 12 \frac{m_A^4}{m_h^4} - 4 \frac{m_A^2}{m_h^2}\right) (1-x)^{\frac{1}{2}} S_{AA} \\
&= \frac{1}{16\pi} \frac{m_h^3}{v^2} \left(1 - x + \frac{3}{4} x^2\right) (1-x)^{\frac{1}{2}} S_{AA}.
\end{aligned}$$

G. Superconductividad y partícula de Higgs.

En este anexo se desarrollan con detalle las cuentas de la sección 5 para obtener la ecuación del efecto Meissner a partir del Lagrangiano QED escalar y el mecanismo de Higgs.

• Las ecuaciones del movimiento para nuestro campo vendrán dadas de resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0.$$

Como estamos trabajando con el Lagrangiano (24) ya sabemos que su forma explicita es,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - ie \partial^\mu \phi^* A_\mu \phi + ie A^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + e^2 A^\mu \phi^* A_\mu \phi \\
&\quad - \frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{\mu^2}{2} \phi^* \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2.
\end{aligned}$$

Resolviendo paso por paso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} &= -ie \partial^\mu \phi^* \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\alpha} \phi + ie \partial_\mu \phi \frac{\partial A^\mu}{\partial A_\alpha} \phi^* + e^2 \phi^* \phi \frac{\partial (A^\mu A_\mu)}{\partial A_\alpha} \\
&= -ie \partial^\mu \phi^* \delta_\mu^\alpha \phi - ie \partial_\mu \phi \delta_\alpha^\mu \phi^* + e^2 \phi^* \phi (-A_\mu \delta_\alpha^\mu + A^\mu \delta_\mu^\alpha) \\
&= -ie \partial^\alpha \phi^* \phi - ie \partial_\alpha \phi \phi^* + e^2 \phi^* \phi (-A_\alpha + A^\alpha) \\
&= ie \partial_\alpha \phi^* \phi - ie \partial_\alpha \phi \phi^* + 2e^2 \phi^* \phi A_\alpha,
\end{aligned}$$

y ahora el otro termino de la ecuación,

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4} \partial_\mu \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} F^{k\lambda} F_{k\lambda} \right) \\
&= -\frac{1}{4} \partial_\mu \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \left((\partial^k A^\lambda - \partial^\lambda A^k) (\partial_k A_\lambda - \partial_\lambda A_k) \right) \right) \\
&= -\frac{1}{4} \partial_\mu \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial^k A^\lambda \partial_k A_\lambda - \partial^k A^\lambda \partial_\lambda A_k - \partial^\lambda A^k \partial_k A_\lambda + \partial^\lambda A^k \partial_\lambda A_k) \right).
\end{aligned}$$

El tercer y cuarto término son iguales al primero y el segundo,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial^k A^\lambda \partial_k A_\lambda - \partial^k A^\lambda \partial_\lambda A_k) \right).$$

Pero,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(\partial^k A^\lambda \partial_k A_\lambda) &= \partial^k A^\lambda \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(\partial_k A_\lambda) + \partial_k A_\lambda \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(\partial^k A^\lambda) \\ &= \partial^k A^\lambda \delta_k^\mu \delta_\lambda^\nu + g^{k\alpha} g^{\lambda\beta} \partial_k A_\lambda \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(\partial_\alpha A_\beta) = 2\partial^\mu A^\nu.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\partial_\mu F^{\mu\nu}.$$

Si hacemos un cambio al nombre de las variables de este último resultado nos queda,

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = -\partial_\beta F^{\beta\alpha}.$$

Si sustituimos en las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$ie\partial_\alpha \phi^* \phi - ie\partial_\alpha \phi \phi^* + 2e^2 \phi^* \phi A_\alpha + \partial_\beta F^{\beta\alpha} = 0.$$

Si tomamos $\alpha = 0$ y recordamos el *gauge* impuesto,

$$F^{\beta 0} = \cancel{\partial^\beta A^0} - \cancel{\partial^0 A^\beta} = 0 \Rightarrow -\vec{E} = \vec{0} \text{ y } \partial_\beta F^{\beta 0} = 0.$$

Si tomamos las componentes espaciales, $\alpha = j = 1, 2, 3$,

$$ie\partial_j \phi^* \phi - ie\partial_j \phi \phi^* + 2e^2 \phi^* \phi A_j + \partial_\beta F^{\beta j} = 0.$$

Usando que el tensor electromagnético es antisimétrico, $F^{j0} = -F^{0j} = 0 \Rightarrow \partial_0 F^{0j} = 0 \Rightarrow \partial_\beta F^{\beta j} = \partial_i F^{ij} = -(\vec{\nabla} \times \vec{B})^j$ con $i=1,2,3$. De esta manera nos queda,

$$\begin{aligned}ie\partial_j \phi^* \phi - ie\partial_j \phi \phi^* + 2e^2 \phi^* \phi A_j - (\vec{\nabla} \times \vec{B})^j &= 0, \\ (\vec{\nabla} \times \vec{B})^j &= ie[-\phi^*(\partial_j + ieA_j)\phi + \phi(\partial_j - ieA_j)\phi^*] = J^j.\end{aligned}$$

Donde la última igualdad es debida a la ecuación inhomogénea de Maxwell. Así,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = ie[-\phi^*(\vec{\nabla} - ie\vec{A})\phi + \phi(\vec{\nabla} + ie\vec{A})\phi^*] = \vec{J}.$$

Si evaluamos en el vacío de la ruptura espontánea de simetría clásica, $\phi_0 = v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}}$, como ϕ_0 es real los términos con $\vec{\nabla}$ se cancelan, quedando,

$$\begin{aligned}\vec{J} &= ie[-\phi^* \vec{\nabla} \phi|_{\phi_0} + \phi \vec{\nabla} \phi^*|_{\phi_0} + (\phi_0^* \phi_0)ie\vec{A} + ie(\phi_0 \phi_0^*)\vec{A}] \\ &= ie[2ie\vec{A}(\phi_0^* \phi_0)] = -2e^2 \vec{A} \phi_0^2 = -2e^2 v^2 \vec{A}.\end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ y hacemos $\vec{\nabla} \times \vec{J}$,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{J} &= -2e^2 v^2 (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \left[\underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{B})}_0 - \nabla^2 \vec{B} \right] = -\nabla^2 \vec{B} \\ \Rightarrow \nabla^2 \vec{B} &= 2e^2 v^2 (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 2e^2 v^2 \vec{B} \\ \Rightarrow \nabla^2 \vec{B} &= 2e^2 v^2 \vec{B},\end{aligned}$$

obtenemos finalmente la ecuación de Meissner.