



**Universidad**  
Zaragoza

# Econofísica: Modelización de mercados libres

*Trabajo fin de grado*

*Autor:* Alejandro Nicolás Serban Cordos

*Director del trabajo:* Ricardo López Ruiz



# Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mercados libres: distribución exponencial (Boltzmann-Gibbs) de la riqueza</b>	<b>3</b>
2.1	Modelo de Dragulescu-Yakovenko, definición del modelo . . . . .	3
2.2	Obtención y comprobación de la distribución de Boltzmann-Gibbs mediante simulación numérica . . . . .	4
2.3	Método geométrico para la derivación de la distribución de Boltzmann-Gibbs: hiperplanos multidimensionales . . . . .	9
2.4	Método físico para la derivación de la distribución de Boltzmann-Gibbs: principio de máxima entropía . . . . .	11
2.5	Obtención de la distribución de Boltzmann-Gibbs mediante el <i>Z-model</i> . . . .	12
2.6	Recreación de las clases sociales económicas en la distribución de Boltzmann-Gibbs . . . . .	13
2.7	Decaimiento al equilibrio de la distribución de Boltzmann-Gibbs . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Mercados con ahorro: distribución "Gamma" de la riqueza</b>	<b>18</b>
3.1	Modelo de Dragulescu-Yakovenko con ahorro uniforme . . . . .	18
3.2	Simulación numérica: aproximación Gamma de la distribución estacionaria .	19
3.3	Obtención del <i>Z-Model</i> en un modelo con ahorro uniforme . . . . .	21
3.4	Recreación de las clases sociales económicas en la distribución Gamma . . . .	22
<b>4</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>23</b>
<b>A</b>	<b>Anexo</b>	<b>26</b>
A.1	Decaimiento al equilibrio de la distribución de Boltzmann-Gibbs: gráficas para diferentes valores de $N$ . . . . .	26
A.2	Convergencia a la distribución estacionaria Gamma para diferentes distribuciones iniciales . . . . .	27
A.3	Recreación de las clases sociales económicas en la distribución Gamma: valores de ahorro elevados . . . . .	29
<b>B</b>	<b>Sociedad heterogénea con ahorro uniforme: dos casos extremos</b>	<b>30</b>

# 1 Introducción

Los economistas no solo tratan de estudiar el comportamiento de individuos aislados, sino que tienen como objetivo el estudio de los sistemas complejos resultantes de la interacción de múltiples individuos socio-económicos.

Esta es la razón por la que la modelización basada en agentes es una herramienta indispensable en el estudio de estos sistemas socio-económicos, así como su dinámica y propiedades emergentes. Para el estudio de estos sistemas no sirve con combinar las propiedades de cada uno de los componentes de forma aislada, sino que se deben emplear conocimientos de ramas como la mecánica estadística y teoría de probabilidades. La mecánica estadística y la economía comparten en cierto modo el mismo objetivo de estudio; el análisis del comportamiento macroscópico a través de las múltiples interacciones de los agentes a nivel microscópico. Es de esta forma, en la que los físicos intervienen en el desarrollo de esta nueva vertiente de investigación denominada "econofísica".

Con el avance computacional y gran potencia de simulación de la cual nuestra sociedad goza hoy en día, el desarrollo de modelos con gran cantidad de variables es posible. Estas variables son definidas por los físicos y tratan de emular el comportamiento real del sistema económico modelizado. Gracias además a la gran cantidad de datos disponibles, estos modelos pueden ser comparados con la realidad y comprobar así su "veracidad".

En el presente trabajo, se estudiarán varios modelos sencillos como el de Dragulescu-Yakovenko y un modelo con ahorro.

Antes que nada, una pequeña descripción de las premisas empleadas en la modelización es presentada [1].

Los elementos que se emplean en la econofísica son los siguientes; dinero, salarios y riqueza. El dinero, en este sentido, se concibe como un token digital que representa la contribución de un agente a la sociedad, y a su vez, otorga al agente un beneficio proporcional en dicha sociedad.

De no mantenerse un registro de las transacciones adecuado, los agentes económicos podrían incurrir en la práctica de recibir beneficios de la sociedad, y de otros agentes, sin contribuir a ella a cambio (*free riding*). Esta práctica, de ser generalizada, rápidamente deterioraría las relaciones económicas y comprometería el bienestar de la sociedad en su conjunto.

El dinero tiene como propósito prevenir este "free riding", por lo que es necesario que sea conservado. Esto implica que los agentes económicos no deben tener la capacidad de crear o destruir estos tokens digitales, sino que deben recibirlos y otorgarlos a otros agentes para su uso en transacciones económicas. Es decir, el dinero debe ser controlado y distribuido de manera cuidadosa para garantizar su efectividad en la prevención del *free riding*.

El dinero se convierte así en una herramienta crucial para el correcto funcionamiento de una economía compleja y eficiente y en el elemento principal empleado en los modelos presentados en este trabajo<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>La notación empleada para definir el dinero de un agente  $i$  será  $m_i$ .

Antes del estudio de las diferencias entre el dinero, salarios y riqueza es necesario introducir el concepto de las capas en la economía monetaria.

Se pueden distinguir dos capas: la física y la monetaria. La capa física abarca la producción, transferencia y consumo de objetos físicos, bienes y servicios, y se encuentra regida por leyes y limitaciones físicas como la energía y los recursos naturales. A diferencia de la capa monetaria, los objetos en la capa física no suelen ser conservados.

Por otro lado, la capa monetaria representa el flujo de dinero entre los diferentes agentes económicos en el intercambio de bienes y servicios. A través de esta capa, los agentes económicos obtienen y dan dinero a otros agentes para llevar a cabo sus transacciones. Es importante destacar que la capa monetaria no se rige por las mismas leyes físicas y limitaciones que la capa física, y su dinámica es diferente.

Es así muy común una incorrecta identificación de estas capas en el ámbito económico, lo que lleva a diferentes falacias tratando de desacreditar a esta vanguardista vertiente llamada econofísica.

Es por esto por lo que se introduce la variable de la riqueza de un agente  $i$ ,  $w_i$ . Este elemento económico engloba ambas capas, tanto la física como la monetaria ya que se define como:

$$w_i = m_i + \sum_{\alpha} p_{\alpha} v_i^{(\alpha)} \quad (1)$$

donde  $p_{\alpha}$  es el precio (monetario) por unidad de volumen del producto  $\alpha$  y se definen como los coeficientes de conversión entre ambas capas,  $v_i^{(\alpha)}$  es el volumen o número de objetos que posee el agente  $i$ .

Esta combinación de capas deriva en problemas a la hora de fijar unas leyes de conservación de la riqueza. Como ejemplo de esta no conservación basta con imaginar a un individuo que posea acciones en bolsa. El precio de estas acciones varía con el paso del tiempo haciendo así que su riqueza se vea modificada.

Finalmente, los salarios son un elemento que se emplea más en la práctica y no añade información económica extra. El uso de esta variable es debido a la mayor accesibilidad de datos en la red de los ingresos de los individuos ya que el dinero en las cuentas personales es una información que los bancos mantienen de carácter privado.

## 2 Mercados libres: distribución exponencial (Boltzmann-Gibbs) de la riqueza

### 2.1 Modelo de Dragulescu-Yakovenko, definición del modelo

El modelo de Dragulescu-Yakovenko es una contribución importante a la teoría de la distribución de la riqueza en la economía y finanzas. Fue desarrollado en el año 2000 por el profesor de física Victor M. Yakovenko y su estudiante Ionut C. Dragulescu. Este modelo se enfoca en analizar cómo se distribuye el dinero en una sociedad, lo que ha generado un gran interés en la comunidad científica y ha sido objeto de numerosos estudios debido a su capacidad para explicar y predecir la distribución de la riqueza en diferentes países y períodos históricos.

Victor M. Yakovenko y Ionut C. Dragulescu obtuvieron en [2] mediante argumentos basados en la mecánica estadística y simulaciones computacionales que la distribución del dinero en un sistema económico multi-agente cerrado seguía una distribución exponencial en el equilibrio.

Este modelo establece que la distribución estacionaria debe ser análoga al factor de Boltzmann-Gibbs:

$$P(m) = ce^{-m/T_m} \quad (2)$$

donde  $c$  es una constante de normalización, y  $T_m$  es la "temperatura del dinero", es decir, es equivalente a la cantidad media de dinero que posee cada agente:

$$T_m = \langle m \rangle = \frac{M}{N} \quad (3)$$

donde  $M$  es la cantidad total de dinero que hay en el sistema y  $N$  el número total de agentes.

El factor Boltzmann-Gibbs es un concepto fundamental en la física estadística. Describe la distribución de probabilidad de las partículas en un sistema en diferentes contextos y su importancia radica en su capacidad para unir la brecha entre las escalas microscópicas y macroscópicas, permitiendo así a los físicos hacer predicciones sobre el comportamiento a gran escala basándose en la dinámica microscópica subyacente. El factor Boltzmann-Gibbs tiene una amplia aplicabilidad y se utiliza para describir una notable gama de fenómenos, incluyendo el comportamiento de gases, líquidos y sólidos, así como transiciones de fase y fenómenos críticos.

En este primer capítulo, se expondrán diferentes argumentos para derivar esta distribución exponencial en el equilibrio, que incluye argumentos basados en la física y en métodos geométricos, así como simulaciones computacionales.

## 2.2 Obtención y comprobación de la distribución de Boltzmann-Gibbs mediante simulación numérica

En primer lugar, se describe computacionalmente el modelo de Dragulescu-Yakovenko y sus premisas [2][3].

El sistema considerado se compone de  $N$  agentes económicos, cada uno de ellos indexados mediante  $i$  con  $i = 1, 2, \dots, N$  y con un dinero  $m_i$ . La primera premisa establece que el sistema es cerrado por lo que:

$$\sum_{i=1}^N m_i = M \quad (4)$$

donde  $M$  es el dinero total y fijo del sistema. Es así que podemos definir la cantidad de dinero media por agente como:

$$\langle m \rangle = \frac{M}{N} \quad (5)$$

El objetivo de Dragulescu y Yakovenko era conocer la forma de la distribución de probabilidad  $P(m)$  en un estado estacionario o de equilibrio. Esta distribución de probabilidad se define como el número de agentes que disponen de la cantidad de dinero  $m \in (m, m + dm)$  y es equivalente al producto del número total de agentes  $N$  por  $P(m)$ .

Finalmente, mediante simulación numérica, obtuvieron que la probabilidad de que un agente random  $i$  tuviera un dinero  $m_i \in (m, m + dm)$  seguía un comportamiento análogo al factor de Boltzmann-Gibbs cuando se alcanzaba el estado estacionario:

$$P(m_i = m) = \frac{1}{\langle m \rangle} \cdot e^{-m/\langle m \rangle} \quad (6)$$

En esta sección se desarrollarán las simulaciones que siguieron estos dos científicos con el fin de ilustrar sus resultados. En cuanto a la simulación, en cada una de las iteraciones se escoge de manera random a un par de agentes, los cuales denominaremos  $i$  y  $j$  con dinero correspondiente  $m_i$  y  $m_j$ . En esta misma iteración se producirá una transacción entre este par de agentes. Este intercambio vendrá dado de la siguiente manera:

$$(m_i, m_j) \longrightarrow (m'_i, m'_j) \text{ con } \begin{cases} m'_i = \epsilon(m_i + m_j) \\ m'_j = (1 - \epsilon)(m_i + m_j) \end{cases} \quad (7)$$

Se ha definido  $\epsilon$  como un número random plano tal que  $\epsilon \in [0, 1]$ . Esta transacción se puede interpretar como que ambos agentes ponen todo su dinero disponible para la operación, se escoge un porcentaje random  $\epsilon$  y un agente se queda con este porcentaje del dinero total y el otro agente con el resto. Este tipo de transacciones no simulan las interacciones económicas más mundanas como puede ser ir a comprar a un supermercado, sino que están más orientadas al entorno corporativo y la creación de *joint ventures*.

La premisa de que no se admite deuda en el modelo ya viene implícita en la propia naturaleza de la transacción. Con deuda nos referimos a que el balance de un agente no puede ser inferior a cero  $m_i \geq 0 \forall i$ . En este modelo, aunque el agente tenga un balance cero aún puede recibir

dinero en las transacciones y se puede observar también que los balances no evolucionarán a valores negativos.

Se observará que todas las distribuciones iniciales convergen a la misma distribución final estacionaria.

Para ello, se propone una distribución inicial en la que todos los agentes comienzan con una cantidad de dinero igual. De esta manera la distribución inicial tomará la forma de una delta de Dirac centrada en el valor de dinero otorgado a todos los agentes:

$$P_0(m) = \delta(m - \langle m \rangle) \quad (8)$$

Observamos en Figure 1 como la distribución delta inicial se va ensanchando con el paso del tiempo hasta alcanzar la distribución estacionaria esperada:

$$P(m) = \frac{1}{\langle m \rangle} e^{-m/\langle m \rangle} \quad \text{con } \langle m \rangle = 1. \quad (9)$$

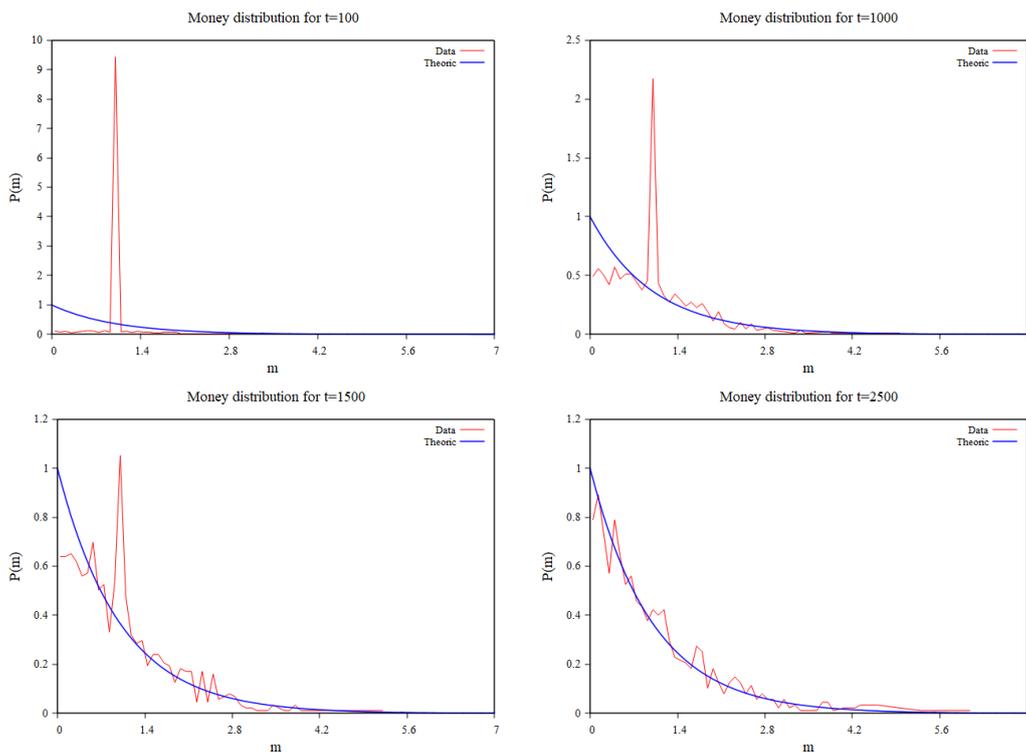


Figure 1: Evolución temporal de la distribución inicial delta para  $N=1000$  y  $\langle m \rangle = 1$ . El tiempo aquí indica el número de transacciones realizadas y el plot se realiza al sistema final para ese determinado número de operaciones económicas.

La distribución estacionaria para esta determinada inicialización del sistema económico tras recorrer varias veces las  $N^2$  transacciones toma la siguiente forma (Figure 2). Se puede observar como se ajusta perfectamente a la distribución exponencial esperada (expresión 9).

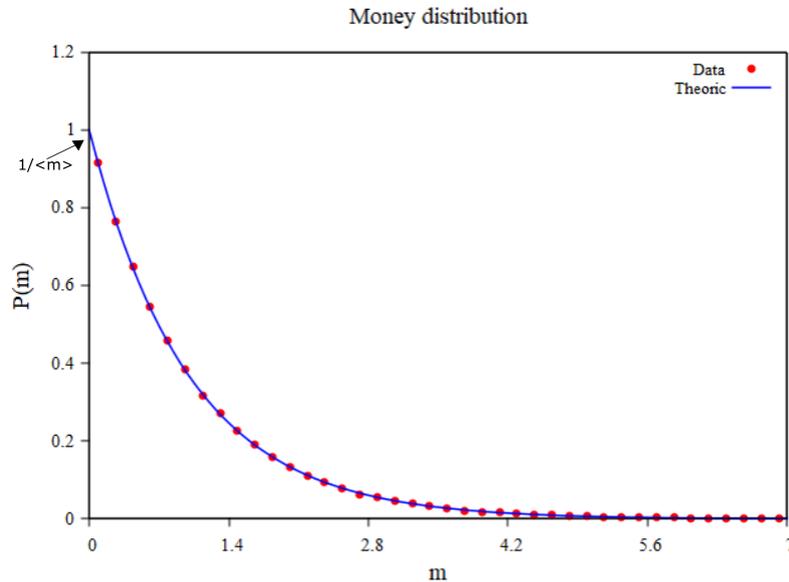


Figure 2: Distribución estacionaria del sistema inicial delta para  $N=1000$ ,  $\langle m \rangle = 1$  y recorriendo 100 veces estas  $N^2$  transacciones.

Con el fin de comprobar si otras condiciones iniciales convergen también a la distribución estacionaria esperada se ha realizado este mismo proceso ahora con una distribución inicial *3-delta*.

Para recrear esta distribución inicial constatada por tres deltas de Dirac, se ha inicializado el sistema económico inicial por segmentos de manera secuencial. Al primer tercio de agentes del sistema se les ha otorgado una misma cantidad de dinero, al segundo tercio otra cantidad y al tercero otra. Los detalles de esta inicialización, así como de la propia simulación se pueden observar en el pie de foto de Figure 3.

La distribución en el equilibrio de nuevo se puede comprobar en Figure 4 que se ajusta a la esperada teóricamente:  $P(m) = \frac{1}{\langle m \rangle} e^{-m/\langle m \rangle}$  con  $\langle m \rangle = 7/6$ .

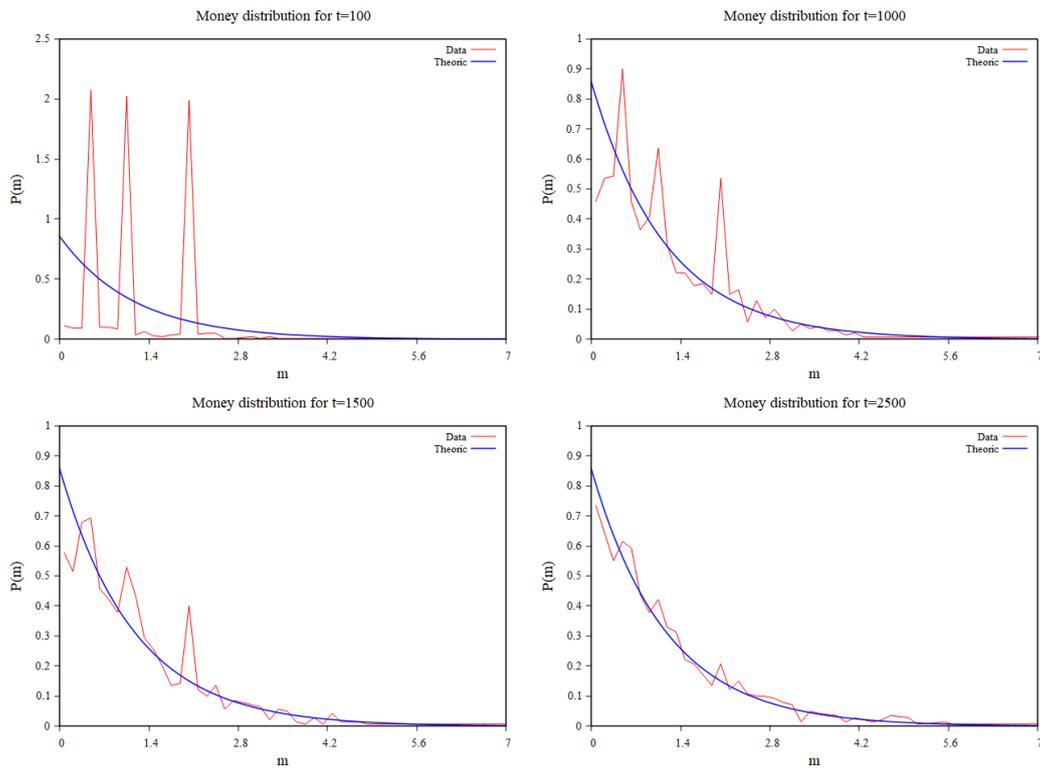


Figure 3: Evolución temporal de la distribución inicial  $\beta$ -delta para  $N=1000$  y el primer tercio inicializado con  $m = 1/2$ , el segundo con  $m = 1$  y el tercero con  $m = 2$ . Siendo así  $\langle m \rangle = 7/6$ .

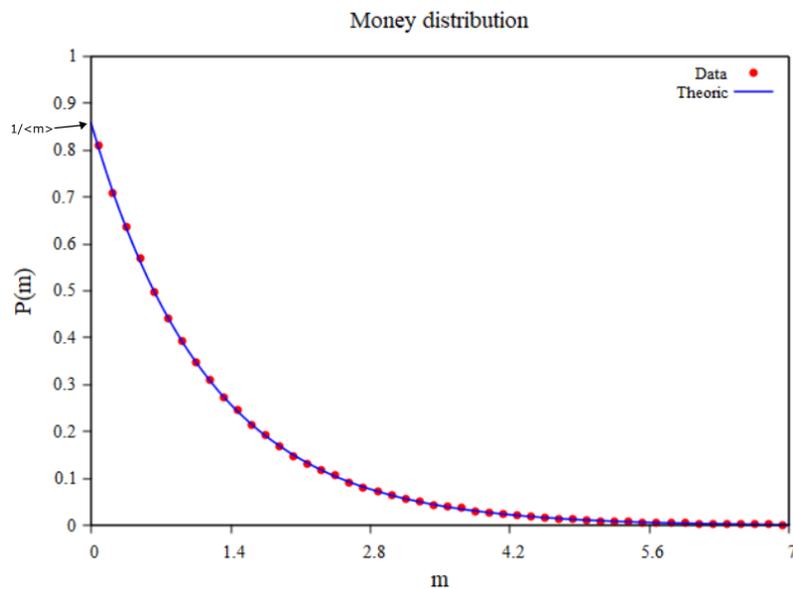


Figure 4: Distribución estacionaria del sistema inicial  $\beta$ -delta para  $N=1000$ ,  $\langle m \rangle = 7/6$  y recorriendo 500 veces estas  $N^2$  transacciones.

Finalmente, para dejar zanjado el tema de la convergencia de las distribuciones iniciales al factor de Boltzmann en su estado estacionario se analizará la distribución inicial triangular.

Tras la parametrización de las dos rectas consituyentes de la distribución triangular y cálculos geométricos triviales, se llega a la conclusión de que si el límite inferior de la distribución es cero y el superior lo llamamos  $a$ , para que la distribución esté debidamente normalizada, la altura  $h$  de esta y su media  $\langle m \rangle$  han de ser:

$$h = \frac{2}{a}$$

$$\langle m \rangle = \int_0^a m \cdot f(m) dm = \frac{a}{2} \tag{10}$$

donde  $f(m)$  es la función parametrizada.

De esta manera, la evolución temporal de la distribución triangular se puede observar en Figure 5.

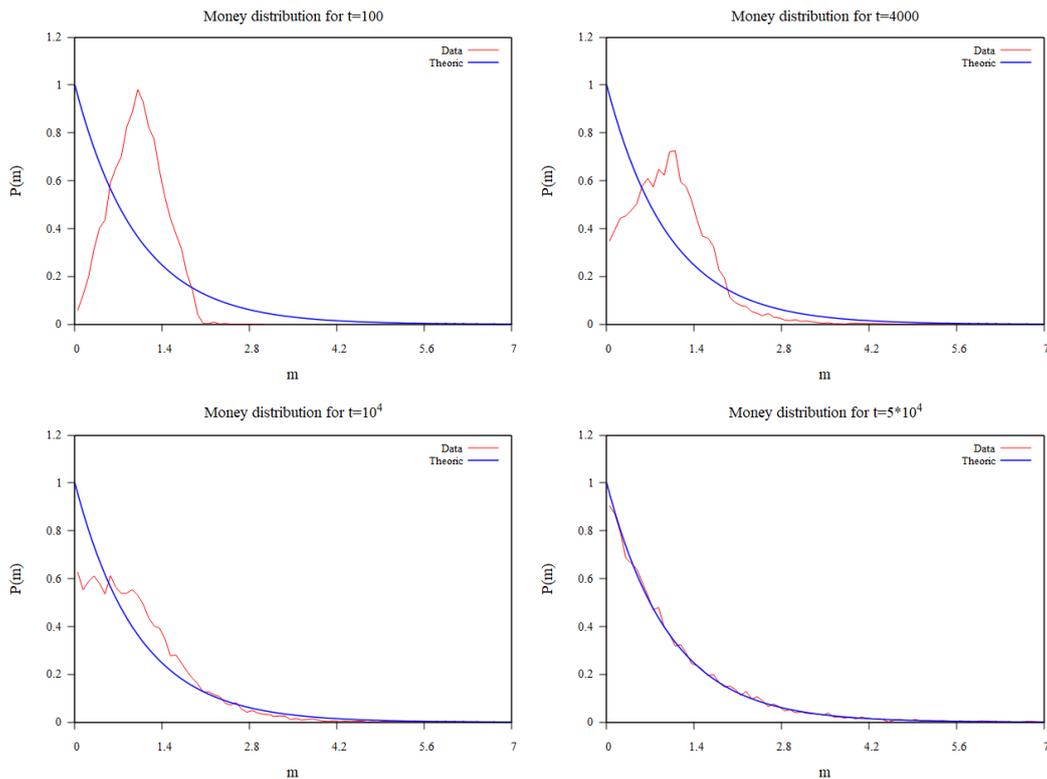


Figure 5: Evolución temporal de la distribución inicial triangular para  $N=10000$ , fijando  $a = 2$  con lo que  $\langle m \rangle = 1$  y  $h = 1$ .

Y se comprueba que la distribución estacionaria toma de nuevo la forma esperada (expresión 9), la cual es equivalente a Figure 2.

## 2.3 Método geométrico para la derivación de la distribución de Boltzmann-Gibbs: hiperplanos multidimensionales

Este método geométrico fue desarrollado por R. López-Ruiz *et al.* [4]. En él, se considera un espacio  $N$ -dimensional con un total de  $N$  agentes indexados mediante  $i$  y cada uno con un dinero arbitrario  $x_i$  (no asumimos deuda). Así la notación empleada para la definición del dinero de cada agente es la siguiente:

$$x_i \geq 0 \quad \forall i, \text{ con } i = 1, \dots, N \quad (11)$$

Estamos trabajando con sistemas multi-agente cerrados por lo que la cantidad de dinero total en el sistema económico se conserva y es  $M$ :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1} + x_N = M \quad (12)$$

Para comenzar con la demostración, suponemos el desarrollo del sistema en la zona positiva de un  $N$ -hiperplano en el que la única condición impuesta hasta el momento es la intrínseca a un sistema cerrado; la conservación del dinero total  $M$ .

Desde un punto de vista geométrico solo queda por definir la superficie de este  $N$ -hiperplano de lado  $M$ :

$$S_N(M) = \frac{\sqrt{N}}{(N-1)!} \cdot M^{N-1} \quad (13)$$

La pregunta que puede surgir en este punto es si la visita a cada uno de los puntos del sistema se realiza de manera equiprobable o si sigue alguna otra ley. Aquí es donde se asume la segunda y última premisa para la realización de la demostración y es que se va a emplear la teoría ergódica. Es decir, cada punto del hiperplano<sup>2</sup> se visita de manera equiprobable.

De esta manera, se define la probabilidad de encontrar al agente  $i$  con dinero  $x_i$  como  $f(x_i)dx_i$ . Esta probabilidad, con su debida normalización asociada:

$$\int_0^M f(x_i)dx_i = 1 \quad (14)$$

es proporcional al área superficial formada por todos los puntos del  $N$ -hiperplano cuya  $i$ -ésima coordenada es  $x_i$ .

Si tomamos al  $i$ -ésimo agente con coordenada  $x_i$  y consideramos el dinero del que dispondrán el resto de  $N-1$  agentes en el  $(N-1)$ -hiperplano resultante, la ecuación que dictamina esta situación tomará la forma:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_{N-2} + x_{N-1} = M - x_i \quad (15)$$

<sup>2</sup>Cada punto del  $N$ -hiperplano equivale a un posible estado del sistema.

Resultando así el área superficial  $S_{N-1}(M - x_i)$  asociado a este  $(N-1)$ -hiperplano:

$$S_{N-1}(M - x_i) = \frac{\sqrt{N-1}}{(N-2)!} \cdot (M - x_i)^{N-2} \quad (16)$$

Este nuevo área está relacionado con la expresión (13) mediante un término puramente trigonométrico ( $\text{sen}(\theta_N)$ ):

$$S_N(M) = \int_0^M \frac{S_{N-1}(M - x_i)}{\text{sen}(\theta_N)} dx_i \quad , \quad \text{sen}(\theta_N) = \sqrt{\frac{N-1}{N}} \quad (17)$$

Modificando un poco esta última expresión (17) y recordando la normalización de la función de probabilidad (14):

$$\left. \begin{aligned} \int_0^M \frac{S_{N-1}(M - x_i)}{S_N(M)} \frac{1}{\text{sen}(\theta_N)} dx_i = 1 \\ \int_0^M f(x_i) dx_i = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x_i) = \frac{S_{N-1}(M - x_i)}{S_N(M)} \frac{1}{\text{sen}(\theta_N)} \quad (18)$$

Sustituyendo y operando la anterior expresión (18), se obtiene que la función de probabilidad sigue la siguiente expresión:

$$f(x_i) = \frac{(N-1)}{M} \left(1 - \frac{x_i}{M}\right)^{N-2} \quad (19)$$

Si se define a  $\langle x \rangle$  como el dinero medio por agente del sistema, se tiene que el dinero total se puede expresar como:

$$M = N \cdot \langle x \rangle \quad (20)$$

Finalmente si se realiza el límite de la función de probabilidad (19) cuando  $N \rightarrow \infty$  y se emplea lo definido en (20):

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{\langle x \rangle} e^{-x/\langle x \rangle}} \quad (21)$$

Se obtiene así la distribución estacionaria de dinero del sistema económico multi-agente cerrado de una manera analítica y haciendo uso solamente de la teoría ergódica y la condición intrínseca de conservación del dinero al ser un sistema cerrado<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>En la expresión final (21),  $x_i$  ha sido sustituido por  $x$  ya que no existen diferencias estadísticas entre los agentes que componen el sistema.

## 2.4 Método físico para la derivación de la distribución de Boltzmann-Gibbs: principio de máxima entropía

Este método [5] está ligado a la mecánica estadística y a la teoría de la información. A la hora de afrontar problemas en los que falta tanta información probabilística (como se verá a continuación) se desglosa el enfoque en dos vertientes de pensamiento.

Estas dos corrientes principales en la teoría de la probabilidad son: la objetiva y la subjetiva. La perspectiva objetiva considera la probabilidad de un evento como una propiedad objetiva de la medición empírica mediante la observación de las relaciones de frecuencia en un experimento aleatorio. En contraste, la perspectiva subjetiva ve las posibilidades como expresiones de la ignorancia humana y la probabilidad como una expresión formal de nuestra expectativa de que un evento ocurra o haya ocurrido, basada en la información disponible.

El problema que a continuación se plantea se enfocará empleando este pensamiento subjetivo.

Definimos la cantidad  $x$  como una variable discreta capaz de tomar diferentes valores discretos  $x_i$  ( $i=1, \dots, N$ ). No se nos especifica el valor de las correspondientes probabilidades  $p_i$  y la única información que se nos otorga es el valor medio de una función  $f(x)$  y la condición de normalización de las probabilidades:

$$\left. \begin{aligned} \langle f(x) \rangle &= \sum_{i=1}^N p_i f(x_i) \\ \sum p_i &= 1 \end{aligned} \right\} \longrightarrow N \text{ incógnitas \& 2 ecuaciones} \quad (22)$$

Nuestro objetivo es obtener la expresión analítica de la distribución de probabilidad  $p_i$ , pero la información que tenemos disponible es escasa. Disponemos de  $N$  incógnitas (cada una asociada a cada valor de  $p_i$ ) y solamente dos ecuaciones (22).

La teoría de la información ha descubierto un criterio único e inequívoco para medir la cantidad de incertidumbre representada por una distribución de probabilidad discreta. Este criterio se alinea con la idea intuitiva de que una distribución amplia representa más incertidumbre que una distribución "afilada", es por ello por lo que se introduce una cantidad que es positiva, que aumenta con la creciente incertidumbre, y que es aditiva para fuentes independientes de incertidumbre:

$$H(p_1 \dots p_N) = -K \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i \quad (23)$$

donde  $K$  es una constante positiva. Esta definición es simplemente lo que se conoce como entropía en mecánica estadística y en este caso será la entropía asociada a la distribución de probabilidad  $p_i$ , de esta manera tanto la entropía como la incertidumbre son conceptos equivalentes en este marco.

La solución a nuestro problema se puede plantear de la siguiente manera: cuando hacemos inferencias a partir de información parcial, debemos utilizar la distribución de probabilidad

que tenga la máxima entropía posible, considerando la información disponible. Esto es la única asignación imparcial que podemos hacer, ya que cualquier otra implicaría hacer suposiciones arbitrarias sobre información que no tenemos por hipótesis.

Si buscamos maximizar la entropía haciendo uso de las ecuaciones/información que tenemos disponibles (22), se han de introducir los multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  y  $\mu$ . Se obtiene finalmente que la distribución de probabilidad está dada por:

$$p_i = e^{-\lambda - \mu f(x_i)} \quad (24)$$

que es consistente con el factor de Boltzmann-Gibbs.

Queda añadir que las constantes  $\lambda$  y  $\mu$  están determinadas por sustitución directa en las ecuaciones (22). Se puede emplear la función de partición  $Z(\mu)$  para la representación de los resultados:

$$Z(\mu) = \sum_{i=1}^N e^{-\mu f(x_i)}$$

$$\lambda = \ln Z(\mu) \quad (25)$$

$$\langle f(x) \rangle = -\frac{\delta}{\delta \mu} \ln Z(\mu)$$

## 2.5 Obtención de la distribución de Boltzmann-Gibbs mediante el *Z-model*

R. López-Ruiz *et al.* [6] estudiaron la obtención de la distribución de Boltzmann-Gibbs mediante el uso de un operador funcional no lineal  $\Gamma$ .

El uso de este operador tiene como objetivo determinar la evolución asintótica de una distribución inicial continua  $p_0(x)$  con media  $\langle x \rangle$  hacia la distribución de equilibrio  $p_{eq}(x)$ .

Cada vez que se aplica este operador a la distribución inicial, se asume que se han producido del orden de  $N/2$  "transacciones" o interacciones entre pares de agentes, siendo  $N$  el número de agentes en el sistema.

Así, el modelo planteado después de  $n$  iteraciones queda representado por la siguiente expresión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma^n [p_0(x)] = p_{eq}(x) \quad (26)$$

La probabilidad de que un par de agentes con dinero  $x$  e  $y$  realicen una transacción en un paso temporal  $n$  viene dada por la probabilidad conjunta  $p_n(x) p_n(y)$ . El dinero que uno de estos dos agentes puede obtener en la transacción lo llamaremos  $\alpha$  y debe ser  $\alpha \leq x + y$ .

De esta manera, la probabilidad de obtener esta cantidad de dinero  $\alpha$  en esta determinada transacción entre el par de agentes (elegidos de manera random) y en este paso temporal de  $n$  a  $n + 1$  viene dada por la expresión:

$$[\Gamma p](\alpha) = \iint_{A(\alpha)} \frac{p(x)p(y)}{x+y} dx dy \quad (27)$$

donde el dominio de integración  $A(\alpha)$  se define:

$$A(\alpha) = \{(x, y), x, y > 0, x + y > \alpha\} \quad (28)$$

Se puede demostrar que la única distribución que satisface la condición de ser un punto fijo en el espacio de distribuciones cuando actúa el operador  $\Gamma$ , es la distribución exponencial de Boltzmann-Gibbs. No se incluyen las demostraciones de los teoremas, así como la manipulación de la expresión (27) necesarias para llegar a este resultado. Para una lectura más profunda consultar los trabajos de R. López-Ruiz [6] y G. Katriel [7].

Este resultado es de vital importancia debido a que se ha obtenido la distribución exponencial de Boltzmann-Gibbs de manera analítica para cualquier distribución inicial con una media de dinero bien definida y fijada considerando en todo momento interacciones entre pares de agentes elegidos de forma random.

## 2.6 Recreación de las clases sociales económicas en la distribución de Boltzmann-Gibbs

Este modelo tiene la posibilidad de recrear la distribución de clases sociales en función del balance económico que cada agente posee una vez se ha alcanzado el equilibrio. Se ha realizado una simulación en la que se distinguen tres clases sociales predefinidas partiendo por simplicidad, de que todos los agentes disponen de  $m_i = 1 \forall i, \langle m \rangle = 1$  en el momento inicial:

- Clase baja  $\rightarrow m_i \leq 1/2$
- Clase alta  $\rightarrow m_i \geq 2$
- Clase media  $\rightarrow 1/2 \leq m_i \leq 2$

La simulación arroja los siguientes resultados (Figure 6):

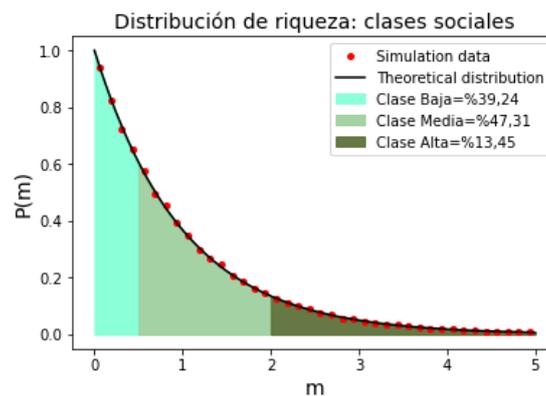


Figure 6: Distribución estacionaria para  $N=1000$ ,  $\langle m \rangle = 1$  y recorriendo 100 veces estas  $N^2$  transacciones. La clase baja se observa en el color verde más claro, la media en el verde intermedio y la alta en el verde más oscuro. La curva negra es la distribución teórica en el equilibrio (expresión 9).

Estos resultados simulan sorprendentemente bien la realidad de la sociedad económica actual teniendo en cuenta que la ley de intercambio de este modelo no representa para nada bien las transacciones que realiza la mayoría de la población.

## 2.7 Decaimiento al equilibrio de la distribución de Boltzmann-Gibbs

Como última tarea en este capítulo trataremos de obtener la proporcionalidad existente entre el número de agentes que componen el sistema y la distancia entre distribuciones como función del tiempo.

La diferencia entre distribuciones refiere a observar cómo para diferentes tiempos la distribución para ese determinado paso temporal dista de la distribución teórica estacionaria, en este caso la distribución exponencial.

Llamemos  $d$  a esta diferencia entre distribuciones, observaremos la dependencia temporal, es decir,  $d(t)$  y trataremos de obtener la relación de proporcionalidad en función del número de agentes  $N$ .

De manera cualitativa podemos pensar que esta relación deberá estar ligada a una función exponencial negativa ya que se ha podido observar en anteriores gráficas cómo rápidamente (para tiempos cortos) la distribución inicial convergía a la distribución final estacionaria.

Es decir, hasta el momento sabemos que esta diferencia entre distribuciones como función del tiempo verifica que:

$$d \propto e^{-\alpha t} \quad (29)$$

donde  $\alpha$  es la constante de proporcionalidad de la cual queremos observar su relación con  $N$ , es decir,  $\alpha(N)$ .

Para llevar a cabo esta tarea a nivel computacional, el *modus operandi* ha sido el siguiente:

Para cada tiempo  $t$  se obtiene su distribución asociada, la información que nos otorga esta distribución es el número de agentes que tienen la cantidad  $m + dm$  en cada uno de los intervalos definidos que barren el espectro del dinero  $m$ . Es decir, sabemos:

$$P_t(m) = \frac{n_m^t}{N} \quad (30)$$

siendo  $P_t(m)$  la probabilidad a tiempo  $t$  y  $n_m^t$  el número de agentes que tienen dinero  $m + dm$  para este tiempo.

Lo mismo aplica para la distribución estacionaria:

$$P_{eq}(m) = \frac{n_m^{eq}}{N} \quad (31)$$

siendo  $P_{eq}(m)$  la probabilidad en el equilibrio y  $n_m^{eq}$  el número de agentes que tienen dinero  $m + dm$  en el equilibrio.

Es así como podemos obtener la diferencia entre distribuciones  $d$  para cada tiempo  $t$ :

$$d = \sum_m |P_t(m) - P_{eq}(m)| = \sum_m \frac{|n_m^t - n_m^{eq}|}{N} \quad (32)$$

El término  $N$  se introduce con el fin de tener una correcta normalización.

Las simulaciones arrojan los siguientes resultados<sup>4</sup>:

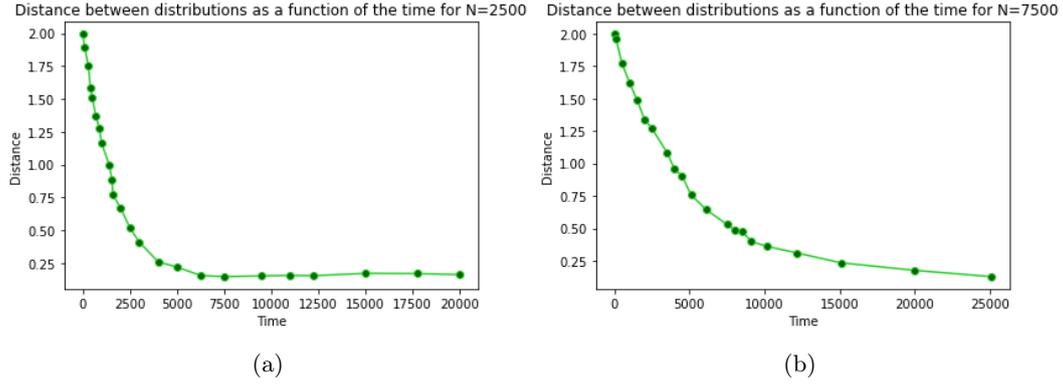


Figure 7: a) Distancia entre distribuciones en función del tiempo para  $N=2500$ . b) Distancia entre distribuciones en función del tiempo para  $N=7500$ .

Con el fin de obtener la proporcionalidad buscada  $\alpha$  de la expresión (29) se realizan unos fits exponenciales a las anteriores gráficas:

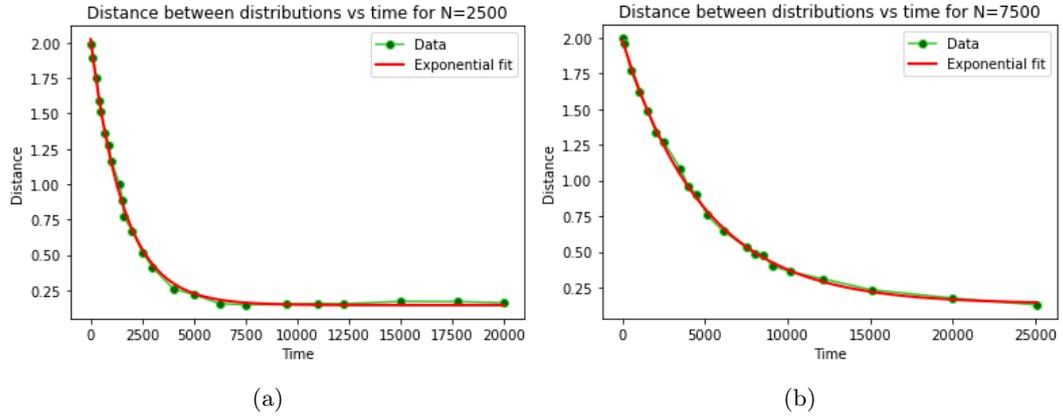


Figure 8: a) Distancia entre distribuciones en función del tiempo para  $N=2500$  y su fit exponencial. b) Distancia entre distribuciones en función del tiempo para  $N=7500$  y su fit exponencial.

El fit sigue la siguiente expresión:

$$d = ae^{-bt} + c \quad (33)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los parámetros del ajuste.

<sup>4</sup>Se presentan solo un par de resultados, en el anexo A.1 se puede encontrar el resto.

A continuación se tratará de obtener analíticamente el valor para estos parámetros asumiendo el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ .

Comenzando por el parámetro  $c$ , se puede deducir que cuando  $t \rightarrow \infty$ , la distancia entre distribuciones  $d$  ha de tender a cero y fijándonos en la expresión (33), se concluye que el parámetro  $c$  ha de ser cero.

En lo relativo al cálculo del parámetro  $a$ , se obtendrá mediante la diferencia entre la distribución a  $t = 0$  y la de equilibrio (expresión (32)) considerando el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ . De esta manera, la distribución a  $t = 0$  será la distribución inicial de la delta de Dirac centrada en uno. Esto implica que todos los agentes caen en el mismo intervalo de valor  $m = 1$  para la distribución inicial:

$$n_{m=1}^{t=0} = N \quad (34)$$

Para la distribución en el equilibrio, los agentes están distribuidos en los intervalos de manera que se reproduce la distribución de la expresión (13). El número de agentes que caerán en el intervalo de valor  $m = 1$  para la distribución en el equilibrio será despreciable debido a que considerando el límite termodinámico, se tendrá que el tamaño de los intervalos  $\Delta m$  es ínfimo:

$$n_m^{eq} = \frac{1}{\langle m \rangle} e^{-m/\langle m \rangle} \cdot \Delta m \rightarrow n_{m=1}^{eq} = e^{-1} \cdot \Delta m \rightarrow 0 \quad (35)$$

donde  $\langle m \rangle = 1$ .

Finalmente se podrá obtener el valor del parámetro  $a$  buscado como:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{m \neq 1} \frac{n_m^{eq}}{N} + \frac{n_{m=1}^{t=0} - n_{m=1}^{eq}}{N} = \\ &= \underbrace{\sum_{m \neq 1} \frac{n_m^{eq}}{N}}_1 + \underbrace{\frac{N - e^{-1} \Delta m}{N}}_1 = 2 \end{aligned} \quad (36)$$

donde se han utilizado las expresiones (34) y (35). El primer término incluye el número de agentes que cae en los intervalos con  $m \neq 1$ , o lo que es equivalente al área bajo la curva de la distribución en el equilibrio habiendo eliminado el ínfimo intervalo de  $m = 1$ .

En el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ , se ha obtenido suponiendo una distribución inicial de delta de Dirac, que  $a = 2$ . Pero este parámetro  $a$  será dependiente de la distribución inicial del sistema. El valor de  $a = 2$  es global para distribuciones iniciales de este tipo (delta de Dirac, doble delta de Dirac, triple delta de Dirac, etc), pero para distribuciones iniciales como la triangular, tomará un valor diferente<sup>5</sup> a 2.

<sup>5</sup>Se ha obtenido numéricamente el valor de  $a$  para la distribución inicial triangular con  $\langle m \rangle = 1$  y se ha obtenido que  $a = 1.5718$ . No confundir el parámetro geométrico  $a$  de la distribución triangular de la sección 2.2 con el estudiado aquí.

Finalmente se tratará de deducir el valor del parámetro  $b$ . Este parámetro lleva implícito la dependencia con  $N$  buscada. Para obtener esta dependencia observamos los datos numéricos obtenidos:

<b>N</b>	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>
1000	1,829	$1,625 \cdot 10^{-3}$	0,133
2500	1,881	$6,250 \cdot 10^{-4}$	0,144
5000	1,875	$3,075 \cdot 10^{-4}$	0,107
7500	1,847	$2,034 \cdot 10^{-4}$	0,133
10000	1,884	$1,623 \cdot 10^{-4}$	0,114

Si nos fijamos en el parámetro  $b$  observamos que es el parámetro  $\alpha(N)$  que buscábamos en la expresión (29).

Observamos que este parámetro escala con la inversa de  $N$  por lo que la expresión analítica buscada va tomando la siguiente forma cuando se considera el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ :

$$d(t) = 2 \cdot e^{-\bar{b}t/N} \quad (37)$$

donde ahora  $\bar{b}$  es una constante y se obtendrá una aproximación de ella con los datos obtenidos.

Para obtener una aproximación del valor de  $\bar{b}$ , se ha observado en las gráficas (Figure 8) el caso en el que  $d(t = N)$ . Esto permitirá obtener el parámetro  $\bar{b}$  despejando de la expresión (37):

$$d(t) = 2 \cdot e^{-\bar{b}t/N} \longrightarrow d(t = N) = 2 \cdot e^{-\bar{b}} \longrightarrow \bar{b} = \ln \left( \frac{2}{d(t = N)} \right) \quad (38)$$

La obtención de  $d(t = N)$  se ha realizado mediante el promediado de los valores obtenidos para diferentes tiempos. Estos se muestran en la siguiente tabla:

<b>N</b>	<b>t</b>	<b>d(t = N)</b>
1000	1000	0,454
2500	2500	0,541
5000	5000	0,488
7500	7500	0,529
10000	10000	0,618

Realizando el promedio de los diferentes valores de  $d(t = N)$  se ha obtenido que  $d(t = N) = 0,526$ . Será este valor el que se introducirá en la expresión (38), obteniendo así el parámetro  $\bar{b}$ , que tomará el valor de  $\bar{b} = 1,336$ .

La constante  $\bar{b}$  tendrá una dependencia con la distribución inicial empleada ya que este parámetro determina la velocidad de convergencia de la distribución inicial a la estacionaria en el espacio de distribuciones implicando que distribuciones iniciales diferentes serán más rápidas o más lentas<sup>6</sup> a la hora de alcanzar la distribución en el equilibrio. En las simulaciones

<sup>6</sup>Lo que es equivalente a un valor diferente para  $\bar{b}$ .

numéricas mostradas hasta ahora, la inicialización de la distribución inicial ha sido una delta de Dirac centrada en uno. Por lo que el parámetro constante  $\bar{b}$  obtenido, es el característico para esta distribución inicial específica.

Como pequeña síntesis de lo logrado en esta sección, se destaca en primer lugar la obtención de la dependencia con la inversa de  $N$  del decaimiento exponencial de las distribuciones iniciales hacia la distribución estacionaria y en segundo lugar la derivación de una expresión para este decaimiento en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$  a través de los resultados numéricos obtenidos. Cabe destacar también el hecho de que la velocidad de convergencia al equilibrio dependerá de la distribución inicial otorgada al sistema.

### 3 Mercados con ahorro: distribución "Gamma" de la riqueza

#### 3.1 Modelo de Dragulescu-Yakovenko con ahorro uniforme

En este capítulo se presenta un modelo [8] el cual simula una forma más realista de realizar las transacciones entre los agentes económicos en un mercado. Se introduce un factor  $\lambda$  de ahorro constante y que no depende del tiempo, igual para todos los agentes que conforman el sistema. De esta manera, cada agente ahorra en cada transacción un porcentaje fijo  $\lambda$  de su riqueza y pone en juego el resto.

Dado que este parámetro de ahorro  $\lambda \in [0, 1]$  es constante y no cambiante en el tiempo para todos los agentes, hablamos de un modelo con ahorro uniforme y constituye así una alternativa muy interesante al modelo anteriormente analizado de Dragulescu-Yakovenko.

Con el fin de observar como es la distribución en el equilibrio del modelo, procedemos a definir su ley de intercambio:

$$(m_i, m_j) \longrightarrow (m'_i, m'_j) \text{ con } \begin{cases} m'_i = \lambda m_i + \epsilon(1 - \lambda)(m_i + m_j) \\ m'_j = \lambda m_j + (1 - \epsilon)(1 - \lambda)(m_i + m_j) \end{cases} \quad (39)$$

donde la única nueva variable con respecto al modelo de Dragulescu-Yakovenko sin ahorro es el parámetro de ahorro  $\lambda \in [0, 1]$ .

Haciendo un análisis cualitativo, se observa que el factor  $(1 - \lambda)$  implica que el agente pone en juego el resto del capital que no ahorra. De nuevo, el parámetro random  $\epsilon$  es el que actúa como mediador en la transacción y decide el porcentaje del dinero total puesto en juego que cada agente recibirá.

En cuanto a los diferentes posibles valores de  $\lambda$ , es trivial que si  $\lambda = 0$  se recupera el modelo sin ahorro, ya que todos los agentes ponen en disposición todo su capital en cada transacción y la distribución estacionaria para  $\lambda \rightarrow 0$  tomará la forma del factor de Boltzmann-Gibbs. En el caso en el que  $\lambda = 1$ , se obtiene el otro caso trivial en el que ningún agente pone en juego capital para la realización de la transacción por lo que desaparece la dinámica del sistema.

### 3.2 Simulación numérica: aproximación Gamma de la distribución estacionaria

En esta sección el objetivo será observar el comportamiento de la distribución en el equilibrio para diferentes valores de  $\lambda \in (0, 1)$  mediante simulaciones numéricas y comparar los resultados obtenidos con la aproximación proporcionada por la distribución Gamma.

En primera instancia se introduce una aproximación obtenida por el Patriarca *et al.* [9] la cual establece que la distribución estacionaria obtenida mediante simulación numérica para este modelo con ahorro uniforme sigue la expresión de una distribución  $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ :

$$P_{eq}(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \left( \frac{n}{\langle x \rangle} \right)^n x^{n-1} e^{-nx/\langle x \rangle} \text{ con } \begin{cases} \Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \\ n(\lambda) = 1 + \frac{3\lambda}{1-\lambda} \end{cases} \quad (40)$$

donde  $\Gamma(n)$  es la función Gamma.

Se han realizado varias simulaciones numéricas para diferentes valores de  $\lambda$  junto a sus distribuciones analíticas Gamma. Los resultados se muestran en Figure 9:

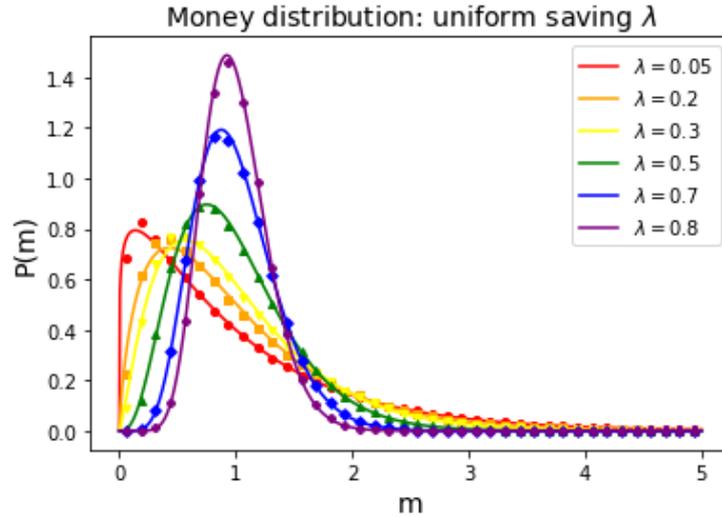


Figure 9: La simulación consta de  $N = 5000$  agentes interactuando de forma random donde en cada una de ellas se realizan  $N^2$  transacciones y se ha promediado un total de 100 veces. La inicialización del capital de los agentes ha sido  $m_i = 1 \forall i$  con lo que  $\langle m \rangle = 1$ . Los puntos muestran los resultados numéricos y las líneas sólidas los analíticos.

Hasta el momento se ha supuesto que estas distribuciones estacionarias se podían aproximar correctamente<sup>7</sup> por la función Gamma, pero gracias a diversos trabajos [10][11] y P.

<sup>7</sup>Esto no significa que la función Gamma sea una mala aproximación, de hecho se puede observar como la diferencia entre los datos numéricos y esta es muy sutil.

Richmond, P. Repetowicz, S. Hutzler en [12], se observó que esta solución analítica podría ser mejorada, dejando este problema abierto.

Para observar como los datos numéricos no se ajustan de manera precisa a esta distribución Gamma se han realizado diferentes simulaciones donde se representan individualmente las distribuciones en el equilibrio numéricas junto a su distribución Gamma asociada y simultáneamente una representación donde la distribución de probabilidad estacionaria se transforma a escala logarítmica para una mejor visualización [13].

Estos resultados para diferentes valores de  $\lambda$  son visibles en Figure 10.

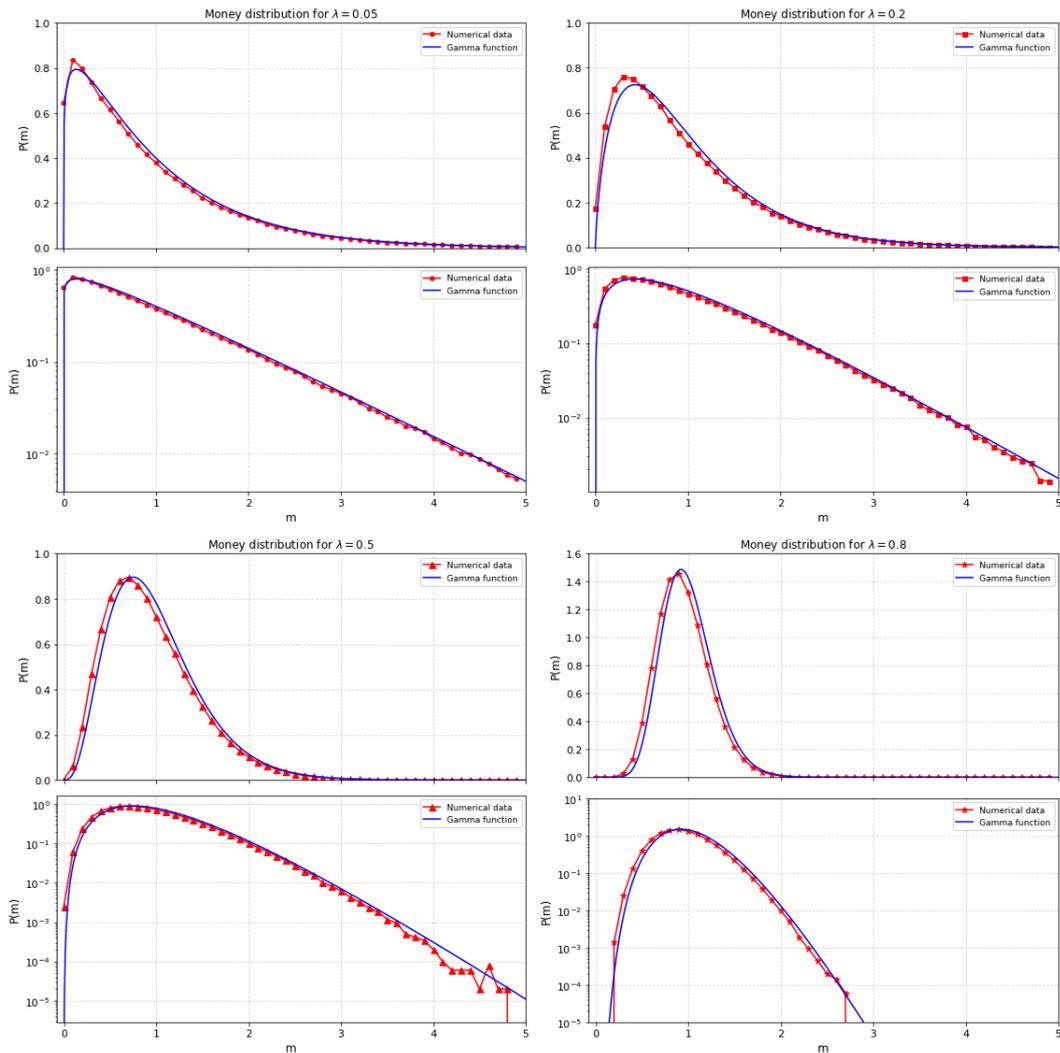


Figure 10: Las simulaciones se han realizado con  $N = 5000$  agentes interactuando de forma random, realizándose en cada una  $N^2$  transacciones y se ha promediado un total de 100 veces. La inicialización del dinero de los agentes ha sido  $m_i = 1 \forall i$  implicando  $\langle m \rangle = 1$ .

Cabe añadir, que la convergencia de las posibles diferentes distribuciones iniciales a la distribución estacionaria Gamma se ha verificado y se pueden observar en el anexo A.2.

### 3.3 Obtención del *Z-Model* en un modelo con ahorro uniforme

La búsqueda de una mejor aproximación a los datos numéricos de la distribución estacionaria en el modelo con ahorro uniforme llevaron a Calbet, López y López-Ruiz [14] a derivar un operador funcional que permita tratar analíticamente la distribución en el equilibrio. La obtención de este operador funcional, así como su desarrollo completo se pueden encontrar de forma más amplia en [14].

El enfoque que se seguirá en esta sección será la obtención de una expresión funcional que permita estudiar la solución analítica de la distribución estacionaria para el modelo con ahorro uniforme.

En primer lugar se definen las variables y la notación empleada para la derivación del funcional. La cantidad de capital que un agente puede disponer tras la interacción económica entre él mismo y otro agente es de  $m$ . El dinero que estos agentes tienen antes de realizar dicha transacción es  $x$  e  $y$ . De esta manera, a la suma del dinero de los agentes antes de la transacción se le denominará como  $U = x + y$ .

La cantidad de capital  $m$ , está restringida por la ley de intercambio del modelo. Si focalizamos nuestra atención en el agente con dinero  $x$  se tiene que:

$$\lambda x < m < (1 - \lambda)U + \lambda x \quad (41)$$

donde el factor  $(1 - \lambda)U$  es el dinero total disponible para repartir entre los dos agentes en la propia transacción. El otro factor  $\lambda x$  es el dinero que ahorra el agente en el que focalizamos nuestra atención. De esta manera, la máxima cantidad de capital que el agente focalizado podrá poseer, será el factor  $(1 - \lambda)U$  más la cantidad ahorrada  $\lambda x$ . El mínimo que podrá poseer será simplemente la cantidad ahorrada  $\lambda x$ .

Estas conclusiones son análogas si ahora se focaliza la atención en el agente  $y$ :

$$\lambda y < m < (1 - \lambda)U + \lambda y \quad (42)$$

En segunda instancia, se debe tener en cuenta que la probabilidad de que un agente obtenga este dinero  $m$  tras una interacción económica<sup>8</sup>  $P'(m)$  sigue una distribución uniforme. Se puede deducir entonces que esta probabilidad anterior ( $P'(m)$ ) será directamente proporcional al producto de probabilidades de que los agentes interactuantes tengan dinero  $x$  e  $y$  antes de la transacción e inversamente proporcional al dinero total disponible para repartir en la transacción. En resumidas cuentas, se tiene que  $P'(m)$  sigue la dependencia de  $\frac{P(x)P(y)}{(1 - \lambda)U}$ .

---

<sup>8</sup>Las interacciones económicas o transacciones se hacen por pares de agentes y esta elección de agentes es totalmente random.

Finalmente solo queda considerar que ambos agentes participantes en la interacción disponen de la misma probabilidad de obtener este dinero  $m$ , por lo que la expresión funcional queda:

$$\begin{aligned}
 P'(m) = \Gamma P(m) &= \frac{1}{2} \iint_{\lambda x < m < (1-\lambda)U + \lambda x} \frac{P(x)P(y)}{(1-\lambda)U} dx dy + \\
 &+ \frac{1}{2} \iint_{\lambda y < m < (1-\lambda)U + \lambda y} \frac{P(x)P(y)}{(1-\lambda)U} dx dy = \iint_{\lambda x < m < (1-\lambda)U + \lambda x} \frac{P(x)P(y)}{(1-\lambda)U} dx dy
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

### 3.4 Recreación de las clases sociales económicas en la distribución Gamma

La introducción de un ahorro uniforme genera una menor desigualdad económica en la sociedad. El indicador principal de esta mejora es el aumento de la clase media. Es lógico pensar que si los agentes son más "conservadores" con su capital, la desigualdad económica se verá reducida.

Cuanto mayor sea el ahorro, mayor será esta clase media hasta finalmente alcanzar el límite en  $\lambda = 1$ , en el cual la clase media constituye la totalidad de la sociedad. Se debe tener en cuenta que a medida que el ahorro va aumentando, la naturaleza de las transacciones va alcanzando un estado de "congelación". Es decir, los agentes ahorran una cantidad de dinero muy elevada, lo que se aleja bastante de la realidad. Afectando de esta manera a la dinámica del sistema y produciendo unos resultados inverosímiles, donde existe un total dominio de la clase media. En el anexo A.3 se pueden visualizar estos casos.

El criterio de división de clases sociales será el mismo que en el caso del modelo de Dragulescu-Yakovenko.

- Clase baja  $\rightarrow m_i \leq 1/2$
- Clase alta  $\rightarrow m_i \geq 2$
- Clase media  $\rightarrow 1/2 \leq m_i \leq 2$

Con el fin de una mejor visualización de los resultados, se evitará usar un ahorro demasiado alto como ya se ha mencionado. Para la simulación realizada se ha considerado una delta de Dirac centrada en uno como distribución inicial con lo que  $\langle m \rangle = 1$ . En Figure 11 se observan los resultados obtenidos.

Se observa que con un ahorro relativamente bajo, el aumento de la clase media es bastante significativo, un valor del %67.32 con respecto al resultado obtenido en el modelo de Dragulescu-Yakovenko del %47.31.

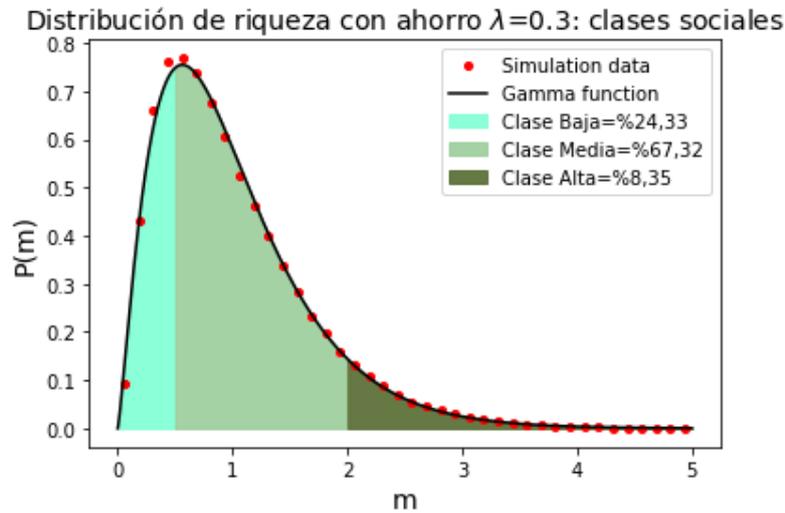


Figure 11: La simulación consta de  $N = 5000$  agentes, se realizan  $N^2$  transacciones y se promedia un total de 100 veces. La curva negra es la distribución Gamma correspondiente a un ahorro de  $\lambda = 0.3$  donde  $\langle m \rangle = 1$ .

## 4 Conclusiones

En este trabajo se han estudiado modelizaciones de mercados libres desde un punto de vista principalmente computacional. Se han incluido también derivaciones analíticas de las distribuciones en el equilibrio de los modelos estudiados. Tanto desde una perspectiva física, empleando la mecánica estadística y la teoría de la información, como desde una perspectiva puramente matemática empleando argumentos funcionales y geométricos.

En primer lugar, mediante simulación numérica se ha alcanzado la distribución exponencial de Boltzmann-Gibbs en el equilibrio para el modelo de Dragulescu-Yakovenko. Se ha observado que independientemente de la distribución inicial otorgada al sistema, la convergencia al equilibrio se verifica. Posteriormente, mediante modelos analíticos se ha alcanzado esta misma distribución de Boltzmann-Gibbs en el equilibrio.

Se han recreado las diferentes clases sociales económicas en este modelo de Dragulescu-Yakovenko, y aunque la ley de intercambio no simula la realidad de las transacciones entre la sociedad, los resultados se ajustan bien a la desigualdad económica visible en países con un intenso mercado libre como Estados Unidos.

Se ha incluido un nuevo resultado, el cual muestra que la convergencia al estado de equilibrio seguirá una dependencia exponencial negativa la cual escala con la inversa del tamaño del sistema económico. Además, se ha tratado de obtener una ley analítica en el límite termodinámico para este decaimiento al equilibrio. Donde se ha observado que la velocidad de convergencia dependerá de la distribución inicial escogida.

En la segunda parte del trabajo se ha incluido el modelo de Dragulescu-Yakovenko pero con la modificación de un ahorro uniforme en un sistema homogéneo. De nuevo, mediante

simulación numérica se ha obtenido la distribución en el equilibrio que en este caso tomará forma de una función Gamma y que dada cualquier distribución inicial la convergencia al estado estacionario también se verifica. Se ha observado que las simulaciones numéricas no se ajustaban exactamente a la función Gamma por lo que se ha derivado analíticamente un modelo que permite hacer una mejor aproximación de la distribución en el equilibrio. Esto no desprestigia a la aproximación Gamma realizada, ya que la diferencia es muy pequeña con respecto a los resultados numéricos.

Finalmente, se ha representado la distribución de clases sociales económicas para este modelo con ahorro uniforme. Lo ideal es reducir la desigualdad en la sociedad, por lo que para cuantificar esta característica se emplea la clase media. A medida que esta clase media se ve aumentada, la desigualdad se reduce. Para un ahorro relativamente bajo ya se observan mejoras significativas en el tamaño de la clase media con respecto al modelo sin ahorro. Cabe destacar que para valores de ahorro altos, nos estaríamos alejando de la realidad ya que es inviable como individuo ahorrar tanto capital.

Como posibles mejoras al trabajo, se hace hincapié en una mayor estadística, así como la comprobación de la convergencia al equilibrio de distribuciones iniciales más variadas. Las derivaciones analíticas de los modelos no son lo suficientemente rigurosas por lo que las demostraciones de los teoremas que los rigen deberían haber sido incluidas.

En el modelo con ahorro, podría haberse hecho un análisis más exhaustivo a los diferentes valores que  $\lambda$  puede tomar, así como una cuantificación de la diferencia entre los resultados obtenidos numéricamente y la función Gamma teórica. Debido a la longitud restringida del trabajo, podrían haberse incluido núcleos de dos agentes en vez de agentes individualizados. Esta visión es más acertada ya que modela la realidad económica de las parejas/núcleos familiares.

Por último, como la econofísica es un amplio y nuevo tema de estudio, este trabajo tiene muchas modificaciones posibles. Como muestra de ello, se ha añadido un análisis sobre una sociedad heterogénea con ahorro uniforme en el apéndice B. Aquí se tratan dos casos interesantes: una búsqueda de la erradicación de la pobreza extrema y el comportamiento de una sociedad donde uno o varios agentes "juegan con otras reglas".

## References

- [1] V. M. Yakovenko, “Monetary economics from econophysics perspective,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 225, no. 17-18, pp. 3313–3335, 2016.
- [2] A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, “Statistical mechanics of money,” *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 17, pp. 723–729, 2000.
- [3] V. M. Yakovenko, “Econophysics, statistical mechanics approach to,” 2008.
- [4] R. López-Ruiz, J. Sañudo, and X. Calbet, “A geometrical derivation of the boltzmann factor,” *American Journal of Physics*, vol. 76, no. 8, pp. 780–781, 2008.
- [5] E. T. Jaynes, “Information theory and statistical mechanics,” *Physical review*, vol. 106, no. 4, p. 620, 1957.
- [6] J.-L. Lopez, R. López-Ruiz, and X. Calbet, “Exponential wealth distribution in a random market. a rigorous explanation,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 386, no. 1, pp. 195–204, 2012.
- [7] G. Katriel, “Convergence to an exponential wealth distribution in a random market model,” *Applicable Analysis*, vol. 93, no. 6, pp. 1256–1263, 2014.
- [8] A. Chakraborti and B. K. Chakrabarti, “Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution,” *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 17, pp. 167–170, 2000.
- [9] M. Patriarca, A. Chakraborti, and K. Kaski, “Statistical model with a standard  $\gamma$  distribution,” *Physical Review E*, vol. 70, no. 1, p. 016104, 2004.
- [10] A. Chatterjee and B. K. Chakrabarti, “Kinetic exchange models for income and wealth distributions,” *The European Physical Journal B*, vol. 60, pp. 135–149, 2007.
- [11] P. Repetowicz, S. Hutzler, and P. Richmond, “Dynamics of money and income distributions,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 356, no. 2-4, pp. 641–654, 2005.
- [12] B. K. Chakrabarti, “Econophys-kolkata: a short story,” *Econophysics of wealth distributions: Econophys-Kolkata I*, pp. 225–228, 2005.
- [13] I. Martínez-Martínez and R. López-Ruiz, “Directed random markets: connectivity determines money,” *International Journal of Modern Physics C*, vol. 24, no. 01, p. 1250088, 2013.
- [14] X. Calbet, J.-L. López, and R. López-Ruiz, “Equilibrium distributions and relaxation times in gaslike economic models: An analytical derivation,” *Physical Review E*, vol. 83, no. 3, p. 036108, 2011.

## A Anexo

### A.1 Decaimiento al equilibrio de la distribución de Boltzmann-Gibbs: gráficas para diferentes valores de $N$

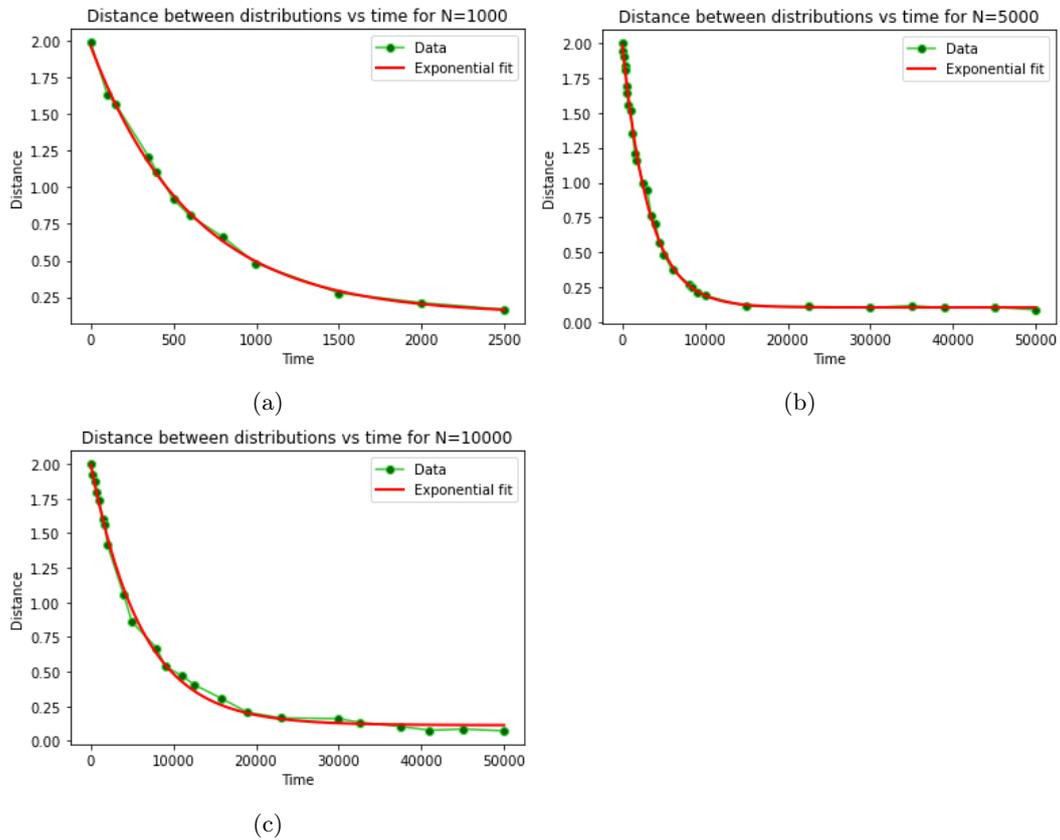


Figure 12: a) Distancia entre distribuciones en función del tiempo para  $N=1000$  y su fit exponencial. b) Distancia entre distribuciones en función del tiempo para  $N=5000$  y su fit exponencial. c) Distancia entre distribuciones en función del tiempo para  $N=10000$  y su fit exponencial.

## A.2 Convergencia a la distribución estacionaria Gamma para diferentes distribuciones iniciales

La siguiente distribución inicial consta de una triple delta de Dirac centrada en los valores 0.5, 1, 2 lo que proporciona una  $\langle m \rangle = 7/6$ :

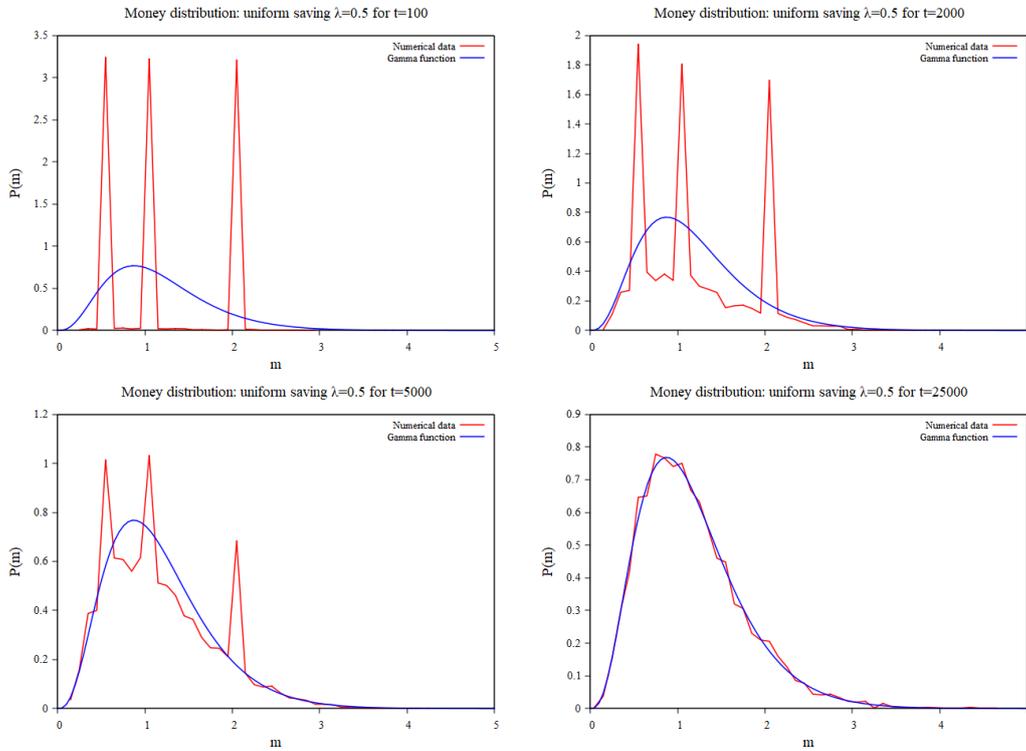


Figure 13: Evolución temporal de la distribución inicial 3-delta para  $N=5000$  y  $\langle m \rangle = 7/6$ . El tiempo aquí indica el número de transacciones realizadas y el plot se realiza al sistema final para ese determinado número de operaciones económicas. La componente de ahorro es de  $\lambda = 0.5$ .

La siguiente distribución inicial es triangular y está generada de la misma forma que en la sección (2.2). El ahorro es diferente al de la distribución 3-delta para tener una visualización más clara de como se va adaptando esta distribución inicial a la del equilibrio, ya que para  $\lambda = 0.5$  la distribución inicial triangular ya tomaba una forma muy aproximada a la Gamma estacionaria para este ahorro:

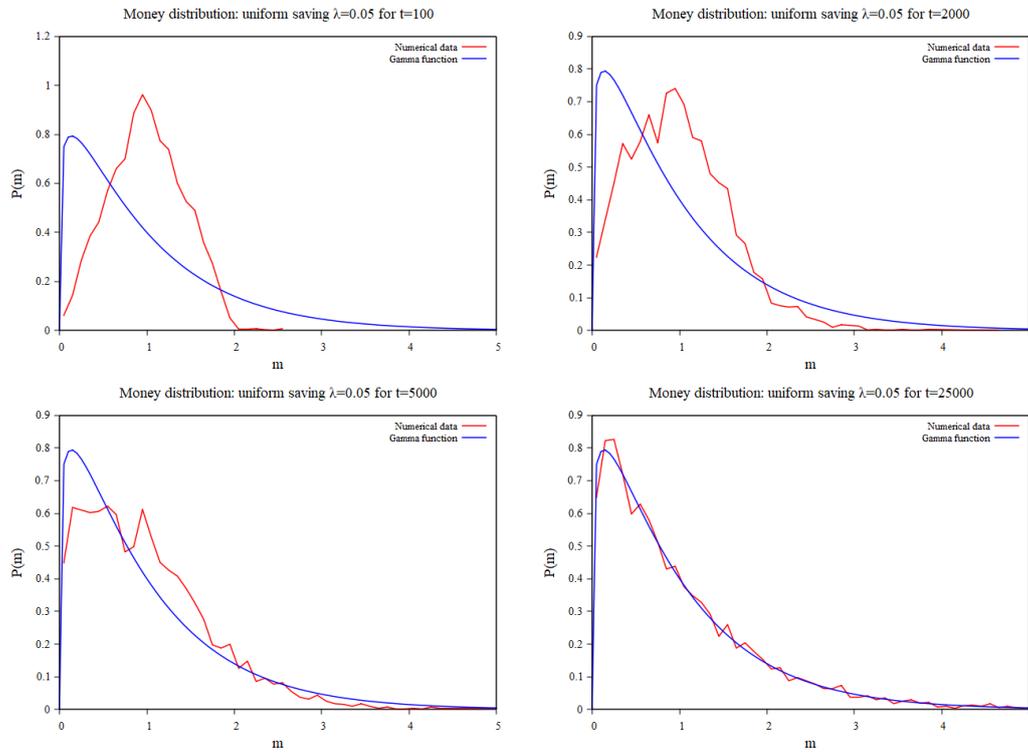


Figure 14: Evolución temporal de la distribución inicial triangular para  $N=5000$ , fijando  $a = 2$  con lo que  $\langle m \rangle = 1$  y  $h = 1$ . La componente de ahorro es de  $\lambda = 0.05$ .

### A.3 Recreación de las clases sociales económicas en la distribución Gamma: valores de ahorro elevados

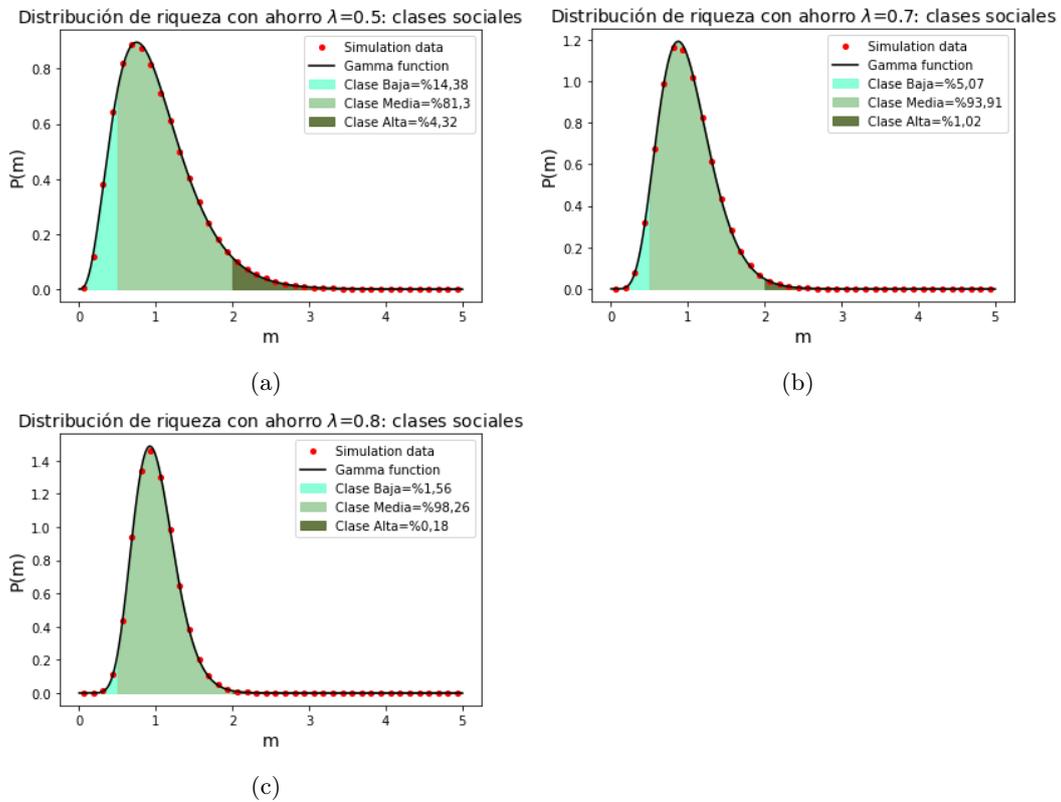


Figure 15: La simulación consta de  $N = 5000$  agentes, se realizan  $N^2$  transacciones y se promedia un total de 100 veces. La curva negra es la distribución Gamma estacionaria y  $\langle m \rangle = 1$  en todos los casos.

## B Sociedad heterogénea con ahorro uniforme: dos casos extremos

En primer lugar, se define esta nueva sociedad económica heterogénea. Esta tendrá una proporción  $p$  de sus agentes con un  $\lambda$  determinado y el resto de sus agentes con otro  $\lambda$  diferente.

Analizaremos dos casos, el primero será la búsqueda de la erradicación de la pobreza extrema ( $m = 0$ ) y el segundo será una sociedad liderada por "oligarcas"<sup>9</sup>.

En el primer caso, se ha analizado la distribución donde la proporción de ahorradores  $p$  tiene un  $\lambda = 0.3$  y el resto de la población tendrá  $\lambda = 0$ . El análisis se hace variando la proporción de ahorradores en la sociedad. Así, en los casos de los extremos, para  $p = 0$  y  $p = 1$  conocemos la distribución en el equilibrio ya que ambos corresponden a sociedades homogéneas estudiadas en el trabajo:

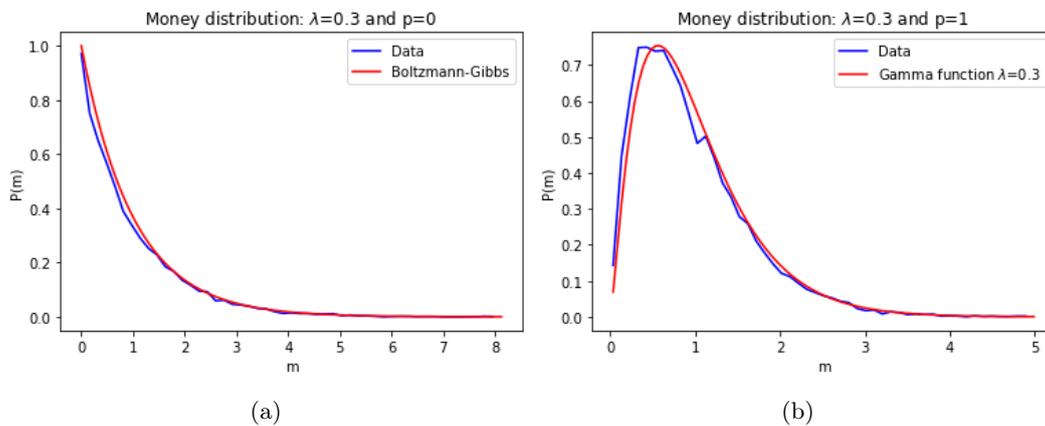


Figure 16: a) Distribución correspondiente a una sociedad homogénea sin ahorro (modelo de Dragulescu-Yakovenko). b) Distribución correspondiente a una sociedad homogénea de ahorradores (modelo de Dragulescu-Yakovenko con ahorro uniforme). En las simulaciones se realizan  $N^2$  transacciones y  $N=10000$  agentes.

Durante la evolución de esta distribución, existirá una proporción de ahorradores crítica ( $p_c$ ) donde la pobreza extrema  $m = 0$  dejará de ser un máximo global y así el umbral de esta pobreza extrema dejará de ser un capital nulo. Esto se observa en Figure 17.

Se ha obtenido así una gráfica con estas proporciones de ahorradores críticas ( $p_c$ ) para diferentes valores de  $\lambda$  (Figure 18).

El segundo caso será el de una sociedad económica donde unos "oligarcas" poseerán toda la riqueza del sistema. Esta sociedad se genera implementando unos agentes en el sistema que tendrán un parámetro de ahorro  $\lambda = 1$ . De esta manera, estos agentes no se jugarán dinero en la transacción y solo lo podrán ganar. Con el paso del tiempo estos agentes u "oligarcas" pasarán a retener toda la riqueza del sistema. Es por ello por lo que se deben introducir organismos reguladores que no permitan a estos agentes "jugar con otras reglas".

<sup>9</sup>Este término se emplea solamente para una mayor facilidad lingüística a la hora de explicar.

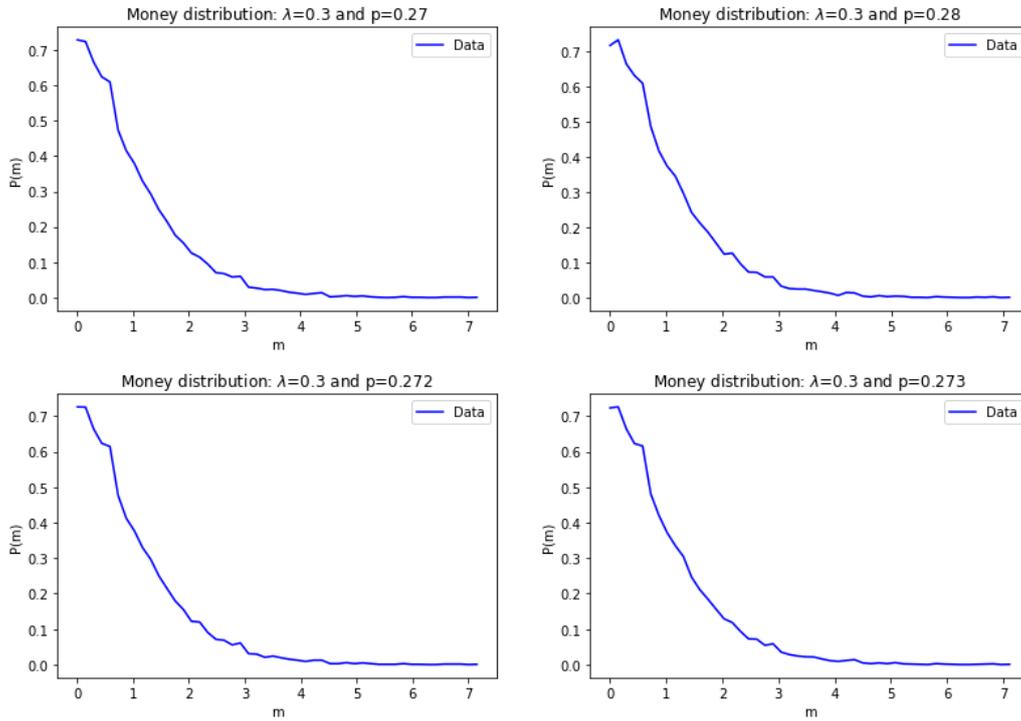


Figure 17: Se ha realizado un barrido de los diferentes valores que  $p$  podía tomar y se observa en un barrido más general que entre  $p = 0.27$  y  $p = 0.28$  se da que  $m = 0$  deja de ser un máximo global. Así, en un segundo barrido más detallado se observa que la transición de este máximo ( $p_c$ ) se da entre  $p = 0.272$  y  $p = 0.273$ . El sistema se inicializa con todos los agentes con  $m = 1$ .

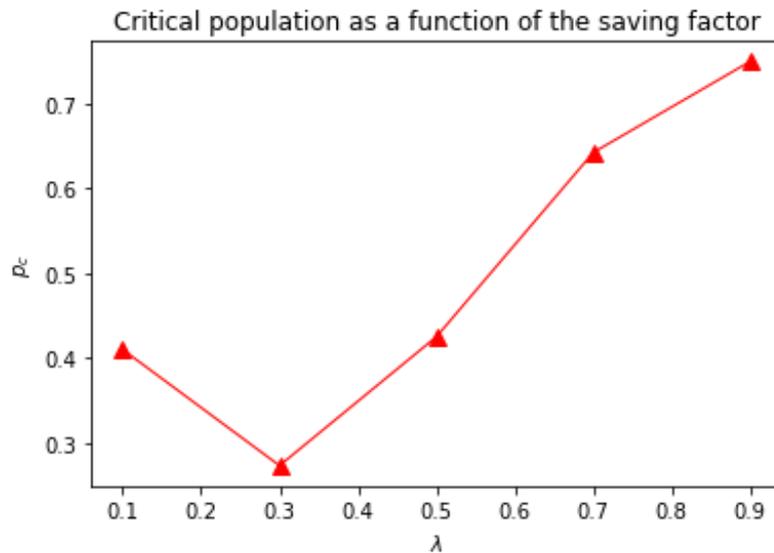


Figure 18: Cada simulación consta de  $N = 10000$  agentes, se realizan  $N^2$  transacciones.

En Figure 19 se ha introducido una sociedad de  $N=1000$  agentes donde uno de ellos es un "oligarca" (agente con  $\lambda = 1$ ).

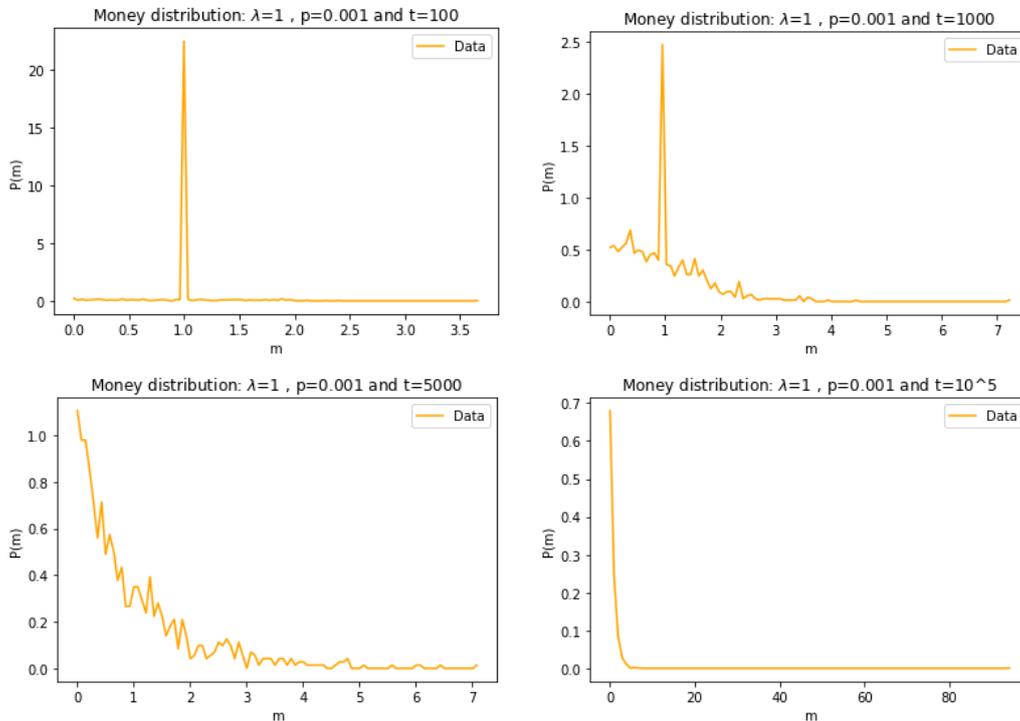


Figure 19: En la simulación se emplean  $N=1000$  agentes donde uno de ellos tiene un  $\lambda = 1$  y el resto  $\lambda = 0$ . La inicialización del sistema es que todos los agentes disponen de  $m = 1$ . Debido a que se trabaja con probabilidades, la probabilidad asociada al "oligarca" tendrá un valor muy pequeño no apreciable en los histogramas.

Con el fin de verificar que este agente "oligarca" acumula toda la riqueza del sistema (dejando al resto de agentes en un estado de pobreza extrema), se ha representado la evolución temporal de su riqueza individual (Figure 20).

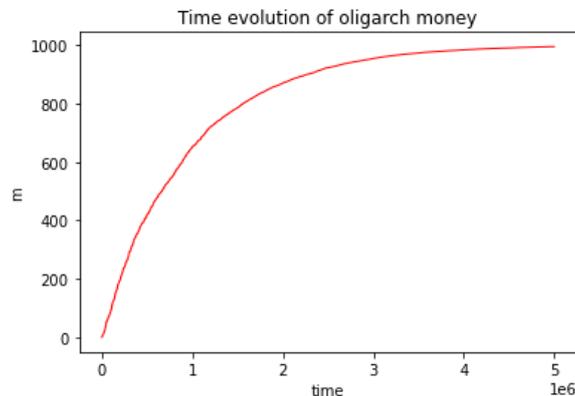


Figure 20: El sistema de  $N=1000$  agentes se ha inicializado de manera que todos disponen de  $m=1$  en el instante inicial, lo que hace que el dinero total del sistema sea  $m=1000$ .

Efectivamente, para tiempos grandes el "oligarca" logra hacerse con toda la riqueza del sistema.

Cabe destacar que solo hará falta un agente que juegue con "otras normas" para generar esta situación de pobreza generalizada acoplada a una riqueza total de los "oligarcas".

Finalmente, se va a trabajar con una sociedad económica de  $N=10000$  agentes y se irá variando la proporción de estos "oligarcas" para observar el comportamiento del sistema (Figure 21).

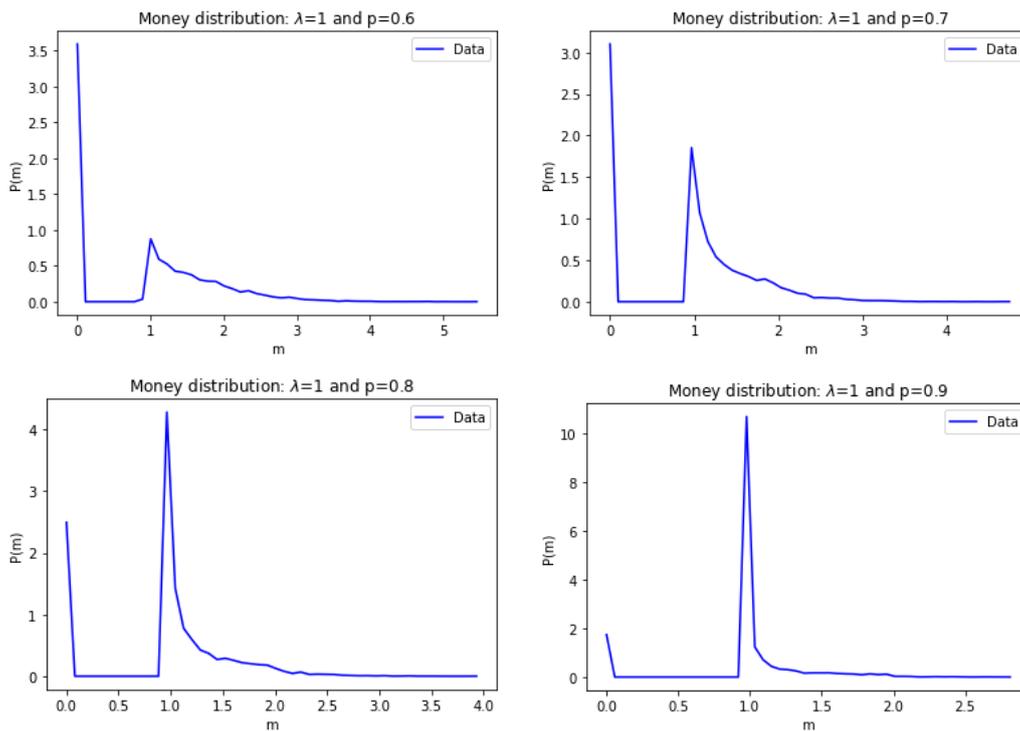


Figure 21: En la simulación se emplean  $N=10000$  agentes donde se varía la proporción de "oligarcas" ( $p$ ) y se representa el sistema tras  $N^2$  transacciones. Los "oligarcas" tendrán  $\lambda = 1$  y el resto de agentes  $\lambda = 0$ . La inicialización del sistema es que todos los agentes disponen de  $m = 1$ .

Se observa cómo los "oligarcas" que se encuentran en el pico de la función ( $m \approx 1$ ) son aquellos que aún no han interactuado con el resto de agentes no "oligarcas"/normales<sup>10</sup>. A la derecha de este pico se observan a los "oligarcas" que sí han interactuado y por tanto han aumentado su riqueza. La región de  $m \approx 0$  dispone de aquellos agentes normales que han interactuado con "oligarcas" dando lugar así a su situación de pobreza extrema. Finalmente, la región entre  $m \approx 0$  y  $m \approx 1$  está compuesta por aquellos agentes normales que, o bien han interactuado entre sí, o han tenido interacciones limitadas con los "oligarcas".

<sup>10</sup>Aquellos agentes con  $\lambda = 0$ .