إيجاد حلول دقيقة لمعادلة بينيامين – بونا – ماهوني المعممة بقوة متغيرة ذات الأمثال التابعة للزمن

د. سامي انجرو *

(تاريخ الإيداع 15 / 5 / 2019. قُبِل للنشر في 2 / 9 /2019)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث إلى تقديم حلول تحليلية دقيقة لمعادلة بينيامين – بونا – ماهوني المعممة بقوة متغيرة (موجبة، سالبة) ذات الأمثال التابعة للزمن. تم استخدام طريقة *sine-cosine* وطريقة فرضية الحل الموجي *(solitary wave ansatz)*. تميزت الدراسة بإعطاء مجموعة متنوعة من الحلول الدقيقة الصريحة: الحلول الدورية والحلول المضغوطة، والحلول ذات الأنماط الانفرادية والحلول ذات الموجة الظاهرة. وقدمنا أيضاً شروط لازمة لوجود هذه الحلول.

الكلمات المفتاحية: معادلة بينامين بونا ماهوني – الحل مضغوط – طريقة *sin-cos* – الحل ذو الموجة المنعزلة – تحويل موجي – معادلة تفاضلية جزئية غير خطية.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

البريد الالكتروني:s.injrou@tishreen.edu.sy

Finding Exact Solutions for Generalized Benjamin – Bona - Mahony Equation in Variant Exponent with Time-Dependent Coefficients

Dr. Sami Injrou *

(Received 15 / 5 / 2019. Accepted 2 / 9 /2019)

□ ABSTRACT □

The aim of this research is to present exact analytical solutions for generalized Benjamin-Bona-Mahony equation with time-dependent coefficients in variant exponent (positive, negative). The sine-cosine method and solitary wave ansatz method are used. The study is characterized by variety of exact explicit solutions: periodic, compactons, solitary patterns, bright soliton. Necessary conditions for existence of this solutions are presented.

Keywords: Benjamin-Bona-Mahony equation - compacton solution - sine-cosine method – soliton wave solution – wave transform - nonlinear partial differential equation.

*Associated Professor, Departement of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria. E- mail: s.injrou@tishreen.edu.sy

مقدمة

تلعب حالياً معادلات الأمواج غير الخطية في الفيزياء الرياضية دوراً رئيساً في مختلف مجالاتها، إذ تظهر هذه المعادلات في مجموعة كبيرة من المفاهيم مثل ميكانيك السوائل، فيزياء البلازما، الألياف الضوئية، فيزياء الحالات الصلبة، وفي الفيزياء الكيميائية وبعض مجالات الجيوكيمياء وعلم الأحياء. تعد ظاهرة الموجة غير الخطية مهمة جداً في المسائل التي فيها تشتت أو تبديد أو انتشار حراري، إذ تصنف عادة الموجة التي لا تتأثر سرعتها بسعتها بموجة خطية، في حين يقال عنها إنها موجة منعزلة *(soliton)* إذا كانت موجة غير خطية محلية تحافظ على شكلها دون أي تغيير في طول الانتشار[1]، فهي تنشأ كحلول لمجموعة واسعة من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، وصفت هذه الظاهرة لأول مرة من قبل الباحث *John Scott Russell* في عام 1989 في [2]. هناك ظاهرة أخرى تسمى موجة مضغوطة *(compacton)* وهي عبار أمواج منعزلة مع دعامات متراصة *(compact support)*، إذ أن عرض موجة *(compacton)* مستقلة عن سعتها، ولتفاصيل أكثر يمكن مراجعة [3،4،5،6]. من المعادلات التي تظهر فيها هذه الظاهرة معادلة *K(n,n)* [7]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial (u^n)}{\partial x}+\frac{\partial^3 (u^n)}{\partial x^3}=0 \;\; ; \; n>1 \tag{1}$$

حيث أن التفاعل بين الحمل الحراري غير الخطي $\frac{\partial (u^n)}{\partial x}$ مع التشتت غير الخطي $\frac{\partial^3 (u^n)}{\partial x^3}$ يولّد موجات منفردة *(solitary waves)* مع دعامات متراصة أي *(compactons)*، وهناك أيضاً معادلة بينيامين–بونا–ماهوني المعممة *(GBBM)* تأخذ الشكل الآتي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}-b\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}+k\frac{\partial (u^n)}{\partial x}=0 \;\; ; \; n>1 \tag{2}$$

حيث أن a و b و k ثوابت غير معدومة، التي قدمها *Wazwaz* في عام 2005 في [8]، إذ استخدم طريقة *sine–cosine* وطريقة *tanh* للحصول على حلول ذات موجة منعزلة وأخرى من نوع *(compacton)* وناقش ذلك من أجل قوة موجبة وأخرى سالبة. كما درس *Chen* وآخرون المعادلة (2) في عام 2007 في البحث [9] بالاعتماد على طريقة المعادلة المساعدة، لكن من أجل قوى موجبة فقط، كما تم أيضا دراسة معادلة شبيهة بالمعادلة (2) لها الشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+au^n\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}=0 \;\; ; \; n\ge 1 \tag{3}$$

من قبل الباحث *Estevez* وآخرون في عام 2009 في [10] وقدموا حلول ذات موجة جوالة باستخدام طريقة التحليل إلى عوامل كذلك من أجل قوة موجبة، كذلك قدم *Patel* و*Pradhan* في عام 2013 في [11] حلول ذات موجة جوالة للمعادلة (3) بطريقة منشور–*F* المعدلة.

لنأخذ الآن المعادلة (2) ولكن مع أمثال متغيرة كما يأتي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(t)\frac{\partial (u^n)}{\partial x}-\delta(t)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}=0 \;\; ; \; n>1 \tag{4}$$

حيث أن $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ و $\delta(t)$ توابع حقيقية قابلة للمكاملة. إذا كانت $n=2$، فإننا نحصل على معادلة بينيامين–بونا–ماهوني ذات الأمثال المتغيرة، إذ تم حل هذه المعادلة من قبل *Jahani* و *Manahian* في عام 2016 مستخدمين طريقة الدالة الأسية المطورة [12]، وكذلك قدم سامي انجرو في عام 2019 حلول ذات موجة

منعزلة *(soliton)* وأخرى ذات موجة ظاهرة *(bright soliton)* باستخدام طريقة *sine–cosine* وطريقة فرضية الحل الموجي *(solitary wave ansatz)* في [13]، أما إذا كانت $n=3$ ، فإننا نحصل على معادلة بينيامين–بونا–ماهوني المعدلة ذات الأمثال المتغيرة، والتي تم حلها لكن من أجل أمثال ثابتة، للاطلاع على النتائج يمكن مراجعة [20،19،18،17،16،15،14]. سنحاول في هذا البحث حل المعادلة (4) بقوة موجبة والمعادلة ذات القوة السالبة المعطاة بالشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(t)\frac{\partial(u^{-n})}{\partial x}-\delta(t)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=0\ \ ;\ n>1 \tag{5}$$

باستخدام طريقة *sine–cosine* [21]، وطريقة فرضية الحل الموجي *(solitary wave ansatz)* المعتمدة في المرجع [22] وسنقدم شروط لازمة لإيجاد حلول ذات موجة منعزلة ظاهرة *(bright soliton)*.

أهمية البحث وأهدافه

يهدف هذا البحث إلى إيجاد حلول مختلفة دورية وأخرى ذات موجة منعزلة ظاهرة وأخرى ذات نمط انفرادي، وأخرى ذات موجة مضغوطة *(compacton)* لمعادلة بينيامين – بونا – ماهوني المعممة ذات الأمثال المتغيرة التابعة للزمن مع قوة موجبة وقوة سالبة باستخدام طريقة *sine–cosine* وطريقة فرضية الحل الموجي *(solitary wave ansatz)*، إذ تعد مسألة هذا البحث في غاية الأهمية، لأنها تقدم حلولاً ذات بنى فيزيائية مختلفة قد تساعد الباحثين الفيزيائيين بتفسير العديد من الظواهر الفيزيائية.

طرائق البحث ومواده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على طرائق حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية وحل جمل المعادلات الجبرية وبرامج الحسابات الرياضية الصيغية.

النتائج والمناقشة:

1– حلول دورية وحلول ذات موجة مضغوطة لمعادلتي بينيامين–بونا–ماهوني المعممة:

سنقوم في هذه الفقرة بحل معادلة بينيامين–بونا–ماهوني المعممة ذات القوة الموجبة (4) وذات القوة السالبة (5) بطريقة *sine–cosine*.

1.1 معادلة بينيامين–بونا–ماهوني المعممة ذات القوة الموجبة (4):

بفرض أن حل المعادلة (4) يعطى بالعلاقة الآتية:

$$u(x,t)=\lambda(t)\cos^b(\mu\xi)\ \ ;\ \ \xi=x-c(t).t \tag{6}$$

حيث أن ξ متحول الموجة و $c(t)$ سرعة الموجة وهي دالة تابعة للزمن مستمرة تعين لاحقاً ومشتقها $c'(t)$ أيضاً دالة مستمرة، و μ و b وسيطان يحددان لاحقاً، وبالتالي لدينا مشتقات $u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{d\lambda(t)}{dt}\cos^{b}(\mu\xi)-b\,\mu\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi) \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-b\,\mu\lambda(t)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi) \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=b\,(b-1)\,\mu^2\lambda(t)\cos^{b-2}(\mu\xi)-b^2\mu^2\lambda(t)\cos^{b}(\mu\xi) \quad (9)$$

$$\frac{\partial(u^n)}{\partial x}=-nb\,\mu\lambda^n(t)\cos^{nb-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi) \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}&=b\,(b-1)\,\mu^2\frac{d\lambda(t)}{dt}\cos^{b-2}(\mu\xi)-b^2\mu^2\frac{d\lambda(t)}{dt}\cos^{b}(\mu\xi)\\&-b\,(b-1)(b-2)\,\mu^3\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)\\&-b^3\mu^3\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)\end{aligned} \quad (11)$$

بتعويض (7) و(8) و(10) و(11) في المعادلة (4)، نحصل على:

$$\begin{aligned}&\frac{d\lambda(t)}{dt}\cos^{b}(\mu\xi)-b\,\mu\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)\\&-\alpha(t)b\,\mu\lambda(t)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)-\beta(t)nb\,\mu\lambda^n(t)\cos^{nb-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)\\&-\delta(t)b\,(b-1)\,\mu^2\frac{d\lambda(t)}{dt}\cos^{b-2}(\mu\xi)+\delta(t)b^2\mu^2\frac{d\lambda(t)}{dt}\cos^{b}(\mu\xi)\\&+\delta(t)b\,(b-1)(b-2)\,\mu^3\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)\\&+\delta(t)b^3\mu^3\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)\\&=0\end{aligned} \quad (12)$$

للموازنة بين $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}$ الحد ذو مرتبة الاشتقاق الأعلى مع الحد اللاخطي $\frac{\partial(u^n)}{\partial x}$ نقوم بمطابقة قوتي كل من $\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$ و $\cos^{nb-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$، وأمثال كل زوج، فنحصل على:

$$b\,(b-1)(b-2)\neq 0 \quad (13)$$

$$nb-1=b-3 \quad (14)$$

$$\left(\delta(t)b^2\mu^2+1\right)\frac{d\lambda(t)}{dt}=0 \quad (15)$$

$$-\delta(t)b\,(b-1)\,\mu^2\frac{d\lambda(t)}{dt}=0 \quad (16)$$

$$-\alpha(t)b\,\mu\lambda(t)+\left(\delta(t)b^3\mu^3\lambda(t)-b\,\mu\lambda(t)\right)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)=0 \quad (17)$$

$$\delta(t)b\,(b-1)(b-2)\,\mu^3\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)-\beta(t)nb\,\mu\lambda^n(t)=0 \tag{18}$$

حيث وضعنا المعادلة (13) لضمان المطابقة بين قوتي كل من $\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$ و $\cos^{nb-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$، وتمثل المعادلة (15) أمثال $\cos^{b}(\mu\xi)$ والمعادلة (16) أمثال $\cos^{b-2}(\mu\xi)$ والمعادلة (17) أمثال $\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$ والمعادلة (18) أمثال $\cos^{nb-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$ و$\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$.

من المعادلة (14)، نجد أن $b=\dfrac{-2}{n-1}$ ومن المعادلتين (15) و(16)، نجد أن:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt}=0 \tag{19}$$

ومنه:

$$\lambda(t)=\lambda_0 \tag{20}$$

حيث أن λ_0 ثابت، يمثل سعة الموجة.

وبحل المعادلتين (17) و(18) بعد تعويض قيمة $b=\dfrac{-2}{n-1}$ و $\lambda(t)=\lambda_0$ فيهما، نحصل على:

$$\mu=\pm\frac{(n-1)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\lambda_0^{n-1}\beta(t)}{\delta(t)\left(2\lambda_0^{n-1}\beta(t)-(n+1)\alpha(t)\right)}}\ ,\ c(t)=\frac{1}{t}\left[\int\left(\frac{-2}{(n+1)}\lambda_0^{n-1}\beta(t)+\alpha(t)\right)dt+C_1\right] \tag{21}$$

حيث أن C_1 ثابت المكاملة.

وبما أن μ وسيط عددي يمثل عدد الأمواج، إذاً يجب أن يكون:

$$\frac{\lambda_0^{n-1}\beta(t)}{\delta(t)\left(4\lambda_0^{n-1}\beta(t)-2(n+1)\alpha(t)\right)}=C$$

حيث أن C ثابت ما، بالتالي بتعويض العلاقة (21) في (6)، نحصل على حلول دورية للمعادلة المعطاة (4) من أجل $\left|\mu\left(x+\int\left(\dfrac{2}{(n+1)}\lambda_0^{n-1}\beta(t)+\alpha(t)\right)dt\right)\right|<\dfrac{\pi}{2}$:

$$u(x,t)=\lambda_0\left\{\sec^2\left[\mu\left(x+\int\left(\frac{2}{(n+1)}\lambda_0^{n-1}\beta(t)+\alpha(t)\right)dt+C_3\right)\right]\right\}^{\frac{1}{n-1}} \tag{22}$$

2.1 معادلة بينيامين–بونا–ماهوني المعممة ذات القوة السالبة (5):

مع بقاء الافتراض أن الحل يعطى بالعلاقة (6)، يكون لدينا ذات المشتقات المحسوبة في العلاقات (7) و(8) و(9) و(11)، ويبقى علينا حساب المقدار $\dfrac{\partial(u^{-n})}{\partial x}$:

$$\frac{\partial(u^{-n})}{\partial x}=nb\,\mu\lambda^{-n}(t)\cos^{-nb-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi) \tag{23}$$

بتعويض (7) و(8) و(23) و(11) في المعادلة (5)، نحصل على:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt}\cos^{b}(\mu\xi)-b\mu\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$$
$$-\alpha(t)b\mu\lambda(t)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)+\beta(t)nb\mu\lambda^{-n}(t)\cos^{-nb-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$$
$$-\delta(t)b(b-1)\mu^{2}\frac{d\lambda(t)}{dt}\cos^{b-2}(\mu\xi)+\delta(t)b^{2}\mu^{2}\frac{d\lambda(t)}{dt}\cos^{b}(\mu\xi)$$
$$+\delta(t)b(b-1)(b-2)\mu^{3}\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$$
$$+\delta(t)b^{3}\mu^{3}\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$$
$$=0 \tag{24}$$

للموازنة بين $\frac{\partial^{3}u}{\partial x^{2}\partial t}$ الحد ذو مرتبة الاشتقاق الأعلى مع الحد اللاخطي $\frac{\partial(u^{-n})}{\partial x}$ نقوم بمطابقة قوتي كل من $\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$ و $\cos^{-nb-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$، وأمثال كل زوج، فنحصل على:

$$b(b-1)(b-2)\neq 0 \tag{25}$$

$$-nb-1=b-3 \tag{26}$$

$$\left(\delta(t)b^{2}\mu^{2}+1\right)\frac{d\lambda(t)}{dt}=0 \tag{27}$$

$$-\delta(t)b(b-1)\mu^{2}\frac{d\lambda(t)}{dt}=0 \tag{28}$$

$$-\alpha(t)b\mu\lambda(t)+\left(\delta(t)b^{3}\mu^{3}\lambda(t)-b\mu\lambda(t)\right)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)=0 \tag{29}$$

$$\delta(t)b(b-1)(b-2)\mu^{3}\lambda(t)\left(-t.\frac{dc(t)}{dt}-c(t)\right)+\beta(t)nb\mu\lambda^{-n}(t)=0 \tag{30}$$

حيث وضعنا المعادلة (25) لضمان المطابقة بين قوتي كل من $\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$ و $\cos^{-nb-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$، وتمثل المعادلة (27) أمثال $\cos^{b}(\mu\xi)$ والمعادلة (28) أمثال $\cos^{b-2}(\mu\xi)$ والمعادلة (29) أمثال $\cos^{b-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$ والمعادلة (30) أمثال $\cos^{-nb-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$ و $\cos^{b-3}(\mu\xi)\sin(\mu\xi)$.

من المعادلة (26)، نجد أن $b=\frac{2}{n+1}$، وبالأسلوب نفسه المتبع في حالة القوة الموجبة في الفقرة 1.1، نجد أن $\lambda(t)=\lambda_{0}$، حيث أن λ_{0} ثابت، الذي يمثل سعة الموجة.

$$\mu=\pm\frac{(n+1)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\lambda_{0}^{-n-1}\beta(t)}{\delta(t)\left(2\lambda_{0}^{-n-1}\beta(t)-(n-1)\alpha(t)\right)}}\ ,\ c(t)=\frac{1}{t}\left[\int\left(\frac{2}{(n-1)}\lambda_{0}^{-n-1}\beta(t)+\alpha(t)\right)dt+C_{2}\right] \tag{31}$$

حيث أن C_{2} ثابت المكاملة.

وبما أن μ وسيط عددي يمثل عدد الأمواج، إذاً يجب أن يكون:

$$\frac{\lambda_{0}^{-n-1}\beta(t)}{\delta(t)\left(2\lambda_{0}^{-n-1}\beta(t)-(n-1)\alpha(t)\right)}=C$$

حيث أن C ثابت ما، بالتالي بتعويض العلاقة (21) في (6)، نحصل على حلول مضغوطة *compacton* للمعادلة المعطاة (5) من أجل $\left|\mu\left(x+\int\left(\frac{-2}{(n-1)}\lambda_0^{-n-1}\beta(t)+\alpha(t)\right)dt\right)\right|<\frac{\pi}{2}$:

$$u(x,t)=\lambda_0\left\{\cos^2\left[\mu\left(x+\int\left(\frac{2}{(n-1)}\lambda_0^{-n-1}\beta(t)+\alpha(t)\right)dt+C_2\right)\right]\right\}^{\frac{1}{n+1}} \quad (32)$$

2- حلول ذات موجة منعزلة ظاهرة *(bright soliton)* وحلول ذات نمط انفرادي *(solitary patterns)* لمعادلتي بينيامين-بونا-ماهوني:

سنقوم في هذه الفقرة بحل معادلة بينيامين-بونا-ماهوني المعممة ذات القوة الموجبة (4) وذات القوة السالبة (5) بطريقة فرضية الحل الموجي *(solitary wave ansatz)*.

1.2 معادلة بينيامين-بونا-ماهوني المعممة ذات القوة الموجبة (4):

سنعتبر هنا متحول موجي أكثر عمومية:

$$\xi=B(t)\left(x-c(t).t\right) \quad (33)$$

حيث أن $c(t)$ سرعة الموجة المنعزلة و $B(t)$ عرض معكوس للموجة المنعزلة، وهما تابعان حقيقيان سيتم تحديدهما لاحقاً. ولإيجاد الحل ذو الموجة المنعزلة الظاهرة سنفترض أن الحل يعطى بالشكل الآتي:

$$u(x,t)=\lambda(t)\operatorname{sech}^p\xi \quad (34)$$

حيث $\lambda(t)$ يمثل سعة الموجة المنعزلة و p عدد صحيح موجب سيحدد لاحقاً خلال عملية إيجاد الحل.

لنوجد مشتقات الحل (34) وفق الآتي، حيث سنكتب للاختصار $\lambda=\lambda(t)$, $B=B(t)$, $c=c(t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{d\lambda}{dt}\operatorname{sech}^p\xi-p\lambda\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bct)}{dt}\right)\operatorname{sech}^p\xi\tanh\xi \quad (35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-pB\lambda\operatorname{sech}^p\xi\tanh\xi \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=B^2\lambda\left(p^2\operatorname{sech}^p\xi-p(p+1)\operatorname{sech}^{p+2}\xi\right) \quad (37)$$

$$\frac{\partial(u^n)}{\partial x}=-npB\lambda^n\operatorname{sech}^{np}\xi\tanh\xi \quad (38)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)\left(p^2\operatorname{sech}^p\xi-p(p+1)\operatorname{sech}^{p+2}\xi\right)$$
$$+\lambda B^2\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bct)}{dt}\right)\left(-p^3\operatorname{sech}^p\xi\tanh\xi+p(p+1)(p+2)\operatorname{sech}^{p+2}\xi\tanh\xi\right) \quad (39)$$

بتعويض العلاقات (35) و (36) و(38) و(39) في المعادلة (4)، نحصل على:

$$\frac{d\lambda}{dt}\operatorname{sech}^p\xi-p\lambda\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bct)}{dt}\right)\operatorname{sech}^p\xi\tanh\xi-\alpha pB\lambda\operatorname{sech}^p\xi\tanh\xi$$
$$-n\beta pB\lambda^n\operatorname{sech}^{np}\xi\tanh\xi-\delta p^2\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)\operatorname{sech}^p\xi$$
$$+\delta p(p+1)\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)\operatorname{sech}^{p+2}\xi+\delta\lambda B^2p^3\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bct)}{dt}\right)\operatorname{sech}^p\xi\tanh\xi$$
$$-\delta\lambda B^2p(p+1)(p+2)\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bct)}{dt}\right)\operatorname{sech}^{p+2}\xi\tanh\xi=0 \quad (40)$$

حيث $\alpha=\alpha(t)\ ,\ \beta=\beta(t)\ ,\ \delta=\delta(t)$. للموازنة بين $\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}$ الحد ذو مرتبة الاشتقاق الأعلى مع الحد اللاخطي $\frac{\partial(u^n)}{\partial x}$ نقوم بمساواة قوتي $\operatorname{sech}^{np}\xi\tanh\xi$ و $\operatorname{sech}^{p+2}\xi\tanh\xi$، فنحصل على:

$$np=p+2 \quad (41)$$

ومنه:

$$p=\frac{2}{n-1} \quad (42)$$

الآن بجعل أمثال كل من $\operatorname{sech}^p\xi$ و $\operatorname{sech}^p\xi\tanh\xi$ و $\operatorname{sech}^{np}\xi\tanh\xi$ أو $\operatorname{sech}^{p+2}\xi\tanh\xi$، و $\operatorname{sech}^{p+2}\xi$ مساوية للصفر نحصل على:

$$\frac{d\lambda}{dt}-\delta p^2\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)=0 \quad (43)$$

$$-\alpha pB\lambda+\left(\delta\lambda B^2p^3-p\lambda\right)\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bct)}{dt}\right)=0 \quad (44)$$

$$-n\beta pB\lambda^n-\delta\lambda B^2p(p+1)(p+2)\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bct)}{dt}\right)=0 \quad (45)$$

$$\delta p(p+1)\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)=0 \quad (46)$$

من العلاقة (45) وبعد تعويض قيمة $p=\frac{2}{n-1}$ فيها، نحصل على:

$$\left(x.\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bct)}{dt}\right)=\frac{-\lambda^{n-1}n\beta}{\left(\frac{2}{n-1}+1\right)\left(\frac{2}{n-1}+2\right)\delta B} \quad (47)$$

بتعويض (47) في (44)، نحصل على:

$$-\alpha B\lambda-\frac{4n\delta B^2\beta\lambda^n}{(n-1)^2\left(\frac{2}{n-1}+1\right)\left(\frac{2}{n-1}+2\right)\delta B}+\frac{n\lambda^n\beta}{\delta B\left(\frac{2}{n-1}+1\right)\left(\frac{2}{n-1}+2\right)}=0 \quad (48)$$

بضرب طرفي العلاقة (48) بـ $\frac{\delta B\left(\frac{2}{n-1}+1\right)\left(\frac{2}{n-1}+2\right)}{\lambda}$، نحصل على:

$$B^2\delta\left(\left(\frac{2}{n-1}+1\right)\left(\frac{2}{n-1}+2\right)\alpha+\frac{4n}{(n-1)^2}\lambda^{n-1}\beta\right)=n\lambda^{n-1}\beta \tag{49}$$

ومنه:

$$B=\sqrt{\frac{n\lambda^{n-1}\beta}{\delta\left(\left(\frac{2}{n-1}+1\right)\left(\frac{2}{n-1}+2\right)\alpha+\frac{4n}{(n-1)^2}\lambda^{n-1}\beta\right)}} \tag{50}$$

وبالتالي فإن شرط وجود الحل ذو الموجة المنعزلة الظاهرة *(bright soliton)* هو أن يكون:

$$\lambda^{n-1}\beta\delta\left(\left(\frac{2}{n-1}+1\right)\left(\frac{2}{n-1}+2\right)\alpha+\frac{4n}{(n-1)^2}\lambda^{n-1}\beta\right)>0 \tag{51}$$

من العلاقة (46)، لدينا:

$$\frac{dB}{dt}=-\frac{B}{2\lambda}\frac{d\lambda}{dt} \tag{52}$$

وبتعويض (52) في العلاقة (43)، نحصل على:

$$\frac{d\lambda}{dt}=0 \tag{53}$$

بالمكاملة نحصل على:

$$\lambda(t)=\lambda_0 \tag{54}$$

أي أن سعة الموجة ثابتة وهذا ما يعطي وجود الموجة المنعزلة، وهذا متطابق مع الحل الدوري في الفقرة 1، ومنه فإن العرض العكسي للموجة المنعزلة:

$$B(t)=\sqrt{\frac{n\lambda_0^{n-1}\beta}{\delta\left(\left(\frac{2}{n-1}+1\right)\left(\frac{2}{n-1}+2\right)\alpha+\frac{4n}{(n-1)^2}\lambda_0^{n-1}\beta\right)}} \tag{55}$$

بقي علينا تعيين $c(t)$، ومن أجل ذلك نكتب المعادلة (44) بالشكل الآتي:

$$\frac{2}{n-1}\lambda\left[-\alpha B+\left(\frac{4}{(n-1)^2}\delta B^2-1\right)x.\frac{dB}{dt}-\left(\frac{4}{(n-1)^2}\delta B^2-1\right)\frac{d(Bct)}{dt}\right]=0 \tag{56}$$

بما أن $c(t)$ تابع فقط لـ t، بالتالي فإن $\frac{dB}{dt}=0$، ومنه لدينا المعادلتان:

$$\frac{dB}{dt}=0 \tag{57}$$

$$\frac{d(Bct)}{dt}=\frac{\alpha B}{1-\frac{4}{(n-1)^2}\delta B^2} \tag{58}$$

بالمكاملة نحصل على:

$$B(t)=B_0 \tag{59}$$

$$c(t)=\frac{1}{t}\left((n-1)^2\int\frac{\alpha(s)}{(n-1)^2-4\delta B_0^{\,2}}ds+C_3\right) \tag{60}$$

حيث C_3 ثابت مكاملة. بتعويض (59) في المعادلة (55)، نحصل على:

$$B_0^2=\frac{n\lambda_0^{\,n-1}\beta}{\delta\left(\left(\frac{2}{n-1}+1\right)\left(\frac{2}{n-1}+2\right)\alpha+\frac{4n}{(n-1)^2}\lambda_0^{\,n-1}\beta\right)}>0 \qquad (61)$$

ومنه:

$$\frac{\delta(t)}{\beta(t)}=\frac{n\lambda_0^{\,n-1}}{B_0^2\left(\left(\frac{2}{n-1}+1\right)\left(\frac{2}{n-1}+2\right)\alpha+\frac{4n}{(n-1)^2}\lambda_0^{\,n-1}\beta\right)}>0 \qquad (62)$$

وبالتالي يصبح شرط وجود الحل ذو الموجة المنعزلة الظاهرة *(bright soliton)*:

$$\delta(t)\beta(t)>0 \qquad (63)$$

ويعطى هذا الحل بالعلاقة الآتية:

$$u(x,t)=\lambda_0\left\{\operatorname{sech}^2\left(B_0\left(x-(n-1)^2\int\frac{\alpha(s)}{(n-1)^2-4\delta B_0^{\,2}}ds+C_3\right)\right)\right\}^{\frac{1}{n-1}} \qquad (64)$$

وهذا الحل موجود بشرط تحقق (63) وبشرط أن يكون المقدار

$$\frac{\beta}{\delta\left(\left(\frac{2}{n-1}+1\right)\left(\frac{2}{n-1}+2\right)\alpha+\frac{4n}{(n-1)^2}\lambda_0^{\,n-1}\beta\right)}$$ ثابت.

2.2 معادلة بينيامين–بونا–ماهوني المعممة ذات القوة السالبة (5):

كما رأينا في الفقر 1.2، باتباع الأسلوب نفسه نحصل على أن $p=\frac{-2}{n+1}$ وأن:

$$B(t)=\sqrt{\frac{n\lambda_0^{\,-n-1}\beta}{\delta\left(\frac{4n}{(n+1)^2}\lambda_0^{\,-n-1}\beta-\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(2-\frac{2}{n-1}\right)\alpha\right)}} \qquad (65)$$

$$c(t)=\frac{1}{t}\left((n+1)^2\int\frac{\alpha(s)}{(n+1)^2-4\delta B_0^{\,2}}ds+C_4\right) \qquad (66)$$

حيث C_4 ثابت مكاملة، ومنه بالتعويض في العلاقة (34) نحصل على حلول ذات نمط انفرادي *(solitary patterns)*.

$$u(x,t)=\lambda_0\left\{\sinh^2\left(B_0\left(x-(n+1)^2\int\frac{\alpha(s)}{(n+1)^2-4\delta B_0^{\,2}}ds+C_4\right)\right)\right\}^{\frac{1}{n+1}} \qquad (67)$$

بوضع $n=2$ نحصل على معادلة بينيامين–بونا–ماهوني ذات الأمثال المتغيرة، فنحصل على نفس حلول المرجع [13]، لكن مع استبدال الحد $\beta(t)$ بـ$\frac{1}{2}\beta(t)$، لأنه في المعادلة الموجودة هناك لدينا الحد $\beta(t)u\frac{\partial u}{\partial x}$، كما أن الحلول التي توصلنا إليها في هذا البحث أكثر عمومية من تلك التي بالمرجع [12]، إذ أن *Jahani* و *Manahian* استخدما متحول موجي خطي في حين استخدمنا متحول موجي لا خطي، كذلك تتطابق حلولنا في هذه الحالة مع

بعض حلول المرجع [18] في حالة $\alpha(t)=1$ و $\beta(t)=-2a$ و $\delta(t)=b$ و $c(t)=c$، حيث a و b و c ثوابت عددية.

بوضع $n=3$ نحصل على معادلة بينيامين-بونا-ماهوني المعدلة ذات الأمثال المتغيرة التابعة للزمن، وبتعويض $n=3$ في العلاقتين (21) و(22)، نحصل على حلول دورية لهذه المعادلة:

$$u(x,t)=\lambda_0\left\{\sec^2\left[\mu\left(x+\int\left(\frac{1}{2}\lambda_0^2\beta(t)+\alpha(t)\right)dt+C_3\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{68}$$

حيث $\mu=\pm\sqrt{\dfrac{\lambda_0^2\beta(t)}{\delta(t)\left(\lambda_0^2\beta(t)-2\alpha(t)\right)}}$، كذلك نحصل على حلول ذات موجة منعزلة ظاهرة فيما لو عوضنا $n=3$ في العلاقتين (55) و(64):

$$u(x,t)=\lambda_0\left\{\mathrm{sech}^2\left(B_0\left(x-\int\frac{\alpha(s)}{1-\delta B_0{}^2}ds+C_3\right)\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{69}$$

حيث $B_0=\sqrt{\dfrac{\lambda_0{}^2\beta}{\delta\left(2\alpha+\lambda_0{}^2\beta\right)}}$. وذلك في حال تحقق الشرط (63) وكون المقدار $\dfrac{\beta}{\delta\left(2\alpha+\lambda_0{}^2\beta\right)}$ ثابت.

بمقارنة الحل (68) مع الحل في المرجع [14]، نجد أن الحل ذاته في حالة $\alpha(t)=1$ و $\beta(t)=\dfrac{1}{3}$ و $\delta(t)=1$ و $c(t)=c$، حيث c ثابت عددي، كما تعتبر الحلول في (68) و(69) أكثر عمومية من حلول المرجعين [16،17]، لأنه في الاثنين تم أخذ متحول موجي خطي، والاثنان تناولا دراسة المعادلة ذات الأمثال الثابتة، كذلك نجد تطابق بين الحلين (68) و(69) مع حلول المرجع [19] في حالة $\alpha(t)=1$ و $\beta(t)=\dfrac{1}{3}$ و $\delta(t)=1$ و $c(t)=c$، حيث c ثابت عددي.

من أجل الحالة العامة $n>1$ لدينا نتائج مشابهة لنتائج المرجع [9] من حيث الحلول الدورية والحلول ذات الموجة المنعزلة وذلك من أجل $\alpha(t)=a$ و $\beta(t)=k$ و $\delta(t)=b$ مع a و b و k ثوابت عددية، كذلك بالمقارنة مع المرجع [10] نجد أن الحلول دورية وكذلك هناك حلول ذات موجة منعزلة وهذه النتائج مشابهة لنتائجنا في حالة $\alpha(t)=1$ و $\beta(t)=\dfrac{1}{n}a$ و $\delta(t)=-1$، حيث أن a ثابت معلوم، كما نلاحظ أن الحلول التي حصلنا عليها في العلاقتين (22) و(32) مطابقة للحلول التي حصل عليها الباحث *Wazwaz* في المرجع [3] في حالة أن $\alpha(t)=a$ و $\beta(t)=k$ و $\delta(t)=b$ مع a و b و k ثوابت عددية، أي في حالة المعادلتين (4) و(5) ذات أمثال ثابتة.

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد قمنا في هذا البحث بحل معادلة بينيامين-بونا-ماهوني المعممة (المعدلة أيضاً كحالة خاصة) ذات الأمثال التابعة للزمن وفي حالتين مختلفتين مع قوة موجبة وقوة سالبة، إذ حصلنا على أنواع عديدة من الحلول الدقيقة ذات بنى فيزيائية مختلفة، فبينت الدراسة بأن الحلول قد تكون دورية أو مضغوطة *(compactons)* أو ذات أنماط انفرادية

(solitary pattern) أو ذات موجة منعزلة ظاهرة *(bright soliton)*. قدمنا أيضاً شروط لازمة لوجود هذه الحلول. تبين من خلال هذه الدراسة بأن طريقة *sine–cosine* فعالة في التعامل مع الظواهر الفيزيائية ذات البنية المضغوطة *(compacton)*. تعد الحلول التي حصلنا عليها أكثر عمومية من تلك التي في المراجع [3،12،13،16،17،18،19]، إذا أننا استخدمنا متحول موجي لا خطي، بالإضافة إلى أن أمثال المعادلة تابعة للزمن. يحتاج التغير في البنى الفيزيائية للحلول التي حصلنا عليها إلى تفسير فيزيائي من قبل الباحثين الفيزيائيين، إذ قد يساعدهم كثيراً في تفسير بعض الظواهر الفيزيائية. نشير في النهاية بأن جميع الحسابات الرياضية المتعلقة بهذا البحث قد تمت باستخدام برنامج *Maple13*.

المراجع

[1] ABLOWITZ, M.J. *Nonliniear Dispersive Waves: Asymptotic Analisis and solitons*. Cambridge University Press, New York, 2011.

[2] DRAZIN, P.G, JOHNSON, R.S. *Solitons: An Introduction*. Cambridge University Press 1989. XII, 226 pp.

[3] HELAL, M.A. *Soliton solution of some nonlinear partial differential equations and its applications in fluid mechanics*. Chaos, Solitons& Fractals, 13, 2002,1917–1929.

[4] LUDU, A. DRAAYER, JP. *Patterns on liquid surfaces: cnoidal waves, compactons and scaling*. Physica D, 123, 1998,82–91.

[5] WAZWAZ, A.M. *The tanh method for travelling wave solutions of nonlinear equations*. Appl Math Comput, 154(3), 2004,713–723.

[6] WAZWAZ, A.M. *Special types of the nonlinear dispersive Zakharov-Kuznetsov equation with compactons, solitons and periodic solutions*. Int J Comput Math, 81(9), 2004,1107–1119.

[7] ROSENAU, P. HYMAN, JM. *Compactons: Solitons with finite wavelengths*. Phys Rev Lett, 70(5), 1993,564–567.

[8] WAZWAZ, A.M. HELAL, M.A. *Nonlinear variants of the BBM equation with compact and noncompact physical structures*. Chaos, Solitons and Fractals 26, 2005, 767–776.

[9] CHEN, J. LAI, S. QING, Y. *Exact Solutions to a Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation*. Int. J.Comput. Int. Sys, 2007.

[10] ESTÉVEZ, P.G. KURU, Ş. NEGRO, J. NIETO, L.M. *Travelling wave solutions of the generalized Benjamin–Bona–Mahony equation*. Chaos, Solitons and Fractals, 40(4), 2009,2031–2040.

[11] PRIYANKA, M.P. PRADHAN, V.H. *Travelling Wave Solutions of BBM and Modified BBM Equations by Modified F-Expansion Method*. International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA) Vol. 3, Issue 1, 2013, pp.169-180.

[12] JAHANIA, M. MANAFIAN, J. *Improvement of the Exp-function method for solving the BBM equation with time-dependent coefficients*. Eur. Phys. J. Plus, 2016, 131-154.

[13] INJROU, S. *Finding New Exact Solutions for Benjamin – Bona – Mahony Equation with Time-Dependent Coefficients*. (in Arabic), Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (14) No. (2) 2019. 43-52.

[14] GUNER, O. *Soliton solution of the generalized modified BBM equation and the generalized Boussinesq equation*. Journal of Ocean Engineering and Science 2, 2017, 248–252.

[15] YANG, Y.J. YAO, L. *New Exact Solutions of the Modified Benjamin-Bona-Mahony Equation*. International Conference on Artificial Intelligence and Computer Science, 2016, 113-118.
[16] RAMLI, M. IRSALIN, D. IWANIS I.P. HALFIANI, V. *Soliton Solution of Benjamin-Bona-Mahony Equation and Modified Regularized Long Wave Equation*. AIP Conference Proceedings 1913, 020002 (2017).
[17] ARORA, R. KUMAR, A. *Soliton Solution for the BBM and MRLW Equations by Cosine-function Method*. Applied Mathematics, 1(2), 2011, 59-61.
[18] MANAFIANHERIS, J. *Exact Solutions of the BBM and MBBM Equations by the Generalized (G'/G)-expansion Method Equations*. International Journal of Genetic Engineering, 2(3), 2012, 28-32.
[19] KUMAR, R. KUMAR, M. KUMAR, A. *Some Soliton Solutions of Non Linear Partial Differential Equations by Tan-Cot Method*. IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), Issue 6, 2013, PP 23-28.
[20] NAHER, H. ABDULLAH, F.A. BEKIR, A. *Some new traveling wave solutions of the modified Benjamin-Bona -Mahony equation via the improved (G'/G)-expansion method*. New Trends in Mathematical Sciences, 3(1), 2015, 78-89.
[21] WAZWAZ, A.M. *A Sine-Cosine Method for Handling Nonlinear Wave Equations*. Mathematical and Computer Modelling 40, 2004, 499-508.
[22] BISWAS A. *1-Soliton solution of the K(m,n) equation with generalized evolution*. Phys Lett A 372 (25), 2008, 4601–4602.