Formulation and Solving Fractional linear programming Models Using Development of Lagrange s' Method

Dr. Mouhamad Maziad Dribate*

(Received 10 / 9 / 2019. Accepted 24 / 2 /2020)

□ ABSTRACT □

In this paper Lagrange's method was used to solve Fractional linear programming problems and then developing this method by using mathematical forms by which it can be possible to find the solution without using complex derivations. Thus we can avoid a lot of derivations and summarize the number of probabilities of eradicating some of the changeable items which had rapidly got to the optimal solution .

The research also includes programs written with Visual Basic language (Microsoft Visual Basic 6.0), represented the Lagrange's method and development Lagrange's method to get a good forms and solution of Fractional linear programming problems to help decision maker to find optimal solution of this problems by development manner with advanced language and important present programming languages.

Key words: Fractional Linear Programming, Lagrange Method, Lagrange Function, Mathematical Modeling, Operations Research, Approximation Algorithm, Terms of Con – Tucker.

***Associate Prof.,Department of Mathematical Statistics – Faculty of Sciences – Tishreen University – Lattakia – Syria.**
E-mail: drdribatem@gmail.com

صياغة وحل نماذج البرمجة الكسرية الخطية باستخدام طريقة لاغرانج المطورة

د.محمد مزيد دريباتي*

(تاريخ الإيداع 10 / 9 / 2019. قُبِل للنشر في 24 / 2 /2020)

□ ملخّص □

تم في هذا البحث استخدام طريقة لاغرانج لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية وتطويرها وذلك من خلال إيجاد صيغ رياضية يمكن بواسطتها إيجاد الحل مباشرة دون استخدام الاشتقاقات التفاضلية المعقدة، الأمر الذي أدى إلى تقليل احتمالات تصفير بعض المتغيرات وكذلك سهولة العمليات الحسابية مما أدى إلى الوصول إلى الحل الأمثل بأقل وقت ممكن. وتمت برمجة طريقة لاغرانج وطريقة لاغرانج المطورة بلغة فيجوال بيسك الاصدار6 للحصول على واجهات عرض جيدة عند حل مسائل البرمجة الكسرية، وهذا يساعد متخذ القرار على إيجاد الحل الأمثل للمشكلة بأسلوب مطور مبرمج بإحدى لغات العصر البرمجية.

الكلمات المفتاحية: البرمجة الخطية الكسرية، طريقة لاغرانج، دالة لاغرانج، نمذجة رياضية، بحوث عمليات، خوارزمية التقريب، شروط كون – توكر.

* استاذ مساعد– قسم الاحصاء الرياضي– كلية العلوم–جامعة تشرين– سوريا– اللاذقية
البريد الالكتروني: drdribatem@gmail.com

مقدمة:

يشهد العصر الحالي تطورات سريعة سواء على مستوى المؤسسات التصنيعية أو الخدمية مما يتطلب العمل بمفاهيم إدارية معاصرة والعمل بأساليب علمية وطرائق متطورة مما يجعل التركيز على بحوث العمليات المحوسبة وصولاً إلى تحقيق عامل السرعة في الحصول على المعلومات الممهدة لعملية اتخاذ القرار فضلاً عن الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة.[1] , [5] .

وتعد البرمجة الخطية إحدى أساليب بحوث العمليات، وتتألف معظم مسائل البرمجة الخطية من نموذج رياضي يتكون من دالة هدف خطية ومجموعة قيود خطية، يراد إيجاد الحل الأمثل لدالة الهدف محققاً بذلك جميع قيود المسألة بمتغيرات غير سالبة.

عندما تكون دالة الهدف نسبة بين دالتين خطيتين أو غير خطيتين وقيودهما خطية، تدعى المسائل حينئذ بمسائل البرمجة الكسرية الخطية وهي حالة خاصة من البرمجة اللاخطية ومن المواضيع المهمة في بحوث العمليات.[6] , [11] .

على مدى العقود الأربعة أصبحت البرمجة الكسرية واحدة من أدوات التخطيط، حيث تم تطبيقها في مجالات مختلفة في الحياة العملية لقياس كفاءة النظام مثل تخطيط الشركات والبنوك وتخطيط الانتاج والتخطيط المالي والرعاية الصحية...الخ

تم في هذا البحث استخدام طريقة لاغرانج وتطويرها لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية.

أهمية البحث وأهدافه

هدف البحث:

إيجاد صيغ رياضية يمكن بواسطتها إيجاد الحل مباشرة دون استخدام الاشتقاقات التفاضلية المعقدة، الأمر الذي سيؤدي إلى تقليل احتمالات تصفير بعض المتغيرات وكذلك سهولة العمليات الحسابية وبالتالي سرعة الوصول إلى الحل الأمثل، وهذا سيساعد متخذ القرار على إيجاد الحل الأمثل للمشكلة بأسلوب مطور ومبرمج بإحدى لغات العصر البرمجية.

أهمية البحث:

تطوير حل مسائل البرمجة الكسرية بطريقة لاغرانج والوصول مباشرة إلى الحل دون الخوض بتكوين دالة لاغرانج واشتقاقاتها التفاضلية المطولة والتي قد نكون مضطرين لاستخراجها في مسائل البرمجة الخطية.

إن التطورات السريعة سواء على مستوى المؤسسات التصنيعية أو الخدمية يتطلب العمل بمفاهيم إدارية معاصرة والعمل بأساليب علمية وطرائق متطورة مما يجعل التركيز على بحوث العمليات المحوسبة وصولاً إلى تحقيق عامل السرعة في الحصول على المعلومات الممهدة لعملية اتخاذ القرار فضلاً عن الاستخدام الأمثل للموارد.

1. طريقة مضاريب لاغرانج لحل مسائل البرمجة الكسرية [7] [1]:

من المفيد في أغلب مسائل البرمجة الخطية واللاخطية والكسرية الحصول على قيمة عظمى أو صغرى لدالة الهدف وفقاً لمجموعة من القيود أو الشروط الإضافية. إن طريقة مضاريب لاغرانج بإمكانها تحقيق ذلك حيث تستخدم الطريقة دالة هدف ومجموعة معينة من القيود لتكوّن دالة جديدة تدعى دالة لاغرانج، وتجري على هذه الدالة عدة

اشتقاقات تفاضلية تكون طويلة في أغلب الأحيان للحصول على مجموعة معادلات بواسطتها يمكن الوصول إلى حل أو مجموعة من الحلول يكون الحل الأمثل من ضمن هذه الحلول.[7] , [11] .(وسيتم هنا حل مسألة البرمجة الكسرية بطريقة لاغرانج) ولما كان في حل الكثير من مسائل البرمجة اللاخطية الكثير من الغموض والتعقيد سواء كان الحل بطريقة لاغرانج أو غيرها، لذا سنحاول تطوير حل مسائل البرمجة الكسرية بطريقة لاغرانج لنستخرج من معادلات الحل مجموعة من العلاقات والصيغ توصلنا مباشرة إلى الحل دون الخوض بتكوين دالة لاغرانج واشتقاقاتها التفاضلية المطولة والتي قد نكون مضطرين لاستخراجها في مسائل البرمجة الخطية.

سوف نختزل كذلك احتمالات الحل من أجل الوصول إلى الحل الأمثل باحتمالات أقل ووقت أسرع وسنرى ذلك واضحاً بعد تطوير هذه الطريقة، في حين سنتناول هنا استخدام طريقة لاغرانج واشتقاقاتها المتعددة لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية بشكلها الاعتيادي من أجل الوصول إلى الحل الأمثل.

1.1. إيجاد الحل الأمثل لمسائل البرمجة الكسرية بطريقة لاغرانج [9] [4]:

تعد البرمجة الكسرية الخطية حالة خاصة من البرمجة اللاخطية، فما ينطبق من الحلول لحل مسائل البرمجة اللاخطية يمكن

تطبيقه لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية لكن العكس غير صحيح .

إن طرائق حل مسائل البرمجة اللاخطية كثيرة، منها طريقة الاتجاهات الممكنة وطريقة الدوال الجزائية وطريقة نيوتن– را فسون وطريقة مضاريب لاغرانج وطرائق أخرى عديدة ولعل أكثر الطرائق شيوعاً واستعمالاً هي طريقة مضاريب لاغرانج، وأن أكثر الطرائق التي لها قابلية التعميم هي طريقة كون – توكر التي تعد توسيعاً لطريقة مضاريب لاغرانج وسنستخدم هذه الطريقة لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية.

يتم صياغة مسألة البرمجة الكسرية الخطية **Linear Fractional Programming (LFP)** كنسبة بين دالتين خطيتين وبقيود خطية بالشكل:

$$Maximize\ (Minimize)Z = \frac{CX+\alpha}{DX+\beta} \qquad (1.1)$$

$$s.t\ \ AX \le B\ \ ,\ \ X \ge 0$$

X : تمثل متغيرات النموذج الرياضي.

C: معاملات المتغير X لدالة الهدف في البسط.

D : معاملات المتغير X لدالة الهدف في المقام.

α و β : تمثل ثوابت عددية.

A : تمثل مصفوفة المعاملات للقيود.

B : تمثل مصفوفة ثوابت الطرف الأيمن للقيود.

1.1.1. خطوات حل مسائل البرمجة الكسرية [1] [2]:

1. نجزئ دالة الهدف الكسرية إلى دالتين خطيتين تمثل الأولى دالة البسط والثانية دالة المقام، وكي تكون قيمة دالة الهدف أعظم ما يمكن، يجب أن تكون دالة البسط أكبر ما يمكن، ودالة المقام أقل ما يمكن.

2. يتم استخراج الدالة $Max\,Z^*$ من حاصل جمع دالة المقام بعد تحويلها إلى $Max\,Z_2$ مع دالة البسط $Max\,Z_1$

ثم توضع هذه الدالة في نموذج رياضي مكون من قيود المسألة الأصلية بالإضافة إلى شروط عدم السلبية، ولحل مسألة البرمجة الخطية الناتجة نذهب للخطوة التالية.

3. يمكن حل النموذج الخطي الجديد بطريقة سيمبلكس (simplex method) [3] .[7] , ونظراً لكثرة جداول الحل وما يرافقها من عمليات حسابية معقدة سنستخدم طريقة لاغرانج في الحل. ولكون قيود المسائل المراد حلها، قد تحمل علامة المساواة أو علامة عدم المساواة، إذن سنتناول دراسة الحالتين كالآتي:

a–عندما تحمل القيود علامة المساواة (Equality constraints) [8] :

نفرض أنه لدينا النموذج الرياضي المبين أدناه والذي تم الحصول عليه من نموذج البرمجة الكسرية (1.1) باستخدام الخطوات $(1.1.1.)$ السابقة:

$$\begin{aligned} & Max\, Z^* = f(x) \\ & g_1(x) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x) = b_m \end{aligned}$$

حيث $f(x)\,,\; g_i(x), i=\overline{1,m}$ بشكل عام هي دوال لاخطية مستمرة وقابلة للاشتقاق، لكننا سنستخدم الحل لاحقاً لحل مسائل

البرمجة الكسرية الخطية، وكذلك x غير مشروط بشروط عدم السلبية، حيث $x=(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n)'$

تسمى الدالة من الشكل:

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[g_i(x) - b_i \right] \qquad (1)$$

دالة لاغرانج، وتسمى البارامترات $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)'$ مضاريب لاغرانج، والشروط الضرورية للحصول على الحل الأمثل هي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \;\; , \;\; \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \;\; , \;\; i=\overline{1,m} \;\; , \;\; j=\overline{1,n} \qquad (2)$$

وبذلك سيكون لدينا $(n+m)$ من المتغيرات و $(n+m)$ من المعادلات، ولذلك يمكن حل هذه المعادلات آنياً.

إن المصفوفة H^B (Bordered Hessian matrix) المعرفة أدناه، بإمكانها أن تحدد الشرط الكافي لإيجاد الحل الأمثل:

$$H^B = \begin{bmatrix} O & & P \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P' & & Q \end{bmatrix}$$

حيث P,Q مصفوفتان معرفتان بالشكل:

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_j} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad , \quad Q = \left[\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{m\times n} \quad , \; i,j=\overline{1\,,\,n}$$

تسمى المصفوفة H^B مصفوفة (Bordered Hessian matrix) حيث ستكون x_0 نقطة نهاية عظمى إذا كانت آخر المحددات الرئيسية $(n-m)$ إلى H^B تحمل الاشارة $(-1)^{m+1}$، أو تكون x_0 نقطة صغرى إذا كانت آخر المحددات الرئيسية $(n-m)$ تحمل الاشارة $(-1)^m$. [11]:

b-عندما تحمل القيود علامة عدم المساواة (Inequality constraints) [8] [12]:

لحل المسائل التي تحمل قيودها علامة عدم المساواة، بطريقة مضاريب لاغرانج، لابد لنا قبل تكوين دالة لاغرانج من تحويل متراجحات القيود إلى معادلات، ويتطلب ذلك إضافة أو طرح مقادير مجهولة (مساعدة) من كل قيد، مما سيزيد من عدد مجاهيل المسألة وهذا سيزيد من صعوبة حلها، وللتخلص من هذه المشكلة نستخدم طريقة شروط كون – توكر التي تُعد توسيعاً أو تطويراً لطريقة لاغرانج، حيث تستخدم هذه الطريقة شروطاً تجعل بعض المتغيرات مساوية للصفر وذلك من أجل جعل عدد متغيرات المسألة مساوياً لعدد المعادلات وحل جملة المعادلات الناتجة والوصول من خلال ذلك إلى مجموعة حلول يكون من ضمنها الحل الأمثل للمسألة.

1.2. توسيع طريقة مضاريب لاغرانج (أو ما يسمى بطريقة شروط Con-Tucker كون – توكر):

سنوضح في هذا البند كيفية استخدام طريقة مضاريب لاغرانج عندما تحمل القيود علامة عدم المساواة للحصول على الشروط الضرورية، حيث تستخدم هذه الطريقة الشروط $-X \le 0$ بدلاً من $X \ge 0$ إضافة إلى شروط أخرى من أجل تصفير بعض المتغيرات، لذلك سيكون النموذج الذي ستستخدمه طريقة لاغرانج الموسعة بالشكل:

$$\left.\begin{array}{l} Max\,Z^* = f(x) \\ g_1(x) \le b_1 \\ \vdots \\ g_m(x) \le b_m \\ -x_1 \le 0 \\ \vdots \\ -x_n \le 0 \end{array}\right\} \qquad (1.2)$$

والذي تم الحصول عليه من النموذج (1.1) باستخدام الخطوات $(1.1.1.)$ المذكورة سابقاً.

ولتحويل جميع متراجحات القيود إلى معادلات ولضمان أن يكون المتغير المهمل (المساعد) s_i موجباً سنفرض $s_i = w_i^2$ و $s_j = h_j^2$ لنحصل على النموذج الآتي:

$$\left.\begin{array}{l} Max\,Z^* = f(x) \\ g_1(x) - b_1 + w_1^2 = 0 \\ \vdots \\ g_m(x) - b_m + w_m^2 = 0 \\ -x_1 + h_1^2 = 0 \\ \vdots \\ -x_n + h_n^2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (1.3)$$

وبالتالي فإن دالة لاغرانج ستكون من الشكل:

$$L(x,\lambda)= f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[g_i(x)-b_i+w_i^2\right]-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j+m}\left(-x_j+h_j^2\right) \qquad (1.4)$$

حيث أن λ_i و λ_{j+m} تمثل مضاريب لاغرانج وهي موجبة في حالة التعظيم وسالبة في حالة التصغير.

ولحل النموذج الخطي أو (اللاخطي بشكل عام) نتبع الخطوات الآتية:

نوجد أولاً شروط كون–توكر وفق الآتي:

.1 $$\frac{\partial L}{\partial x_j}=0 \quad , \quad j=\overline{1,n}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}+\lambda_{j+m}=0 \qquad (1.5)$$

.2 $$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=0 \quad , \quad i=\overline{1,m}$$

$$g_i(x)-b_i+w_i^2=0 \quad , \quad s_i=w_i^2 \quad , \quad i=\overline{1,m} \qquad (1.6)$$

.3 $$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{j+m}}=0 \quad , \quad j=\overline{1,n}$$

إذن: $$x_j=h_j^2 \Leftarrow x_j-h_j^2=0 \quad , \quad j=\overline{1,n}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_i}=0 \quad , \quad i=\overline{1,m}$$

.4 $$\frac{\partial L}{\partial w_i}=-2\lambda_i w_i=0 \quad , \quad i=\overline{1,m}$$

$$\lambda_i w_i=0 \quad , \quad i=\overline{1,m}$$

$$\lambda_i w_i^2=0 \quad , \quad i=\overline{1,m}$$

$$\lambda_i s_i=0 \quad , \quad i=\overline{1,m} \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial h_j}=0 \quad , \quad j=\overline{1,n}$$

.5 $$\frac{\partial L}{\partial h_j}=-2\lambda_{j+m}h_j=0 \quad , \quad j=\overline{1,n}$$

$$\lambda_{j+m}h_j=0 \quad , \quad j=\overline{1,n}$$

$$\lambda_{j+m}h_j^2=0 \quad , \quad j=\overline{1,n}$$

$$\lambda_{j+m}x_j=0 \quad , \quad j=\overline{1,n} \qquad (1.8)$$

ولحل النموذج (1.2) نجعل الدالة في حالة التعظيم لأن مصفوفة هيسين لهذه الدالة سالبة التحديد أو شبه سالبة التحديد في مسائل البرمجة اللاخطية، وهذا يماثل كون المشتقة الثانية لدالة الهدف سالبة التحديد في مسائل البرمجة الخطية [5]، وبالتالي وبحل المعادلات (1.5) و (1.6) و (1.7) و (1.8) سنحصل على الحل الأمثل للنموذج السابق. تتلخص شروط كون– توكر بتحقيق المعادلة (1.7) أي أن أحد المتغيرين λ_i أو s_i يساوي صفر، أو بتعبير آخر أحدهما يدخل الحلول الأساسية والآخر سيكون خارجاً منها، وكذلك الحالة نفسها بالنسبة للمعادلة (1.8) .

غالباً ما تطبق شروط كون– توكر على نماذج البرمجة اللاخطية التي يصعب إيجاد حلها ، لكننا سنقترح تطبيق هذه الطريقة على مسائل البرمجة الكسرية الخطية لنتمكن لاحقاً من إيجاد الصيغ أو القوانين التي تمكننا من الوصول إلى الحل مباشرة دون الحاجة إلى تكوين دالة لاغرانج وإجراء الاشتقاقات التفاضلية الطويلة، كما أننا سنحاول تقليل احتمالات تصفير الحل من أجل الوصول إلى الحل الأمثل وبزمن أقل.

تطبيق (1.1) :

$$Max\,Z = \frac{3x_1 + 4x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 1}$$

$$S.t:\ 2x_1 + x_2 \le 50$$

$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0$$

يتم تحويل النموذج الكسري كالآتي:

كي تكون قيمة دالة الهدف أعظم ما يمكن ، يجب أن يكون البسط أكبر مايمكن والمقام أقل مايمكن بحسب خطوات حل مسائل البرمجة الكسرية الآتية:

$$Max\,Z_1 = 3x_1 + 4x_2 + 1$$

$$Min\,Z_2 = x_1 + x_2 + 1$$

بتحويل دالة $MinZ_2$ إلى $MaxZ_2$ نحصل على:

$$MaxZ_2 = -x_1 - x_2 - 1$$

وبجمع دالة المقام مع دالة البسط نحصل على النموذج الآتي:

$$MaxZ^* = 2x_1 + 3x_2$$

$$S.t:$$

$$2x_1 + x_2 \le 50$$

$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0$$

وبتحويل متراجحة القيد إلى معادلة وإضافة شروط اللاسلبية لـ كون – توكر سينتج لدينا:

$$MaxZ^* = 2x_1 + 3x_2$$

$$S.t:\ 2x_1 + x_2 + x_3^2 - 50 = 0$$

$$-x_1 + x_4^2 = 0$$

$$-x_2 + x_5^2 = 0$$

$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0$$

وتكون دالة لاغرانج من الشكل:

$$L(x,\lambda) = 2x_1 + 3x_2 - \lambda_1\left(2x_1 + x_2 + x_3^2 - 50\right) - \lambda_2\left(-x_1 + x_4^2\right) - \lambda_3\left(-x_2 + x_5^2\right)$$

حيث $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ مضاريب لاغرانج.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 3 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 3 \end{array}\right\} \qquad (1.1.1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = -2x_3\lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_4} = -2x_4\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_5} = -2x_5\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3\lambda_1 = 0 \\ x_4\lambda_2 = 0 \\ x_5\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad (1.1.2)$$

$$2x_1 + x_2 + x_3^2 = 50 \qquad (1.1.3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -\left(-x_1 + x_4^2\right) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_3} = -\left(-x_2 + x_5^2\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_4^2 \\ x_2 = x_5^2 \end{array}\right\} \qquad (1.1.4)$$

ومن المعادلة $(1.1.2)$ نحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 s_1 = 0 \\ \lambda_2 x_4^2 = 0 \\ \lambda_3 x_5^2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (1.1.5)$$

وبتعويض المعادلة $(1.1.4)$ في المعادلة $(1.1.5)$ نحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 s_1 = 0 \\ \lambda_2 x_1 = 0 \\ \lambda_3 x_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (1.1.6)$$

حيث أن متغيرات كل من $(1.1.6)$ تسمى بالمتغيرات المتتامة أي أن λ_1 متممة s_1 و λ_2 متممة x_1 و λ_3 متممة x_2 والعكس صحيح. من المعادلات $(1.1.1)$ و $(1.1.3)$ نحصل على:

$$\left.\begin{array}{r} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + s_1 = 50 \end{array}\right\} \qquad (1.1.7)$$

ولما كان عدد المتغيرات (6) وعدد المجاهيل (3) فلابد من تصفير (3) متغيرات من أجل الحصول على حل لهذه

المعادلات، ولما كان عدد معادلات$(1.1.6)$ هو (3) وعدد المتغيرات في كل معادلة هو (2) لذا فإن احتمالية التصفير لهذه المتغيرات هو $8 = 2^3$ والجدول $(1.1.1)$ الآتي يمثل عدد الطرائق الممكنة لتصفير المتغيرات:

	λ_1	λ_2	λ_3	x_1	x_2	s_1
1	0	0	0			
2	0	0		0		
3	0		0		0	
4	0			0	0	
5		0	0			0
6		0		0		0
7			0		0	0
8				0	0	0

الجدول$(1.1.1)$

وبحل المعادلات $(1.1.7)$ واستخدام الجدول$(1.1.1)$ سنحصل على الحل الأمثل الآتي:

$$x_1^* = 0 \ , \ x_2^* = 50$$

$$Max\, Z^* = 3.941$$

وهذا الحل مطابق لحل المسألة نفسها بطريقة السيمبلكس.[13]

2. تطوير طريقة لاغرانج لحل مسائل البرمجة الكسرية:

لاحظنا عند حلنا لمسائل البرمجة الكسرية الخطية بطريقة مضاريب لاغرانج في الفقرة السابقة ، أن الحل يستدعي في البداية تكوين دالة لاغرانج ثم إجراء اشتقاقات تفاضلية متعددة من أجل الحصول على مجموعة من المعادلات التي يمكن بواسطتها الوصول إلى حل أو مجموعة من الحلول يكون الحل الأمثل من ضمنها [13]، إلا أننا هنا سنحاول تطوير حل مسائل البرمجة الكسرية بطريقة لاغرانج حيث نستطيع أن نستخرج من اشتقاقات تفاضلية للحل مجموعة من القوانين والصيغ التي نستطيع بواسطتها التوصل مباشرة إلى مجموعة معادلات بحلها يمكن الوصول الى الحل دون الخوض بخطوات تشكيل دالة لاغرانج أو اشتقاقاتها المطولة وسنختزل كذلك طرق التصفير العديدة الممكنة لتصفير بعض المتغيرات من أجل الوصول إلى الحل الأمثل باحتمالات أقل ووقت أقل يساعد في ذلك الخاصية الخطية للبرمجة الكسرية وأسلوب المصفوفات.

لنفرض أنه لدينا نموذج البرمجة الكسرية الآتي(النموذج(1.1)) :

$$\left.\begin{aligned} &Max\, Z = \frac{CX + \alpha}{DX + \beta} \\ &S.t \ \ AX \le B \ \ , \ \ X \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

والذي يمكن تحويله باستخدام الخطوات السابقة إلى النموذج الآتي:

$$\left.\begin{aligned} &Max\, Z^* = CX \\ &S.t \ \ AX \le B \ \ , \ \ X \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

عند إضافة شروط اللاسلبية لـ كون – توكر وإضافة المتغيرات المهملة (X^*, X') حيث:

$$X_1 = X' = \left(x_{n+1}^2, \cdots, x_{m+n}^2\right)'$$
$$X_2 = X^* = \left(x_{n+m+1}^2, \cdots, x_{m+2n}^2\right)'$$

سيتحول النموذج (2.2) إلى الشكل:

$$\left.\begin{aligned} &Max\, Z^* = CX \\ &AX + I_m X' = B \\ &-X + I_n X^* = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

وبذلك ستكون دالة لاغرانج من الشكل:

$$L(x, \lambda, \lambda^*) = CX - \lambda(AX + I_m X_1 - B) - \lambda^*(-X + I_n X_2)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x} = C - \lambda A + \lambda^* I_n \\ &\lambda A - \lambda^* I_n = C \\ &A'\lambda' - I_n \lambda^* = C' \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(AX + I_m X_1 - B) = 0 \\ &AX + I_m X_1 = B \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

لنفرض أن $(X' = S)$ حيث: $S = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ وبذلك ستكون المعادلات التي نحصل عليها من اشتقاق دالة لاغرانج كالآتي:

$$A'\lambda' - I_n (\lambda^*)' = C' \qquad (2.6)$$
$$AX + I_m S = B \qquad (2.7)$$

وعليه فعند حل أية مسألة برمجة كسرية، لن يتم تكوين دالة لاغرانج وإجراء الاشتقاقات عليها، إنما يمكن الحصول على المعادلات المستخرجة مباشرة من اشتقاق دالة لاغرانج باستخدام المعادلتين (2.6) و (2.7) .

مثال (2.1)

$$Max\, Z = \frac{3x_1 + 4x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 1}$$
$$2x_1 + x_2 \le 50$$
$$x_1 \ge 0 \;,\; x_2 \ge 0$$

يتم تحويل المسألة كما مر سابقاً وفق خطوات حل مسائل البرمجة الكسرية حيث ستكون المسألة بالشكل:

$$MaxZ^* = 2x_1 + 3x_2$$
$$S.t: 2x_1 + x_2 \le 50$$
$$x_1 \ge 0 \;,\; x_2 \ge 0$$

سنحاول الآن استخدام العلاقتين (2.6) و (2.7) التي توصلنا إليها من اشتقاق دالة لاغرانج وهي كالآتي:

$$A'\lambda' - I_n (\lambda^*)' = C'$$
$$AX + I_m S = B$$

حيث: $(n = 2 \;,\; m = 1) \Leftarrow C = [2 \;\; 3] \;,\; A = [2 \;\; 1]$ ، ولدينا $B = 50$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, C' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \lambda = (\lambda_1), (\lambda^*)' = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}, S = S_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_1 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (1) S_1 = 50$$

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_1 - \lambda_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + S_1 &= 50 \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.1)$$

إن مجموعة المعادلات $(2.1.1)$ هي نفس المعادلات $(1.1.7)$ التي تم التوصل إليها سابقاً بعد تكوين دالة لاغرانج وإجراء الاشتقاقات العديدة، ولما كان عدد المتغيرات (6) وعدد المعادلات (3) لذا لابد من تصفير (3) متغيرات من أجل التمكن من حل هذه المعادلات، وطرق التصفير الممكنة للمتغيرات كما رأينا سابقاً هي:

$$2^{n+m} = 2^{2+1} = 2^3 = 8$$

في السابق تم حل طرق التصفير الممكنة للمتغيرات الثمانية ومنها تم التوصل إلى الحل الأمثل، لكن يمكن تقليص احتمالات التصفير إلى:

$$\binom{n+m}{m} - 1 = \binom{2+1}{1} - 1 = \binom{3}{1} - 1 = \frac{3!}{1! \times 2!} - 1 = 3 - 1 = 2$$

وبذلك فإن نسبة الحل بعد التقليص مقارنة مع الحل الأصلي هي: $2/8 \times 100 = 25\%$

إن احتمالية التصفير بشكل عام للجدول المختصر هي: $(n = 2 , m = 1)$

$$\text{I}) \; if \; i \le n \Rightarrow \lambda_1 = x_1 = s_{i-1} = 0$$

$$\text{II}) \; if \; i = n+1 \Rightarrow \lambda_1 = x_{i-1-j} = s_{i-1-j} = 0$$

$$j = \overline{1, m} \;\; , \;\; i = \overline{2, n}$$

وبذلك سيكون الجدول المختصر كالآتي:

	λ_1	λ_2	λ_3	x_2	x_1	s_1
1		0		0		0
2			0		0	0

وعند الحل وفق الجدول المختصر، فإن الحل الأمثل سيكون: $x_1^* = 0 \;,\; x_2^* = 50 \;,\; MaxZ^* = 3.941$

إن هذا الحل مطابق لحل المسألة نفسها بطريقة السمبلكس وكذلك مطابق للحل بطريقة لاغرانج قبل اختصار الحل المذكور، وقيم مضاريب لاغرانج هي: $\lambda_1 = 3 , \lambda_2 = 4$ وهذه القيم مطابقة للقيم المتتامة لقيم الظل في جدول طريقة السمبلكس.

من أجل بيان كفاءة الطريقة المطورة نذكر أمثلة توضيحية أخرى، لكننا سنكتفي بذكر عدد احتمالات التصفير لكل مثال بالطريقتين التقليدية والمطورة عند مقارنة النتائج والأمثلة التي نذكرها كالآتي:

مثال (2.2) :

$$Max\,Z = \frac{10x_1 + 3x_2 + 12}{2x_1 + 5x_2 + 10}$$

$$S.t:\ 6x_1 + x_2 \le 60$$
$$x_1 + 3x_2 \le 80$$
$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0$$

مثال (2.3) :

$$Max\,Z = \frac{4x_1 + 3x_2 + 5}{7x_1 + 2x_2 + 6}$$

$$S.t: 2x_1 + 5x_2 \le 55$$
$$8x_1 + 5x_2 \le 45$$
$$5x_1 + 6x_2 \le 33$$
$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0$$

مثال (2.4) :

$$Max\,Z = \frac{4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5}{2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6}$$

$$S.t: 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 60$$
$$8x_1 + 5x_2 - 7x_3 \le 20$$
$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0\ ,\ x_3 \ge 0$$

3. مناقشة النتائج:

3.1.إحصائية:

كانت حصيلة الحل لجميع الأمثلة السابقة بطريقة لاغرانج ولاغرانج المطورة ممثلة بالجدول الآتي:

المثال	عدد طرق تصفير المتغيرات قبل الاختصار	عدد طرق تصفير المتغيرات بعد الاختصار	نسبة عدد الطرق بعد التقليص
1	8	2	%25
2	16	5	%31
3	32	9	%28
4	32	9	%28

3.2.النتائج المستخلصة:

نذكر هنا أهم الملاحظات والاستنتاجات التي تم التوصل إليها من خلال حل مسائل البرمجة الكسرية بطريقة لاغرانج الاعتيادية وطريقة لاغرانج المطورة.

1. تم تطوير طريقة مضاريب لاغرانج التقليدية التي كانت تستخدم لحل مسائل البرمجة اللاخطية بحيث تم استخدام هذه الطريقة في هذا البحث لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية.

2. إن طريقة لاغرانج المطورة تتضمن صيغ رياضية بسيطة ولا تحتاج إلى الاشتقاقات التفاضلية الطويلة التي كانت تستخدم في طريقة لاغرانج التقليدية وأن قيم الظل الموجودة في جدول طريقة مضاريب لاغرانج المطورة هي نفس قيم الظل الموجودة في جدول السمبلكس.

3. إن تطوير طريقة لاغرانج ساعد في تقليل الزمن من خلال العمليات الحسابية وطرق التصفير بحيث أصبحت الطريقة المطورة تتضمن جدول طرق تصفير أقل ، يصل أحياناً إلى أقل من % 70 من جدول الحل الأصلي.

4. إن استخدام طريقة لاغرانج المطورة يتضمن حل معادلات آنية ولا يحتاج إلى استخدام خوارزمية تتطلب الكثير من الحسابات والجداول كما هو عليه في طريقة السمبلكس من أجل الوصول إلى الحل الأمثل.

5. أمكن تجزئة حل معادلات كل طريقة تصفير وارد في جدول طرق التصفير المختصرة إلى جزأين بحيث إذا كانت قيم الجزء الأول سالبة (في حالة Max) فلا داع إلى تكملة حل مجموعة معادلات الجزء الثاني وهذا يختزل الكثير من الحل.

6. برمجة طريقة لاغرانج وطريقة لاغرانج المطورة بلغة فيجوال بيسك الاصدار6، الامر الذي ساعد متخذ القرار في حل أي مشكلة يمكن صياغتها كمسألة برمجة كسرية وعرض متغيرات المسألة وجداول الحل لها بطريقة أكثر ترتيباً.

الاستنتاجات والتوصيات:

نوصي بإعداد حزم برمجية متخصصة لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية دون اللجوء لطريقة لاغرانج التقليدية وذلك باستخدام طريقة لاغرانج المطورة لأنها تتضمن صيغ رياضية بسيطة ولا تحتاج إلى الاشتقاقات التفاضلية الطويلة التي كانت تستخدم في طريقة لاغرانج التقليدية.

Reference:

1-DRIBATE, MOUHAMAD MAZIAD , Solving linear fractional programming problems (LFP) by Using denominator function restriction method and compare it with linear transformations method. Al-Baath University Journal, Volume 41, 2019.

2-TARAWNEH, MOUHAMAD. Introduction to operations research. First edition, Dar Al Masirah, Amman, Jordan. 2009.

3-AL-ALI, IBRAHIM MOUHAMAD. Introduction to Operations Research, Faculty of Economics, Tishreen University,. 2003.

4-ISMAIL, AHMAD ABDEL-JABBAR, Al-TAMIMI, MAGDA ABDEL-LATIF. Operations Research Computer applications. First edition, Dar Al-Manhaj for Publishing and Distribution, Amman, Jordan 2007.

5-SALEH, MOUHAMAD. The optimum Egyptian crop structure using non-linear fractional programming. Egyptian Information Technology Magazine, Volume VI, First Issue 2005.

6-FENG F., XIA Y. , A Recurrent Neural Network for Linear Fractional Programming with Bound Constraints, 2006.

7-HAMADY A.T. operations research an introduction seventh ed. Canada ,by Maxwell publishing company , 2004 .

8-LAI H.C. LEE J.C. and LIU J.C. Duality for fractional complex programming with generalized convexity, Journal of Nonlinear and Convex Analysis ,vol.2, no. 2, pp.175-191, 2001.
9-LIANG Z.A. HUANG H.X. and PPARDALOS P.M. Optimality conditions and duality for a class of nonlinear fractional programming problems, Journal of Optimization Theory and Applications vol.110, no. 3, 611-619. 2001.
10- Al-RAJHI. J. M. Decomposition Algorithm for Solving A Class of Bi-Criteria Multistage Transportation Problem With Case Study, IJIRSET, Vol. 2, Issue 9, September 2013.
11-BAST.H.Route Planning in Transportation Networks, arXiv.1504.05140v1 [cs.DS]20 Apr 2015.
12- HASAN .M.B & S.ACHARJEE , solving LFP by converting into a single LP , International Journal of Operation Research , VoL.8 , NO.3 , P.P.1-14 . 2011.
13-PANDION .P & M.JAYALAKSHMI , on solving linear fractional programming problems , Modern Applied Science , VoL.7 , NO:6 , P.P.90-100. 2013.
14-SHARMA.S.C & A.BANSAL, An Integer solution of fractional programming problem, Gen. Math. Notes , VoL.4 , NO.2 , P.P.1-9 . 2011.