مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (2) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (2) 2008

دراسة مسألة ثلاث جسيمات وفق نظرية الحقل الكمومي الفعال باستخدام طريقة مونت كارلو

الدكتور حسن سلمان*
الدكتور تيسير معلا *
سامر سعيد **

(تاريخ الإيداع 25 / 3 / 2008. قُبِل للنشر في 2008/5/19)

□ الملخّص □

يعنى البحث بدراسة سويات ايفيموف Efimov للهليوم $^{4}He_3$ (Trimer) ، تعكس هذه السويات خاصة عامة (Universal Characteristic) لتفاعل ثلاثة جسيمات عند الطاقات المنخفضة، حيث يكون طول التبعثر لجسيمين اكبر بكثير من مدى التفاعل .

النظرية الرياضية المستخدمة في هذه الدراسة هي نظرية الحقل الكمومي الفعال والتي تنص فيزيائيا على أنه لا يشترط معرفة فيزياء الطاقات العالية لدراسة فيزياء الطاقة المنخفضة ، و قد مكنتنا هذه النظرية على إزالة اللانهائيات وذلك بإدخال توابع إعادة التنظيم (renormalization) .

وقد أجرينا الحلول العددية للمعادلات التكاملية باستخدام طريقة مونت كارلو .

الكلمات المفتاحية: نظرية الحقل الكمومي الفعال – إعادة التنظيم – مونت كارلو– المتحول العشوائي– المعادلات التكاملية .

* أستاذ – قسم الفيزياء–كلية العلوم–جامعة تشرين–اللاذقية–سورية.
** أستاذ – قسم الفيزياء–كلية العلوم–جامعة تشرين–اللاذقية–سورية.
** طالب دراسات عليا(دكتوراه)– قسم الفيزياء–كلية العلوم–جامعة تشرين–اللاذقية–سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (2) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (2) 2008

Studying the Three-Body Problem in the Effective Quantum Field Theory by using the Monte Carlo Method

Dr. Hasan Salman*
Dr. Taiseir Moala *
Samer Sayid**

(Received 25 / 3 / 2008. Accepted 19/5/2008)

□ ABSTRACT □

This research is concerned with Efimov states of helium trimer $^4He_3$; these states have universal characteristics displaying the interaction of three bodies at low energy, where the scattering length is greater than the range of interaction. The mathematical theory used in this study is the effective quantum field theory, which physically says that we do not need to know the physics of high energy in order to study low energy physics. This theory enables us to get rid of the infinites by introducing the renormalization function. The numerical solution to integral equations has been carried out by using the Monte Carlo method.

Keywords: effective quantum field theory, renormalization, Monte Carlo method, random variable, integral equation.

*** Professor, Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
****Professor, Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
*****Postgraduate Student, Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

تقدم نظرية الحقل الكمومي الفعال (Effective Quantum Field Theory) طريقة منتظمة لبناء لاغرانج الحالة الفيزيائية غيرالمفهومة عند مقاس طاقي معين ، نستطيع مثلا بناء لاغرانج الحالة النووية[1] والتي تعد حالة طاقية منخفضة لتجمع من الهادرونات والتي تظهر عند المقاس النووي كجسيمات نقطية لا بنية داخلية لها أي أن الكواركات والغاليونات تظهر كحالات مرتبطة وهذا مصدر صعوبة اشتقاق الخصائص النووية انطلاقا من القوى الأساسية التي تصفها نظرية الكروموديناميك (QCD (Chromodynamic .

إن اشتقاق اللاغرانج المناسب للحالة النووية انطلاقا من لاغرانج الـ QCD يتطلب المعرفة الدقيقة لسلوك القوى الشديدة عند المسافات القصيرة أي عند الطاقات العالية وهذا ما يؤدي إلى مشكلة اللانهايات[2] ولحل هذه المشكلة تخبرنا نظرية الحقل الكمومي الفعال (النظرية الحديثة لإعادة التنظيم) إننا لسنا بحاجة إلى أن نعرف ماذا يحدث عند الطاقات العالية لفهم الفيزياء المنخفضة الطاقة[3] ويتم بناء لاغرانج الحالة الطاقية المنخفضة وفق أربع خطوات رئيسية :

أولا– نقل سلوك النظرية الأساس (هنا في الحالة النووية نظرية الـ QCD) في المنطقة المعروفة أي عند المسافات الطويلة إلى نظرية الحقل الكمومي الفعال .

ثانيا– إدخال حد القطع لاستبعاد حالات الاندفاع العالية والتي تكون حساسة إلى ديناميك المسافات القصيرة وغير مفهومة .

ثالثا– إضافة تفاعلات موضعية إلى الهاملتوني وذلك لتعديل التأثيرات عند المسافات القصيرة

رابعا– نقل كل التناظرات التي يحققها لاغرانج النظرية الأساس (underlying theory) إلى لاغرانج نظرية الحقل الكمومي الفعال .

إن إضافة المؤثرات الموضعية التي تحقق الخصائص التناظرية لتعديل التأثيرات عند المسافات القصيرة تكون مضروبة بثوابت ارتباط تابعة إلى حد القطع وبالتالي هذه الثوابت تحوي كل المضامين الفيزيائية ويحدد عدد هذه الثوابت الدقة التي نريدها في الحساب حيث يسمى الحد الأول وفق نظرية الحقل الكمومي الفعال بالحد المرشد (Leading order) والحد الثاني بالحد المرشد التالي (next to leading order) [4] .

تكمن قوة هذه الطريقة في استقلال القيم المحسوبة عن حد القطع وكذلك لا تتطلب المعرفة التفصيلية لشكل الكمون عند المسافات القصيرة والتي هي ربما ساحة لفيزياء جديدة غير معلومة فعند الطاقات العالية لا نعرف أين تعد نظرية الـ QCD غير كافية وربما نحتاج إلى نظرية الأوتار الفائقة لدراسة هذه الحالة فحد القطع يسمح لنا بدراسة الحالة دون اللجوء إلى نظرية جديدة [5].

سنستخدم هنا نظرية الحقل الكمومي الفعال لحل مسألة ثلاثة جسيمات بتفاعلات قصيرة المدى عند الطاقات المنخفضة ، وبشكل عام فإن مدى حالات الارتباط المشكلة من A جسيم بكتل m هو من مرتبة مدى التفاعل R وبشكل مشابه عوامل التبعثر (طول التبعثر لجسيمين a_2 و المدى الفعال لجسيمين r_2) هي من مرتبة R نفسها ،ولكن هناك حالات ارتباط سطحية (Shallow bound state) مداها اكبر بكثير من مدى التفاعل وهي ذات اهتمام خاص في الفيزياء النووية حيث أن الديترون له نصف قطر نووي كبير مقارنة مع طول موجة كومبتون للبيون [6]وكذلك في الفيزياء الجزيئية[7] حيث للهيليوم $^4He_3$ طاقة ارتباط مداها اكبر من مدى التفاعل بين الذرات. الفكرة الأساسية من نظرية الحقل الكمومي الفعال هي أن هذه الأنظمة الفيزيائية ذات الطاقة المنخفضة حساسة إلى البنية

التفصيلية لجهد التفاعل غير المعروف عند المسافات القصيرة لذلك ندخل حد القطع Λ الذي بوساطته ندخل التأثيرات الموضعية لفيزياء المسافات القصيرة [8] .

سنعالج في هذه الدراسة مشكلة ثلاثة بوزونات ($^4He_3$) عند الطاقات المنخفضة مثل الذرات الباردة (S –Wave bound sates) والتي لها طول التبعثر $a\approx140A^0$ اكبر بكثير من مدى التفاعل $r_s\approx104A^0$ والتي عالجها كل من Bedaque, Hammer, and Kolck [9] بلغة المسارات التكاملية (Path Integrales) وسنتبع طريقا آخر حيث سنصف الجهد بسلسلة من جداءات توابع دلتا ونزيل اللانهائيات بإدخال توابع التنظيم المعتمدة على حد القطع، وقد توصلنا إلى النتائج نفسها التي توصل إليها الفريق السابق .

خطة هذا البحث هي بالشكل التالي (عائدة إلى طريقة Wilson [10,11]) : سنكتب أولا معادلة الارتباط لثلاث جسيمات في التمثيل الاحداثي ونتحول منها إلى التمثيل الاندفاعي وندخل توابع التنظيم بدلا من توابع دلتا، ومن ثم ننشر هذه المعادلة وفق مناطق الاندفاع المنخفض و المتوسط والعالي ، ومن ثم بواسطة التحليل البعدي (Dimensional Analysis) نميز بين الحدود المرشدة LO والحدود المرشدة الأولى NLO وأخيرا سنقدم الطريقة العددية المستخدمة لحل هذه المعادلات ونعرض النتائج التي توصلنا إليها .

هدف البحث وأهميته:

يهدف هذا البحث إلى ايجاد سويات Efimov للهليوم ($^4He_3$) حيث يساعدنا ذلك في فهم سلوك هذه الذرات عند درجات حرارة منخفضة .

مواد البحث وطرائقه:

استخدام نظرية الحقل الكمومي الفعال ونظرية إعادة الاستنظام ، وطريقة مونت كارلو لإجراء الحل العددي للمعادلات التكاملية .

معادلة الارتباط لثلاثة جسيمات :

إن شكل كمون التفاعل غير مهم في نظرية الحقل الكمومي الفعال، وذلك لان النتائج ستكون مستقلة عن الشكل الرياضي لهذا التفاعل، لذلك سنختار الشكل الرياضي الأبسط لإجراء الحسابات تكتب معادلة الارتباط لثلاثة جيسمات بوزونية متطابقة بالشكل :

$$\begin{aligned}
-B_3\,\psi(\vec{r_1},\vec{r_2},\vec{r_3}) \;=\; & \Big[-\nabla_1^2-\nabla_2^2-\nabla_3^2 \\
& -g_2\,\delta^3(\vec{r_1}-\vec{r_2})-g_2\,\delta^3(\vec{r_2}-\vec{r_3})-g_2\,\delta^3(\vec{r_3}-\vec{r_1}) \\
& +g_3\,\delta^3(\vec{r_1}-\vec{r_2})\,\delta^3(\vec{r_2}-\vec{r_3})\Big]\;\psi(\vec{r_1},\vec{r_2},\vec{r_3}).
\end{aligned} \qquad (1)$$

حيث B_3 طاقة الارتباط لثلاثة جسيمات و g_2 g_3 ثوابت تعبر عن شدة التفاعل لثلاثة جسيمات وجسيمين على التوالي،نسمي هذا التفاعل بالتفاعل النقطي وسنبين أن هذا التفاعل النقطي لثلاثة جسيمات والمعبر عنه بجداء تابعي دلتا هام في إزالة اعتماد النتائج على قيم حد القطع Λ .

العناصر المصفوفية لتفاعل جسيمين هي :

$$\langle \vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3} \,|\, V_{12} \,|\, \vec{r_1}', \vec{r_2}', \vec{r_3}' \rangle = \langle \vec{r_1}, \vec{r_2} \,|\, V_{12} \,|\, \vec{r_1}', \vec{r_2}' \rangle \, \delta^3(\vec{r_3} - \vec{r_3}') \tag{2}$$

حيث v_{12} كمون التفاعل بين الجسيمين 1و2 و نحصل على النتائج نفسها من اجل v_{13} كمون التفاعل بين الجسيمين 1,3 ,v_{23} كمون التفاعل بين الجسيمين 2,3 .

يكتب العنصر المصفوفي في الطرف الايمن من المعادلة بالشكل :

$$\langle \vec{r_1}, \vec{r_2} \,|\, V_{12} \,|\, \vec{r_1}', \vec{r_2}' \rangle = -g_2 \, \delta^3(\vec{r_1} - \vec{r_2}) \, \delta^3(\vec{r_1}' - \vec{r_2}') \, \delta^3 \left(\frac{\vec{r_1} + \vec{r_2}}{2} - \frac{\vec{r_1}' + \vec{r_2}'}{2} \right) \tag{3}$$

يمكن فهم مشكلة اللانهائيات التي تظهر هنا بكتابة معادلة شرودينغر لجسيمين في التمثيل الاحداثي وفي إحداثيات مركز الجملة :

$$-2 \nabla^2 \psi(\vec{r}) - g_2 \, \delta^3(\vec{r}) \, \psi(\vec{r}) = -B_2 \, \psi(\vec{r}) \tag{4}$$

وفي التمثيل الاندفاعي :

$$2 p^2 \phi(\vec{p}) - g_2 \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \phi(\vec{q}) = -B_2 \, \phi(\vec{p}) \tag{5}$$

بحل هذه المعادلة جبريا من اجل g_2 نجد :

$$\frac{1}{g_2} = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2q^2 + B_2} = \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi^2} \frac{q^2}{2q^2 + B_2} \tag{6}$$

هذا التكامل متباعد وبالتالي فهو يصح من أجل أية قيمة إلى B_2 ووفق نظرية الحقل الكمومي الفعال فان هذا التباعد ينشا من الحالات ذات الاندفاع العالية ولاستبعاد هذه الحالات ندخل حد القطع وفق تابع التنظيم التالي[11] :

$$U_2(\vec{p}) = \left(1 + h_2 \frac{p^2}{\Lambda^2} \right) \exp(-p^2/\Lambda^2) \tag{7}$$

الرمز السفلي هنا للإشارة إلى جسيمين ، نستبدل تابع دلتا بتابع التنظيم هذا ومنه فان القيمة لم تعد محددة بنقطة كما في تابع دلتا وإنما لها توزع غوصي .

وكذلك ندخل تابع التنظيم لوصف تفاعل ثلاثة جسيمات بالشكل :

$$U_3(\vec{p}) \;\; = \;\; \left(1 + h_3 \frac{p^2}{\Lambda^2} \right) \exp(-p^2/\Lambda^2) \tag{8}$$

العنصر المصفوفي في التمثيل الاحداثي لتفاعل ثلاث جسيمات له الشكل التالي :

$$\langle \vec{r_i} \,|\, V_{123} \,|\, \vec{r_j}' \rangle \;=\; g_3 \int d^3\vec{r_c} \prod_{i,j=1}^{3} \delta^3(\vec{r_i} - \vec{r_c}) \delta^3(\vec{r_j}' - \vec{r_c})$$

(9)

اختير هذا الشكل بحيث إن :

$$\begin{aligned}
\langle \vec{r_i} \,|\, V_{123} \,|\psi\rangle \;&=\; \int d^3\vec{r_j}'\langle \vec{r_i} \,|\, V_{123} \,|\, \vec{r_j}'\rangle\langle \vec{r_j}'|\psi\rangle \\
&=\; g_3 \int d^3\vec{r_j}'\, d^3\vec{r_c} \left[\prod_{i,j=1}^{3} \delta^3(\vec{r_i}-\vec{r_c})\delta^3(\vec{r_j}'-\vec{r_c})\right] \psi(\vec{r_1}',\vec{r_2}',\vec{r_3}') \\
&=\; g_3 \int d^3\vec{r_c}\; \delta^3(\vec{r_1}-\vec{r_c})\delta^3(\vec{r_2}-\vec{r_c})\delta^3(\vec{r_3}-\vec{r_c})\psi(\vec{r_c},\vec{r_c},\vec{r_c}) \\
&=\; g_3\, \delta^3(\vec{r_1}-\vec{r_2})\delta^3(\vec{r_2}-\vec{r_3})\psi(\vec{r_1},\vec{r_2},\vec{r_3}).
\end{aligned} \tag{10}$$

العناصر المصفوفية وفق توابع التنظيم للتفاعلات الثلاثية والثنائية هي :

$$\langle \vec{r_i} \,|\, V_{123} \,|\, \vec{r_j}'\rangle \;=\; g_3 \int d^3\vec{r_c} \prod_{i,j=1}^{3} \tilde{U}_3(\vec{r_i}-\vec{r_c})\tilde{U}_3(\vec{r_j}'-\vec{r_c}) \tag{11}$$

$$\langle \vec{r_1},\vec{r_2} \,|\, V_{12} \,|\, \vec{r_1}',\vec{r_2}'\rangle = -g_2\, \tilde{U}_2(\vec{r_1}-\vec{r_2})\, \tilde{U}_2(\vec{r_1}'-\vec{r_2}')\, \delta^3\left(\frac{\vec{r_1}+\vec{r_2}}{2}-\frac{\vec{r_1}'+\vec{r_2}'}{2}\right) \tag{12}$$

والعناصر المصفوفية في التمثيل الاندفاعي :

$$\begin{aligned}
\langle \vec{p_i} \,|\, V_{12} \,|\, \vec{q_j}\rangle \;&=\; \int d^3\vec{r_i}\, d^3\vec{r_j}'\langle \vec{p_i}|\vec{r_i}\rangle\langle \vec{r_i} \,|\, V_{12} \,|\, \vec{r_j}'\rangle\langle \vec{r_j}'|\vec{q_j}\rangle \\
&=\; -g_2 \int d^3\vec{r_i}\, d^3\vec{r_j}' \exp(-i\vec{p_i}\cdot\vec{r_i}) \exp(i\vec{q_j}\cdot\vec{r_j}')\tilde{U}_2(\vec{r_1}-\vec{r_2}) \\
&\qquad \times\tilde{U}_2(\vec{r_1}'-\vec{r_2}')\delta^3\left(\frac{\vec{r_1}+\vec{r_2}}{2}-\frac{\vec{r_1}'+\vec{r_2}'}{2}\right)\delta^3(\vec{r_3}-\vec{r_3}')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\; -g_2\,(2\pi)^6\, U_2\left(\tfrac{1}{2}\vec{q_2}-\tfrac{1}{2}\vec{q_1}\right) U_2\left(\tfrac{1}{2}\vec{p_1}-\tfrac{1}{2}\vec{p_2}\right)\delta^3(-\vec{p_3}+\vec{q_3}) \\
&\quad \times\delta^3(\vec{q_1}+\vec{q_2}-\vec{p_1}-\vec{p_2}),
\end{aligned} \tag{13}$$

حيث $\vec{r}_i = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)\ ,\quad \vec{p}_i = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$

تستخدم هذه العلاقة لحساب :

$$\langle \vec{p_i}|V_{12}|\phi\rangle \;=\; \int \frac{d^3\vec{q_j}}{(2\pi)^9}\langle \vec{p_i}|V_{12}|\vec{q_j}\rangle\langle \vec{q_j}|\phi\rangle$$

(14)

$$= -g_2\, U_2\left(\tfrac{1}{2}\vec{p_1}-\tfrac{1}{2}\vec{p_2}\right)\int\frac{d^3\vec{q_1}}{(2\pi)^3}U_2\left(\tfrac{1}{2}\vec{p_1}+\tfrac{1}{2}\vec{p_2}-\vec{q_1}\right)$$
$$\times\phi(\vec{q_1},\vec{p_1}+\vec{p_2}-\vec{q_1},\vec{p_3}).$$

وبمـا أننـا نتعامـل مـع بوزونـات وفـي

إحداثيات مركز الجملة فان : $\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3=\mathbf{0}$ وكذلك

$$\phi(\vec{q_1},\vec{p_1}+\vec{p_2}-\vec{q_1},\vec{p_3})=\phi(\vec{q_1},\vec{p_3},\vec{p_1}+\vec{p_2}-\vec{q_1})$$

ومنه :

$$\langle\vec{p_i}|V_{12}|\phi\rangle = -g_2\, U_2\left(\tfrac{1}{2}\vec{p_1}-\tfrac{1}{2}\vec{p_2}\right)\int\frac{d^3\vec{q_1}}{(2\pi)^3}U_2\left(\vec{q_1}+\tfrac{1}{2}\vec{p_3}\right)\phi(\vec{q_1},\vec{p_3},-\vec{q_1}-\vec{p_3}) \qquad (15)$$

بفرض أن:

$$\Phi(\vec{p})\equiv\int\frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}U_2(\vec{q}+\tfrac{1}{2}\vec{p})\,\phi(\vec{q},\vec{p},-\vec{q}-\vec{p}). \qquad (16)$$

المعادلة (15) تكتب بالشكل :

$$\langle\vec{p_i}|V_{12}|\phi\rangle = -g_2\, U_2\left(\tfrac{1}{2}\vec{p_1}-\tfrac{1}{2}\vec{p_2}\right)\Phi(\vec{p_3}), \qquad (17)$$

و بالأسلوب نفسه نستنتج العناصر المصفوفية التالية :

$$\langle\vec{p_i}|V_{23}|\phi\rangle = -g_2\, U_2\left(\tfrac{1}{2}\vec{p_2}-\tfrac{1}{2}\vec{p_3}\right)\Phi(\vec{p_1}) = -g_2\, U_2\left(\vec{p_2}+\tfrac{1}{2}\vec{p_1}\right)\Phi(\vec{p_1})$$

$$\langle\vec{p_i}|V_{31}|\phi\rangle = -g_2\, U_2\left(\tfrac{1}{2}\vec{p_3}-\tfrac{1}{2}\vec{p_1}\right)\Phi(\vec{p_2}) = -g_2\, U_2\left(\vec{p_1}+\tfrac{1}{2}\vec{p_2}\right)\Phi(\vec{p_2}) \qquad (18)$$

وكذلك :

$$\begin{aligned}\langle\vec{p_i}\,|\,V_{123}\,|\,\vec{q_j}\rangle &= \int d^3\vec{r_i}\,d^3\vec{r_j}'<\vec{p_i}|\vec{r_i}><\vec{r_i}\,|\,V_{123}\,|\,\vec{r_j}'><\vec{r_j}'|\vec{q_j}>\\ &= g_3\int d^3\vec{r_i}\,d^3\vec{r_j}'\exp(-i\vec{p_i}\cdot\vec{r_i})\exp(i\vec{q_j}\cdot\vec{r_j}')\\ &\quad\times\int d^3\vec{r_c}\prod_{i,j=1}^{3}\tilde{U}_3(\vec{r_i}-\vec{r_c})\,\tilde{U}_3(\vec{r_j}'-\vec{r_c})\end{aligned}$$

$$= g_3\,(2\pi)^3\,U_3(\vec{p_i})U_3(\vec{q_j})\delta^3(\vec{p_1}+\vec{p_2}+\vec{p_3}-\vec{q_1}-\vec{q_2}-\vec{q_3}). \qquad (19)$$

ومنه :

$$\begin{aligned}\langle \vec{p_i}|V_{123}|\phi\rangle &= \int \frac{d^3\vec{q_j}}{(2\pi)^9}\langle \vec{p_i}|V_{123}|\vec{q_j}\rangle\langle \vec{q_j}|\phi\rangle \\ &= g_3\, U_3(\vec{p_1})U_3(\vec{p_2})U_3(\vec{p_3})\int \frac{d^3\vec{q_1}}{(2\pi)^3}\frac{d^3\vec{q_2}}{(2\pi)^3}U_3(\vec{q_1})U_3(\vec{q_2}) \\ &\quad \times U_3\left(\sum_{i=1}^{3}\vec{p_i}-\vec{q_1}-\vec{q_2}\right)\phi\left(\vec{q_1},\vec{q_2},\sum_{i=1}^{3}\vec{p_i}-\vec{q_1}-\vec{q_2}\right) \\ &= g_3\, U_3(\vec{p_1})U_3(\vec{p_2})U_3(\vec{p_3})\int \frac{d^3\vec{q_1}}{(2\pi)^3}\frac{d^3\vec{q_2}}{(2\pi)^3}U_3(\vec{q_1})U_3(\vec{q_2}) \\ &\quad \times U_3(-\vec{q_1}-\vec{q_2})\phi(\vec{q_1},\vec{q_2},-\vec{q_1}-\vec{q_2}),\end{aligned} \tag{20}$$

استخدمنا في الخطوة الأخيرة $\sum_{I=1}^{3}\vec{P}=0$.

نعرف التابع :

$$\Phi_1 \equiv \int \frac{d^3\vec{q_1}}{(2\pi)^3}\frac{d^3\vec{q_2}}{(2\pi)^3}U_3(\vec{q_1})U_3(\vec{q_2})U_3(-\vec{q_1}-\vec{q_2})\phi(\vec{q_1},\vec{q_2},-\vec{q_1}-\vec{q_2}), \tag{21}$$

عندئذ تكتب المعادلة (20) بالشكل :

$$\langle \vec{p_i}|V_{123}|\phi\rangle = g_3\, U_3(\vec{p_1})U_3(\vec{p_2})U_3(\vec{p_3})\Phi_1. \tag{22}$$

ومنه فان معادلة الارتباط لثلاثة جسيمات بوزونية متطابقة في التمثيل الاندفاعي هي :

$$\begin{aligned}-B_3\,\phi(\vec{p_1},\vec{p_2},\vec{p_3}) &= (p_1^2+p_2^2+p_3^2)\phi(\vec{p_1},\vec{p_2},\vec{p_3}) - g_2\,U_2\left(\vec{p_2}+\tfrac{1}{2}\vec{p_1}\right)\Phi(\vec{p_1}) \\ &\quad - g_2\,U_2\left(\vec{p_1}+\tfrac{1}{2}\vec{p_2}\right)\Phi(\vec{p_2}) - g_2\,U_2\left(\tfrac{1}{2}\vec{p_1}-\tfrac{1}{2}\vec{p_2}\right)\Phi(\vec{p_3}) \\ &\quad + g_3\,U_3(\vec{p_1})U_3(\vec{p_2})U_3(\vec{p_3})\Phi_1.\end{aligned} \tag{23}$$

سنعبر عن معادلة الارتباط بدلالة التابع $\Phi(\vec{p})$بدلا من التابع $\phi(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)$ ولانجاز ذلك نحل المعادلة (23) من اجل $\phi(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)$ ونعوض في المعادلة (16) فنجد:

$$\left[1 - g_2 \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{U_2(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p})^2}{p^2+q^2+(\vec{p}+\vec{q})^2+B_3}\right]\Phi(\vec{p}) =$$
$$g_2 \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{U_2(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p})U_2(\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q})}{p^2+q^2+(\vec{p}+\vec{q})^2+B_3}\Phi(\vec{q})$$
$$+ g_2 \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{U_2(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p})U_2(\frac{1}{2}\vec{q}-\frac{1}{2}\vec{p})}{p^2+q^2+(\vec{p}+\vec{q})^2+B_3}\Phi(-\vec{p}-\vec{q}) \qquad (24)$$
$$- g_3 \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{U_2(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p})U_3(\vec{q})U_3(\vec{p})U_3(-\vec{p}-\vec{q})}{p^2+q^2+(\vec{p}+\vec{q})^2+B_3}\Phi_1.$$

بإجراء التبديل $\vec{q} \rightarrow \vec{q} - \frac{1}{2}\vec{p}$ يصبح الطرف اليسر من المعادلة السابقة :

$$\left[1 - g_2 \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{U_2(\vec{q})^2}{2q^2+\frac{3}{2}p^2+B_3}\right]\Phi(\vec{p}) = g_2\, D\left(-\frac{3}{2}p^2 - B_3\right)\Phi(\vec{p}) \qquad (25)$$

نعرف التابع D بالشكل :

$$D(E) = \frac{1}{g_2} - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{U_2(q)^2}{2q^2 - E} \qquad (26)$$

نجري التبديل $\vec{q} \rightarrow -\vec{q} - \vec{p}$ على التكامل الثاني في الطرف الأيمن من المعادلة (24) :

$$g_2 \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{U_2(-\vec{q}-\frac{1}{2}\vec{p})U_2(-\frac{1}{2}\vec{q}-\vec{p})}{2p^2+2q^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}+B_3}\Phi(\vec{q}) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{U_2(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p})U_2(\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q})}{p^2+q^2+(\vec{p}+\vec{q})^2+B_3}\Phi(\vec{q}) \qquad (27)$$

و له الشكل نفسه للحد الأول في الطرف الأيمن من المعادلة نفسها :

$$D_1(\vec{p}) \equiv \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{U_2(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p})U_3(\vec{q})U_3(\vec{p})U_3(-\vec{p}-\vec{q})}{2p^2+2q^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}+B_3} \qquad (28)$$

وتصبح معادلة الارتباط بالشكل :

$$\begin{aligned}\Phi(p) \;=\; & \frac{2}{D\left(-\frac{3}{2}p^2-B_3\right)}\int_0^\infty \frac{q^2dq}{4\pi^2}\int_{-1}^{1}dz\,\frac{U_2(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p})U_2(\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q})}{2p^2+2q^2+2pqz+B_3}\Phi(q)\\ & -\frac{g_3\,D_1(p)\,\Phi_1}{g_2\,D\left(-\frac{3}{2}p^2-B_3\right)},\end{aligned} \tag{29}$$

حيث Φ_1 هو :

$$\Phi_1=\frac{3g_2}{2\pi^2}\int_0^\infty dq\left[q^2D_1(q)\Phi(q)\right]-g_3\,D_2\Phi_1 \tag{30}$$

وكذلك :

$$D_2\equiv\frac{1}{8\pi^4}\int_0^\infty p^2dp\int_0^\infty q^2dq\int_{-1}^{1}dz\,\frac{U_3(q)^2U_3(p)^2U_3(\vec{q}+\vec{p})^2}{2p^2+2q^2+2pqz+B_3}, \tag{31}$$

حيث $\vec{p}\,\vec{q}=pqz$

المعادلة (29) هي معادلة الارتباط لثلاثة بوزونات متطابقة وفق توابع إعادة التنظيم U_2,U_3 وهي تابعة إلى حد القطع Λ .

غايتنا الآن نشر معادلة الارتباط باستخدام طريقة النشر المنظم (Perturbative Uniform Expansion Method) لتوضيح هذه الطريقة نأخذ كمثال التابع التالي [12] :

$$f(\eta,p,\Lambda)=\frac{1}{(p+\eta)(p+\Lambda)} \tag{32}$$

ننشر التابع وفق ثلاثة مناطق مختلفة المنطقة الأولى هي من اجل $p\sim\eta\ll\Lambda$ ومنه سننشر بقوى p/Λ , η/Λ سنرمز للتابع في هذه المنطقة بـ $f_l(p,\eta,\Lambda)$ باستخدام الرمز الدليلي نشيرإلى منطقة الاندفاع المنخفض ، المنطقة الثانية $p\sim\Lambda\gg\eta$ سننشر بقوى η/p , η/Λ ونشير له بالشكل $f_h(p,\eta,\Lambda)$ باستخدام الرمز الدليلي نشير إلى منطقة الاندفاع العالي ، والمنطقة الأخيرة هي $\Lambda\gg p\gg\eta$ وبالتالي سننشر بقوى η/p , η/Λ , p/Λ ونشير له بالشكل $f_d(p,\eta,\Lambda)$ للاشارة الى منطقة الاندفاع المتوسط .

ومنه فان نشر التابع وفق هذه المناطق الثلاث وبدقة $O(\eta^2/\Lambda^2)$ هو :

$$f_l(\eta,p,\Lambda)=\frac{1}{\Lambda(p+\eta)}\left[1-\frac{p}{\Lambda}+\frac{p^2}{\Lambda^2}\right]$$

$$f_h(\eta,p,\Lambda) = \frac{1}{p(p+\Lambda)}\left[1-\frac{\eta}{p}+\frac{\eta^2}{p^2}\right]$$

$$f_d(\eta,p,\Lambda) = \frac{1}{\Lambda}\left[1-\frac{p}{\Lambda}+\frac{p^2}{\Lambda^2}\right]\frac{1}{p}\left[1-\frac{\eta}{p}+\frac{\eta^2}{p^2}\right]$$

والخطأ في هذا النشر هو جداء التابع بالحد $\frac{\eta^3}{\Lambda^3}$:

$$f - f_l - f_h + f_d = \frac{\eta^3}{\Lambda^3(p+\eta)(p+\Lambda)} = \frac{\eta^3}{\Lambda^3}f(\eta,p,\Lambda)$$

وبما إننا نواجه في حل مشكلة ثلاث جسيمات معادلات تكاملية فإننا ننشر التكامل وفق الطريقة نفسها:

$$f(\eta,p,\Lambda) = \int_0^\infty dq\, u(\eta,p,q,\Lambda). \tag{33}$$

التابع داخل التكامل تابع لأربعة متحولات لذلك مناطق النشر موضحة في الجدول التالي [13] :

الجدول رقم (1) يبين مناطق النشر

u_1	$+$	$\eta \ll (p,q,\Lambda)$	$\eta/p, \eta/q, \eta/\Lambda$
u_2	$+$	$(\eta,q) \ll (p,\Lambda)$	$\eta/p, q/p, \eta/\Lambda, q/\Lambda$
u_3	$-$	$\eta \ll q \ll (p,\Lambda)$	$\eta/p, \eta/q, \eta/\Lambda, q/p, q/\Lambda$
u_4	$+$	$(\eta,p) \ll (q,\Lambda)$	$\eta/q, \eta/\Lambda, p/q, p/\Lambda$
u_5	$+$	$(\eta,p,q) \ll \Lambda$	$\eta/\Lambda, p/\Lambda, q/\Lambda$
u_6	$-$	$(\eta,p) \ll q \ll \Lambda$	$\eta/q, \eta/\Lambda, p/q, p/\Lambda, q/\Lambda$
u_7	$-$	$\eta \ll p \ll (q,\Lambda)$	$\eta/p, \eta/q, \eta/\Lambda, p/q, p/\Lambda$
u_8	$-$	$\eta \ll (p,q) \ll \Lambda$	$\eta/p, \eta/q, \eta/\Lambda, p/\Lambda, q/\Lambda$
u_9	$-$	$(\eta,q) \ll p \ll \Lambda$	$\eta/p, \eta/\Lambda, q/p, q/\Lambda, p/\Lambda$
u_{10}	$+$	$\eta \ll p \ll q \ll \Lambda$	$\eta/p, \eta/q, \eta/\Lambda, p/q, p/\Lambda, q/\Lambda$
u_{11}	$+$	$\eta \ll q \ll p \ll \Lambda$	$\eta/p, \eta/q, \eta/\Lambda, q/p, p/\Lambda, q/\Lambda$

الإشارات + – هنا بحيث التكاملات اللامتقاربة تفني بعضها ومنه فان نشر التكامل وفق المناطق الثلاث للاندفاع هي :

$$f_l(\eta,p,\Lambda) = \int_0^\infty dq\ [u_4(\eta,p,q,\Lambda) + u_5(\eta,p,q,\Lambda) - u_6(\eta,p,q,\Lambda)] \tag{34}$$

$$f_h(\eta,p,\Lambda) = \int^{\infty} dq \ [u_1(\eta,p,q,\Lambda) + u_2(\eta,p,q,\Lambda) - u_3(\eta,p,q,\Lambda)] \quad (35)$$

$$\begin{aligned} f_d(\eta,p,\Lambda) &= \int_0^{\infty} dq \ [u_7(\eta,p,q,\Lambda) + u_8(\eta,p,q,\Lambda) + u_9(\eta,p,q,\Lambda) \\ &- \ u_{10}(\eta,p,q,\Lambda) - u_{11}(\eta,p,q,\Lambda)] \, . \end{aligned} \quad (36)$$

هذه الطريقة في النشر مشروحة بالتفصيل في المرجع [13] .

المشكلة الأساسية في طريقة النشر هذه هي الحدود التي يجب إبقاؤها من اجل درجة معينة من الدقة فمثلا إذا أخذنا المنطقة $\eta\langle\langle p\langle\langle q\langle\langle\Lambda$ ونريد الدقة من المرتبة $O(\eta^2/\Lambda^2)$ نبقي الحدود η/q , p/Λ , η/Λ وكذلك نبقي الجداءات التي تختزل إلى المراتب الأولى مثلا , $(\eta/p)(p/q)=(\eta/q)$ $(\eta/p)(p/q)(q/\Lambda)=(q/\Lambda)$ ولكن ماذا عن الحدود مثل (η/p) (q/Λ) لإيجاد مرتبة هذا الحد نوجد القيمة الأصغرية ضمن منطقة النشر ونقارن بعدئذ مع الدرجة المطلوبة للنشر ، على سبيل المثال الحد (η/p) (q/Λ) تنتج القيمة الأصغرية له بوضع p=q ويختزل بالتالي إلى η/Λ وهي مقبولة وفق النشر $O(\eta^2/\Lambda^2)$.

نشر معادلة الارتباط وفق طريقة النشر المنظم :

نقوم الآن بنشر معادلة الارتباط (29) وفق المناطق الثلاث وقبل القيام بذلك ندخل المتحولات التالية:

$$\eta_2 \equiv \sqrt{B_2},$$

وكذلك :

$$\eta_3 \equiv \sqrt{B_3}.$$

$$G_2 \equiv \Lambda g_2,$$

$$\delta \equiv \frac{G_3\,\Phi_1}{\Lambda}.$$

$$G_3 \equiv \Lambda^4 g_3.$$

$$f(\eta_2,\eta_3,p,\Lambda) \equiv (p^2+\eta_3^2-\eta_2^2)\Phi(p).$$

نقوم بهذه التعديلات لجعل المعادلات تظهر بشكل متجانس ومركبة من كميات منفصلة بحيث نستطيع نشر كل حد على حدى وإضافتهم بعد ذلك إلى المعادلة الأصلية .

معادلة الارتباط (29) تصبح بالشكل:

$$\begin{aligned} f(\eta_2,\eta_3,p,\Lambda) &= \frac{p^2+\eta_3^2-\eta_2^2}{2\pi^2 D\left(-\eta_3^2-\frac{3}{2}p^2\right)} \int_0^{\infty} dq \left[\frac{q^2}{q^2+\eta_3^2-\eta_2^2} \right. \\ &\left. \times \int_{-1}^{1} dz \, \frac{U_2\left(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p}\right) U_2\left(\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}\right)}{\eta_3^2+2p^2+2q^2+2pqz} f(\eta_2,\eta_3,q,\Lambda)\right] \\ &- \delta \, \frac{(p^2+\eta_3^2-\eta_2^2)D_1(p)}{G_2\Lambda^2 D\left(-\eta_3^2-\frac{3}{2}p^2\right)}. \end{aligned}$$

(37)

وبعد نشر هذه المعادلة سنميز بين الحدود المرشدة (Leading order) والحدود المرشدة التالية -Next –to) (leading order لذلك سنرمز إلى درجة التقريب بالرمز η حيث $O((\eta/\Lambda)^{\eta})$ فالتابع D(P) مثلا سينشر في المنطقة الأولى وفق التقريب $O((\eta/\Lambda)^{1})$ سيرمز له بـ $D_{1L}(p)$ والتابع $D_{1h0}(p)$ هو الجزء O(1) من التابع $D_1(p)$ في المنطقة الثانية $\eta \langle\langle p \approx \Lambda$

وبما أن الثوابت ليست تابعة إلى p فإننا سنرمز لها وفق مناطق النشر بدرجة التقريب فقط (n) مثلا δ_n و G_{2n} .

نبدأ الآن في نشر كل من مركبات معادلة الارتباط (37) $\delta, G_2, D(-\eta_3^2-\frac{3}{2}p^2), D_1(p)$ الثابت G ينشر وفق الشكل :

$$G_{2,0} = \frac{128\sqrt{2}\,\pi^{3/2}}{3h_2^2+8h_2+16},$$

$$G_{2,1} = \frac{2048\sqrt{2}\,\pi^2}{(3h_2^2+8h_2+16)^2}\left(\frac{\eta}{\Lambda}\right). \tag{38}$$

<u>ننشر التابع D(p) :</u>

$$D\left(-\eta_3^2-\tfrac{3}{2}p^2\right) = \frac{\frac{3}{2}p^2+\eta_3^2-\eta_2^2}{2\pi^2}\int_0^\infty dq\,\frac{q^2\,U_2(q)^2}{(2q^2+\eta_2^2)\left(2q^2+\frac{3}{2}p^2+\eta_3^2\right)}. \tag{39}$$

والذي له الشكل التالي $\int u(\eta_2,\eta_3,p,q,\Lambda)\,dq$ حيث :

$$u(\eta_2,\eta_3,p,q,\Lambda) = \frac{q^2\left(\frac{3}{2}p^2+\eta_3^2-\eta_2^2\right)U_2(q)^2}{2\pi^2\,(2q^2+\eta_2^2)\left(2q^2+\frac{3}{2}p^2+\eta_3^2\right)}. \tag{40}$$

نشر هذا التابع وفق المناطق الإحدى عشرة:

$$u_1 = \frac{3p^2}{8\pi^2\left(2q^2+\frac{3}{2}p^2\right)}U_2(q)^2,$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{q^2}{2\pi^2\left(2q^2+\eta_2^2\right)}, \\
u_3 &= \frac{1}{4\pi^2}, \\
u_4 &= \frac{1}{8\pi^2 q^2}\left(\frac{3}{2}p^2+\eta_3^2-\eta_2^2\right)U_2(q)^2, \\
u_5 &= \frac{q^2\,\left(\frac{3}{2}p^2+\eta_3^2-\eta_2^2\right)}{2\pi^2\left(2q^2+\eta_2^2\right)\left(2q^2+\frac{3}{2}p^2+\eta_3^2\right)}, \\
u_6 &= \frac{\frac{3}{2}p^2+\eta_3^2-\eta_2^2}{8\pi^2 q^2}, \\
u_7 &= \frac{3p^2}{16\pi^2 q^2}\,U_2(q)^2, \\
u_8 &= \frac{3p^2}{8\pi^2\left(2q^2+\frac{3}{2}p^2\right)}, \\
u_9 &= \frac{q^2}{2\pi^2\left(2q^2+\eta_2^2\right)}, \\
u_{10} &= \frac{3p^2}{16\pi^2 q^2}, \\
u_{11} &= \frac{1}{4\pi^2}.
\end{aligned} \tag{41}$$

ومنه فان التابع D يكتب وفق المناطق الثلاث وفق المعادلات(34,35,36) :

$$\begin{aligned}
D_l &= \int_0^\infty dq\ \left[u_4+u_5-u_6\right], \\
D_d &= \int_0^\infty dq\ \left[u_7+u_8+u_9-u_{10}-u_{11}\right], \\
D_h &= \int_0^\infty dq\ \left[u_1+u_2-u_3\right].
\end{aligned} \tag{42}$$

يجب علينا الآن أن نميز بين الحدود LO والحدود NLO وباستخدام الرموز والقواعد المشروحة سابقا :

$$
\begin{aligned}
D_{l0}(\eta_2, \eta_3, p) &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dq\, \frac{q^2\left(\frac{3}{2}p^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2\right)}{(2q^2 + \eta_2^2)\left(2q^2 + \frac{3}{2}p^2 + \eta_3^2\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{3}{2}p^2 + \eta_3^2} - \eta_2}{8\sqrt{2}\,\pi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{l1}(\eta_2, \eta_3, p, \Lambda) &= \frac{\frac{3}{2}p^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{dq}{q^2}\left[U_2(q)^2 - 1\right] \\
&= \left(\frac{h_2^2 + 8h_2 - 16}{64\sqrt{2}\pi^{3/2}}\right)\left(\frac{\frac{3}{2}p^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2}{\Lambda}\right) \\
D_{d0}(p) &= \frac{3p^2}{8\pi^2}\int_0^\infty dq\, \frac{1}{2q^2 + \frac{3}{2}p^2} \\
&= \frac{\sqrt{3}\,p}{16\pi} \\
D_{d1}(\eta_2, p, \Lambda) &= \int_0^\infty dq\left[\frac{3p^2}{16\pi^2 q^2}\left(U_2(q)^2 - 1\right) + \left(\frac{q^2}{2\pi^2\left(2q^2 + \eta_2^2\right)} - \frac{1}{4\pi^2}\right)\right] \\
&= -\frac{\eta_2}{8\sqrt{2}\pi} + \frac{3\left(h_2^2 + 8h_2 - 16\right)p^2}{128\sqrt{2}\,\pi^{3/2}\,\Lambda}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{h1}(\eta_2) &= \int_0^\infty dq\left[\frac{q^2}{2\pi^2\left(2q^2 + \eta_2^2\right)} - \frac{1}{4\pi^2}\right] \\
&= -\frac{\eta_2}{8\sqrt{2}\,\pi}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

<u>ننشر التابع $D_1(P)$</u>

حيث التابع u هنا :

$$
u(\eta_3, p, q, \Lambda) = \frac{q^2}{4\pi^2}\int_{-1}^{1} dz\, \frac{U_2(\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{p})U_3(q)U_3(p)U_3(\vec{p} + \vec{q})}{2p^2 + 2q^2 + 2pqz + \eta_3^2}, \tag{44}
$$

ومنه :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{q^2}{4\pi^2}\int_{-1}^{1} dz\, \frac{U_2(\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{p})U_3(q)U_3(p)U_3(\vec{p} + \vec{q})}{2p^2 + 2q^2 + 2pqz}, \\
u_2 &= \frac{q^2}{4\pi^2 p^2}\, U_3(p)^2\, U_2(p/2), \\
u_3 &= \frac{q^2}{4\pi^2 p^2}\, U_3(p)^2\, U_2(p/2), \\
u_4 &= \frac{1}{\ }\, U(q)^2\, U(q)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_9 &= \frac{q^2}{4\pi^2 p^2}, \\
u_{10} &= \frac{1}{4\pi^2}, \\
u_{11} &= \frac{q^2}{4\pi^2 p^2}.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

الحدود المرشدة LO والحدود المرشدة التالية NLO لهذا الحد هي :

$$
\begin{aligned}
D_{1l0}(\Lambda) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty dq\, U_3(q)^2\, U_2(q) \\
&= \frac{\Lambda\left(6\left(h_3^2+4h_3+12\right)+h_2\left(5h_3^2+12h_3+12\right)\right)}{576\sqrt{3}\,\pi^{3/2}}, \\
D_{1l1}(\eta_3,p) &= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty dq\ \left[\frac{q}{p}\ln\left(\frac{\eta_3^2+2p^2+2q^2+2pq}{\eta_3^2+2p^2+2q^2-2pq}\right)-2\right] \\
&= -\frac{\pi}{2}\sqrt{2\eta_3^2+3p^2}, \\
D_{1d0}(\Lambda) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty dq\, U_3(q)^2\, U_2(q) \\
&= \frac{\Lambda\left(6\left(h_3^2+4h_3+12\right)+h_2\left(5h_3^2+12h_3+12\right)\right)}{576\sqrt{3}\,\pi^{3/2}}, \\
D_{1d1}(p) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty dq\ \left[\frac{q}{2p}\ln\left(\frac{p^2+q^2+pq}{p^2+q^2-pq}\right)-1+\frac{q^2}{p^2}-\frac{q^2}{p^2}\right] \\
&= -\frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}p,
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{}\int_0^\infty dq\, q^2 \int^1 dz\, \frac{U_2(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p})U_3(q)U_3(p)U_3(\vec{p}+\vec{q})}{}
$$

(46)

نحن الآن جاهزون لنشر المعادلة (37) ، إذا أهملنا الجزء المتعلق بتفاعل ثلاثة جسيمات (سنعود إليه عند نشر المعادلة بشكل كامل) تكتب المعادلة السابقة بالشكل :

$$f(\eta_2,\eta_3,p,\Lambda)=\int_0^{\infty}dq\,Q(\eta_2,\eta_3,p,q,\Lambda)\,f(\eta_2,\eta_3,q,\Lambda), \tag{47}$$

حيث :

$$\begin{aligned} Q(\eta_2,\eta_3,p,q,\Lambda) &= \frac{q^2}{2\pi^2 D\left(-\eta_3^2-\frac{3}{2}p^2\right)}\left(\frac{p^2+\eta_3^2-\eta_2^2}{q^2+\eta_3^2-\eta_2^2}\right) \\ &\times\int_{-1}^{1}dz\frac{U_2\left(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p}\right)U_2\left(\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}\right)}{\eta_3^2+2p^2+2q^2+2pqz}. \end{aligned} \tag{48}$$

الغاية الأساسية هي نشر التابع في المعادلة (47) وفق مناطق النشر الثلاث :

$$f_l(p) = \int_0^{\infty}dq\,\left[Q_4\,f_h(q)+Q_5\,f_l(q)-Q_6\,f_d(q)\right] \tag{49}$$

$$f_d(p) = \int_0^{\infty}dq\,\left[Q_7\,f_h(q)+Q_8\,f_d(q)+Q_9\,f_l(q)-Q_{10}\,f_d(q)-Q_{11}\,f_d(q)\right] \tag{50}$$

$$f_h(p) = \int_0^{\infty}dq\,\left[Q_1\,f_h(q)+Q_2\,f_l(q)-Q_3\,f_d(q)\right] \tag{51}$$

التابع Q تم نشره وفق المناطق الإحدى عشر ،

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{p^2}{2\pi^2 D_{h0}(p,\Lambda)}\left(1-\frac{D_{h1}(\eta_2)}{D_{h0}(p,\Lambda)}\right)\int_{-1}^{1}dz\,\frac{U_2\left(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p}\right)U_2\left(\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}\right)}{2p^2+2q^2+2pqz} \\ Q_2 &= \frac{q^2}{2\pi^2(q^2+\eta_3^2-\eta_2^2)D_{h0}(p,\Lambda)}\left(1-\frac{D_{h1}(\eta_2)}{D_{h0}(p,\Lambda)}\right)U_2(p)\,U_2\left(p/2\right) \\ Q_3 &= \frac{1}{2\pi^2 D_{h0}(p,\Lambda)}\left(1-\frac{D_{h1}(\eta_2)}{D_{h0}(p,\Lambda)}\right)U_2(p)\,U_2\left(p/2\right) \\ Q_4 &= \frac{(p^2+\eta_3^2-\eta_2^2)}{2\pi^2 q^2 D_{l0}(\eta_2,\eta_3,p)}\left(1-\frac{D_{l1}(\eta_2,\eta_3,p,\Lambda)}{D_{l0}(\eta_2,\eta_3,p)}\right)U_2(q)\,U_2\left(q/2\right) \end{aligned} \tag{52}$$

يسمح لنا النشر السابق بنشر المعادلات التكاملية وفصل الحدود المرشدة LO والحدود المرشدة التالية NLO في المناطق الثلاث ، في منطقة الطاقة المنخفضة وبعد إدخال الحد المعبر عن تفاعل ثلاثة جسيمات لدينا المعادلة التالية :

$$\begin{aligned} f_l(p) &= \frac{p^2+\eta_3^2-\eta_2^2}{2\pi^2 D_{l0}(\eta_2,\eta_3,p)}\left(1-\frac{D_{l1}(\eta_2,\eta_3,p,\Lambda)}{D_{l0}(\eta_2,\eta_3,p)}\right)\int_0^\infty \frac{dq}{q^2}\left[U_2(q)U_2\left(q/2\right) f_h(q)\right. \\ &\left. + \frac{q^3}{2p(q^2+\eta_3^2-\eta_2^2)}\ln\left(\frac{\eta_3^2+2p^2+2q^2+2pq}{\eta_3^2+2p^2+2q^2-2pq}\right) f_l(q) - f_d(q)\right] \end{aligned}$$

$$-\ (\delta_0+\delta_1)\,\frac{(p^2+\eta_3^2-\eta_2^2)(D_{1l0}(\Lambda)+D_{1l1}(\eta_3,p))}{\Lambda^2\left(G_{2,0}+G_{2,1}\right)\left(D_{l0}(\eta_2,\eta_3,p)+D_{l1}(\eta_2,\eta_3,p,\Lambda)\right)} \qquad (53)$$

سنهتم في هذه الدراسة في الحدود المرشدة فقط حيث في هذه الحدود تكون قيم الطاقة مستقلة عن حد القطع بينما هي غير ذلك في الحدود المرشدة التالية:

نلجأ في نظرية الحقل الكمومي الفعال إلى التحليل البعدي لمعرفة تلك الحدود حيث إن التابع f_l غير معروف، لذلك سنقوم الآن باستنتاج الحدود من الدرجة $O(1)$(الحدود المرشدة)، الحد ما قبل التكامل في المعادلة (52) والذي يحوي النسبة D_{l1}/D_{l0} يسقط من المعادلة لأنه يقدم حدود من المرتبة η/Λ مقارنة مع $O(1)$ وبالأسلوب نفسه نناقش كل حد في المعادلة التكاملية لنحصل على المعادلة التالية :

$$f_{l0}(\eta_2,\eta_3,p) = \frac{1}{4\pi^2 D_{l0}(\eta_2,\eta_3,p)}\int_0^\infty dq\,\frac{q\,(p^2+\eta_3^2-\eta_2^2)}{p\,(q^2+\eta_3^2-\eta_2^2)} \times \ln\left(\frac{\eta_3^2+2p^2+2q^2+2pq}{\eta_3^2+2p^2+2q^2-2pq}\right) f_{l0}(\eta_2,\eta_3,q). \tag{54}$$

و باتباع الأسلوب نفسه نشتق المعادلات في مناطق الطاقات المتوسط والعالية :

$$f_{d0}(p) = \frac{p}{4\pi^2 D_{d0}(p)}\int_0^\infty \frac{dq}{q}\ln\left(\frac{p^2+q^2+pq}{p^2+q^2-pq}\right) f_{d0}(q) \tag{55}$$

$$f_{h0}(p,\Lambda) = \frac{p^2}{2\pi^2 D_{h0}(p,\Lambda)}\int_0^\infty dq\int_{-1}^1 dz\,\frac{U_2\left(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p}\right)U_2\left(\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}\right)}{2p^2+2q^2+2pqz} f_{h0}(q,\Lambda) - \delta_0\,\frac{3h_2^2+8h_2+16}{128\sqrt{2}\,\pi^{3/2}}\left(\frac{D_{1h0}(p,\Lambda)}{D_{h0}(p,\Lambda)}\right)\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right) \tag{56}$$

الحلول العـددية :

نقوم الآن بحل المعادلات التكاملية (56-55-54) لاستنتاج قيم طاقات الارتباط وسيكون الحل مزيجاً من الحلول التحليلية والحلول العددية ، المعادلة (54) يمكن حلها تحليليا بالشكل التالي :

$$\cos(\delta_0 \ln(\frac{p}{\Lambda}+\theta)) \tag{57}$$

أما الحلول العائدة إلى المعادلات التكاملية (55-53) يمكن إيجادها بالطرق العددية لتلك المعادلات وهي ترتبط بشكل أساسي مع الحلول في المعادلة (56) حيث من اجل $p \gg (\eta_2, \eta_3)$ التابع f_{l0} يقترب من التابع f_{d0} ومن اجل $p \ll \Lambda$ f_{h0} يقترب من f_{d0} ،هذه المتطلبات تشكل لدينا الشروط الحدية للحلول العددية ، لنفرض أولا أن قيم B_2,B_3 معروفة من اجل قيمة محددة لحد القطع Λ ومنه فإننا نملك المعلومات الكافية لحل المعادلة (53) هذا الحل يجب أن يكون له سلوك جيب التمام مثل f_{d0} من اجل الاندفاعات العالية، نستخدم هذه الحقيقة في إيجاد الحل في هذه المنطقة أي إيجاد الطور θ_{l0} ،و من اجل الحلول f_{h0} نرى من المعادلة التكاملية أن الحل يعتمد على العوامل Λ, δ وبما أن Λ معلوم فيمكن أن نختار قيمة إلى δ ونحل المعادلة ، سيكون للحل سلوك تابع جيب التمام في منطقة الاندفاع المنخفض بعامل طور هو θ_{h0} ، ومنه الشروط الحدية تصاغ بإيجاد الأطوار والتي ترتبط بالشكل التالي :

$$\theta_{l0} = \theta_{ho} \pm n\pi \tag{58}$$

حيث n عدد صحيح ، توضح هذه العلاقة أن القيم المختارة إلى δ لا يمكن أن تكون بشكل اختياري ، لذلك باختيار قيم طاقات الارتباط نحدد قيمة وحيدة إلى θ والتي تحدد بدورها قيمة وحيدة إلى δ ومنها نحسب قيمة G_3، لنفترض الآن أننا نريد حساب طاقات الارتباط الأخرى من اجل ذلك نثبت قيم الأطوار (أي نثبت قيم ثوابت الارتباط) و المشكلة بعدئذ تنحصر في إيجاد قيم أخرى إلى B_3 والتي لها قيمة الطور نفسها، لذلك نستطيع إيجاد طيف طاقة الارتباط بحل المعادلة من اجل f_{l0} و لا نحتاج مطلقا إلى f_{h0} .

لإجراء الحلول العددية للمعادلات التكاملية سنستخدم طريقة مونت كارلو[14] وهي أداة ذات مقدرة جيدة في كثير من حقول الرياضيات والفيزياء و الهندسة ، و تعتمد على تحديد إحصائي للحل وذلك بالقيام بعملية سحب عينات عشوائية لمتحول عشوائي والذي قيمته المتوقعة هو الحل المطلوب ، الفكرة الأساسية في طريقة مونت كارلو هي بالشكل التالي :

ليكن J الحل لمسألة رياضية ما تنص هذه الطريقة على إيجاد متحول عشوائي ε قيمته المتوقعة تساوي إلى J :

$$J \approx \frac{1}{n}\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \,........\varepsilon_n) \tag{59}$$

يحدد الخطأ r_n وفق هذه الطريقة بالشكل التالي :

$$r_n = x_{0.5}\,\frac{\sigma(\varepsilon)}{\sqrt{n}} \tag{60}$$

حيث $D(\varepsilon)^{1/2}=\sigma(\varepsilon)$ الانحراف المعياري ، $x_{0.5}=0.6745$ والخطأ يأخذ الشكل:

$$\Pr\left\{\left|\bar{\varepsilon}_n - J\right| \le r_n\right\} = \frac{1}{2} \tag{61}$$

حيث يمثل Pr الاحتمال .

سنكتب المعادلة (55) بالشكل التبسيطي التالي :

$$u(x) = \int_{\Omega} k(x,x')u(x')\,\mathrm{d}x' + f(x) \tag{62}$$

أو بالشكل المؤثر التالي $u = \mathcal{K}u + f$

سنقوم أولا بإيجاد الحل التقريبي للمعادلة التكاملية وذلك بإيجاد سلسلة نيومان Neumann Series (طريقة التعويض المتكرر) [15]:

$$u^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} \mathcal{K}^{(j)} f = f + \mathcal{K}f + \ldots + \mathcal{K}^{(i-1)}f + \mathcal{K}^{(i)}f, \quad i = 1,2,\ldots \tag{63}$$

حيث $u^{(0)}(x) \equiv f(x)$

ومنه لدينا سلسلة من التكاملات ذات الأبعاد المتعددة ، سنرمز إلى كل تكامل بالشكل :

$$I(J) = \kappa^{(J)}\ f = \int F(t)dt \tag{64}$$

وسنتبع هنا طريقة أهمية الفصل للتكاملات Importance Separation for Integrals [16,17,18]وهي طريقة مونت كارلو تعتمد على فصل منطقة التكامل G[a,b] إلى M منطقة جزئية G_l بالشكل التالي :

$$G = \bigcup_{l=1}^{M} G_l, \quad G_l \equiv [x_{l-1}, x_l], \quad l = 1, \ldots, M-1,$$

$$C_i = \frac{1}{2}[F(x_{i-1}) + F(x_M)](x_M - x_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, M-1,$$

$$x_i = x_{i-1} + \frac{C_i}{F(x_{i-1})(M-i+1)}, \qquad x_0 = a,\ x_M = b.$$

ومنه

$$\mathbf{E}\theta^*_N(j) = I(j), \tag{65}$$

حيث ترمز E إلى القيمة المتوقعة و التابع $\theta^*_N(j)$ يعطى بالشكل :

$$\theta^*_N(j) = \sum_{i=1}^{M} \frac{V(G_i)}{N_i} \sum_{l=1}^{N_i} F(\xi_l^{(i)}), \quad \sum_{i=1}^{M} N_i = N, \tag{66}$$

يرمز $V(G_i)$ إلى تغاير التابع في المنطقة الجزئية G_i :

$$V[f] = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{df}{dx} dx \right| \tag{67}$$

وبإجراء الحل العددي وبقولبة الحلول مع الشروط الحدية نجد سوية الارتباط السطحية (Shallowest bound state) والسوية الأكثر عمقا

الجدول رقم (2) يبين سويات الطاقة السطحية و الأكثر عمقا

Λ	$B_3(1)$	$B_3(2)$
90900.550	0.578	126.599
580432.762	0.580	125.601
7623093.874	0.579	127.594
65498327.651	0.578	125.598
2482871654.560	0.577	128.599

نلاحظ بشكل مباشر من هذا الجدول استقلال قيم طاقات الارتباط عن حد القطع وهذا ما يؤكد قوة نظرية الحقل الكمومي الفعال .

هذه القيم على اتفاق تام مع الدراسة التي قام بها Bedaque [9]والتي وجد فيها القيمة 0.57 mk وكذلك مع الدراسة التي قام بها Eric Braaten and H.W. Hammer [18]والتي تم فيها ايجاد القيمة 127±2mk حيث 1mk=0.0861735 μev.

الاستنتاجات والتوصيات:

تم في هذه الدراسة حساب سويات ايفيموف وفق طريقة مغايرة تماما للطريقة التي حسب بها Bedaque and Hammer ، وهي متوافقة تماما مع القيم التجريبية لذلك نوصي بمتابعة العمل وفق هذه الطريقة على نظام مؤلف من أربعة بوزونات $^4He_4$.

المراجع:

1- WEINBERG, S. *The Quantum Theory Of Fields*, Cambridge University Press, United States Of America, 1996.

2- WALECK, A, DRIK, J. *Theortical Nuclear and Subnuclear Physics*. World Scientific. 2004.

3- WEINBERG, S. *Nucleon Nucleon potential from an effective chiral lagrangian*. Phys. Lett B. Vol. 251, 1990, pp. 288.

4- Aitchison, I, *Gauge Theories In Particle Physics*, University Press, Lodon, 2004.

5- FRIES, D.C. *Quarks and nuclear forces*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

6- MARTINE, J. *Effective Field Theory For Nuclear Physics*. Nuclear *Physics A 721, 2003, pp-94-103.*

7- ROUDNEV, V. *Investigation Of 4He3 Trimer On The Base Of Faddeev Equation Equation In Configuration Space*, Chemical Physics Letters, 328, 2000, pp- 97-106.

8- PROCEEDUNGS OF THE NINTH EUROPEAN CONFERENCE. *Few Body Problem in Physics*. 1984, Tbilisi, Georgia.

9- BEDAQUE, P. *The Three Boson System With Short Range Interaction*s, Nuclear Physics A, 646, 1999, PP. 444-466.

10- KAZAKER, D. *Particle Physics Beyond The Standard Model*, Elsevier, Amesterdam, 2006.

11- COTTINGHAM, W. *An Introduction To Standard Model Of Paricle Physic*s, University Press, 2007.

12- Parameswarna, V. *Quantum Field Theory*, Springer, 2005.

13- ARFKEN, G. *Mathematical Methods For Physicists*, Harcourt Press USA, 2001.

14- TAO, P. *An Introduction To Computational Physics*. Cambridge university Press. 2006.

15- SCHWEIZER, W. *Numerical quantum dynamics*. Kluwear academic publishers. 2002.

16- LANDAU, R. *Computational Physics*. John Wiley, 1997.

17- PRESS, W. *Numerical Recipes in C*. Cambridge university Press. 1992.

18- HAMMER, H. *The Four Boson System With Short Range Interaction*, Phys.Rev A, 70, Issue 5, 2004.