A&H
Revista de Artes y Humanidades

Aplicabilidad y teoría en la filosofía de las matemáticas contemporánea

*Recibido: 26 julio 2017 * Aprobado: 7 marzo 2018*

Paniel Osberto Reyes Cárdenas
UPAEP
panielosberto.reyes@upaep.mx

Resumen
El presente artículo es un análisis de las distintas respuestas al problema de la continuidad entre teoría y aplicabilidad de las matemáticas. Se analizan las más importantes respuestas al problema desde los distintos acercamientos a la filosofía de las matemáticas, de este modo se descubre que el concepto de 'estructura' parece favorecer el enfoque que explica la continuidad entre aplicabilidad y teoría conocido como "estructuralismo matemático".

Palabras clave: *Filosofía de las matemáticas, aplicación de las matemáticas, estructuras matemáticas, estructuralismo.*

Abstract
This article analyses the different responses to the problem of continuity between theory and applicability in mathematics. After a revision of the most relevant response to the problem coming from different approaches to Philosophy of Mathematics, it is stated that the concept of 'structure' emerges as prominent, and hence favours the approach that explains continuity between theory and applicability known as "Mathematical Structuralism".

***Keywords**: Philosophy of Mathematics, Applied Mathematics, mathematical structures, Structuralism in Mathematics.*

Cuando describimos estructuras en el mundo es natural que casi siempre podemos interpretar esas estructuras as *prima facie* como 'estructuras matemáticas'. Una brecha, sin embargo, puede separar esta intuición natural con la aparentemente deslumbrante complejidad de los estudios matemáticos y por lo tanto, esta intuición inicial queda reprimida. Sorprendentemente, con todo, muchos de los enfoques consistentes en los fundamentos de las matemáticas ayudan a tratar de superar esa brecha mencionada. Si nuestra intuición de la continuidad entre las matemáticas y el mundo es correcta, entonces nuestras teorías de cómo las matemáticas son enfocadas desde la epistemología y la metafísica pueden contestar una pregunta no sólo del interés de filósofos y matemáticos, sino también de quienes desarrollan todas las otras ciencias.

Permítaseme denominar este aspecto de las teorías sobre la aplicación de las matemáticas como el "continuo entre teoría y aplicabilidad". Mi tarea en este breve ensayo es mostrar cómo los enfoques del paradigma contemporáneo de la filosofía de las matemáticas ofrece nuevas e importantes luces en la explicación sobre este 'continuo'. Ciertamente la filosofía tradicional se ha preocupado por dar cuenta de las ciencias matemáticas, pero sólo en nuestro tiempo esta preocupación ha crecido hasta convertirse en el nacimiento de una nueva y concreta disciplina en filosofía: La filosofía de las matemáticas por derecho propio.

En este ensayo presentaré distintos enfoques dentro de la filosofía de las matemáticas contemporánea: en cada uno de éstos será importante notar el tipo de respuesta ofrecida para explicar la continuidad entre teoría y aplicación de las matemáticas. Presentaré aspectos generales de cada teoría en principio, para después estudiar las propuestas que ofrecen ante el problema de la continuidad entre teoría y aplicabilidad, entre la metafísica que explica qué son los objetos matemáticos y la epistemología que ofrece una explicación de su uso en la multitud de modos en que es expresada.

Un hecho ha de ser tomado en cuenta: es difícil negar la cantidad de matemáticas que hemos de usar en orden a comprender el mundo no-matemático de manera científica. Ahora bien, incluso si no pudiésemos ofrecer una explicación de este hecho, sería muy extraño aceptar que es una casualidad el que las matemáticas sean aplicadas con éxito a la descripción de la realidad. Hay ciertamente una relación que no puede ser negada, aunque no siempre sea evidente.

En efecto, cuando se hace investigación científica muchos de los problemas son descritos en términos de hallar la función correcta, la ecuación o fórmula que explicara exitosamente distintas clases de fenómenos observables. La explicación de los aspectos y patrones en la explicación matemática dada en la investigación, la epistemología de esa misma explicación, y la metodología de la explicación es el objeto de estudio de lo que llamamos hoy en día 'filosofía de las matemáticas'. Sin embargo, no debemos olvidar que las asociaciones entre entidades matemáticas y fenómenos físicos pertenecen a las teorías y las teorías son contextuales a los intereses humanos. El alcance de una teoría determina el grado de finura de las diferentes abstracciones matemáticas, pero el hecho sobresaliente es que ecuaciones matemáticas que son elegantes y simples son el resultado de nuestras mejores teorías para explicar el mundo. Esto debería implicar, como ha dicho Hilary Putnam, que es un milagro que las matemáticas siempre triunfen en ser la mejor formulación de las mejores teorías científicas si no hubiera un vínculo real entre las teorías y lo que interpretan. Yo llamo al mencionado vínculo 'estructural', y por tanto afirmo que el estructuralismo matemático es relevante a la hora de teorizar sobre la relación de continuidad entre teoría y aplicación.

Departamentos y facultades de matemáticas distinguen entre matemáticas aplicadas y matemáticas puras como dos campos relativamente independientes. ¿Hay alguna razón profunda, más allá de la costumbre, pare establecer estas distinciones? ¿Hay condiciones suficientes o necesarias que justifiquen el establecimiento de esta distinción? Mi respuesta es negativa: no necesariamente, y además, la respuesta negativa a esta pregunta es de absoluta importancia para ofrecer un criterio de continuidad. Junto con este objetivo, también deseo explicar la relevancia del conocimiento matemático en el contexto del conocimiento en general. En lo sucesivo explicaré y presentaré los enfoques que comprenden la filosofía de las matemáticas en nuestros días y como una disciplina de cara a la filosofía en el siglo XXI.

Formalismo

Un formalista es un teórico de la filosofía de las matemáticas que cree que las entidades matemáticas son sólo ficciones, que su naturaleza es la de caracteres vacíos manipulados de acuerdo a reglas, pero que, al final del día, no tienen un contenido o significado auténtico. Si el formalismo es correcto, entonces el hecho de que hay una correspondencia sistematica entre los objetos y estructuras de las matemáticas y los hechos en el mundo resulta ser una coincidencia. Como por ejemplo el ajedrez, las piezas no expresan pensamientos sino Frege, por ejemplo, se opuso rotundamente a esta imagen (Frege 1903, §91).

El formalista, que es una suerte de nominalista extremo ante los objetos matemáticos, no sólo ignora la relación sistemática entre matemáticas y mundo, sino también las relaciones entre las ramas y disciplinas matemáticas mismas. El problema fundamental es el ignorar que las ramas de las matemáticas mantienen conexiones y semejanzas. El formalista que es nominalista puede omitir estas conexiones sin justificación suficiente.

Logicismo

Logicismo es la postura que afirma que las matemáticas son en cierto modo una derivación de la lógica, o que las matemáticas están fundadas en la lógica, o en último término son reducibles a un sistema lógico. El logicismo de traducción, por ejemplo, acepta que la verdad matemática es verdad lógica en virtud de la posibilidad de traducir una en términos de la otra. Esta teoría es frecuentemente acompañada de la negación de la relación sistemática entre teoremas de una rama de las matemáticas y las prácticas científicas, porque el mundo, en estricto sentido, no esta compuesto de verdades lógicas. El logicismo de postulación, por su parte, es una versión mejorada del logicismo: afirma que las matemáticas no tienen un objeto de estudio fijo en los números naturales, el espacio Euclidiano o el universo de configuración teórica (Shapiro 1983: 531). El logicismo de postulación más bien afirma que las matemáticas consisten en un estudio de las consecuencias lógicas de axiomas no interpretados. Esta versión tolera una interpretación de correspondencia sistemática entre las ramas de las matemáticas y la realidad, pero presupone una distinción entre matemáticas puras y aplicadas no sostenible, especialmente porque hay conexiones importantes entre las ramas de las matemáticas que el logicismo de postulación no incluye o puede incluir en su teoría. Por otra parte, el logicismo de postulación no puede teorizar y explicar por qué las aplicaciones de las matemáticas son tan exitosas, se conforma con afirmar que la aplicación de las matemáticas es una interpretación exitosa fortuita. Una pregunta natural es qué interpretación directa uno podría encontrar en casos como el de los números imaginarios, ya que éstos no pueden ser interpretados y sin embargo son necesarios en la explicación de la física.

Platonismo

El platonismo en matemáticas es una perspectiva que considera que el objeto de estudio de la disciplina es un univrso inmaterial y existente independiente del mundo físico. Gödel, por ejemplo, sostiene una postura de este tipo:

> …Los objetos de la teoría de conjuntos transfinitos… claramente no pertenecen al mundo físico e incluso su conexión indirecta con la experiencia física es muy pobre… A pesar de sus distancia de la experiencia de los sentidos, tenemos una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver desde el hecho de que los axiomas ejercen su fuerza sobre nosotros mostrándose verdaderos. No veo por qué no tendríamos que confiar en este tipo de percepción, i.e., en la intuición matemática, más que en la percepción sensorial, que nos induce a construir teorías físicas y a esperar que las precepciones sensoriales futuras concordarán con ellas y, más aún, a creeer que la cuestión no decidible ahora tiene significado y puede ser decidible en el futuro (Gödel 1964: 271)

La perspectiva platonista es interesante en el modo en que reconoce el carácter particular e independiente de las entidades matemáticas. Un problemas muy notorio, sin embargo, es la falla del platonismo en reconocer la relación real entre las proposiciones matemáticas y el mundo. Esta falla coincide con otro problema: el platonismo no da cuenta de cómo el conocimiento de las proposiciones matemáticas está relacionado con el conocimiento del mundo.

Intuicionismo

El intuicionismo acepta que los objetos matemáticos son construcciones mentales. Después de ser 'construidas', las entidades matemáticas adoptan un carácter independiente hace posible la percepción (a través de su capacidad de intuir). Los filósofos kantianos de la ciencia aceptan que la intuición de las matemáticas se une a otras facultades que nos sirven para dar cuenta del mundo en cuanto percibido y conocido por la mente humana. Esta postura parece converger con la idea de que el estudio de la ciencia es el estudio de la mente humana haciendo actividad científica. Hay un aspecto insatisfactorio en esta imagen que parece dejar nuestra preocupación inicial inatendida: Cómo es que nuestras mentes, en su construcción de los objetos matemáticos, pueden estar sintonizadas tan efectivamente con los objetos de la investigación científica. Me parece insatisfactorio tan sólo afirmar que los constructos de las matemáticas, aunque percibidos a través de la intuición, son simplemente aspectos de nuestras mentes y, al mismo tiempo, recalcitrantes en la investigación científica. Esta relación necesita ser clarificada.

Estructuralismo matemático

El estructuralismo considera que el objeto de estudio de las matemáticas consiste en los patrones o estructuras matemáticas y no necesariamente en los objetos de esos patrones y estructuras. Una estructura es descrita por los estructuralistas matemáticos en términos de interrelaciones. Históricamente el fundador más temprano del estructuralismo es el lógico y matemático David Hilbert. Un estructuralista contemporáneo, Stewart Shapiro, explica las estructuras en éstos términos:

Las estructuras matemáticas son más abstractas, libres e independientes, en el sentido que no hay restricciones a la clase de cosas que pueden ejemplificarlas (Shappiro 1997, Ch. 3, §6).

Para entender mejor lo dicho, defínase un sistema como una colección de objetos junto con ciertas relaciones entre estos objetos. El sistema de números naturales sería una colección contable infinita de objetos con un objeto designado inicial, una relación de uno-a-uno de sucesión que satisface el principio de inducción matemática y otros axiomas de la aritmética. Una estructura, además, es la forma abstracta del sistema, que ignora y extrae cualquier característica de los objetos que no tiene relevancia para sus relaciones dentro del sistema. De este modo, la estructura de los números naturales es la forma común a todos los sistemas de números naturales. Esta estructura en particular es el objeto de estudio de la aritmética. Consecuentemente, la estructura es un tipo de universal, un "unum super multum" que en vez de aplicarse a un objeto individual en particular como lo es en el caso de las propiedades, se aplica a sistemas enteros.

Estructuralismo con enfoque *Ante Rem*

Para el estructuralista *Ante Rem*, la estructura matemática es objetiva, incluso cuando no está instanciada. La semántica del estructuralista de este tipo es directa: variables de primer orden ocupan los lugares en la estructura respectiva. Un término singular, como por ejemplo '0', denota un lugar en la estructura. Los lugares en la estructura son objetos *bona fide,* aunque son libres e independientes. Esto significa que los objetos bona fide funcionan como una ontología de trasfondo para las estructuras, pero son secundarios a ellas. Con todo, un estructuralista *Ante Rem* puede considerar a los objetos mismos formando un sistema, en este caso se dice que los objetos necesariamente acompañan sus lugares (o posiciones) en la estructura: "locus-cum-objectus". Por ejemplo, en los ordinales de Von Neumann, los ordinales ejemplifican la estructura bajo la relación del sucesor ordinal. Las propiedades de cada objeto o número son las propiedades de su lugar en la estructura, y así se explica a las propiedades de la estructura de los números naturales. He aquí dos maneras en que esta relación entre lugares y objetos pueden ser representados en un sistema.

{ø,{ø}}=2. Sistema de Von Neumann: El número '2' es exactamente el segundo sucesor de conjuntos integrados por la clase vacía. La clase vacía representa un espacio sin contenido determinado, simplemente un lugar en la estructura.

{{ø}}=2 Sistema de Zermelo: El número '2' es el conjunto que engloba al conjunto cuyo contenido es la clase vacía. No es la posición del conjunto, sino la propiedad de contener dos conjuntos, lo que define al ordinal '2'.

Estas dos definiciones de '2' fueron usadas en la célebre fábula de 'Ernie y Johny' que el matemático y filósofo Paul Benacerraf (1965; 1973) usó para establecer la más famosa consideración de la verdad matemática que vino a convertirse en el paradigma del estructuralismo matemático. El estructuralista no nos trata de forzar a elegir exclusivamente un sistema determinado, siempre y cuando el papel funcional de la estructura se encuentre reflejado. Las estructuras son ontológicamente previas a sus lugares en el mismo sentido en que una organización es previa a los oficios que las constituyen (Shapiro 1997, 9).

Estructuralismo In Re , o sin estructuras Ante Rem

No sólo el estructuralista Ante Rem, quien es un realista de las estructuras, puede adoptar el estructuralismo.

Ser estructuralista In Re es una alternativa. El estructuralista de este tipo considera que lase estructuras existen en efecto, si y sólo si existen en un sistema que las ejemplifica o que las instancia. Esta postura es el reverso metafísico de la prioridad citada previamente en este escrito: las estructuras son posteriores a los sistemas que los ejemplifican. Una postura todavía más radical es la versión eliminativista del estructuralismo: el estructuralista eliminativista afirma que las declaraciones en los que los objetos son lugares en la estructura son sólo maneras de expresar generalizaciones relevantes a nuestro interés, y que por lo tanto deberían “regimentarse” como gneralizaciones sobre todos los sistemas que ejemplifican una estructura dada o estructuras determinadas. Un ejemplo de regimentación, o reducción de las estructuras a un lenguaje limitado, es el siguiente para el caso de los números naturales:

(Φ') En cualquier sistema de numeros naturales S, $\Phi[S]$

Lo cual restringe los cuantificadores a los objetos en el sistema S.

En contra del eliminativista se ha de afirmar que regimentaciones semejantes han de ser repetidas y recalcitrantes a estructuras similares. Este es un caso en el que independientemente de nuestro interés contextual las estructuras ejercen necesidad en nuestro conocimiento de ellas. Autores contemporáneos como Penélope Maddy, Paul Benacerraf y Oysten Linnebo han advertido que el eliminativismo amenaza cierta vacuidad por no reconocer este carácter independiente de las estructuras matemáticas.

Metafísica y Epistemología de las matemáticas

Una teoría matemática puede considerarse desde un punto de vista epistemológico o metafísico siempre y cuando la teoría puede ser interpretada en teoría de conjuntos. La fundamentación de las matemáticas es un ejercicio epistemológico: explora las bases del conocimiento matemático. Cómo se considera a una estructura en sí misma y cómo es posible que esa estructura se repita tanto en nuestro conocimiento matemático como en la realidad es una pregunta metafísica.

La codificación de la teoría de conjuntos es tradicionalmente considerada equivalente al sistema llamado ZFC (Zermello-Fraenkel con el axioma de elección). Sin embargo, hay otras expresiones del sistema de ZF con nuevos axiomas tales como el llamado principio

'V=L0, el axioma de determinación y los principios cardinales superiores (Shapiro 2004, 16). Hay incluso otras propuestas de la fundamentación en lógica de alto orden, en el estructuralismo, en el logicismo, en la teoría de la demostración, en la teoría de la ramificación y en la teoría de las categorías. No es fácil, por tanto, explicar la fundamentación de las matemáticas sin explicar antes que entendemos por 'fundamentación' e incluso por 'matemáticas': la manera de entender estos términos puede determinar qué paradigma se ha de elegir. Cada postura considera diferentes tipos de fundamentaciones de acuerdo a sus conceptos epistemológicos o metafísicos. Hay, con todo, un elemento común la idea de un "fundamento de las matemáticas", Stewart Shapiro menciona:

> ¿Cuál es el propósito de un fundamento? He señalado tres sentidos de 'fundamento': metafísico, epistemológico y matemático, cada uno con sus sub-casos. En principio, un fundamente metafísico revela la naturaleza latente de los objetos matemáticos. Las matemáticas en sí mismas y en cuanto tales no requieren esta reflexión. Todo lo que realmente importa es la estructura. Es una cuestión filosófica impugnada si es importante e interesante que el filósofo de las matemáticas debe o no dedicarse a asuntos metafísicos en cualquier caso. En segundo lugar, una fundación epistemológica revela las pruebas verdaderas o las justificaciones de las proposiciones matemáticas, o al menos proporciona un modo en que las proposiciones matemáticas pueden llegar a ser conocidas. Dejo para otra ocasión el profundizar más en estas cuestiones acerca de las últimas justificaciones de las proposiciones matemáticas, y el asunto sobre cuanta luz arrojan al tema en cuanto se les considera. En tercer lugar, la fundación de las matemáticas ha de ser una teoría para la cual todas las teorías matemáticas, las definiciones y las pruebas pueden ser traducidas, al menos en principio. No sé por cierto si las matemáticas realmente necesitan una fundamentación en este sentido, quizás no. (Shapiro 2004: 37)

La lógica matemática en la teoría de modelos puede construir una teoría que cuantifica sobre las estructuras mencionadas. Este es un paso importante hacia el tratamiento del continuo entre aplicabilidad y teoría. En efecto, si pudiésemos dar cuenta de las estructuras dentro de nuestra filosofía de las mate matemáticas ciertamente podemos extender el mismo ejercicio a las preguntas metafísicas sobre objetos en el mundo real, o mejor dicho, sobre las estructuras en el mundo real.

Así pues, el criterio básico de continuidad entre teoría y aplicabilidad de las matemáticas es la sugerencia de que tanto los contenidos del universo de la investigación científica como las entidades matemáticas exhiben y comparten interrelaciones e interacciones. Ahora bien, el problema de la instanciación de una estructura matemática o de un patrón matemático en la realidad física viene a ser, finalmente, el problema filosófico clásico de la instanciación de un universal. Una instanciación del universal es clarificada cuando extendemos nuestras investigaciones entre los objetos del mundo físico hasta reconocer que las estructuras que hacen esos objetos posibles en el modo en que lo son se expresan en patrones. Los patrones, con todo, no existen en el mismo modo en que los datos por los que los reconocemos: los patrones son reales a través de los datos existentes. Nótese el sentido particular que le doy a la palabra 'real': con Charles Peirce, decimos que lo real es "cualquier cosa que es del modo que es sin importar nuestras opiniones sobre ello". Uno podría tener escrúpulos sobre esta distinción entre 'real' y 'existente', por lo que es pertinente clarificar en qué sentido se han de utilizar estas distinciones: la distinción entre existencia y realidad que concierne a los objetos está basada en la idea de que la existencia es correlativa a las propiedades fenoménicas de los objetos, mientras que realidad, en estricto sentido, significa la independencia de aquellas formas o estructuras de la experiencia que aunque no tengan propiedades fenoménicas se manifiestan en los objetos a través de patrones. Permítaseme ilustrar esta idea a través de la serie de los números naturales: aunque la serie en cuanto tal no tiene cualidades fenoménicas siempre es estable en términos de las relaciones de sus objetos instanciados (en este caso los números). Crowell y Fox presentan el sugerente ejemplo de lo que significa interpretar un nudo, Stewart Shapiro les comenta en estas palabras:

> En particular, un teorema matemático que explica que una configuración topológica particular no puede transformarse en otra sino por medio de unas operaciones específicas matemáticas corresponde al hecho de que un nudo no puede ser transformado en otro nudo sin 'desatar' y 'atar' en modos concretos (Shapiro 1983, 539)

Si consideramos estructuras matemáticas infinitas, empero, la imagen se complica. Decimos entonces que las estructuras infinitas están incorporadas en nuestros trasfondos teóricos y que distinguimos, como de hecho es el caso en la distinción anterior entre sistemas y estructuras, que hay sistemas que reflejan estructuras que no pueden ser exhaustivas pero que no por ello son menos reales. Cuando un niño aprende cómo contar, por ejemplo, no decimos que necesita una bolsa infinita de semillas o manzanas para comprender que la estructura de la serie de números naturales es potencialmente infinita. Es realmente difícil negar que el niño está aplicando una estructura infinita de manera real por medio de un sistema, dicho sistema puede ser un conjunto de semillas o quizás axiomas de Zermello.

El futuro de la filosofía de las matemáticas: Metafísica y Epistemología de las Matemáticas

El paradigma contemporáneo de la filosofía de las matemáticas es, por tanto, el estructuralismo. Esta perspectiva provee una imagen holística del estado de cosas ya que nos da interacciones en dos direcciones: (1) en primer lugar, nos permite incorporar estructuras matemáticas a la realidad científica y (2) en segundo lugar, nos permite reconstruir las relaciones entre las ramas de as matemáticas mediante el desarrollo de un estudio de los proceso físicos. Este último caso es muy claro para la geometría clásica, pero también para la topología e incluso para las matemáticas cuánticas contemporáneas. El hecho de la continuidad entre indagación científica y matemáticas levanta una consideración más: cualquier estructura, en cuanto tal, puede ser matemática. Aún más, cualquier elemento matemático es susceptible a ser instanciado y, por lo tanto, cada estructura matemática es potencialmente aplicable sin importar nuestra actual capacidad de reconocer su aplicación en nuestras teorías contemporáneas.

Al principio de este capítulo mencioné los problemas que distintos enfoques sobre las matemáticas reflejan al expresar las inteconexiones entre las ramas y disciplinas matemáticas. Ahora finalizo llamando la atención al concepto de estructura como un concepto común a cualquier rama matemática cuyo objeto de estudio necesita ser interpretado. Las estructuras, por lo tanto, pueden ser modeladas entre sí, esto significa que no hay un límite a los niveles de interacción que podemos usar para entender una estructura en términos de otra. El estructuralismo, en conclusión, no reconoce una clara línea entre matemáticas puras y aplicadas: el aspecto teorético de la teoría de conjuntos puede perfectamente ser continuo con la ciencia experimental o teórica a través del uso de estructuras comunes.

Referencias

Benacerraf, Paul (1965): "What Numbers Could not be" The Philosophical Review, Vol. 74, No. 1 p. 48.

Benacerraf, Paul (1973): "Mathematical Truth" The Journal of Philosophy, Vol. 70 N. 19, pp. 661-679

Field, H. (1980), Science Without Numbers. Princeton: Princeton University Press.

Godel, K. (1964), "What is Cantor's continuum problem", in P. Benacerraf and H. Putnam (eds.), Philosophy of Mathematics. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice- Hall, pp. 258-273.

Hookway, Christopher (2010). "The Form of a Relation: Peirce and Mathematical Structuralism" in: Matthew E. Moore, New Essays on Peirce's Mathematical Philosophy. Pp.

Shapiro, S. (1983) "Mathematics and Reality" in: Philosophy of Science, Vol 50, No. 4 (Dec, 1983) pp. 523-548.

Shapiro, S. (2004): "Foundations of Mathematics: Metaphysics, Epistemology, Structure": The Philosophical Quarterly, Vol. 54, No. 214 (Jan., 2004), pp. 16-37

Steiner, M. (1975), Mathematical Knowledge. Ithaca, New York: Cornell University Press.