مبدأ القيم القصوى لحل المعادلة ثنائية التوافقية في الكرة

د.عبد الباسط يونسو *

إبراهيم حنونه **

(تاريخ الإيداع 14 / 10 / 2018. قُبِل للنشر في 13 / 5 /2019)

ملخّص

قمنا في هذا المقال بتقدير حل مسألة ديريخليه الحدية للمعادلة ثنائية التوافقية $\Delta^2 u = 0$ في منطقة محدودة G في الفضاء $\mathbb{R}^n$ من أجل $n < 4$ وفق الشروط الحدية الآتية:

$$\begin{cases} u|_{\partial G} & = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{(\partial G)} & = 0 \end{cases}$$

حيث قمنا بتشكيل دالة P_n تكافئ حل المعادلة ثنائية التوافقية بالشكل الآتي:

$$P_n = \vec{X}.\vec{\nabla} u + \frac{n-4}{2} u - \frac{1}{4} \left\|\vec{X}\right\|^2 \Delta u.$$

استطعنا بالاستفادة من P_n وتطبيق مبدأ القيم القصوى (الكبرى والصغرى) تقدير الحل بدلالة القيمة الحدية f، حيث تم تقدير الحل بالعلاقة الآتية:

$$\|u\|_{\mathrm{G}} \leq \|f\|_{\partial \mathrm{G}},$$

حيث f دالة مستمرة وΔ مؤثر لابلاس وΔ^2 مؤثر لابلاس ثنائي التوافقية و∂G حدود المنطقة G و$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ المشتق بالنسبة للناظم الخارجي على حدود G و $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ و $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ مؤثر نابلا.

الكلمات المفتاحية: مبدأ القيم القصوى (الكبرى والصغرى) – مسألة ديريخليه – المعادلة ثنائية التوافقية – التابع التوافقي – المعادلات التفاضلية الجزئية.

*مدرس– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سوريا

** طالب ماجستير– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية– سوريا – البريد الالكتروني

ibrahimkamalhanouneh@gmail.com

Maximum Principle for Solution of Biharmonic Equation in The Ball

Dr. Abd Elbasset Younso*
Ibrahim Hanouneh**

(Received 14 / 10 / 2018. Accepted 13 / 5 /2019)

☐ ABSTRACT ☐

The intention of this paper is to estimate the biharmonic equation $\Delta^2 u = 0$ on a bounded domain G in the $\mathbb{R}^n$ space for $n < 4$ with the boundary condition:

$$\begin{cases} u|_{\partial G} & = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{(\partial G)} & = 0 \end{cases}$$

where we made a function P_n that equivalent the solution of biharmonic equation:

$$P_n = \vec{X}.\vec{\nabla} u + \frac{n-4}{2} u - \frac{1}{4} \left\|\vec{X}\right\|^2 \Delta u.$$

by using P_n and applying the principle of the maximum and minimum value, we can estimate the solution of biharmonic equation through the boundary value f :

$$\|u\|_{\mathrm{G}} \leq \|f\|_{\partial \mathrm{G}},$$

where f is a continuous function , Δ Laplace operator , Δ^2 biharmonic operator , ∂G is the boundary of the domain G , $\frac{\partial u}{\partial n}$ is the derivative for the outward rhyming on the boundary of G , $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, and $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ is Nabla's operator.

Keywords: maximum-minimum principle, Dirichlet problem, biharmonic equation, harmonic function, partial differential equations.

* **Assistant Professor – Department of Mathematics – Faculty of Science – Tishreen University – Lattakia – Syria.**
**** Master student – Department of Mathematics – Faculty of Science – Tishreen University – Lattakia– Syria – Email: ibrahimkamalhanouneh@gmail.com.**

مقدمة:

يعد مبدأ القيمة القصوى واحداً من أهم الأدوات المستخدمة في دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية، حيث أن الباحث ميراندا (Miranda) عام 1948 **[1]** كان أول من أثبت أنه من أجل المعادلة ثنائية التوافقية الآتية:

$$\Delta^2 u = 0; u \in C^4(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$$

يبلغ التابع $P_9 = |\nabla u|^2 - u\Delta u$ قيمه القصوى الكبرى على حدود المنطقة Ω، أي أن:

$$\max_{\overline{\Omega}} P_9 = \max_{\partial\Omega} P_9.$$

قام منذ ذلك الحين العديد من الباحثين بتعميم نتيجة ميراندا بهذا المجال، حيث قام كل من باين (Payne) عام 1976 **[2]** وشايفر (Schaefer) عام 1987 **[3]** بأبحاث في مبدأ القيم القصوى لمعادلات من المرتبة الرابعة وغير الخطية بالنسبة لـ u أو لـ Δu ، وتوصّل كل من تشانغ (Zhang) عام 2002 **[4]** ومارينو (Mareno) عامي 2008 و2010 **[5]**،**[6]** إلى نتائج مماثلة على هذا الصعيد.

درس الدكتور عبد الباسط يونسو **[7]** عام 2014 مسألة تقدير حل مسألة ديريخليه للمعادلة ثنائية التوافقية في المستوي باستخدام مبدأ القيم القصوى على التابع الخاص الآتي:

$$H = r\frac{\partial u}{\partial r} - u - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\Delta u$$

وتوصل الى أنَّ:

$$\|u\|_{\bar{G}} \le \|f\|_{\partial G} + \frac{R}{2}\|g\|_{\partial G},$$

حيث f و g توابع مستمر تمثل الشروط الحدية لمسألة ديريخليه.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث في أن مبدأ القيم القصوى يعتبر أداة هامة تستخدم في تقريب حلول المعادلات التفاضلية الجزئية، وبشكل خاصٍ المعادلة ثنائية التوافقية $\Delta^2 u = 0$ والتي تدخل في تطبيقات مسائل المرونة، وكذلك تستخدم في وصف التدفقات البطيئة للسوائل غير القابلة للضغط.

تأتي أهمية مبدأ القيمة القصوى بكونه يعطي معلومات حول الوحدانية، التقريب، المحدودية والخاصة التناظرية لحلول المعادلات التفاضلية الجزئية المدروسة، كذلك في حدود القيم الذاتية وبعض التطبيقات الفيزيائية الخاصّة مثل الضغط الأعظمي وصلابة الالتوائية والسعة الكهروستاتيكية وغيرها، بالإضافة إلى إيجاد الشروط الضرورية لقابلية حل بعض مسائل القيم الحدية.

يهدف البحث الى تقريب حل المعادلة $\Delta^2 u = 0$ في الفضاء $\mathbb{R}^n$ وفق الشروط الحدية الآتية:

$$\begin{cases} u|_{\partial\Omega} = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

عن طريق إثبات أن التابع المعرف بالشكل الآتي:

$$P_n = \vec{X}.\vec{\nabla}u + \frac{n-4}{2}u - \frac{1}{4}\|\vec{X}\|^2 \Delta u$$

يبلغ قيمه القصوى الكبرى والصغرى على حدود المنطقة Ω.

طرائق البحث ومواده:

البحث يملك صبغة نظرية، وقد استخدم فيه مبرهنات وأساسيات التحليل التوافقي والتحليل العقدي كمبرهنات مبدأ القيم القصوى الضعيفة والقوية والربط بينها.

بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في البحث:

إن جميع الرموز والتعاريف المستخدمة في هذا المقال واردة ومعتمدة في جميع المراجع العلمية المختصة في التحليل العقدي والتحليل التوافقي ونذكر منها: **[8]،[9]**

- $C^n(\Omega)$ فضاءات التوابع ذو المشتقات المستمرة من الدرجة n في المنطقة Ω.
- يعرف مؤثر نابلا $\vec{\nabla}$ بالعلاقة:

$$\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

- يعرف مؤثر لابلاس Δ بالشكل:

$$\Delta=\nabla^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

التعاريف الأساسية:

نذكر فيما يلي مجموعة من التعاريف الأساسية التي تساعدنا في فهم المصطلحات العلمية الواردة في البحث:

تعريف (1) التابع التوافقي (Harmonic Function): [9]

يقال عن التابع f أنه توافقي إذا حقق معادلة لابلاس الآتية:

$$\Delta f=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=0.$$

تعريف (2) التابع ثنائي التوافقية (Biharmonic Function):[9]

يقال عن التابع f أنه ثنائي التوافقية إذا حقق المعادلة الآتية:

$$\Delta^2 f=0$$

وتدعى بالمعادلة ثنائية التوافقية.

النتائج والمناقشة:

إن الشكل العام للمؤثر الإهليلجي هو:

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}D_iD_j+\sum_{j=1}^{n}b_jD_ju+cu,\quad(\mathbf{1})$$

حيث $a_{i,j},b_j,c$ توابع محدودة في المنطقة Ω، حيث Ω هي منطقة محدودة في $\mathbb{R}^n$. وكذلك $a_{i,j}=a_{j,i}$.

للوصول الى الهدف الرئيسي في هذا العمل والذي يتلخص في إثبات أن التابع الآتي:

$$P_n=\vec{X}.\vec{\nabla}u+\frac{n-4}{2}u-\frac{1}{4}\|\vec{X}\|^2\Delta u$$

يبلغ قيمه القصوى الكبرى والصغرى على حدود المنطقة Ω، نحتاج الى المبرهنات المساعدة الآتية:

مبرهنة مساعدة (1):[10],[11]

ليكن $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ بحيث يحقق $Lu \geq 0$ في المنطقة Ω (حيث Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة) و كذلك $c(x) \leq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}^n$ عندئذ:

$$\max_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} \max\{u, 0\} \qquad \ldots\ldots(2)$$

حيث $\partial\Omega$هو محيط المنطقة Ω.

ملاحظة (1): نذكر بعض الحالات الخاصّة للمبرهنة المساعدة (1):

- في الحالة الخاصة التي يكون فيها $c \equiv 0$ عندئذٍ تؤول المتراجحة (2) الى الشكل الآتي:

$$\underset{\Omega}{max}\, u \leq \underset{\partial\Omega}{max}\, max\, u.$$

- عندما $Lu = 0$ (وبشكلٍ خاص $\Delta u = 0$) يكون لدينا:

$$\max_{\Omega} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$$

مبرهنة مساعدة (2):[10],[11]

بفرض $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ مؤثر توافقي في المنطقة Ω عندئذ يكون لدينا:

$$\max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u\,, \min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

النتائج الرئيسية:

تم إثبات في المبرهنة الآتية أن التابع P_n المعرف بالعلاقة $P_n = \vec{X}.\vec{\nabla}u + \frac{n-4}{2}u - \frac{1}{4}\|\vec{X}\|^2\Delta u$ يكون توافقي عندما يكون u مؤثر ثنائي التوافقية، ومن ثم إثبات أنه يبلغ قيمه القصوى على حدود المنطقة Ω.

مبرهنة (1):

ليكن u حلاً للمعادلة ثنائية التوافقية $\Delta^2 u = 0$ حيث u مؤثر من الفضاء $C^4(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ عندئذ يبلغ التابع:

$$P_n = \vec{X}.\vec{\nabla}u + \frac{n-4}{2}u - \frac{1}{4}\|\vec{X}\|^2\Delta u$$

قيمه القصوى الكبرى والصغرى على حدود المنطقة Ω من أجل كل شعاع $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ ويكون لدينا:

$$\max_{\Omega} P_n = \max_{\partial\Omega} P_n \;, \min_{\Omega} P_n = \min_{\partial\Omega} P_n$$

البرهان:

لدينا $P_n = \vec{X}\,.\,\vec{\nabla} + \frac{n-4}{2}u - \frac{1}{4}\left\|\vec{X}\right\|\Delta u$ حيث:

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \Delta u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

نطبق المؤثر Δ على التابع P_n فنجد:

$$\Delta P_n = \Delta\left(\vec{X}\,.\,\vec{\nabla}\right) + \Delta\left(\frac{n-4}{2}u\right) - \frac{1}{4}\Delta\left(\left\|\vec{X}\right\|\Delta u\right) \qquad (3)$$

لنجد أولاً قيمة المقدار $\Delta\left(\vec{X}\,.\,\vec{\nabla}\right)$:

$$\Delta\left(\vec{X}\,.\,\vec{\nabla}\right) = \Delta\left(x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + x_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_n}\left(x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} + x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} + x_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)$$
$$= 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + x_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_1^2} + \cdots + x_n \frac{\partial^3 u}{\partial x_n \partial x_1^2}$$
$$+ x_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + x_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} + \cdots + x_n \frac{\partial^3 u}{\partial x_n \partial x_2^2} + \cdots$$
$$+ x_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_n^2} + x_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_n^2} + \cdots + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + x_n \frac{\partial^3 u}{\partial x_n^3}.$$

ومنه تتحقق لدينا المساواة الآتية:

$$\Delta\left(\vec{X} \,.\, \vec{\nabla}\right) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2 \partial x_i} = 2\Delta u + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2 \partial x_i} \qquad (4)$$

لنوجد الآن المقدار $\Delta\left(\left\|\vec{X}\right\|^2 \Delta u\right)$:

$$\Delta\left(\left\|\vec{X}\right\|^2 \Delta u\right) = \Delta\left((x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2x_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)\right.$$
$$\left. + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_1} + \cdots + \frac{\partial^3 u}{\partial x_n^2 \partial x_1}\right)\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2x_2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)\right.$$
$$\left. + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} + \cdots + \frac{\partial^3 u}{\partial x_n^2 \partial x_2}\right)\right) + \cdots$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_n}\left(2x_n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)\right.$$
$$\left. + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_n} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_n} + \cdots + \frac{\partial^3 u}{\partial x_n^3}\right)\right)$$
$$= 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) + 2x_1\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_1} + \cdots + \frac{\partial^3 u}{\partial x_n^2 \partial x_1}\right)$$
$$+ 2x_1\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_1} + \cdots + \frac{\partial^3 u}{\partial x_n^2 \partial x_1}\right)$$
$$+ (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^4 u}{\partial x_n^2 \partial x_1^2}\right)$$

$$+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)+2x_2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2\partial x_2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}+\cdots+\frac{\partial^3 u}{\partial x_n^2\partial x_2}\right)$$
$$+2x_2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2\partial x_2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}+\cdots+\frac{\partial^3 u}{\partial x_n^2\partial x_2}\right)$$
$$+\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}+\cdots+\frac{\partial^4 u}{\partial x_n^2\partial x_2^2}\right)+\cdots$$
$$+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)+2x_n\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2\partial x_n}+\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial^3 u}{\partial x_n^3}\right)$$
$$+2x_n\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2\partial x_n}+\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial^3 u}{\partial x_n^3}\right)$$
$$+\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_n^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^2\partial x_n^2}+\cdots+\frac{\partial^4 u}{\partial x_n^4}\right)$$
$$=2n\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+4\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2\partial x_i}+\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^4}{\partial x_j^2\partial x_i^2}.$$

ومنه نجد أنّ:

$$\Delta\left(\left\|\vec{X}\right\|^2\Delta u\right)=2n\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+4\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2\partial x_i}+\left\|\vec{X}\right\|^2\Delta^2 u \qquad (5)$$

من العلاقات (3) و(4) و(5) نحصل على:

$$\Delta P_n=2\Delta u+\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2\partial x_i}+\frac{n-4}{2}\Delta u$$
$$-\frac{1}{4}\left(2n\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+4\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2\partial x_i}+\left\|\vec{X}\right\|^2\Delta^2 u\right)$$
$$=2\Delta u+\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2\partial x_i}+\frac{n}{2}\Delta u-2\Delta u$$
$$-\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2\partial x_i}-\frac{1}{4}\left\|\vec{X}\right\|^2\Delta^2 u.$$

وبالتالي نحصل على العلاقة الآتية:

$$\Delta P_n=-\frac{1}{4}\left\|\vec{X}\right\|^2\Delta^2 u.$$

وبما أنّ $\Delta^2 u=0$ يكون $\Delta P_n=0$ وحسب مبدأ القيمة القصوى للتابع التوافقي ينتج الآتي:

$$\max_{\Omega}P_n=\max_{\partial\Omega}P_n\,,\ \min_{\Omega}P_n=\min_{\partial\Omega}P_n.$$

قمنا في المبرهنة الآتية بتقدير حل مسألة ديريخليه للمعادلة ثنائية التوافقية $\Delta^2 u=0$ وفق شروط حدية محددة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ من أجل $n<4$ وذلك بالاستفادة من المبرهنة (1).

مبرهنة (2):

ليكن G قرصاً مفتوحاً في الفضاء$\mathbb{R}^n$ أي $G=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<R\}$، وبفرض لدينا المسألة $\Delta^2 u=0$ من أجل $x\in\mathbb{R}^n$ بالشروط الحدية الآتية:

$$\begin{cases} u|_{\partial G} &= f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{(\partial G)} &= 0 \end{cases}$$

حيث f دالة مستمرة على ∂G (محيط المنطقة G) و n ناظم المنطقة، عندئذ:

$$\|u\|_{\mathrm{G}} \leq \|f\|_{\partial\mathrm{G}}.$$

البرهان:

بالاستفادة من المبرهنة (1) عندما $\Delta^2 u = 0$ يكون التابع $P_n = \vec{X}.\vec{\nabla}u + \frac{n-4}{2}u - \frac{1}{4}\left\|\vec{X}\right\|^2 \Delta u$ توافقي في المنطقة G أي أنّ:

$$\Delta P_n = 0$$

وبالتالي يبلغ قيمه القصوى الكبرى والصغرى على حدود المنطقة G.

إنّ الدالة $\frac{1}{4}R^2\Delta u$ توافقية لأن:

$$\Delta\left(\frac{1}{4}R^2\Delta u\right) = \frac{1}{4}R^2\Delta^2 u = 0$$

ومنه يكون التابع:

$$\vec{X}.\vec{\nabla}u + \frac{n-4}{2}u + \frac{1}{4}\left(R^2 - \left\|\vec{X}\right\|^2\right)\Delta u$$

توافقي في المنطقة G فهو يبلغ قيمه القصوى على حدودها.

من جهة أخرى يكون لدينا:

$$\frac{1}{4}\left(R^2 - \left\|\vec{X}\right\|^2\right)\Delta u|_{\partial G} = 0$$

$$\vec{X}.\vec{\nabla}u|_{\partial G} = \vec{X}\frac{\partial u}{\partial \vec{X}}|_{(\partial G)} = R\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$$

بالتالي:

$$\vec{X}.\vec{\nabla}u + \frac{n-4}{2}u + \frac{1}{4}\left(R^2 - \left\|\vec{X}\right\|^2\right)\Delta u|_{\partial G} \leq \|f\|_{\partial\mathrm{G}}.$$

بفرض أن u^2 يبلغ قيمة عظمى عند $x_0 \in G$، عندئذ يكون:

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \vec{X}} = 0$$

$$u.\Delta u \ < 0$$

وذلك لأن:

$$\Delta u^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_n^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u^2}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial u^2}{\partial x_n}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + 2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + 2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + \cdots + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 + 2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)$$

$$= 2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) + 2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \Delta u^2 = 2\left(u.\Delta u + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right)$$

ومنه يكون:

$$\left|\frac{n-4}{2}u(x_0)+\frac{1}{4}\left(R^2-\left\|\vec{X}\right\|^2\right)\Delta u(x_0)\right|_G \le \|f\|_{\partial G}; n<4 \qquad (6)$$

يكون من أجل $n<4$ الآتي:

كل من المقدارين $\frac{1}{4}\left(R^2-\left\|\vec{X}\right\|^2\right)\Delta u(x_0)$ و $\frac{n-4}{2}u(x_0)$ من إشارة واحدة فكل منهما أصغر من الطرف الثاني في العلاقة (6)، أي أن:

$$|u(x_0)| \le \left||f|\right|_{\partial G}$$

وبما أن u يبلغ قيمة قصوى عند x_0، أي من أجل أي نقطة من $\overline{G}$ تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\left||u|\right|_{\overline{G}} \le \left||f|\right|_{\partial G}.$$

الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا في هذه المقالة بتقدير حل مسألة ديريخليه للمعادلة ثنائية التوافقية من أجل الشروط الحدية الآتية:

$$\begin{cases} u|_{\partial G} & = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{(\partial G)} & = 0 \end{cases}$$

في الفضاء $\mathbb{R}^n$ من أجل $n<4$.

نوصي بتعميم التقدير من أجل قيم $n \ge 4$ وتقدير حل مسألة ديريخليه للمعادلة ثنائية التوافقية في الفضاء $\mathbb{R}^n$ من أجل الشروط الحدية الآتية:

$$\begin{cases} u|_{\partial G} & = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{(\partial G)} & = g \end{cases}$$

حتى يتم حل المسألة بشكلها العام في الفضاء $\mathbb{R}^n$، أي $\Delta^2 u = 0$ بالشروط الحدية الآتية:

$$\begin{cases} u|_{\partial G} & = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{(\partial G)} & = g \end{cases}$$

المراجع:

[1] MIRANDA, *Formula di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili*. Giorn: Mat.Battaglini **78**:97-118. 1948.
[2] L. E. PAYNE, G. A. PHILIPPIN. *Some applications of the maximum principle in the problem of torsional creep.* Siam. J. Appl. Math. **33**:446-455, 1977.
[3] P. W. SCHAEFER, *pointwise estimates in a class of fourth – order nonlinear elliptic functions*, Z. A. M. P. **38**: 477-479, 1987.
[4] H. ZHANG, W. ZHANG, *Maximum principles and bounds in a class of fourth – order uniformly elliptic equations,* J. Phys. A: Math. Gen. **35**:9245-9250, 2002.
[5] A. MARENO, *Maximum principles for a fourth order equation from plate theory*, J. Math. Anal. Appl. **343**:932-937, 2008.
[6] A. MARENO, *Integral Bounds for von Karman's equations*, Z. Angew. Math. Mech. **90**:509-513, 2010.
[7] S. ALASADI, M. HAMNDOSH, A. YOUNSO. *estimate the Dirachlet problem for biharmonic equation* $\Delta^2 u = 0$ *on a bounded domain* G, J. Aleppo univ:**22**: 522-531, 2014.
[8] CARTAN, H. *Cours de calcul différentiel, nouv. éd., refondue et corr.* Paris: Hermann, 1977. 514.
[9] D. ZILL, P. SHANAHAN. *A first course in complex analysis with applications*. Jones and Bartlett pub. Inc. 2003. 517.
[10] D. GILBARG , N. S, TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential equations of second order*, Springer: Verlag, 1977. 532.
[11] L. EVANCE, *Partial Differenial Equations American Mathematical Society,* RI: Providence ,1998. 664.