مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (3) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (3) 2018

تقدير المعاملات الابتدائية في بعض الصفوف الجزئية للتوابع ثنائية التباين

الدكتور حسـن بدور *
الدكتور محمد علي **
مجـد عيـاش ***

(تاريخ الإيداع 10 / 4 / 2018. قُبِل للنشر في 25 / 6 /2018)

ملخّص

ندرس في هذا البحث مسألة تقدير المعاملات في الصفوف الجزئية من أسرة التوابع ثنائيـــة التباين حيث تم تقدير محدد هانكل الثاني في الصف $S_{\sigma}(\alpha,\lambda)$ المعرف من قبل مرغـــوس في عام 2013. وقد تم أيضاً تقدير للمعامل a_4 في الصف $\mathcal{H}_{\sigma}(\alpha,\beta)$ المعرف من قبل فراســـين في عام 2014. وعلاوة على ذلك تم ايجاد تقدير للمعامل a_4 ولمحدد هانكـــل الثاني في الصف $\mathcal{H}_{\sigma}(\alpha,1)$.

الكلمات المفتاحية: التوابع المتباينة، التوابع ثنائية التباين، التوابع النجمية، التوابع المحدبة، حدود المعاملات، متراجحات فيكت سزيكو، محددات هانكل، التوابع ثنائية النجمية، التوابع ثنائية التحدب.

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
*** طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (3) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (3) 2018

Estimates of Initial Coefficients in Some Subclasses of Bi-Univalent Functions

Dr. Hassan Baddour*
Dr. Mohammad Ali**
Majd Ayash***

(Received 10 / 4 / 2018. Accepted 25 / 6 /2018)

□ ABSTRACT □

In the present paper, we investigate the issue of coefficient estimates in subclasses of bi-univalent functions, where an estimate for the second Hankel determinant in the subclass $S_\sigma(\alpha,\lambda)$, which is defined by Murugusundaramoorthy (2013), was obtained. Also, an estimate for coefficient a_4 in the subclass $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$, which is defined by Frasin (2014), was found. Moreover, estimates for both coefficient a_4 and the second Hankel determinant in the subclass $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$ were obtained.

Keywords: Univalent functions, Bi-univalent functions, Starlike functions, Convex function, Coefficient bounds, Fekete-Szegö inequalities, Hankel determinants, Bi-starlike functions, Bi-convex functions.

*Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
** Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
*** Postgraduate student, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria

مقدمة

نرمز بالرمز $\mathcal{A}$ لأسرة كل التوابع العقدية $f(z)$ التحليلية على قرص الواحدة $\mathrm{D}=\{z\in\mathrm{C}:|z|<1\}$ والتي تحقق الشرط $f(0)=f'(0)-1=0$. وهي التوابع التي تقبل النشر في سلسلة القوى التالية

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \tag{1.1}$$

ولنرمز بالرمز S لمجموعة التوابع $f(z)$ من الأسرة $\mathcal{A}$ والمتباينة على D.

حسب نظرية الربع لكيبي (Koebe One-Quarter Theorem) في المرجع [10] نعلم أن مدى كل تابع f من S يحوي القرص $\left\{w:|w|<\frac{1}{4}\right\}$. بالتالي كل تابع متباين معكوسة f^{-1} يحقق أن:

$$f\left(f^{-1}(w)\right)=w \quad ,\left(|w|<r_0(f);r_0(f)\geq \frac{1}{4}\right)$$

ويكون لتابع المعكـوس $g=f^{-1}$ منشور بسلســلة القوى بالشكل التالي

$$g(w)=f^{-1}(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty}b_n w^n=w-a_2w^2+(2a_2^2-a_3)w^3-(5a_2^3-5a_2a_3+a_4)w^4+\ldots \tag{1.2}$$

التابع $f\in\mathcal{A}$ يدعى تابع ثنائي التباين على D اذا كان f و $g=f^{-1}$ متباينين على D ونرمز لصف كل التوابع ثنائية التباين على D والتي تنشر بسلسلة من الشكل (1.1) بالرمز σ وذلك وفقاً لـ Lewin [1] (أو بالرمز Σ) من الأمثلة على بعض توابع الأسرة σ هي التوابع التالية

$$\frac{z}{1-z}\ ,\ -\log(1-z)\ ,\ \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

من الأمثلة الشائعة على توابع من S وليست من σ هي التوابع

$$z-\frac{1}{2}z^2\ ,\ \frac{z}{1-z^2}\ ,\ \frac{z}{(1-z)^2}$$

بدأت دراسة الصف σ من قبل Lewin ([1],1967) وركز على المسائل المتعلقة بالمعاملات. هناك العديد من الأبحاث التي نشرت في هذا المجال مؤخراً ومنها Srivastava et al ([2],2010) وأيضاً Frasin ([3],2011) and Aouf وقد كشف Hamidi and Jahangiri ([4],2014) أهمية كثيرات حدود فايبـر في دراسة معاملات التوابع ثنائية التباين.

نقول عن التابع $f(z)$ من الأسرة S أنه نجمي من المرتبة α اذا حقق العلاقة

$$\mathrm{R}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha \quad ,(z\in\mathrm{D})\ ,\ (0\leq\alpha<1) \tag{1.3}$$

ويرمز لمجموعة التوابع النجمية من المرتبة α بالرمز $S^*(\alpha)$. من أجل $\alpha=0$ نحصل على أسرة التوابع النجمية والتي يرمز لها بـ $S^*(0)=S^*$.

نقول عن التابع $f(z)$ من الأسرة S أنه محدب من المرتبة α اذا حقق العلاقة

$$\mathrm{R}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha \quad ,(z\in\mathrm{D})\ ,\ (0\leq\alpha<1) \tag{1.4}$$

ويرمز لمجموعة التوابع المحدبة من المرتبة α بالرمز $\mathcal{K}(\alpha)$. من أجل $\alpha=0$ نحصل على أسرة التوابع المحدبة والتي يرمز لها بـ $\mathcal{K}(0)=\mathcal{K}$.

نقول عن التابع $f \in \sigma$ انه تابع ثنائي النجمية من المرتبة β حيث $(0 \le \beta < 1)$ اذا كــان f و f^{-1} نجمي مــن المرتبة β ويرمز لأسرة التوابع ثنائية النجمية من المرتبة β بالرمز $S_{\sigma}^{*}(\beta)$. من أجل $\beta = 0$ نحصل على أسرة التوابع ثنائية النجمية والتي يرمز لها بـ $S_{\sigma}^{*}(0) = S_{\sigma}^{*}$.

نقول عن التابع $f \in \sigma$ انه تابع ثنائي التحدب من المرتبة β حيث $(0 \le \beta < 1)$ اذا كان f و f^{-1} محدب من المرتبة β ويرمز لأسرة التوابع ثنائية التحدب من المرتبة β بالرمز $\mathcal{K}_{\sigma}(\beta)$. من أجل $\beta = 0$ نحصــل على أسرة التوابع ثنائية التحدب والتي يرمز لها بـ $\mathcal{K}_{\sigma}(0) = \mathcal{K}_{\sigma}$.

تعرف الأســـرة $\mathcal{P}$ بأنها أسرة التوابع h التحليلية والمحققة للشرطين $h(0)=1$, $\mathrm{R}\, h(z) > 0$ وذلك من أجل كل $z \in \mathrm{D}$. والتي تقبل النشر بسلسلة القوى التالية

$$h(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k$$

في عام 1967 بين Lewin [1] أنه من أجل كل تابع $f \in \sigma$ فإن المعامل الثاني في المنشور (1.1) يحقق المتراجحة $|a_2| < 1.51$ وفي نفس العام توقــع Brannan and Clunie [5] أن $|a_2| \le \sqrt{2}$ وذلك من أجل كل $f \in \sigma$ وفي عــام 1985 برهن Kedzierawski [7] على صحـــة توقـــع Brannan and Clunie [5] وذلك مـن أجل التوابع ثنائية النجمية أي $f \in S_{\sigma}^{*}$. وقد حصل Brannan and Taha[8] على تقديرات للمعاملات الأبتدائية $|a_2|$ و $|a_3|$ وذلك من أجل توابع الأسرتين $S_{\sigma}^{*}(\beta)$ و $\mathcal{K}_{\sigma}(\beta)$. هناك الكثير من النتائج في الصفوف الجزئية للأسرة σ والتي تتعلق بحدود بالمعاملات $|a_2|$ ، $|a_3|$ و $|a_4|$ قد تم إثباتها ولكن معظمها لم تكن دقيقة. ومازالت مسألة تقدير المعاملات لتوابع الأسرة σ من المسائل المفتوحة حتى يومنا هذا.

أحد الأدوات المهمة في نظرية التوابع التحليليـة والمتباينـة هي محددات هانكل Hankel determinant [9] حيث أنه من أجل كل تابع $f \in \mathcal{A}$ له النشر (1.1) يمكن تشكيل محددات هانكل على معاملاتة كما يلي.

محدد هانكل من الدرجة q و المرتبة n يرمز له بالرمز $H_q(n)$, $(n = 1, 2, ..., \; q = 1, 2...)$ حيث أن

$$H_q(n) = \begin{bmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2q-2} \end{bmatrix} \qquad (a_1 = 1) \tag{1.5}$$

تمت مناقشة هذا المحدد من قبل العديد من الباحثين وذلك من أجل $q = 2$ ، على سبيل المثال من أجل $n = 1$ نحصل على

$$H_2(1) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \qquad (a_1 = 1)$$

وهو محدد هانكل الأول $H_2(1) = a_3 - a_2^2$ الذي يعرف بمتراجحات Fekete-Szegö بالحالة العامة مع وجود الثابت μ أي بالشكل $a_3 - \mu a_2^2$ حيث $\mu \in \mathrm{R}$ P. Duren [10].

من أجل $n = 2$ نحصل على

$$H_2(2) = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

وهو مايدعى محدد هانكل الثاني $H_2(2) = a_2 a_4 - a_3^2$.

في عام 2013 عرف Murugusundaramoorthy [11] صفين جديدين جزئين من الأسرة σ وهما $S_\sigma(\alpha,\lambda)$ و $\mathscr{M}_\sigma(\beta,\lambda)$ والذين سنورد تعريفهما تباعاً. وقد أوجد تقديرات للمعاملات $|a_2|$ و $|a_3|$ في كـل من الصفين المذكورين .

من أجل $f\in\sigma$ نعرف الداليين $F(z)$ و $G(w)$ كما يلي :

$$G(w)=\frac{wg'(w)}{(1-\lambda)g(w)+\lambda wg'(w)}\ ,\ F(z)=\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)} \tag{1.6}$$

حيث $0\le\lambda<1\ ,\ g=f^{-1}\ ,\ z\in D$.

تعريف 1.1 يقال عن التابع $f\in\sigma$ أنة من الصف $S_\sigma(\alpha,\lambda)$ اذا حقق الشرطين :

$$\left|\arg F(z)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}\ ,\ \left|\arg G(w)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}\ ,(z\in D) \tag{1.7}$$

حيث $0\le\lambda<1\ ,\ 0<\alpha\le1$.

تعريف 1.2 يقال عن التابع $f\in\sigma$ أنة من الصف $\mathscr{M}_\sigma(\beta,\lambda)$ اذا حقق الشرطين :

$$\Re F(z)>\beta\ ,\ \Re G(w)>\beta\ ,(z\in D) \tag{1.8}$$

حيث $0\le\lambda<1\ ,\ 0\le\beta<1$.

وقد تمكن Murugusundaramoorthy [11] من إثبات المبرهنتين التاليتين :

مبرهنة 1.3 من أجل كل $f\in S_\sigma(\alpha,\lambda)$ حيث $0\le\lambda<1\ ,\ 0<\alpha\le1$ فإن :

$$|a_2|\le\frac{2\alpha}{(1-\lambda)\sqrt{1+\alpha}}\ ,\ |a_3|\le\frac{4\alpha^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{\alpha}{1-\lambda} \tag{1.9}$$

مبرهنة 1.4 من أجل كل $f\in\mathscr{M}_\sigma(\beta,\lambda)$ حيث $0\le\lambda<1\ ,\ 0\le\beta<1$ فإن

$$|a_2|\le\frac{\sqrt{2(1-\beta)}}{1-\lambda}\ ,\ |a_3|\le\frac{4(1-\beta)^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{1-\beta}{1-\lambda} \tag{1.10}$$

وفي عام 2014 أوجد Zaprawa [12] متراجحات Fekete-Szegö للصفين $S_\sigma(\alpha,\lambda)$ و $\mathscr{M}_\sigma(\beta,\lambda)$ وحصل من خلالها على نتائج بالنسبة للمعامل $|a_3|$ في كل من هذين الصفين وهذة النتائج كانت أفضل من النتائج المقدمة من قبل Murugusundaramoorthy [11] والتي كانت على النحو التالي

مبرهنة 1.5 من أجل كل $f\in S_\sigma(\alpha,\lambda)$ حيث $0\le\lambda<1\ ,\ 0<\alpha\le1$ فإن

$$|a_3|\le\begin{cases}\dfrac{4\alpha^2}{(1-\lambda)^2(1+\alpha)} & ;\ 4\alpha\ge(1+\alpha)(1-\lambda)\\[2ex] \dfrac{\alpha}{1-\lambda} & ;\ 4\alpha\le(1+\alpha)(1-\lambda)\end{cases} \tag{1.11}$$

من الواضح أن المبرهنة 1.5 تعطي نتائج أفضل من المبرهنة 1.3 بالنسبة لطويلة المعامل a_3 .

مبرهنة 1.6 من أجل كل $f \in \mathscr{M}_\sigma(\beta,\lambda)$ حيث $0 \le \lambda < 1$, $0 \le \beta < 1$ فإن

$$|a_3| \le \frac{2(1-\beta)}{(1-\lambda)^2} \tag{1.12}$$

بدراسة إشارة الفرق بين نتائج المبرهنة 1.6 والمبرهنة 1.4 بالنسبة لطويلة المعامل a_3 يمكن الأكتفاء بدراسة إشارة الفرق للمقدار $4(1-\beta)^2 - 2(1-\beta)$ ويظهر ببساطة أنه موجب من أجل $0 \le \beta \le 1/2$ الأمر الذي يعني أن المبرهنة 1.6 تعطي نتائج أفضل المبرهنة 1.4 عندما $0 \le \beta \le 1/2$.

وفي عام 2014 عرف أيضاً [13] Frasin صفين جديدين من الأسرة σ هما $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ و $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$. وكانت كما يلي:

تعريف 1.7 يقال عن التابع $f \in \sigma$ إنه من الصف $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ اذا حقق الشرطين :

$$\left|\arg\left(f'(z)+\beta z f''(z)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2}\ ,\quad \left|\arg\left(g'(w)+\beta z g''(w)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2}\ ,(z,w \in D) \tag{1.13}$$

حيث $g = f^{-1}\ ,\ \beta > 0\ ,\ 0 < \alpha < 1\ ,\ 2(1-\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{\beta m+1} \le 1$

تعريف 1.8 يقال عن التابع $f \in \sigma$ إنه من الصف $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ اذا حقق الشرطين :

$$\mathrm{R}\left(f'(z)+\beta z f''(z)\right) > \gamma\ ,\quad \mathrm{R}\left(g'(w)+\beta z g''(w)\right) > \gamma\ ,(z,w \in D) \tag{1.14}$$

حيث $g = f^{-1}\ ,\ \beta > 0\ ,\ 0 \le \gamma < 1\ ,\ 2(1-\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{\beta m+1} \le 1$

وقد تمكن [13] Frasin من إثبات المبرهنتين التاليتين :

مبرهنة 1.9 من أجل كل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ فإن

$$|a_3| \le \frac{\alpha^2}{(1+\beta)^2} + \frac{2\alpha}{3(1+2\beta)}\ ،\quad |a_2| \le \frac{2\alpha}{\sqrt{2(\alpha+2)+4\beta(\alpha+\beta+2-\alpha\beta)}} \tag{1.15}$$

مبرهنة 1.10 من أجل كل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ فإن

$$|a_3| \le \frac{(1-\gamma)^2}{(1+\beta)^2} + \frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)}\ ،\quad |a_2| \le \sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)}} \tag{1.16}$$

وستنتج النتيجتان التاليتان

نتيجة 1.11 من أجل كل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$ فإن

$$|a_3| \le \frac{9\alpha^2+8\alpha}{36}\ ،\quad |a_2| \le \frac{2\alpha}{\sqrt{2(\alpha+2)+12}} \tag{1.17}$$

نتيجة 1.12 من أجل كل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma,1)$ فإن

$$|a_2| \le \frac{1}{3}\sqrt{2(1-\gamma)} \quad ، \quad |a_3| \le \frac{(1-\gamma)(9(1-\gamma)+8)}{36} \qquad (1.18)$$

مبرهنة مساعدة 1.13 من أجل كل تابع $h \in \mathcal{P}$ حيث يكون $h(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k$ تتحقق المتراجحات $|p_k| \le 2$ وهذه المتراجحات دقيقة من أجل $k=1,2,3...$.

إثبات المبرهنة المساعدة 1.13 موجود في العديد من المراجع ومنها Duren [10].

مبرهنة مساعدة 1.14 كل تابع $f \in S$ معطى بالشكل (1.1) تحقق معاملاته المتراجحات $|a_n| \le n$.

كانت المبرهنة المساعدة 1.14 من المسائل الصعبة المفتوحة والتي تعرف باسم فرضية معامل بيبرباخ التي وضعها العالم بيبرباخ في عام 1916 والتي حاول الكثير من الباحثين فيما بعد ان يثبتوا صحتها ولكن النتائج التي توصلو لها أثبت صحتها جزئياً ولم يكن الإثبات شاملا حتى عام 1985 حيث تمكن Branges[6] من إثباتها.

أهمية البحث وأهدافه

تكمن أهمية البحث من كونه يُعنى في دراسة التوابع المختلفة للأسرة σ والمعروفة بأنها أسرة التوابع ثنائية التباين من خلال دراسة خواص معاملات هذه التوابع عندما تنتمي لصفوف جزئية معينة من الأسرة σ. ويتجلى هدف هذا البحث في محاولة الحصول على أفضل تقديرات ممكنة لبعض المعاملات أو لمتراجحات فيكت سزيكو أو لمحدد هانكل الثاني للتوابع في بعض الصفوف الجزئية من σ.

طرائق البحث ومواده

يقع هذا البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكل خاص ضمن التحليل العقدي والتوابع التحليلية والمتباينة، لذلك فالطرق المتبعة تعتمد بشكل أساسي على مفاهيم التحليل العقدي مثل قابلية نشر التابع التحليلي في نقطة بسلسلة تايلور في جوار هذه النقطة, وأيضاً على منشور ثنائي حد نيوتن – أويلر للأسس الحقيقية بمتغيرات عقدية، وبشكل عام على أدبيات نظرية التوابع المتباينه.

نتائج في الأسرة $S_\sigma(\alpha,\lambda)$

سوف نبرهن في مايلي على تقدير لمحدد هانكل الثاني في الصف $S_\sigma(\alpha,\lambda)$.

مبرهنة 4.1 من أجل كل $f \in S_\sigma(\alpha,\lambda)$ فإن

$$|H_2(2)| \le \begin{cases} \dfrac{8\alpha}{(1-\lambda)\sqrt{1+\alpha}} + \dfrac{16\alpha^4}{(1-\lambda)^4(1+\alpha)^2} & ;\ 4\alpha \ge (1+\alpha)(1-\lambda) \\ \dfrac{8\alpha}{(1-\lambda)\sqrt{1+\alpha}} + \dfrac{\alpha^2}{(1-\lambda)^2} & ;\ 4\alpha \le (1+\alpha)(1-\lambda) \end{cases} \qquad (4.1)$$

الإثبات. بما أن $H_2(2)=\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}=a_2a_4-a_3^2$ فإن $|H_2(2)|\le|a_2||a_4|+|a_3^2|$ وبالتالي وفقاً لمعامل بيبرباخ يكون $|a_4|\le 4$ وأيضاً بالأعتماد على المبرهنة 1.3 و تحسينها فيما يخص المعامل a_3 في المبرهنة 1.5 فإننا نجد:

$$|H_2(2)|\le\begin{cases}\dfrac{2\alpha}{(1-\lambda)\sqrt{1+\alpha}}(4)+\left(\dfrac{4\alpha^2}{(1-\lambda)^2(1+\alpha)}\right)^2 & ;\ 4\alpha\ge(1+\alpha)(1-\lambda)\\[2ex] \dfrac{2\alpha}{(1-\lambda)\sqrt{1+\alpha}}(4)+\left(\dfrac{\alpha}{1-\lambda}\right)^2 & ;\ 4\alpha\le(1+\alpha)(1-\lambda)\end{cases} \tag{4.2}$$

وبذلك يتم الإثبات.

نتائج في الأسرة $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$

سوف نبرهن فيمايلي على تقدير للمعامل a_4 في الصف $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$.

مبرهنة 5.1 اذا كان $f\in\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ حيث $\beta>0,\ 0<\alpha<1$ فإن

$$|a_4|\le\frac{2\alpha^3-12\alpha^2+13\alpha}{6(1+3\beta)} \tag{5.1}$$

الإثبات. من أجل كل تابع $f\in\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ فإن العلاقات (1.13) في التعريف 1.7 تكتب بشكل التالي

$$f'(z)+\beta zf''(z)=[p(z)]^\alpha \tag{5.2}$$

$$g'(w)+\beta wg''(w)=[q(w)]^\alpha \tag{5.3}$$

حيث $p(z),q(w)\in\mathcal{P}$ و بالتالي نستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned}[p(z)]^\alpha&=\left[1+p_1z+p_2z^2+p_3z^3+....\right]^\alpha=1+\alpha p_1z+\alpha p_2z^2+\alpha p_3z^3+...\\&+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(p_1^2z^2+2p_1p_2z^3+....\right)+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\left(p_1^3z^3+....\right)+...\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}[q(w)]^\alpha&=\left[1+q_1w+q_2w^2+q_3w^3+.....\right]^\alpha=1+\alpha q_1w+\alpha q_2w^2+\alpha q_3w^3+...\\&+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(q_1^2w^2+2q_1q_2w^3+.....\right)+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\left(q_1^3w^3+....\right)+...\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$[p(z)]^\alpha=1+\alpha p_1z+\left(\alpha p_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}p_1^2\right)z^2+\left(\alpha p_3+\alpha(\alpha-1)p_1p_2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}p_1^3\right)z^3+... \tag{5.6}$$

$$[q(w)]^\alpha=1+\alpha q_1w+\left(\alpha q_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}q_1^2\right)w^2+\left(\alpha q_3+\alpha(\alpha-1)q_1q_2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}q_1^3\right)w^3+... \tag{5.7}$$

باستخدام العلاقات (1.1) و (1.2) نجد أن

$$f'(z)+\beta zf''(z)=1+2a_2(1+\beta)z+3a_3(1+2\beta)z^2+4a_4(1+3\beta)z^3+... \tag{5.8}$$

(5.9) $$g'(w)+\beta w g''(w)=1-2a_2(1+\beta)w+3(2a_2^2-a_3)(1+2\beta)w^2 -4(5a_2^3-5a_2a_3+a_4)(1+3\beta)w^3+\ldots$$

من العلاقات (5.2) و (5.6) و (5.8) نحصل على المعادلات التالية

(5.10) $$2a_2(1+\beta)=\alpha p_1$$

(5.12) $$3a_3(1+2\beta)=\alpha p_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}p_1^2$$

(5.13) $$4a_4(1+3\beta)=\alpha p_3+\alpha(\alpha-1)p_1p_2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}p_1^3$$

وايضاً من العلاقات (5.3) و (5.7) و (5.9) نحصل على المعادلات التالية

(5.14) $$-2a_2(1+\beta)=\alpha q_1$$

(5.15) $$3(2a_2^2-a_3)(1+2\beta)=\alpha q_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}q_1^2$$

(5.16) $$-4(5a_2^3-5a_2a_3+a_4)(1+3\beta)=\alpha q_3+\alpha(\alpha-1)q_1q_2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}q_1^3$$

من المعادلة (5.10) و(5.14) نجد أن

(5.17) $$p_1=-q_1$$

بجمع العلاقتين (5.13) و(5.16) نجد

(5.18) $$-4(5a_2^3-5a_2a_3)(1+3\beta)=\alpha(p_3+q_3)+\alpha(\alpha-1)(p_1p_2+q_1q_2)+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}(p_1^3+q_1^3)$$

وفقاً للعلاقة (5.17) يكون $p_1^3+q_1^3=0$. بالتعويض في العلاقة (5.18) نجد أن:

(5.19) $$(5a_2^3-5a_2a_3)=\frac{\alpha(p_3+q_3)+\alpha(\alpha-1)(p_1p_2+q_1q_2)}{-4(1+3\beta)}$$

بطرح العلاقة (5.16) من (5.13) نجد أن:

(5.20) $$8a_4(1+3\beta)+4(5a_2^3-5a_2a_3)(1+3\beta)=\alpha(p_3-q_3) +\alpha(\alpha-1)(p_1p_2-q_1q_2)+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}(p_1^3-q_1^3)$$

بتعويض العلاقة (5.19) في العلاقة (5.20) نجد أن:

(5.21) $$8a_4(1+3\beta)-\big(\alpha(p_3+q_3)+\alpha(\alpha-1)(p_1p_2+q_1q_2)\big)=\alpha(p_3-q_3)+ \alpha(\alpha-1)(p_1p_2-q_1q_2)+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}(p_1^3-q_1^3)$$

وفقاً للعلاقة (5.17) يكون $p_1^3-q_1^3=2p_1^3$. بالتعويض في العلاقة (5.21) وترتيب نجد أن:

(5.22) $$a_4=\frac{\alpha p_3}{4(1+3\beta)}+\frac{\alpha(\alpha-1)p_1p_2}{4(1+3\beta)}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{24(1+3\beta)}p_1^3$$

بتطبيق المبرهنة المساعدة 1.13 على العلاقة (5.22) بالإضافة لمراعات أن الدالة الحقيقية $\alpha(\alpha-1)$ تأخذ قيماً سالبة عندما $0<\alpha<1$ ومنة نستطيع أن نكتب

(5.23) $$|a_4|\le\frac{\alpha}{2(1+3\beta)}-\frac{\alpha(\alpha-1)}{(1+3\beta)}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3(1+3\beta)}$$

ومنة العلاقة (5.23) هي علاقة مكافئة للعلاقة (5.1) وبذلك يتم الإثبات .

من المفيد ملاحظة تغيرات الدالة $2\alpha^3-12\alpha^2+13\alpha$ عندما $0<\alpha<1$ حيث أن أقصى قيمها لاتبلغ العدد 4 ويضاف لذلك أن جميع قيمها مقسومة على العدد الموجب الأكبر من العدد 1 وهو $6(1+3\beta)$ الأمر الذي يؤكد على جودة هذا التقدير للمعامل a_4 مقارنةً مع معامل بيبرباخ $|a_n|\le n$.

مما تقدم تنتج المبرهنتين التاليتين:

مبرهنة 5.2 من أجل كل $f\in\mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$ فإن

$$|a_4|\le\frac{2\alpha^3-12\alpha^2+13\alpha}{24} \qquad (5.24)$$

الإثبات. ينتج مباشرة من العلاقة (5.1) بوضع $\beta=1$.

مبرهنة 5.3 من أجل كل $f\in\mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$ فإن

$$|H_2(2)|\le\frac{2\alpha^4-12\alpha^3+13\alpha^2}{12\sqrt{2\alpha+16}}+\frac{(9\alpha^2+8\alpha)^2}{1296} \qquad (5.25)$$

الإثبات. بما أن $H_2(2)=\begin{bmatrix}a_2 & a_3\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}=a_2a_4-a_3^2$ فإن $|H_2(2)|\le|a_2||a_4|+|a_3^2|$ باستخدام المبرهنة 5.2 والنتيجة 1.11 فيما يخص المعاملات a_2 , a_3 , a_4 في الصف $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$ نجد أن

$$|H_2(2)|\le\frac{2\alpha^4-12\alpha^3+13\alpha^2}{12\sqrt{2\alpha+16}}+\frac{(9\alpha^2+8\alpha)^2}{1296}$$

بذلك يتم الإثبات .

الاستنتاجات و التوصيات

توصلنا في هذه المقالة الى إيجاد تقدير لمحدد هانكل الثاني في الصف $S_\sigma(\alpha,\lambda)$، وأيضاً قدرنا المعامل a_4 في الصف $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ وإضافة الى ذلك أوجدنا تقدير للمعامل a_4 ولمحدد هانكل الثاني في الصف $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$.
نوصي بمحاولة إيجاد تقديرات للمعاملات a_2,a_3 في الصفوف التي عرفها Frasin [13] لتكون أكثر دقة من النتائج التي توصل لها Frasin [13].

المراجع

[1] LEWIN, M. *On a coefficient problem for bi-univalent functions*. Academic Press U. S. A, Vol 18, 1967, 63-68.

[2] SRIVASTAVA, H. M, MISHRA, A.K, GOCHHAYAT, P. E. *Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions*, Appl. Math. Lett. Vol 23 , 2010, 1188-1192.

[3] FRASIN, B.A. AOUF, M.K. *New subclasses of bi-univalent functions*. Appl. Math. Lett. Vol 24, 2011, 1569-1573.

[4] HAMIDI, S. G. JAHANGIRI, J. M. *Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi-close-to-convex functions*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352, 2014, 17-20.

[5] BRANNAN, A. . CLUNIE, J. G. *Aspects of contemporary complex analysis Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham*, Durham, Academic Press New York, London,1980.

[6] BRANGES, D. *Aproof of the Bieberbach conjecture*. Acta Math, Vol 154, 1985, 137-152.

[7] KEDZIERAWSKI, A. W. *Some remarks on bi-univalent functions*. Ann. Univ.Mariae Curie-Sk lodowska Sect. Vol 39 ,1985.

[8] D.A. Brannan and T.S. Taha, *On some classes of bi-univalent functions*, in: S.M. Mazhar, A. Hamoui, N.S. Faour (Eds.), Math. Anal. and Appl., Kuwait; February18-21, 1985, in: KFAS Proceedings Series, vol. 3, Pergamon Press, Elsevier Science Limited, Oxford, 1988, pp. 53-60. see also Studia Univ. Babe_s-BolyaiMath. 31 (2) (1986), 70-77.

[9] NOONAN, J.W. THOMAS, D.K. *On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions*,Trans. Amer. Math. Vol 223, 1976, 337-346.

[10] DUREN, P. L. *Univalent functions*,Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, New York, 1983,383.

[11] MURUGUSUNDARAMOORTHY, G, MAGESH, N. PRAMEELA, V. *Coefficient bounds for certain subclasses of bi-univalent function*. Abstract and Applied Analysis, vol. 2013, Article ID 573017, 3 pages, 2013.

[12] ZAPRAWA, P. *Estimates of initial coefficients for bi-univalent functions*. Abstr. Appl. Anal., 2014, Article ID 357480, 6 pages.

[13] FRASIN, B.A. *Coefficient bounds for certain classes of bi-univalent functions*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics ,Vol 43 (3) , 2014, 383 – 389.